

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

А.Д. Андреев, С.Н. Колгатин, Л.М. Черных

ФИЗИКА

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Учебное пособие

СПб ГУТ)))

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2016**

УДК 537.8(075.8)
ББК 22.236я73
А 65

Рецензенты:
д. ф-м. н., проф. каф. Экспериментальной физики СПбПУ
В. В. Романов

*Утверждено редакционно-издательским советом СПбГУТ
в качестве учебного пособия*

Андреев А.Д.

Физика. Волновая оптика: учебное пособие/ А. Д. Андреев, С. Н. Колгатин, Л. М. Черных; СПбГУТ. – СПб., 2016. – 48с.

Написано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Физика». Содержит теоретический материал по разделу «Волновая оптика» общего курса физики.

Рекомендуется для самостоятельной работы студентов при подготовке к упражнениям, коллоквиумам и экзаменам.

Предназначается для студентов технических направлений подготовки всех форм обучения.

УДК 537.8(075.8)
ББК 22..236я73

© Андреев А.Д., Колгатин С.Н., Черных Л.М., 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.....	5
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА.....	6
3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН.....	9
3.1 Естественный и поляризованный свет.....	9
3.2 Поляризация света при отражении и преломлении.....	13
3.3 Поляризация света при явлении двойного лучепреломления.....	15
3.4 Эллиптическая и циркулярная поляризация.....	18
3.5 Связь между плоской и циркулярной поляризацией.....	20
4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН.....	23
4.1. Условия максимумов и минимумов при интерференции.....	23
4.2. Различные схемы наблюдения интерференции.....	25
4.3 Интерференция в тонких пленках.....	27
5. ДИФРАКЦИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН.....	30
5.1. Принцип Гюйгенса-Френеля.....	30
5.2. Дифракция на круглом отверстии.....	31
5.3 Дифракция на щели.....	34
5.4. Дифракционная решетка.....	36
5.5. Дифракционная решетка как спектральный прибор.....	40
6. ДИСПЕРСИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН.....	42
6.1. Понятие о дисперсии света.....	42
6.2 Групповая скорость.....	43
Список литературы.....	48
	???

Введение

Оптика – учение о природе света, световых явлениях и взаимодействии света с веществом.

В результате многочисленных опытов с середины XVII века были выдвинуты две гипотезы о природе света.

Автором гипотезы о «корпускулярной» природе света был Исаак Ньютон. Он предполагал, что свет представляет собой поток частиц, испускаемых светящимися телами. К анализу движения световых корпускул Ньютон применил сформулированные им законы механики. Корпускулярная теория Ньютона удовлетворительно объяснила многие оптические явления, известные в то время.

Автором гипотезы о «волновой» природе света был голландский ученый Христиан Гюйгенс, который считал, что свет представляет собой колебательные движения частиц особой светонесущей среды, эфира, возбуждаемой колебаниями частиц светящегося тела.

К концу XVII века в оптике сложилось своеобразное положение. Обе существовавшие теории объясняли основные оптические закономерности: прямолинейность распространения, законы отражения и преломления. Однако существовали трудности в понимании некоторых явлений, которые можно было объяснить только в рамках одной или другой концепции.

Так Гюйгенс не смог объяснить физической причины различных цветов в спектре света и механизм изменения скорости распространения света в эфире, пронизывающем различные среды, а Ньютону, к примеру, было трудно объяснить, почему при падении на границу двух сред свет частично отражается и частично преломляется.

Огромный авторитет Ньютона и незавершенность волновой теории привели к тому, что всё восемнадцатое столетие в науке превалировала гипотеза о корпускулярной природе света.

В XIX веке интенсивное развитие математической теории колебаний, волн и электромагнитных волн привело к временному триумфу волновой точки зрения на природу света. Свет оказался небольшим фрагментом в шкале электромагнитных волн, имеющих одну и ту же волновую природу. И у физиков не осталось сомнений, что свет – это волновой процесс, и свой спор Ньютон, казалось, проиграл Гюйгенсу. Однако к концу XIX века опять появились новые экспериментальные факты, противоречащие общепринятой к тому времени волновой теории света.

Таким образом, к началу XX столетия в физике сложилась противоречивая ситуация. Одни явления, составившие предмет волновой оптики, хорошо объяснялись с волновой точки зрения на природу света. Другие стали предметом квантовой оптики, исходящей из представления о том, что свет – поток частиц, корпускул.

Впоследствии эта ситуация, не имеющая объяснения в рамках классической физики, получила название «корпускулярно-волнового дуализма». Понимание термина «корпускулярно-волнового дуализма» пришло уже в XX столетии, и было связано с появлением квантовой механики и предложением концепции «фотона».

В настоящем учебном пособии «Волновая оптика» мы будем придерживаться волновой концепции природы света, в основе которой лежит положение, что свет - это электромагнитная волна.

1. ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. После определенных преобразований эти уравнения для однородной среды [1] можно привести к виду:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2)$$

где \vec{E} и \vec{H} - напряженности электрического и магнитного поля соответственно, Δ - оператор Лапласа, который в декартовых прямоугольных координатах записывается в виде $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Частным решением

уравнений (1.1) и (1.2) является так называемая «плоская бегущая гармоническая волна»:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.3) \quad \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.4),$$

где t - время, \vec{r} - координата точки наблюдения. Для описания электромагнитных волн в учебном пособии [1] были введены характеристики волн: ω - циклическая частота, ν - частота колебаний, T - период колебаний, λ - длина волны в среде, v - скорость распространения волны, \vec{k} - волновой вектор, k - волновое число. Эти характеристики связаны между собой соотношениями:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad \lambda = \nu T, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \vec{k} = k \frac{\vec{v}}{v} = \frac{2\pi \vec{v}}{\lambda v}, \quad (1.5)$$

где ε и μ - соответственно, диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; ε_0, μ_0 - электрическая и магнитная постоянные, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света в вакууме. Следует отметить, что по современным представлениям для распространения электромагнитных волн вообще не нужна среда - они распространяются даже в вакууме, т.е. в пустоте, за счет того, что меняющееся электрическое поле порождает магнитное, а меняющееся магнитное - электрическое.

На рис. 1.1 представлена полная шкала электромагнитных волн с указанием частот и соответствующих длин волн, включающая большой диапазон радиоволн метрового, дециметрового и УКВ (ультракороткие волны) диапазона. Затем в сторону увеличения частоты и уменьшения длины волны следуют волны инфракрасного, видимого, ультрафиолетового света, рентгеновского и гамма излучения с длиной волны менее 0,01 нм.

Видимый свет, как видно из рисунка, занимает относительно небольшой интервал от 780 нм до 400 нм. Со стороны длинных «красных» волн к видимому диапазону примыкает «инфракрасная область» волн, ответственных, например, за радиационный теплообмен. Со стороны коротких «фиолетовых» волн примыкает ультрафиолетовый диапазон. Ультрафиолетовые, инфракрасные и видимые электромагнитные волны вместе составляют волны оптического диапазона.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Исторически самым первым приближением в оптике была **геометрическая оптика**, предполагающая независимое распространение световых лучей и позволяющая строить оптическое изображение объекта как совокупность изображений отдельных его точек. В геометрической оптике **луч** – это линия в пространстве, вдоль которой происходит распространение потока энергии световой волны. Пользоваться приближением геометриче-

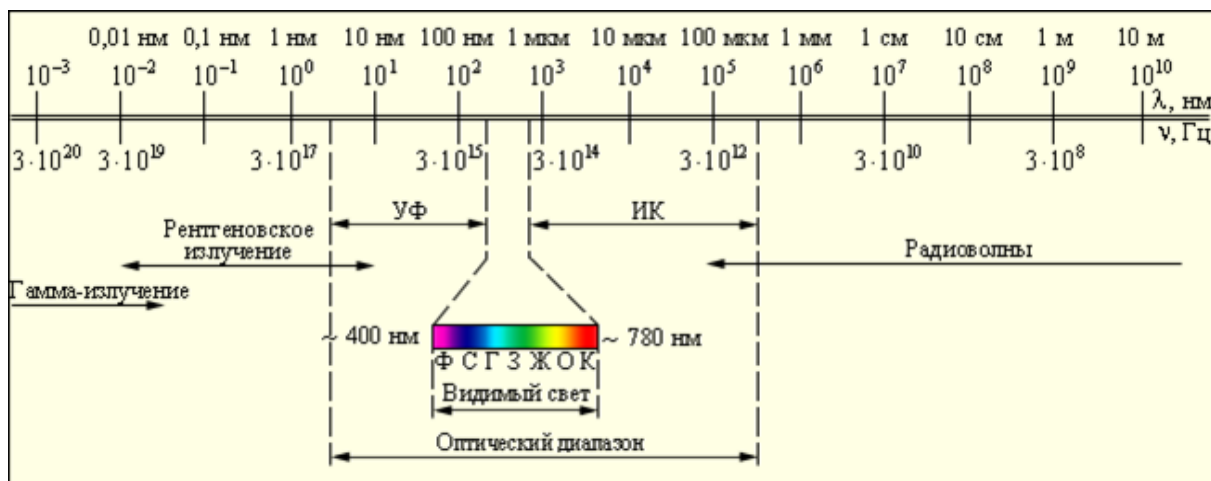


Рис. 1.1 Шкала электромагнитных волн

ской оптики можно в тех случаях, когда размеры препятствий (линз, отверстий, экранов и т.п.) существенно больше длины волны света.

В случае плоской волны, распространяющейся в **однородной среде**, лучи света – прямые, параллельные направлению распространению волны. В случае сферической волны, распространяющейся в однородной среде, лучи света – прямые, исходящие из точки, в которой находится точечный источник. В **неоднородной среде** в общем случае лучи – кривые линии.

Ход лучей подчиняется так называемому **принципу Ферма**, являющемуся основным законом геометрической оптики.

В несколько упрощенной форме принцип Ферма состоит в утверждении, что **луч света всегда распространяется в пространстве между двумя точками по тому пути, вдоль которого время его прохождения является наименьшим.**

Время, за которое свет из одной точки (A) попадает в другую точку (B), зависит от скорости его распространения в среде v :

$$t_{A \rightarrow B} = \int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{v} = \int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{v} \frac{c}{c} = \frac{1}{c} \int_{(A)}^{(B)} n ds = \frac{L}{c}. \quad (2.1)$$

В выражении (2.1) введены обозначения: ds – элементарный путь; $n = \frac{c}{v} \geq 1$ – **показатель преломления**, показывающий во сколько раз скорость света в вакууме больше скорости света в среде. Из формул (1.5) следует, что $n = \sqrt{\mu \epsilon}$. Свет распространяется в прозрачных средах, представляющих собой диамагнетики или парамагнетики, для которых $\mu \approx 1$ [2]. Поэтому с хорошей степенью точности $n \approx \sqrt{\epsilon}$.

В (2.1) введено также важное понятие – **оптическая длина пути L** :

$$L_{A \rightarrow B} = \int_{(A)}^{(B)} n ds \quad (2.2)$$

Из формул (2.1) и (2.2) следует, что минимальному времени $t_{A \rightarrow B}$ соответствует минимум оптической длины пути. Следовательно, принцип Ферма можно сформулировать другим образом: **луч света всегда распространяется в пространстве между двумя точками по тем путям, вдоль которых оптическая длина является наименьшей.** В некоторых случаях возможно существование нескольких лучей с одинаковой оптической длиной одновременно (так называемые таухронные лучи).

В случае однородной среды минимальному оптическому пути соответствует минимальный геометрический путь, соединяющий две точки пространства, т.е. прямая линия:

$$\min L_{A \rightarrow B} = \min \int_{(A)}^{(B)} n ds = n \min \int_{(A)}^{(B)} ds = n \min S_{A \rightarrow B} \quad (2.3)$$

Таким образом, из принципа Ферма следует **прямолинейность распространения света в однородной среде**, поскольку кратчайшее расстояние между двумя точками в пространстве – это прямая. Отклонение от прямолинейности распространения в геометрической оптике наблюдается в случае нарушения однородности среды, например, при переходе светового луча из среды с одним показателем преломления в среду с другим показателем преломления.

Другим случаем применения принципа Ферма является закон преломления света Снеллиуса.

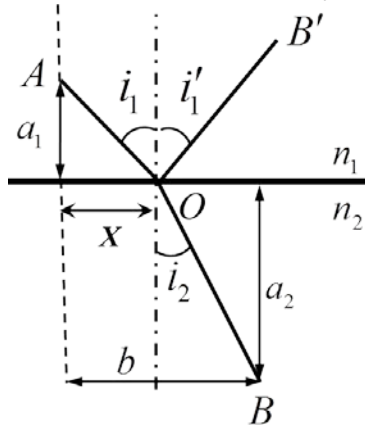


Рис. 2.1 Закон преломления и отражения света

Рассмотрим путь, по которому свет из точки A однородной прозрачной среды с показателем преломления n_1 попадает в точку B однородной прозрачной среды с показателем преломления n_2 . На рис. 2.1 показаны точки A и B и граница раздела диэлектриков, перпендикулярная плоскости рисунка. Числа a_1 , a_2 и b однозначно фиксируют взаимное положение точек A , B и границы раздела сред. Из прямолинейности распространения света в однородных средах следует что, луч состоит из прямолинейных отрезков с общей точкой O , лежащей на границе раздела. Чтобы оптическая длина $L_{A \rightarrow B}$

была минимальной, точка O также должна находиться в плоскости рисунка. Таким образом, задача сводится к определению положения точки O , т.е. величины x . Вычислим $L_{A \rightarrow B}$, по формуле (2.2):

$$L_{A \rightarrow B} = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b - x)^2} \quad (2.4)$$

Для определения экстремального значения $L_{A \rightarrow B}$ возьмём производную dL/dx и приравняем её нулю. После упрощений получим:

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} = \frac{n_2 (b - x)}{\sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}} \quad (2.5)$$

Принимая во внимание обозначения рисунка 2.1, выражение (2.5) можно привести к виду:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \quad (2.6)$$

где i_1 – угол падения; i_2 – угол преломления луча. Оба луча лежат в одной плоскости, называемой **плоскостью падения**. Полученное выражение (2.6) представляет **закон преломления** света Снеллиуса.

Легко показать, используя выражение (2.6) и полагая $n_2 = n_1$, что для отраженного света, приходящего в точку B' (рис. 2.1), справедлив **закон отражения**: угол падения i_1 равен углу отражения i_1' .

Из принципа Ферма следует также свойство **обратимости хода лучей**: распространение света из точки B и B' в точку A происходит по тем же траекториям (рис 2.1).

Вещество, имеющее больший показатель преломления, называется **оптически более плотным**.

Если луч света переходит из оптически более плотного вещества с показателем преломления n_1 (рис. 2.2) в оптически менее плотное вещество с показателем преломления n_2 ($n_2 < n_1$), то согласно закону Снеллиуса (2.6):

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} < 1. \quad (2.10)$$

При увеличении угла падения i_1 угол преломления i_2 ($i_2 > i_1$) увеличивается, и при некотором определённом значении угла

падения $i_1 = i_{\text{пред}}$ угол преломления становится равным 90° . Преломленный луч идёт вдоль границы раздела (рис. 2.2):

$$\sin i_{\text{пред}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.11)$$

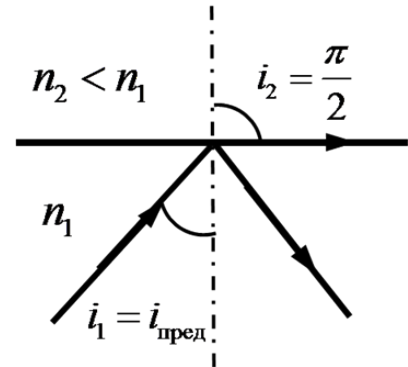


Рис. 2.2 Явление полного внутреннего отражения

При угле падения большем $i_{\text{пред}}$ свет полностью отражается. Наблюдается явление **полного внутреннего отражения** света, широко применяющееся в волоконно-оптических системах передачи информации в телекоммуникациях.

3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН

3.1 Естественный и поляризованный свет

Уравнения Максвелла, из которых получены соотношения (1.3), (1.4) для электромагнитных волн определяют взаимную связь между векторами \vec{E} и \vec{H} :

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu_0\mu}H. \quad (3.1)$$

Из соотношения (3.1) следует, что колебания векторов \vec{E} и \vec{H} синфазно достигают максимума и минимума. По направлению вектора \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и связаны с вектором Пойнтинга \vec{S} [1] через векторное произведение:

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (3.2)$$

Формула (3.2) показывает, что вектор Пойнтинга совпадает с направлением распространения волны. Усредненный по времени модуль вектора Пойнтинга называется в оптике интенсивностью световой волны [1]:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2. \quad (3.3)$$

В плоской бегущей электромагнитной волне, являющейся частным

решением уравнений Максвелла, происходят колебания векторов электрического и магнитного полей в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны

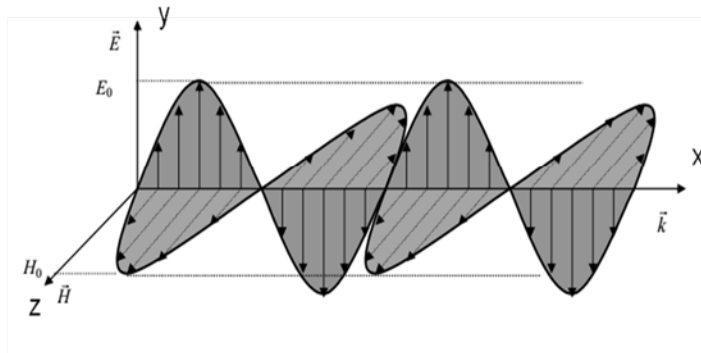


Рис. 3.1 Схематическое изображение плоской электромагнитной волны

распространению волны (рис. 3.1). Связь векторов \vec{E} и \vec{H} по величине и направлению позволяет ограничиться рассмотрением одного из них. Обычно, предпочтение отдаётся вектору \vec{E} , который часто называют **световым вектором**. Свет называется **поляризованным**, если направления колебаний светового вектора упорядочены каким-либо

образом. При этом, как следует из (3.1), направления колебаний вектора \vec{H} будут тоже упорядочены. Волна, в процессе распространения которой сохраняется ориентация плоскости колебаний светового вектора, называется **плоско поляризованной** или **линейно поляризованной**.

Если конец вектора \vec{E} описывает эллипс в точке наблюдения, то свет называется **эллиптически поляризованным**. Его можно получить при наложении двух плоско поляризованных волн одинаковой частоты с взаимно перпендикулярными плоскостями колебаний светового вектора, распространяющихся в одном направлении. В частном случае, когда амплитуды складываемых волн одинаковы, а разность их фаз равна $\pi/2$, получим **циркулярно поляризованный** свет, в котором конец вектора \vec{E} описывает окружность. Для наблюдателя, смотрящего навстречу лучу, в зависимости от направления вращения светового вектора, говорят о **право** (вращение по часовой стрелке), и **лево** (вращение против часовой стрелки) **циркулярно**



Рис. 3.2. Бесконечная синусоида (гармоника) (а) и цуг волн, излучаемый атомом (б)

поляризованном свете.

Свет излучается атомами при их переходе из одного энергетического состояния в другое энергетическое состояние. Акты излучения света атомом весьма кратковременны (порядка $\tau_0 \sim 10^{-8}$ с) и следуют друг за другом с частотой $10^7 - 10^8$ Гц. Строго говоря, за время излучения испускается не монохроматическая волна (она же – гармоника), а импульс излучения опреде-

ленной частоты продолжительностью $\tau_0 \sim 10^{-8}$ с, протяженностью $c\tau_0 \cong 3 \cdot 10^8$ м/с $\cdot 10^{-8}$ с $\cong 3$ м (рис. 3.2), содержащий значительное количество колебаний ($10^6 - 10^7$ штук горбов или впадин). В физике его называют «цугом» волн.

Поляризация одного «цуга» вполне определенная. Однако, излучаемые не одним, а разными атомами, «цуги» следуют друг за другом с большой частотой и разными плоскостями колебаний.

Возникает поток огромного числа цугов, колебания вектора \vec{E} в котором не упорядочены. Поскольку любой вектор в плоскости можно разложить по двум независимым осям, можно сказать, что на каждое из двух независимых перпендикулярных направлений (к примеру, «у» и «z») за промежуток времени, существенно больший, чем время между сменами цугов, в среднем приходится половина всех колебаний. При этом половина исходной интенсивности I_0 приходится на колебания вдоль оси «у», половина – на колебания вдоль оси «z». Такой свет, обычно излучаемый множеством возбуждённых атомов, принято называть «естественным»¹.

На самом деле, в природе естественный свет встречается относительно редко, поскольку при отражении (например, от поверхности воды) и преломлении (например, после прохождения оконного стекла) происходит нарушение равного соотношения между взаимно перпендикулярными компонентами. Такой свет можно рассматривать как смесь естественного света и линейно поляризованного – то есть, как **частично поляризованный свет**.

Плоско поляризованный свет можно получить из естественного, используя оптический прибор, называемый «**поляризатором**». Функционально поляризатор обладает тем замечательным свойством, что пропускает через себя лишь составляющую колебаний электрического вектора, имеющую определенное направление, параллельное **плоскости поляризатора E_{\parallel} (плоскости пропускания)** Если направления колебаний светового вектора равновероятны, то интенсивность света на выходе из поляризатора составит $I_0/2$, т.е. половину от интенсивности падающего света I_0 .

В случае линейно поляризованного света, падающего нормально на поляризатор, прибор пропустит только составляющую колебаний, параллельную плоскости поляризатора (рис. 3.4):

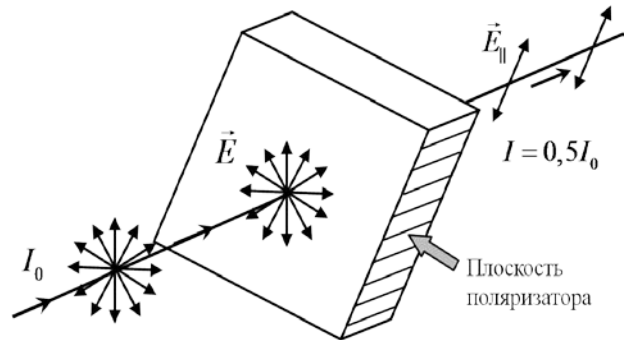


Рис. 3.3 Прохождение естественного света через поляризатор.

¹Что реализуется, например, в пламени свечи или спирали электрической лампочки, в излучении Солнца или других звезд и т.п.

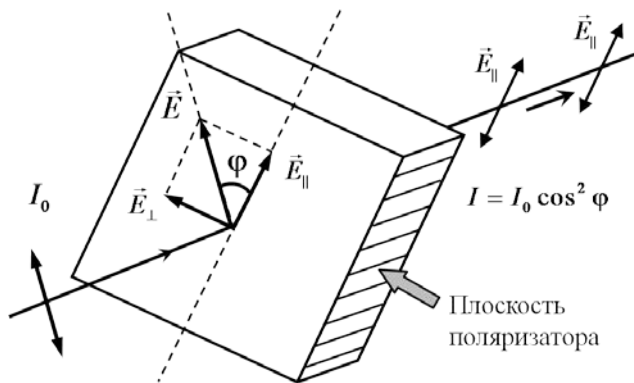


Рис. 3.4. Прохождение линейно поляризованного света через поляризатор.

$$E_{\parallel} = E \cos \varphi, \quad (3.4):$$

где φ - угол между вектором \vec{E} и плоскостью поляризатора. Учитывая, что интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды колебаний напряжённости поля, из (3.3) и (3.4) следует, что интенсивность света на выходе поляризатора связана с интенсивностью падающего на поляризатор линейно поляризованного света соотношением:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (3.5)$$

Последнее утверждение называется **законом Малюса**.

Когда линейно поляризованный свет проходит через поляризатор, то вращением поляризатора можно добиться полного исчезновения света на выходе. Для падающего естественного света вращать поляризатор бесполезно – все равно, через него пройдет $I_0/2$ вне зависимости от угла поворота. Для частично поляризованного света при вращении поляризатора будут существовать минимальная интенсивность света $I_{\min} = I_{\text{ест}}/2$ и максимальная, равная $I_{\max} = I_{\text{ест}}/2 + I_{\text{пол}}$. **Степенью поляризации** называется величина:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (3.6)$$

Для естественного света $P = 0$. Для полностью плоско поляризованного света $P = 1$. Для частично поляризованного света $0 < P < 1$.

В научных экспериментах обычно используют два поляризатора (рис.3.5). Первый сохраняет название поляризатор, потому что превращает естественный свет с интенсивностью I_0 в линейно поляризованный с интенсивностью $I = 0,5I_0$. Второй поляризатор называют «анализатором». Поворотом анализатора вокруг направления падающей волны, можно добиться как полного исчезновения света за анализатором,

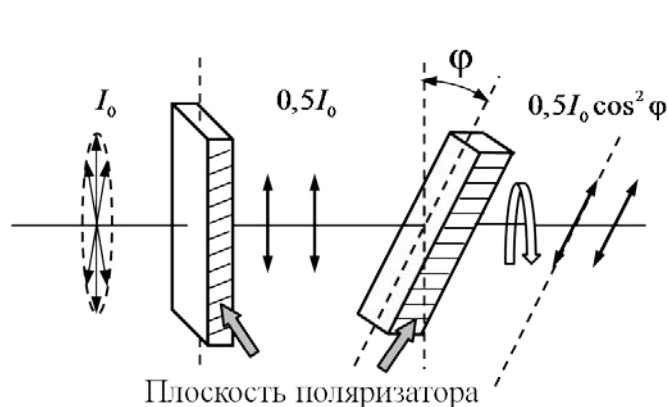


Рис. 3.5 Работа пары поляризатор-анализатор

когда $\varphi = \pi/2$ («скрещенные» поляризатор и анализатор), так и полного прохождения света интенсивностью $I_0/2$ через ана-

лизатор, когда $\cos \varphi = 1$ при $\varphi = 0$.

3.2 Поляризация света при отражении и преломлении

Обычный свет, как отмечалось выше, есть смесь естественного света и линейно поляризованного. Это связано с нарушением соотношения между компонентами световых волн разной поляризации при отражении и преломлении. Причину изменения поляризации, так же как и отражения части энергии, падающей на поверхность раздела, следует искать в уравнениях Максвелла (точнее – в граничных условиях к ним). Когда свет падает на поверхность раздела под углом i_1 и преломляется под углом i_2 , появляется выделенное направление, задаваемое плоскостью падения.

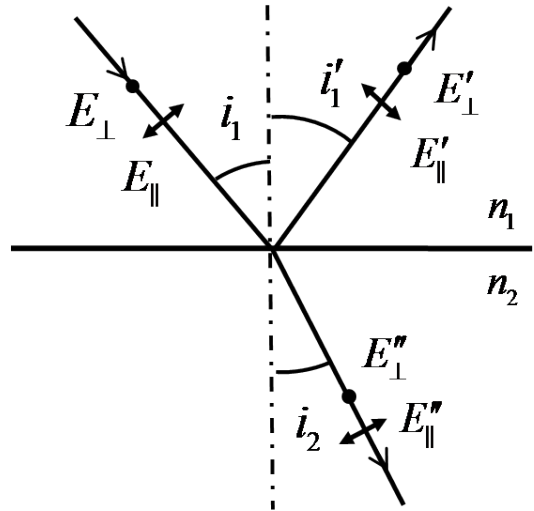


Рис. 3.6 Наклонное падение электромагнитной волны на поверхность раздела двух сред.

Разложим вектор напряженности электрического поля в падающей, отраженной и преломленной волне на две составляющие. Составляющая E_{\parallel} (на рис.3.6 изображена в виде двусторонней стрелки) лежит в плоскости падения. Составляющая E_{\perp} (на рис.3.6 обозначена жирной точкой) перпендикулярна плоскости падения. Опуская вывод, приведем без доказательства так называемые «**формулы Френеля**»:

$$E'_{\parallel} = -\frac{\operatorname{tg}(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}(i_1 + i_2)} E_{\parallel} ; \quad (3.7) \quad E'_{\perp} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} E_{\perp} ; \quad (3.8)$$

$$E''_{\parallel} = \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)} E_{\parallel} ; \quad (3.9) \quad E''_{\perp} = \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2)} E_{\perp} . \quad (3.10)$$

Из формул Френеля можно вычислить для падающей, отраженной и прошедшей волн соотношения между их интенсивностями, которые пропорциональны квадратам их амплитудных значений (см. (3.3)). Затем определить коэффициенты отражения и прохождения, равные долям отраженной и прошедшей энергии, зависящие от угла падения и от поляризации волны. На графике рис. 3.7 приведена зависимость коэффициента отражения для параллельной и перпендикулярной составляющих светового вектора от угла падения света на границу с оптически более плотной средой ($n_2=2, n_1=1$)². Из графика следует, что при нормальном падении ($i_1 = 0$) от-

² Примерно соответствует падению луча света из воздуха на поверхность воды

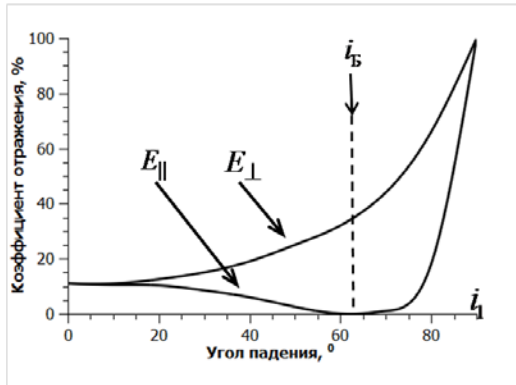


Рис. 3.7 Зависимость коэффициента отражения компонент падающей волны на границу с оптически более плотной средой от угла падения.

Рис. 3.7 Зависимость коэффициента отражения компонент падающей волны на границу с оптически более плотной средой от угла падения. При падении света под углом Брюстера ($i_1 = i_B$) отраженный луч полностью поляризован — световой вектор совершает колебания в плоскости, перпендикулярной плоскости падения; при падении света под углом Брюстера из закона Снеллиуса (2.6) следует:

$$\frac{\sin i_B}{\sin i_2} = \frac{\sin i_B}{\sin(\pi/2 - i_B)} = \operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.11)$$

Если свет отражается от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$, $\operatorname{tg} i_B > 1$), угол Брюстера больше 45° . Если свет отражается от оптически менее плотной среды ($n_2 < n_1$, $\operatorname{tg} i_B < 1$), угол Брюстера меньше 45° .

При падении света под углом Брюстера ($i_B + i_2 = \pi/2$) преломленный луч частично поляризован ($E_{||}$ преобладает) и образует прямой угол с отраженным лучом.

Знак «минус» в формуле Френеля (3.8) означает, что при падении света на оптически более плотную среду ($i_1 > i_2$) перпендикулярная составляющая меняет знак, то есть фаза колебаний изменяется на « π ».

В случае падения света на границу с оптически менее плотной средой ($i_1 < i_2$, $\sin(i_1 - i_2) < 0$), фаза отраженной перпендикулярной составляющей не меняется (E_{\perp} и E'_{\perp} одного знака).

Несколько сложнее обстоит дело с параллельной составляющей. Как следует из (3.7) при падении света на границу с оптически более плотной средой ($i_1 > i_2$) под углами меньшими угла Брюстера ($i_1 < i_B$; $i_1 + i_2 < \pi/2$) $E_{||}$ и $E'_{||}$ имеют противоположные знаки. Таким образом, при отражении от оптически более плотной среды, происходит изменение фазы колебаний $E_{||}$ на « π ».

ражается примерно 10% падающей энергии. А при больших углах падения, оба коэффициента отражения стремятся к единице, то есть, падающий свет почти полностью отражается от поверхности раздела.

Как видно из формул Френеля при $i_1 + i_2 = \pi/2$, знаменатель в соотношении (3.7) обращается в бесконечность, и параллельная составляющая становится равной нулю ($E'_{||} = 0$). Это явление наблюдается для определенного угла падения, называемого углом Брюстера.

Закон Брюстера: при падении света

Когда $i_1 > i_B; i_1 + i_2 > \frac{\pi}{2}$, тангенс суммы в (3.7) становится отрицательным. Таким образом, при отражении от оптически более плотной среды величины E_{\parallel} и E'_{\parallel} имеют одинаковый знак, то есть колебания в отраженной и падающей волнах происходят в одинаковой фазе. Следует отметить, что для стекла угол Брюстера сравнительно большой (57°), а в технической оптике используются, в основном, пучки света, падающие на линзы почти нормально. Ситуацию, когда $i_1 > i_B$ обычно игнорируют, и говорят, что фаза отраженной волны при падении света на оптически более плотную среду скачком меняется на « π ».

3.3 Поляризация света при явлении двойного лучепреломления

Некоторые прозрачные кристаллические вещества демонстрируют необычные оптические свойства. Так, текст, расположенный за кристаллом, раздваивается. Это вызвано разделением луча, падающего на кристалл, на два луча. Вместе с тем, разделения на два луча внутри кристалла в одном или двух определенных направлениях, называемых «**оптическая ось**» кристалла, не происходит.

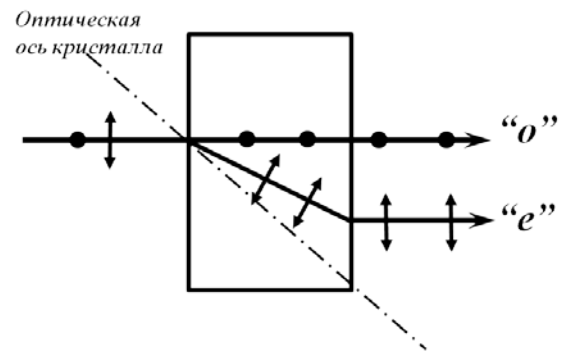


Рис.3.8 Прохождение света через одноосный кристалл

На рис.3.8 показано прохождение света через кристалл, имеющий одно такое направление (одноосный кристалл). Плоскость, проходящая через оптическую ось и луч, называется «**главным сечением**» или «**главной плоскостью**» кристалла. Плоскость рис.3.8 является главным сечением. Оба луча оказываются поляризованными во взаимно перпендикулярных плоскостях. Колебания светового вектора одного луча происходят перпендикулярно главному сечению (жирные точки на рис.3.8). Он подчиняется законам геометрической оптики. Поэтому его называют «**обыкновенный**» луч («**o**»).

Колебания светового вектора другого луча лежат в главной плоскости (двусторонние стрелки на рис.3.8). Этот луч демонстрирует необычное поведение, отклоняясь в сторону при нормальном падении падающего луча, вопреки законам геометрической оптики. Его называют «**необыкновенный**» луч («**e**»). Необычное поведение двояко-лучепреломляющих кристаллов объясняется анизотропией их физических свойств.

Ранее были изучены так называемые **изотропные** диэлектрики, у которых

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad (3.12)$$

где ε - диэлектрическая проницаемость, величина, показывающая во сколько раз поле внутри изотропного диэлектрика слабее, чем в вакууме [3]. Очевидно, что в таких диэлектриках векторы электрической индукции \vec{D} и напряженности \vec{E} параллельны. Однако, в природе встречаются другие, **анизотропные** диэлектрики, у которых отмеченная параллельность \vec{D} и \vec{E} нарушается. Физически, это связано с кристаллической структурой тел, когда одно из направлений в кристалле оказывается более свободным для смещения атомов, чем другие. Математически, это вынуждает заменить диэлектрическую проницаемость ε , ранее выражавшуюся числом, на матрицу:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}. \quad (3.13)$$

Обозначая орты осей x, y, z как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, формулу(3.12) следует заменить:

$$\begin{aligned} \vec{D} = \{\varepsilon\} \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z) \vec{i} + \\ + \varepsilon_0 (\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z) \vec{j} + \\ + \varepsilon_0 (\varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.14)$$

При повороте осей x, y, z компоненты матрицы ε_{ij} преобразуются по определенному правилу; такие матрицы называют «тензорами». Компоненты этого тензора обладают свойством симметрии: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. В математике показывается, что такой тензор всегда может быть поворотом осей сведен к диагональному виду:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Эти оси, обозначенные в последней формуле как X, Y и Z называются «**главными осями кристалла**». Вектора \vec{D} и \vec{E} в направлении главных осей по-прежнему не параллельны, однако выражение (3.14) существенно упрощается:

$$\vec{D} = \{\varepsilon\} \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_X E_x) \vec{i} + \varepsilon_0 (\varepsilon_Y E_y) \vec{j} + \varepsilon_0 (\varepsilon_Z E_z) \vec{k} \quad (3.16)$$

Для изотропной среды можно ввести простой диагональный тензор с одинаковыми компонентами

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

Тогда формула (3.12) становится частным случаем формул (3.14) и (3.16). В изотропном диэлектрике скорость электромагнитной волны просто замедляется по сравнению с вакуумом в $n \approx \sqrt{\epsilon}$ раз и не зависит от направления распространения волны. Волновые поверхности для волн, испущенных воображаемым точечным источником, помещенным в любую точку изотропной среды, имеют форму сферических поверхностей.

В анизотропной среде волну, испущенную воображаемым точечным источником, помещенным в точку O можно представить как две линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях волны с волновыми поверхностями, отличающимися по форме (рис. 3.9). На рис. 3.9а показано сечение волновых поверхностей плоскостью XOZ . У волны, для которой сечение является окружностью, электрический вектор колеблется перпендикулярно плоскости XOZ . В

волне, для которой это сечение имеет форму овала, электрический вектор колеблется в плоскости XOZ . Как видно из рисунка 3.9а, имеются два направления A_1A_2 и B_1B_2 для которых скорости обеих волн одинаковы. Эти направления называются оптическими осями кристалла и характерны для двуосных кристаллов. На рис.

3.9б и 3.9в показаны сечения волновых поверхностей плоскостями XOY и YOZ . У волн, для которых эти сечения являются окружностями, электрический вектор колеблется перпендикулярно плоскости соответствующего рисунка, у волн, для которых эти сечения являются овалами, электрический вектор колеблется в плоскости рисунка.

В природе имеется множество кристаллов, у которых две компоненты тензора диэлектрической проницаемости (из трех) совпадают: $\epsilon_X = \epsilon_Y \neq \epsilon_Z$. В таких кристаллах имеется только одна оптическая ось (ZZ), при распространении вдоль которой скорости упомянутых двух волн совпадают (одноосные кристаллы).

На рис. 3.10 показано главное сечение волновых поверхностей для одноосного кристалла. Волновые поверхности обыкновенной волны, испущенной воображаемым точечным источником, помещенным в точку O имеют форму сферических поверхностей. Это означает, что скорость

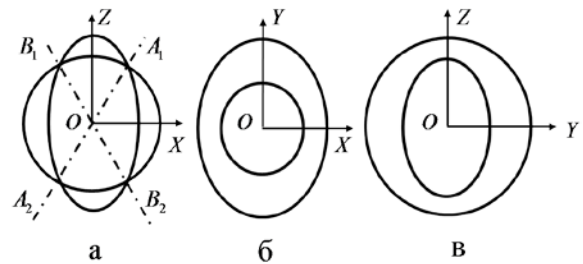


Рис. 3.9 . Сечения волновых поверхностей двуосного кристалла в случае, когда $\epsilon_X \leq \epsilon_Y \leq \epsilon_Z$.

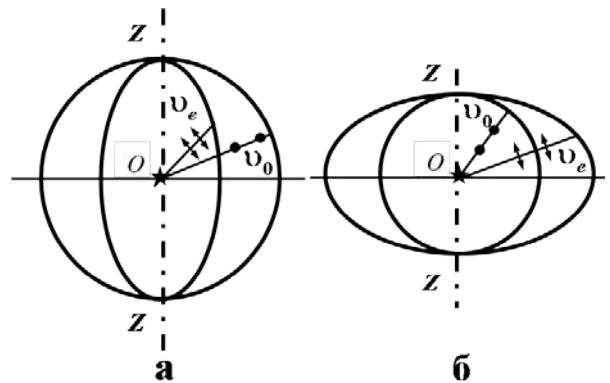


Рис. 3.10 Волновые поверхности обыкновенной и необыкновенной волны для положительного (а) и отрицательного (б) одноосных кристаллов.

обыкновенной волны v_0 одинакова во всех направлениях. Колебания светового вектора в обыкновенной волне перпендикулярны главным плоскостям кристалла.

Волновые поверхности необыкновенной волны имеют форму эллипсоидов. Скорость необыкновенной волны зависит от направления. Она совпадает со скоростью обыкновенной волны в направлении оптической оси $v_e = v_0$. В направлении перпендикулярном оптической оси $v_e < v_0$ для положительного кристалла (рис.3.10а) и $v_e > v_0$ для отрицательного кристалла (рис.3.10б). Колебания электрического вектора в необыкновенной волне лежат в плоскости главного сечения.

Для иллюстрации пространственного разделения обыкновенного и необыкновенного лучей в одноосном положительном кристалле воспользуемся принципом Гюйгенса, согласно которому все точки фронта волны можно рассматривать как совокупность вторичных точечных источников волн, огибающая которых, даёт положение фронта волны в следующий момент времени.

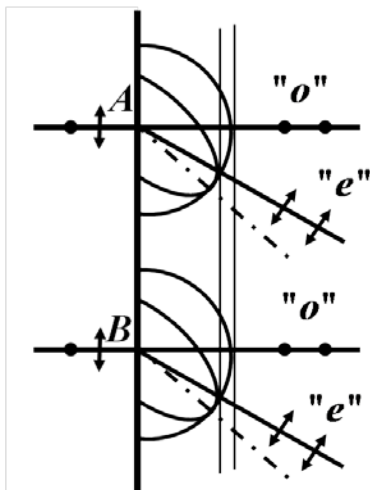


Рис. 3.11 Распространение обыкновенной и необыкновенной волн в одноосном положительном кристалле

В случае нормального падения плоской волны на поверхность кристалла (рис. 3.11) в качестве вторичных источников достаточно рассмотреть две точки A и B , лежащие на поверхности, в которые поместим воображаемые точечные источники колебаний с волновыми поверхностями, характерными для положительного одноосного кристалла.

На рис. 3.11 видно различие в положении фронтов вторичных волн. Лучи, проведенные из точек A и B к точкам касания волновых поверхностей и фронтов, не совпадают по направлению. Обыкновенные лучи в отличие от необыкновенных лучей идут, не преломляясь, прямо.

К хорошо известным одноосным кристаллам относятся: исландский шпат, кварц, турмалин. Кристаллы турмалина обладают сильным дихроизмом (свойство поглощения одного из лучей) и практически полностью поглощают обыкновенную волну на расстоянии 1 мм. Дихроизмом обладают также кристаллы сульфата йодистого хинина, используемого для изготовления поляроидов в виде целлулоидных пленок. Полное поглощение обыкновенной волны происходит на расстоянии 0,1 мм.

Многие изотропные вещества становятся анизотропными в результате внешних воздействий. Например, стекло, подвергнутое деформации сжатия или растяжения, приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, направленной параллельно приложенной силе. Искусственная анизо-

тропия, вызванная действием электрического поля (явление Керра), приводит к появлению в изотропной среде свойств одноосного кристалла с оптической осью, совпадающей с направлением вектора напряжённости электрического поля [4].

3.4 Эллиптическая и циркулярная поляризация

Пусть плоско поляризованная монохроматическая волна, распространяющаяся в направлении оси X , падает нормально из вакуума на прозрачную пластинку одноосного положительного кристалла, вырезанную параллельно оптической оси ZZ (рис.3.12). Уравнение падающей волны:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) = \vec{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (3.18)$$

Если дихроизма нет, то обе волны, обыкновенная и необыкновенная, распространяются в одном направлении, со скоростями, которым соответствуют разные показатели преломления: $n_o = c/v_o$ для обыкновенного луча и $n_e = c/v_e$ для необыкновенного луча.

На входе в пластинку ($x=0$) $E_{\perp}/E_{\parallel} = E_{o\perp}/E_{o\parallel} = \operatorname{tg} \varphi$, (3.19)

где φ - угол между плоскостью колебаний светового вектора и оптической осью пластинки (рис.3.4 и 3.13); $E_{o\perp}, E_{o\parallel}$ - проекции вектора амплитуды колебаний \vec{E}_0 на оси Y и Z . На выходе из пластинки толщиной d ($x=d$ рис. 3.13) составляющие светового вектора \vec{E}'' параллельная (\vec{E}_{\parallel}'') и перпендикулярная (\vec{E}_{\perp}'') оптической оси ZZ будут равны:

$$E_{\parallel}'' = E_{o\parallel} \cos \omega \left(t - \frac{d}{v_e} \right) = E_{o\parallel} \cos \omega \left(t - \frac{n_e d}{c} \right), E_{\perp}'' = E_{o\perp} \cos \omega \left(t - \frac{d}{v_o} \right) = E_{o\perp} \cos \omega \left(t - \frac{n_o d}{c} \right).$$

Таким образом, из пластинки выходят волны одинаковой частоты с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний светового вектора и с

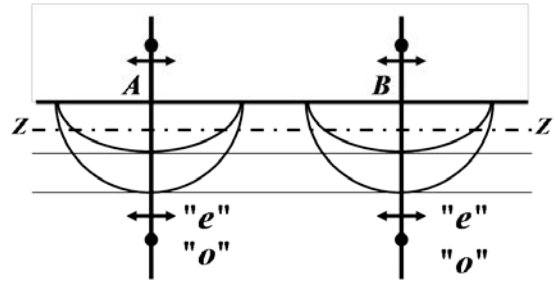


Рис. 3.12 Построение Гюйгенса для одноосного положительного кристалла с оптической осью, параллельной границе раздела сред.

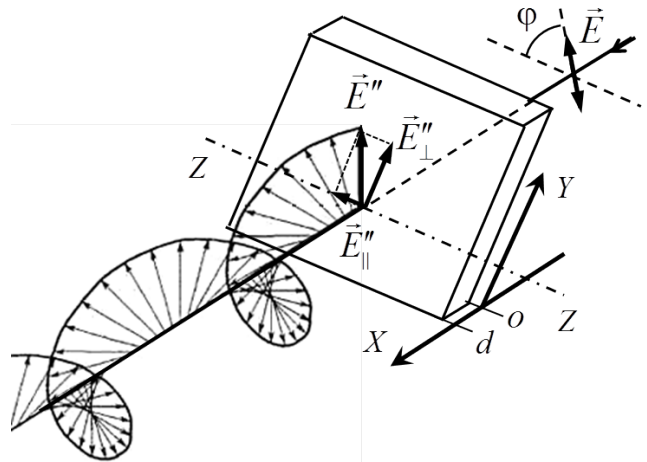


Рис. 3.13 Вид эллиптически поляризованной волны, вышедшей из кристалла.

разностью фаз колебаний δ , равной:

$$\delta = \frac{\omega(n_e - n_o)d}{c} = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{Tc} = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda_0}. \quad (3.20)$$

В результате сложения взаимно перпендикулярных колебаний конец светового вектора будет описывать эллипс, форма которого зависит от соотношения амплитуд и разности фаз складываемых колебаний [5]. Результирующая волна, выходящая из пластинки, представляет собой, в общем случае, эллиптически поляризованный свет (рис.3.13) или плоско поляризованный, когда $\delta = m\pi$, где m - целое число.

Если угол φ между плоскостью колебаний светового вектора и оптической осью пластинки (рис.3.13) равен 45° , то, как следует из соотношения (3.19), амплитуды обоих лучей, выходящих из пластики, будут равны, и результирующая волна представляет собой циркулярно поляризованный свет, если $\delta = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ или плоско поляризованный, когда $\delta = m\pi$, где m - целое число.

3.5 Связь между плоской и циркулярной поляризацией

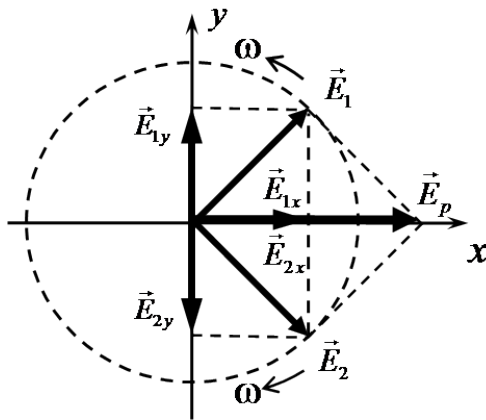


Рис. 3.14. Представление плоскополяризованной волны с помощью двух циркулярно поляризованных волн

Плоско поляризованная волна формально может быть представлена как совокупность право и лево циркулярно поляризованных волн одинаковой частоты с равными по модулю амплитудами. В самом деле, представим себе две циркулярно поляризованных волны, в одной из которых вектор напряженности электрического поля (\vec{E}_1) вращается со временем в точке наблюдения против часовой стрелки, а в другой (\vec{E}_2) - по часовой стрелке (рис.3.14). Спроецировав \vec{E}_1 и \vec{E}_2 на оси «x» и «y», нетрудно убедиться, что «игрековые» компоненты векторов в любой момент времени компенсируют друг друга, а «иксовые»,

$$E_{1x} = |\vec{E}_1| \cos\left(\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)\right), E_{2x} = |\vec{E}_2| \cos\left(-\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)\right), \quad (3.21)$$

складываясь, дают вектор \vec{E}_p , совершающий колебания вдоль оси «x», т. е. образуют плоско поляризованную волну:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_p^{\max} \cos\left(\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)\right). \quad (3.22)$$

Распространение волн в прозрачной среде в направлении оси «z» перпендикулярно осям «x» и «y», приводит, в соответствии с формулами (3.21), (3.22) к изменению фазы колебаний (то есть, угла поворота \vec{E}_1 и \vec{E}_2 относительно оси «x») для обеих циркулярных волн. Естественно, поворот \vec{E}_1 и \vec{E}_2 на один и тот же угол (каждый вектор – в свою сторону, по часовой, или против часовой стрелки) никак не повлияет на направление плоскости колебаний суммарного вектора \vec{E}_p (рис.3.14).

В **оптически активных** веществах, показатели преломления для лево и право циркулярно поляризованных волн не равны друг другу, что приводит к неравенству фаз колебаний световых векторов:

$$\varphi_1 = \omega \left(t - \frac{n_{\text{лев}} z}{c} \right), \quad \varphi_2 = -\omega \left(t - \frac{n_{\text{пр}} z}{c} \right), \quad (3.23)$$

На рис. 3.15 пунктиром показаны векторы \vec{E}_1, \vec{E}_2 и \vec{E}_p в некоторой точке среды с координатой $z=0$. Согласно равенствам (3.23), в точке с координатой $z > 0$ (пусть $n_{\text{лев}} > n_{\text{пр}}$) вектор \vec{E}_1 будет повернут на угол $\Delta\varphi_1 = \omega n_{\text{лев}} z/c$ по часовой стрелке, а вектор \vec{E}_2 на $\Delta\varphi_2 = \omega n_{\text{пр}} z/c$ против часовой стрелки. В результате, плоскость колебаний суммарного вектора плоско поляризованной волны \vec{E}_p повернется на угол

$$\Delta\varphi = (n_{\text{лев}} - n_{\text{пр}}) \omega z/c \quad (3.24)$$

по часовой стрелке (рис.3.15).

Вращение плоскости колебаний светового вектора в оптически активных средах связано с чётко выраженной асимметрией молекулярной структуры в некоторых средах.

Можно представить себе отрезок провода, накрученный в виде винтовой спирали на карандаш в противоположных направлениях (по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Эти два вида асимметрии – правая и левая не сводятся друг с другом никакими математическими преобразованиями. Право циркулярно поляризованный свет (вращающийся по часовой стрелке) будет быстрее распространяться по «правозакрученной» молекуле, чем по «левозакрученной» молекуле. Поэтому в среде с одним преимущественным типом вращательной асимметрии молекул показатели преломления для право и лево циркулярно поляризованных волн не равны друг другу. В результате, на выходе из такой среды плоскость колебаний

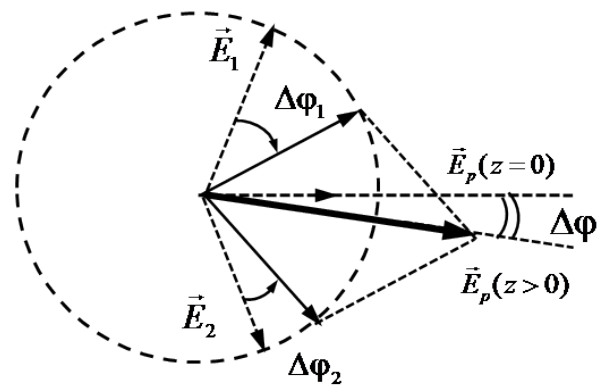


Рис. 3.15 Вращение плоскости поляризации при неравенстве скоростей распространения циркулярно поляризованных волн

электрического вектора плоско поляризованной волны будет поворачиваться на угол: $\Delta\varphi \neq 0$. Приведенные рассуждения прекрасно подтверждаются опытом с ультракороткими радиоволнами [4], идентичными по своей природе световым волнам. Для УКВ излучения с длиной волны 3 см. заместителем молекул могут служить как раз упомянутые выше пружинки из проволоки, накрученной на карандаш диаметром порядка 1 см. Вместо кристалла используют просто картонную коробку, например, обувную. Опыт подтверждает, что при прохождении коробки с «правозакрученными» проволочками плоскость поляризации поворачивается по часовой стрелке и наоборот. При заполнении же коробки теми и другими пружинками в равном соотношении, поворота не происходит.

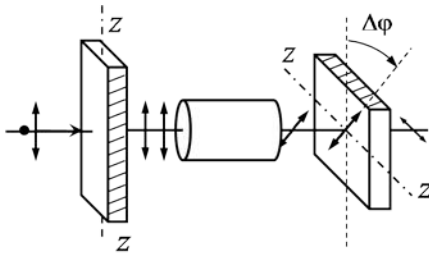


Рис. 3.16 Вращение плоскости поляризации в оптически активном веществе

зрения просветляется (рис. 3.16). Поворотом анализатора на угол $\Delta\varphi$ можно добиться, чтобы свет не проходил через оптическую систему и, таким образом, измерить угол поворота плоскости колебаний светового вектора. Угол поворота пропорционален толщине l слоя вещества:

$$\Delta\varphi = \alpha l, \quad (3.25),$$

где α - коэффициент пропорциональности, зависящий от исследуемого вещества и от длины волны света.

Оптически неактивные вещества приобретают способность поворачи-

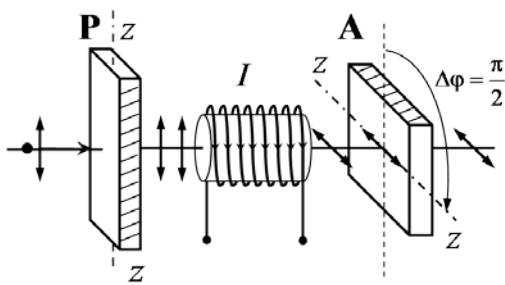


Рис.3.17 Вращение плоскости поляризации в магнитном поле. Принцип устройства быстродействующего светового затвора.

вать плоскость колебаний светового вектора, если их поместить в магнитное поле. При этом индукция магнитного поля должна быть направлена параллельно направлению распространения света. Это так называемый «эффект Фарадея». Направление вращения зависит от направления магнитного поля, но не зависит от направления луча. Величина угла поворота пропорциональна напряженности магнитного поля H и длине образца вещества l

$$\Delta\varphi = \mathfrak{V} H l, \quad (3.26)$$

где константа \mathfrak{V} , зависящая от атомно-молекулярных свойств вещества, называется постоянной Верде.

Крайне малое (на фоне других способов переключения света) время «срабатывания» эффекта Фарадея (10^{-13} - 10^{-9} с) определяет его широкое использование для устройства световых затворов и других переключателей световых потоков. Принципиальная схема подобного затвора показана на рис.3.17. В исходном состоянии катушка не запитана и падающий на систему свет полностью блокируется парой скрещенных поляризаторов «Р» и «А». В необходимый момент через катушку пропускается ток « I », который подбирается так, чтобы угол поворота $\Delta\varphi$ оказался равен $\pi/2$, после чего такой свет полностью пройдет через первоначально скрещенный поляризатор «А», причем «время включения» окажется меньшим 10^{-9} с, что на несколько порядков меньше, чем, к примеру, для механического фотозатвора.

4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН

4.1. Условия максимумов и минимумов интерференции

Рассмотрим произвольную точку P , расположенную в однородной и изотропной среде, в которую приходят одинаково направленные колебания одинаковой частоты от двух точечных источников волн S_1 и S_2 (рис. 4.1). Уравнения колебаний, приходящих в точку P запишем в виде:

$$E_1 = E_{1m} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_{01}) = E_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (4.1)$$

$$E_2 = E_{2m} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_{02}) = E_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (4.2)$$

где: E_{1m} и E_{2m} – амплитуды волн в точке P ; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; φ_{01} и φ_{02} – начальные фазы колебаний в источниках волн; φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний в точке P ; r_1 и r_2 – расстояния от S_1 и S_2 до точки наблюдения P соответственно.

Величина амплитуды результирующего колебания E_m зависит от амплитуд и разности фаз $\Delta\varphi$ складываемых колебаний и вычисляется по формуле, выведенной в разделе «колебания» [5]:

$$E_m^2 = E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2E_{1m}E_{2m} \cos \Delta\varphi, \quad (4.3) \quad \text{где}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(r_1 - r_2) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (4.4)$$

Учитывая, что интенсивности волн пропорциональны квадратам амплитуд, соотношение (4.3) можно представить в виде:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi, \quad (4.5)$$

где I_1, I_2 , - интенсивности волн от источников, а I - результирующая интенсивность колебаний в точке P .

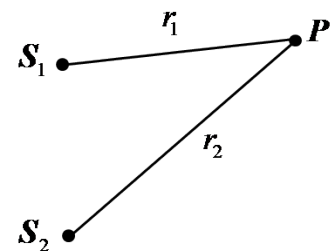


Рис.4.1

Волны, разность фаз колебаний которых в точке наблюдения $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ постоянна и не меняется со временем, называются **когерентными волнами**, а источники таких волн - **когерентными источниками**.

Как следует из формулы (4.5) при сложении волн от когерентных источников происходит неравномерное распределение интенсивности колебаний в пространстве. Перераспределение светового потока, Наложение волн, в результате которого в одних местах пространства возникают максимумы интенсивности, а в других – минимумы, называется **интерференцией волн**.

Создание источников когерентных волн в механике, в акустике, в электродинамике не представляет технических трудностей. Однако, для волн оптического диапазона проблема когерентности имеет свою специфику. Дело в том, что, во-первых, свет от источника излучается различными атомами, для которых начальные фазы излучения хаотически меняются. Это так называемая «пространственная некогерентность» источников света. Во-вторых, даже отдельный атом излучает свет «цугами», следующими друг за другом с большой частотой. Начальные фазы разных цугов изменяются случайным образом, из-за чего результат интерференции любой пары цугов будет все время разным («временная некогерентность»). Излучение в виде «цуга» волн происходит за время порядка 10^{-8} с и носит случайный характер (см. 3.1).

В настоящее время проблема создания когерентных источников решается использованием лазеров. Однако еще в начале 19-го века физики научились преодолевать некогерентность. Они делили каждый цуг на части, которые проходили неодинаковые оптические пути, и, затем, наблюдали интерференцию этих частей на экране. При этом оптические пути, проходимые цугами, не должны сильно отличаться, чтобы колебания оставались когерентными при их «встрече» в месте наблюдения интерференции. Для таких волн $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ и выражение (4.4) можно упростить:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(r_1 - r_2). \quad (4.6)$$

С учетом определения длины волны как расстояния, проходимого волной за один период T ($\lambda = cT$), получим соотношение между длиной волны в вакууме λ_0 и длиной волны λ в среде с показателем преломления n :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{cT}{vT} = n. \quad (4.7)$$

Теперь, перепишем условие (4.6) в терминах оптической разности хода ΔL для однородной изотропной среды:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0}n(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta L, \quad (4.8)$$

где $\Delta L = n(r_1 - r_2)$ - оптическая разность хода лучей, исходящих от S_1 и S_2 в точке P .

Как следует из формулы (4.5), интенсивность результирующего колебания достигает максимального значения для точек в которых $\cos \Delta\varphi = +1$, то есть когда разность фаз колебаний равна чётному числу π :

$$\Delta\varphi = 2m\pi, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.9)$$

Оптическая разность хода при этом, согласно формуле (4.8), равна целому числу длин волн:

$$\Delta L = m\lambda_0. \quad (4.10)$$

Согласно (4.5) в этом случае результирующая интенсивность оказывается больше суммы интенсивностей волн, приходящих в место точку наблюдения:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} > I_1 + I_2. \quad (4.11)$$

Если $I_2 = I_1$, то $I = 4I_1$.

Таким образом, выражение (4.9) или (4.10) представляют условие максимумов интенсивности интерференции.

Как следует из формулы (4.5), интенсивность результирующего колебания достигает минимального значения для точек, в которых $\cos \Delta\varphi = -1$, т.е. когда разность фаз колебаний равна нечётному числу π :

$$\Delta\varphi = (2m + 1)\pi, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.12)$$

Оптическая разность хода при этом, как следует из формулы (4.8), равна нечётному числу длин полуволен:

$$\Delta L = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad (4.13)$$

Согласно (4.5) результирующая интенсивность в этом случае оказывается меньше суммы интенсивностей волн, приходящих в место точку наблюдения:

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} < I_1 + I_2. \quad (4.14)$$

Если $I_2 = I_1$, то $I = 0$.

Выражение (4.12) или (4.13) представляет условие минимумов интенсивности при интерференции.

4.2. Различные схемы наблюдения интерференции

Один из первых опытов по интерференции света был осуществлен в 1801 году английским ученым Юнгом. Схема опыта (вид сбоку) изображена на рис.4.2.

Источником света служит узкая щель в экране \mathcal{E}_1 . Свет, пройдя через цветной фильтр Φ , выделяющий одну определенную длину волны, падает на экран \mathcal{E}_2 , в котором имеются две узкие одинаковые параллельные друг другу щели, расположенные перпендикулярно плоскости рисунка и являющиеся когерентными источниками света S_1 и S_2 , расстояние между которыми равно расстоянию между щелями d . В пространстве за экраном \mathcal{E}_2

распространяются две цилиндрические волны. Область, в которой эти волны перекрываются, называется **полем интерференции**. При помещении экрана в любом месте поля интерференции на нем будет видна интерференционная картина.

В опыте Юнга интерференцию наблюдают на экране Э₃, расположенном, как показано на рис. 4.2 на расстоянии l от экрана Э₂. Положение точки наблюдения P на экране Э₃ характеризуется координатой x . Согласно обозначениям рис. 4.2, r_1 и r_2 связаны с l , d и x по теореме Пифагора соотношениями:

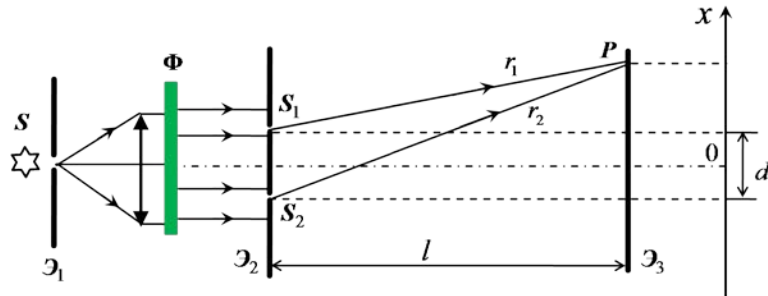


Рис.4.2 Схема опыта Юнга.

$$r_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, r_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2. \quad (4.15)$$

Вычитая одно равенство из другого, получим

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2xd. \quad (4.16)$$

Как будет показано ниже, для наблюдения интерференционной картины d и x должны быть значительно меньше расстояния до экрана l . Таким образом, можно считать, что

$$r_2 + r_1 \approx 2l. \quad (4.17)$$

С учётом (4.16) и (4.17) вычислим оптическую разность хода лучей, приходящих в точку P от щелей:

$$\Delta L = n(r_2 - r_1) \cong \frac{nx d}{l}. \quad (4.18)$$

Из выражений (4.10), (4.13) и (4.18) можно определить координаты максимумов и минимумов интенсивности света на экране:

$$x_{\max} = m \frac{l}{d} \lambda, \quad (4.19)$$

$$x_{\min} = (2m + 1) \frac{l \lambda}{d}, \quad (4.20)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а $\lambda = \lambda_0 / n$ - длина волны в среде, заполняющей пространство за экраном.

Определим расстояние между соседними интерференционными максимумами:

$$\Delta x_{\max} = (m + 1) \frac{l}{d} \lambda - m \frac{l}{d} \lambda = \frac{l}{d} \lambda. \quad (4.21)$$

На экране (рис.4.3) симметрично по обе стороны относительно центрального максимума будут наблюдаться чередующиеся темные и светлые полосы, ширина которых (см. 4.21) тем больше, чем больше отношение l/d , т.е. для наблюдения интерференции необходимо выполнение условия $d \ll l$.

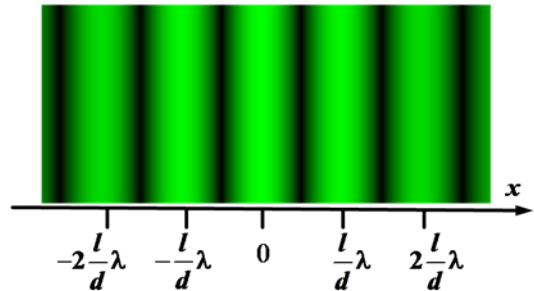


Рис. 4.3 Интерференционные полосы в опыте Юнга.

Также можно получать когерентные источники с помощью изображений реального источника в зеркалах Френеля (рис. 4.4а). Источник S создает мнимые изображения S_1 и S_2 в специально расположенных под небольшим углом φ друг к другу зеркалах OM и ON , в результате чего на экране \mathcal{E}

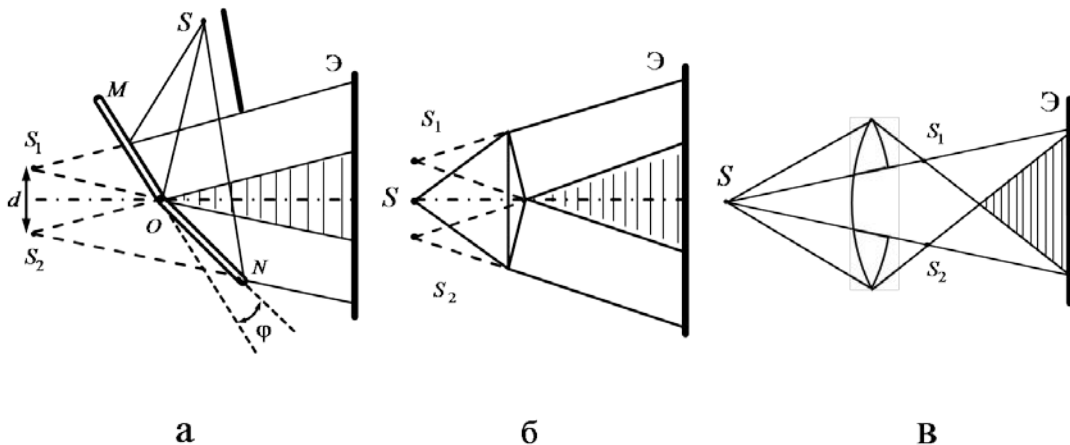


Рис.4.4 Получение когерентных источников по схеме опыта Юнга: а - зеркала Френеля, б - бипризма Френеля; в - билинза Бийе.

можно наблюдать достаточно отчетливую интерференционную картину. В бипризме Френеля (рис. 4.4б), свет от источника S создает иллюзию двух мнимых источников S_1 и S_2 , дающих устойчивую интерференционную картину на экране. В билинзе Бийе, фиктивные источники создаются за счет прохождения света через линзу с вырезанной центральной частью, как это показано на рис.4.4 в.

4.3 Интерференция в тонких пленках

Оказывается, наблюдать интерференцию света можно, даже не располагая специальными приборами. Подобную, так называемую «интерференцию в тонких пленках» мы часто можем наблюдать в повседневной жизни: радужные цвета от бензина на луже, на мыльных пузырях, на крыльях мух или стрекоз и т.п.

Рассмотрим луч света, падающий из воздуха на поверхность плоско-параллельной пленки (пластинки) с показателем преломления n и толщиной b под углом падения i_1 (рис.4.5а). Часть энергии, отраженной от поверхности под углом i_1 , соответствует лучу «1». Часть энергии попадет в пленку под углом преломления i_2 (луч AB), отражается от нижней поверхности пленки (луч BC), преломляется на верхней поверхности и выходит в воздух, как луч «2», параллельно отраженному в точке A лучу «1».

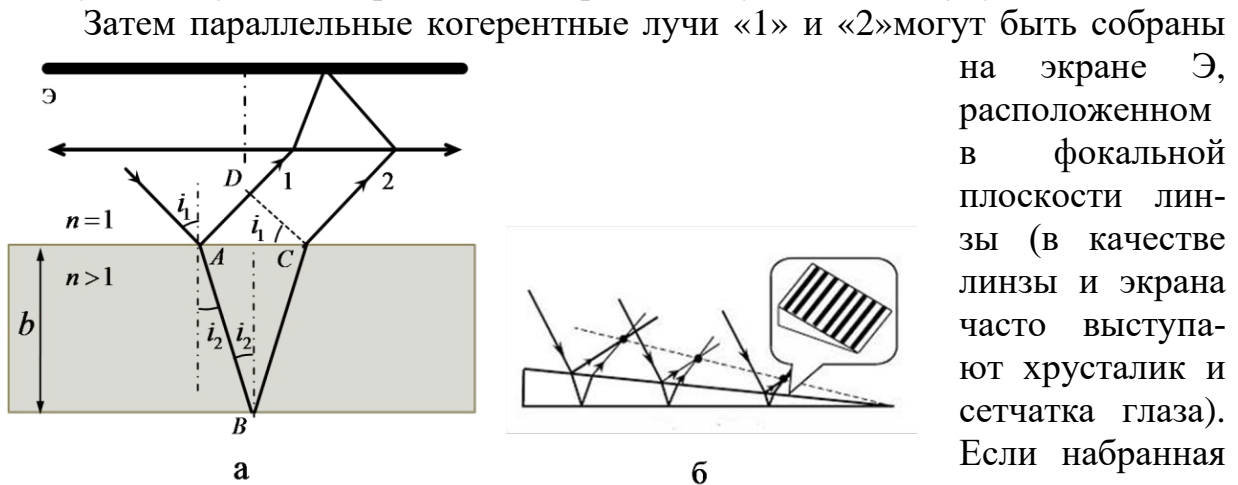


Рис. 4.5. Интерференция в тонких пленках: а – полосы «равного наклона»; б – полосы «равной толщины»

Затем параллельные когерентные лучи «1» и «2» могут быть собраны на экране Э, расположенном в фокальной плоскости линзы (в качестве линзы и экрана часто выступают хрусталик и сетчатка глаза). Если набранная при прохождении через пленку разность хода соответствует интерференционному максимуму, на экране будет наблюдаться светлое пятно.

Построим прямую CD перпендикулярно лучам «1» и «2» и определим оптическую разность хода между ними. При этом необходимо учесть, что при отражении света от границы с оптически более плотной средой (в точке A) фаза волны претерпевает изменение на π (см. раздел 3.2), т.е. к оптической разности хода интерферирующих лучей необходимо добавить (или вычесть) половину длины волны в вакууме:

$$\Delta L = (AB + BC)n - AD \pm \frac{\lambda_0}{2}. \quad (4.22)$$

Учтём, что $AB = BC = \frac{b}{\cos i_2}$; $AD = AC \sin i_1 = 2btg i_2 \sin i_1 = \frac{2bn \sin^2 i_2}{\cos i_2}$

и после подстановки в (4.22) и несложных преобразований получим:

$$\Delta L = \frac{2bn}{\cos i_2} - \frac{2bn \sin^2 i_2}{\cos i_2} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2bn \cos i_2 \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (4.23)$$

Согласно закону преломления света преобразуем $n \cos i_2$:

$$n \cos i_2 = n \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}$$

Окончательно для оптической разности хода лучей «1» и «2» получим:

$$\Delta L = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda_0}{2}. \quad (4.24)$$

Используя выражения (4.10), (4.13) и (4.24), определим условия интерференционных максимумов и минимумов интенсивности на экране.

Условие максимумов:

$$2b \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} = (2m - 1) \frac{\lambda_0}{2},$$

$$\text{где } m = 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Условие минимумов:

$$2b \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} = m \lambda_0,$$

$$\text{где } m = 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

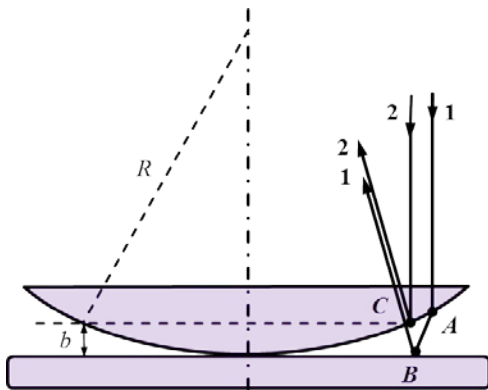


Рис. 4.6. Интерференция света в тонком воздушном зазоре.

Как видно из формул (4.25) и (4.26), максимумы или минимумы образуются для всех лучей, падающих под определенными углами, поэтому наблюдаемые в данном случае интерференционные полосы называются **«полосами равного наклона»**.

Еще один практически интересный случай – интерференция монохроматического света на прозрачном клине при освещении его поверхности параллельным пучком лучей (рис. 4.5б). Поскольку толщина b у клина меняется, условия (4.25) и (4.26), будут периодически выполняться для разных толщин. В результате на поверхности клина появляются интерференционные полосы, показанные на врезке к рис.4.5б и получившие название **«полосы равной толщины»**.

Полосы равной толщины в форме концентрических светлых и темных колец, которые называются **«кольца Ньютона»**, наблюдаются при интерференции света в тонком воздушном слое, заключенном между поверхностью плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны R и плоской стеклянной пластиной (рис. 4.6). Рассмотрим образование колец Ньютона в отраженном свете при его нормальном падении ($i = 0$).

Луч света «1» (рис. 4.6) от источника попадает в точку A , преломляется, идет в воздухе ($n = 1$) до точки B , отражается на границе с оптически более плотной средой с потерей $\frac{\lambda_0}{2}$, доходит до точки C , в которой интерferирует с другим лучом «2», отразившемся от верхней границы воз-

душного зазора в точке C . На рис.4.6 отраженные лучи «1» и «2» для наглядности нарисованы отдельно и с некоторым наклоном. Реально они практически совпадают и направлены вертикально вверх.

Условие максимумов интерференции (4.25) для нормального падения ($i = 0$) перепишем в виде:

$$2bn = (2m - 1) \frac{\lambda_0}{2}, \text{ где } m = 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

Геометрические места точек, для которых выполняется условие максимумов интерференции, имеет вид светлых колец (4.27).

Радиусы колец r вычислим по теореме Пифагора (рис.4.6): $R^2 = (R - b)^2 + r^2$

Для когерентности лучей «1» и «2» необходимо, чтобы выполнялось условие $b \ll R$. Следовательно:

$$r \cong \sqrt{2Rb}. \quad (4.28)$$

Подставляя значение $2b$ из (4.27) в (4.28), приходим к формуле для радиусов светлых колец:

$$r = \sqrt{R(2m - 1) \frac{\lambda_0}{2n}} = \sqrt{R \left(m - \frac{1}{2} \right) \lambda}, \quad \text{где } m = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

Аналогично можно получить и условие для радиусов темных колец.

5. ДИФРАКЦИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН

Дифракция – это огибание волнами различных препятствий. В оптике дифракция волн имеет свою специфику. Под дифракцией световых волн обычно понимают совокупность явлений, которые проявляются как отклонение от законов геометрической оптики при встрече волн с преградами. Наличие дифракции подтверждает волновую природу света.

5.1. Принцип Гюйгенса-Френеля

Теория дифракции волн опирается на так называемый **принцип Гюйгенса-Френеля**, являющийся обобщением принципа Гюйгенса (см. 3.3). В соответствии с рассматриваемым принципом, каждая точка замкнутой волновой поверхности S для источника света, помещенного в точку O , является источником вторичных сферических волн, распространяющихся по всем направлениям. Эти волны когерентны, так как возбуждаются одним первичным источником O . По принципу Гюйгенса-Френеля, световое поле, возникающее в пространстве вне волновой поверхности в результате интерференции вторичных когерентных волн, испускае-

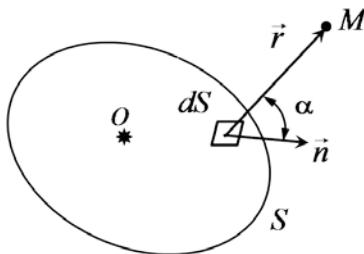


Рис. 5.1. К математической формулировке принципа Гюйгенса-Френеля.

мых отдельными участками этой поверхности, совпадает с полем реального источника света.

Дадим математическую формулировку этого принципа. Окружим источник света O произвольной поверхностью S , совпадающей с одной из волновых поверхностей. Выделим на ней площадку dS с нормалью \vec{n} . Напряженность dE , создаваемая площадкой dS , в точке M , находящейся на расстоянии r от dS (рис.5.1), равна:

$$dE = \frac{A}{r} K(\alpha) \left[\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] dS, \quad (5.1)$$

где A определяется амплитудой волны на площадке dS , α - угол между нормалью к площадке и направлением на точку M , $K(\alpha)$ - так называемый коэффициент Кирхгоффа, плавно убывающий от единицы при $\alpha = 0$ до нуля при $\alpha = \pi/2$. Расстояние r , присутствующее в знаменателе последней формулы, отражающее сферичность вторичных волн. Результирующая напряженность поля в точке M согласно принципу Гюйгенса-Френеля равна:

$$E = \int_S \frac{A}{r} K(\alpha) \left[\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] dS. \quad (5.2)$$

5.2. Дифракция на круглом отверстии

В случае однородной изотропной среды и точечного источника O монохроматического излучения произвольную волновую поверхность S в принципе Гюйгенса-Френеля (5.2) можно взять в виде сферической волновой поверхности с центром в точке O .

Для определения результирующей амплитуды световой волны, испущенной точечным источником, в произвольной точке M , мысленно проведем концентрические сферы с центром в точке M , радиусы которых отличаются по величине на $\lambda/2$, до пересечения с волновой поверхностью S . В результате, сферическая волновая поверхность S окажется разбитой на кольцевые зоны, **зоны Френеля**, такие, что расстояния (b_m) от краев соседних зон до точки M будут отличаться на величину, равную $\lambda/2$:

$$b_m = b + m \frac{\lambda}{2}, \quad (5.3)$$

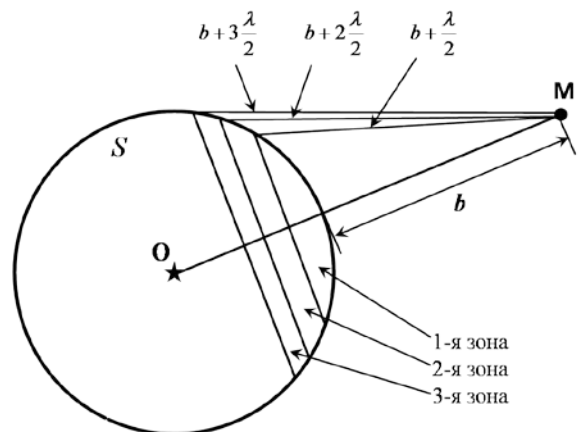


Рис. 5.2 Построение зон Френеля для сферической волновой поверхности.

где $m = 1, 2, 3, \dots$ – номер зоны Френеля, а b – расстояние от точки M до сферической волновой поверхности S .

Можно показать, что, в случае $b \gg \lambda$, относительная разница в площадях соседних зон очень мала ($\approx \lambda/b$). В соответствии со сказанным выше (пункт 4.1), две когерентных световых волны равной амплитуды, разность хода которых составляет $\lambda/2$, при интерференции полностью гасят друг друга. Так как при равенстве площадей количество вторичных когерентных источников в соседних зонах одинаково, то колебания от них в точке M должны практически полностью погасить друг друга.

Поставим на пути световой волны круглую диафрагму (рис.5.3), которая открывает четное число зон Френеля; тогда колебания от всех пар соседних зон скомпенсируют друг друга, и в точке M будет наблюдаться темное пятно. Если же диафрагма открывает нечетное число зон Френеля, то колебания от одной из них останутся не скомпенсированными и в точке M будет светлое пятно. Таким образом, имеет место чередование максимумов и минимумов при изменении диаметра отверстия или расстояния b до точки M .

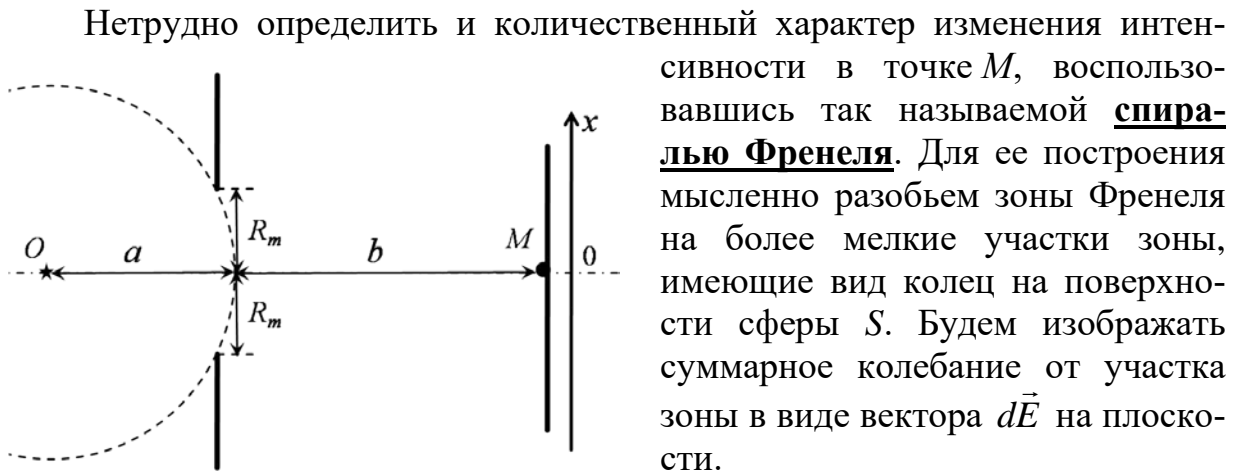


Рис. 5.3. Схема опыта для наблюдения дифракции на круглом отверстии.

Нетрудно определить и количественный характер изменения интенсивности в точке M , воспользовавшись так называемой **спиралью Френеля**. Для ее построения мысленно разобьем зоны Френеля на более мелкие участки зоны, имеющие вид колец на поверхности сферы S . Будем изображать суммарное колебание от участка зоны в виде вектора $d\vec{E}$ на плоскости.

При рассмотрении интерференции когерентных волн мы установили связь между разностью фаз и оптической разностью хода для складываемых колебаний. Из соотношения (4.8) следует, что суммарный вектор $d\vec{E}$ от одного участка зоны должен быть повернут относительно вектора $d\vec{E}$ от соседнего участка зоны на некоторый небольшой угол $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{\delta x}{\lambda}, \quad (5.4)$$

где δx - разность хода между лучами от средних точек соседних участков

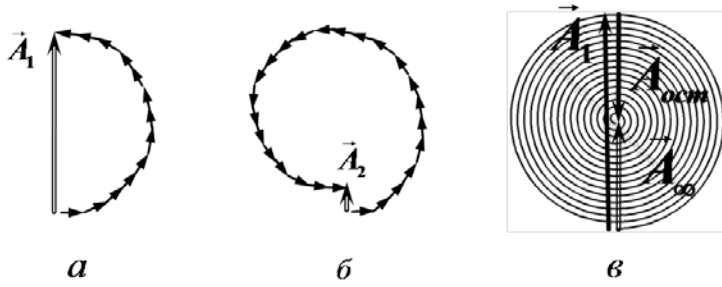


Рис.5.4. Построение Френеля для случая, когда в отверстии укладывается одна зона Френеля (а); две зоны (б); полностью открытый волновой фронт (в).

малых участков зон представлен на рис.5.4. Нетрудно сообразить, что вектор от малого участка зоны, соответствующего внешнему краю первой зоны Френеля развернется на "π" (рис.5.4а). Так как сумма нескольких векторов есть вектор, соединяющий начало первого с концом последнего из них, то амплитуда колебаний от первой зоны Френеля изображается вектором \vec{A}_1 , что соответствует светлому пятну в центре дифракционной картины, а от суммы первой и второй зон (рис.5.4б) – вектором \vec{A}_2 (относительно темный центр). Естественно, чем меньше размер малых участков зон, тем точнее проведенные рассуждения. В пределе бесконечно малых участков зон ломаная линия переходит в непрерывную кривую, называемую спиралью Френеля (рис.5.4в).

С помощью спирали Френеля можно получить количественную оценку интенсивности света в центре дифракционной картины. В самом деле, амплитуда колебания от первой открытой зоны Френеля изображается вектором \vec{A}_1 . Очевидно, что амплитуда колебаний от полностью открытого волнового фронта изображается вектором \vec{A}_∞ . Из-за близости первого витка спирали к окружности, можно предположить, что $A_1 \approx 2A_\infty$, или, что то же самое, для интенсивности света в точке M : $I_1 \approx 4I_\infty$.

Любопытно заметить, что в колебаниях открытого фронта первая зона представлена вектором \vec{A}_1 , а остальные зоны - вектором $\vec{A}_{ост}$, равным по модулю и направленным навстречу \vec{A}_∞ (рис.5.4в). Поэтому, если перекрыть первую зону Френеля непрозрачным диском, то в точке M (то есть в центре геометрической тени) будет наблюдаться так называемое «пятно Пуассона» с начальной интенсивностью $\approx I_\infty$.

При большом числе открытых зон увеличение радиуса отверстия, т.е. увеличение числа открытых зон, не приводит к заметному изменению интенсивности (рис.5.4в). Происходят лишь небольшие колебания интенсивности света в точке M .

При этом, амплитуда колебаний от следующего участка зоны, начиная от ближнего к точке M , чуть меньше, чем от предыдущего, из-за уменьшения коэффициента Кирхгоффа в (5.1).

Результат сложения колебаний от отдельных

Если в отверстии уместается только небольшая часть первой зоны Френеля, то, как видно на рис.5.4а, амплитуда колебаний (и интенсивность) в точке M монотонно убывает с уменьшением радиуса отверстия. Колебаний интенсивности света не происходит.

Можно показать, что радиус отверстия R_m в непрозрачной диафрагме (рис.5.3) связан с числом зон Френеля m , укладывающихся в отверстии, с расстоянием a от отверстия до точечного источника, расстоянием b от отверстия до точки наблюдения M и длиной волны λ следующим соотношением:

$$R_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}} \quad (5.5)$$

Для упрощения анализа перейдем к случаю плоской волны ($a \rightarrow \infty$), падающей на отверстие. Из (5.5) следует:

$$R_m = \sqrt{\frac{m\lambda b}{1+b/a}} = \sqrt{m\lambda b} \quad (5.6)$$

Откуда для числа зон Френеля на круглом отверстии диаметром d , равном $2R_m$, получим:

$$m = d^2 / 4\lambda b \quad (5.7)$$

Как следует из предыдущего рассмотрения, можно выделить три случая дифракции в зависимости от параметра m . Если $m \gg 1$ (большой диаметр отверстия, точка наблюдения недалеко от отверстия, малая длина волны), то колебания интенсивности практически отсутствуют при изменении этих величин. Это случай геометрической оптики. Если значение m порядка 1 или нескольких единиц, то имеют место значительные колебания интенсивности при изменении диаметра отверстия или расстояния до точки наблюдения. Этот случай называется «дифракция Френеля». Если m заметно меньше 1, то интенсивность монотонно падает при увеличении расстоя-

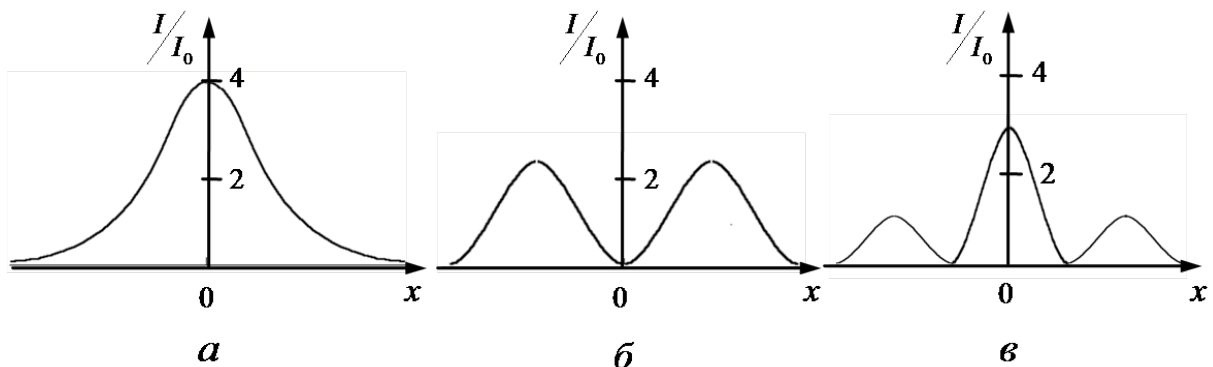


Рис. 5.5. Сравнительное распределение интенсивности света на экране при дифракции на круглом отверстии для одной (а), двух (б) и трех (в) открытых зон Френеля. Этот случай соответствует дифракции практически параллельных лучей и называется «дифракция Фраунгофера».

Более тщательный анализ показывает, что число максимумов интенсивности на экране, на котором наблюдается дифракционная картина, совпадает с числом открытых зон. Для иллюстрации этого утверждения на рис.5.5 приведены зависимости распределе-

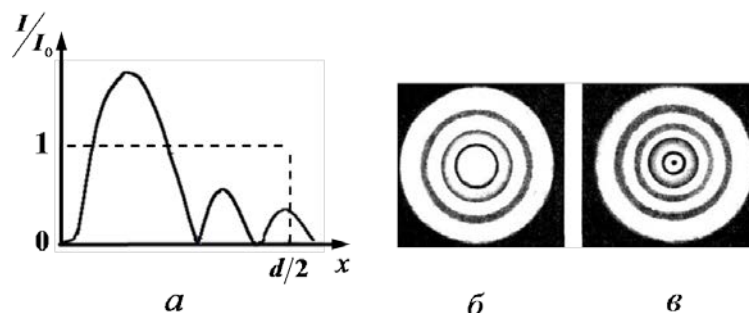


Рис. 5.6. Типичное распределение интенсивности света на экране (а), примеры наблюдаемых дифракционных картинок на экране (б, в).

ния относительной интенсивности света на экране (I/I_0) от расстояния x относительно центра дифракционной картины ($x = 0$) для случая одной, двух и трех открытых зон Френеля (I_0 – интенсивность света при отсутствии диафрагмы).

На рис. 5.6а приведено одно из типичных распределений интенсивности света на экране при дифракции на круглом отверстии. Дифракционные картинки на рис.5.6б и 5.6в соответствуют двум разным диаметрам отверстий.

5.3 Дифракция на щели

Схема изучения дифракции Фраунгофера на щели представлена на рис.5.7а. Щель расположена перпендикулярно плоскости рисунка. Параллельный пучок лучей монохроматического света падает нормально на щель шириной b , за которой располагается собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран. Распределение интенсивности света в зависимости от положения точки P на экране и наблюдаемая дифракционная картина приведены на рис. 5.7б и рис. 5.7в. Точки поверхности плоскости щели можно рассматривать как совокупность точечных когерентных вторичных источников света в виде узких полосок, параллельных краям щели, и излучающих вторичные волны (лучи) в различных направлениях. В прямом направлении ($\varphi = 0$) фазы колебаний для всех вторичных волны совпадают, и в центре экрана будет всегда наблюдаться максимум интенсивности света независимо от длины волны.

Для определенного направления, характеризуемого углом дифракции ($\varphi \neq 0$), параллельные лучи от разных вторичных источников собираются в так называемом побочном фокусе линзы, т.е. в точке пересечения прямой, параллельной лучам и проходящей через центр линзы (точка C), с фокальной плоскостью (точка P на рис. 7а).

Для упрощения анализа распределения интенсивности света на экране, удобно разделить поверхность щели на зоны Френеля, т.е. на полосы, параллельные краям щели, с разностью фаз параллельных лучей, идущих от противоположных краев одной зоны, равной $\lambda/2$.

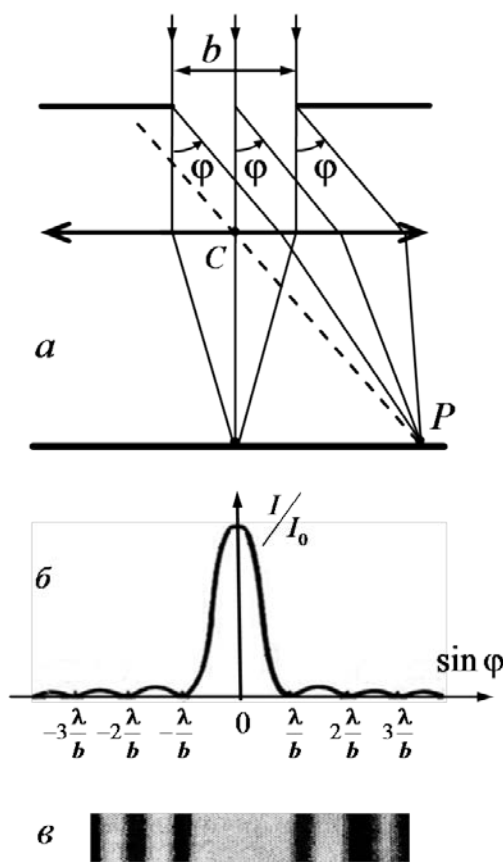


Рис.5.7 Схема наблюдения дифракции Фраунгофера на щели (а); распределение интенсивности света на экране (б); наблюдаемая дифракционная картина (в).

относительно центрального максимума.

Строгое применение принципа Гюйгенса-Френеля в этом случае приводит к следующей формуле для распределения интенсивности света в фокальной плоскости линзы (рис.5.7б) [4]:

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi, \quad (5.10)$$

где I_0 интенсивность в центре дифракционной картины ($\varphi = 0$). Соответствующая формуле (5.10) физическая картина, наблюдаемая на экране, показана на рис. 7б.

Если на щели для данного направления помещается чётное число зон Френеля, тогда колебания от всех пар соседних зон скомпенсируют друг друга, и в точке P будет наблюдаться минимальная интенсивность света. Таким образом, условию минимумов интенсивности света при дифракции на щели соответствует равенство оптической разности хода для лучей, идущих в данном направлении от краёв щели, чётному числу длин полуволн или целому числу длин волн:

$$b \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3... \quad (5.8)$$

В случае нечетного числа зон Френеля колебания от одной из зон останутся не скомпенсированными, и в точке P будет светлое пятно. Условие максимумов при дифракции на щели имеет вид:

$$b \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3... \quad (5.9)$$

Таким образом, на экране имеет место чередование светлых и темных полос, симметрично расположенных относительно центрального максимума.

5.4. Дифракционная решетка

Простейшая дифракционная решетка представляет собой стеклянную пластинку с множеством одинаковых прозрачных параллельных полос, разделенных одинаковыми непрозрачными промежутками. В этом случае дифракция подобна дифракции на одинаковых параллельных щелях, кото-

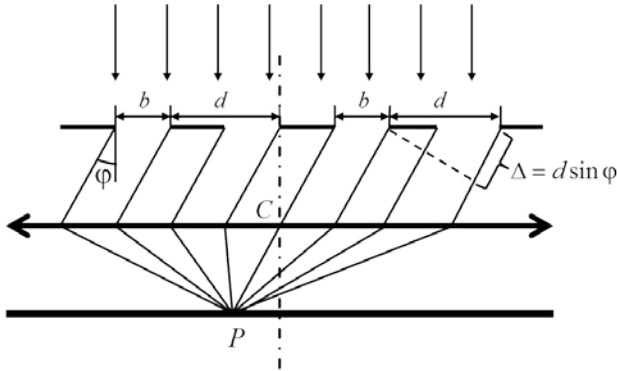


Рис.5.8 Модель дифракционной решётки.

рые можно рассматривать как совокупность точечных когерентных вторичных источников света, излучающих вторичные волны в различных направлениях. На рис.5.8 показана плоская волна, падающая нормально на дифракционную решетку, после которой все параллельные лучи, идущие в одном направлении под углом дифракции φ относительно нормали к плоскости дифракционной решетки, собираются на экране в точках фокальной плоскости линзы (дифракция Фраунгофера). Характер дифракционной картины определяют следующие параметры решетки: расстояние между аналогичными точками соседних щелей, равное d (период решетки), ширина отдельной щели (прозрачной полосы) b , число щелей решетки N .

Разность хода лучей, исходящих от аналогичных точек соседних щелей, равна: $\Delta = d \sin \varphi$ (рис.5.8). Если при этом

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.11)$$

то волны, испускаемые всеми щелями решетки в этом направлении, максимально усиливают друг друга при интерференции и на экране возникают так называемые «главные максимумы». При $\varphi = 0$ возникает центральный максимум. Симметрично по обе стороны от него расположены главные максимумы 1-го, 2-го, и т.д. порядков (рис. 5.9). При выполнении условия «главных максимумов» (5.11)

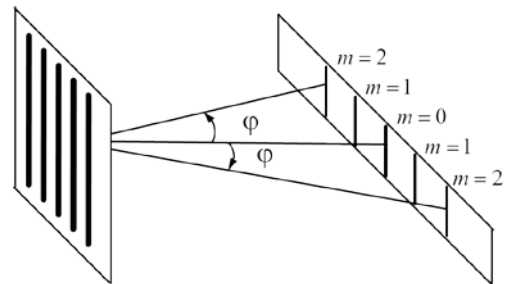


Рис.5.9 Положение главных максимумов дифракционной картины.

амплитуды волн, излучаемых щелями, складываются. Учитывая, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, получаем, что интенсивность в главных максимумах

$$I_m(\varphi) = N^2 I_\alpha(\varphi), \quad (5.12)$$

где $I_\alpha(\varphi)$ – интенсивность волны, излучаемой отдельной щелью в направлении, характеризуемом углом дифракции φ .

Интенсивность света, приходящего на экран от отдельной щели зависит от угла дифракции φ (рис. 5.7б). В частности функция $I_\alpha(\varphi)$ обращается в ноль при углах, для которых выполняется условие (5.8). В направлении

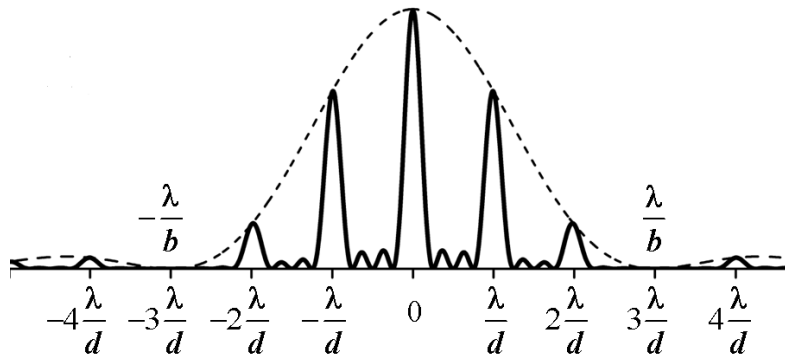


Рис.5.10 Распределение интенсивности света на экране при дифракции на решётке ($d = 3b, N = 4$).

этих углов щели не излучают. Таким образом, соотношение (5.8) является условием «главных минимумов» для дифракционной решётки. На рис. 5.10 представлено распределение интенсивности света на экране для дифракционной решётки, когда $d = 3b$. Если ширина щели в несколько раз меньше периода решетки, то функция $I_\alpha(\varphi)$ сравнительно медленно меняется в зависимости от угла φ . Поэтому функция $I_\alpha(\varphi)$ является огибающей главных максимумов. Обычно между центральным максимумом ($\sin \varphi = 0$) и первым главным минимумом ($\sin \varphi = \pm \lambda/b$) помещается несколько главных максимумов, которые играют важную роль в исследованиях с использованием дифракционной решетки. Главные максимумы, находящиеся между другими главными минимумами имеют значительно меньшую интенсивность (рис. 5.10). Число главных максимумов ограничено. Действительно, из равенства (5.11) следует, что должно выполняться условие $|\sin \varphi| = \frac{m\lambda}{d} \leq 1$, т.е. максимальный порядок главного максимума:

$$m_{\text{макс}} = \frac{d}{\lambda}.$$

Для анализа изменения интенсивности света дифракционной картины в промежутке между главными максимумами построим векторную диаграмму. Для каждой щели на плоскости построим вектор, величина которого равна величине результирующей амплитуде колебаний, приходящих на экран в данном направлении (рис. 5.11). Так как амплитуды волн от всех щелей одинаковы, то все вектора будут одинаковы по модулю: $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_N$, где N - число щелей дифракционной решётки. Угол наклона каждого из векторов относительно \vec{A}_1 (для первой щели) определяется его фазой. Разность фаз волн, идущих от соседних щелей, подобно (5.4), связана с разностью хода Δ (рис.5.8) соотношением:

$$\delta = 2\pi\Delta/\lambda = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \varphi . \quad (5.13)$$

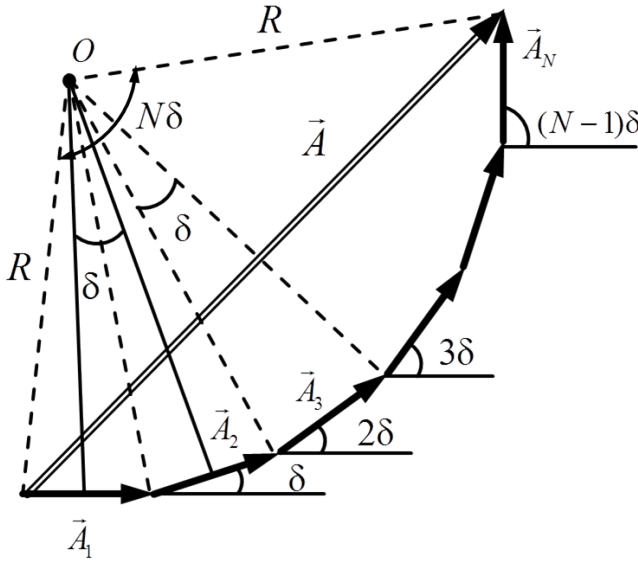


Рис.5.11 Построение результирующего вектора амплитуды дифракционной картины в направлении угла φ .

На рис.5.11 показано построение результирующего вектора амплитуды \vec{A} для определенного направления (φ). Если из середины векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 построить перпендикулярно им прямые (на рис.5.11 сплошные линии), то они пересекутся в точке O под углом δ . Нетрудно видеть, что из точки O начала и концы векторов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ видны под таким же углом δ каждый. Результирующий вектор \vec{A} виден из точки O под углом $N\delta$. При этом, как следует из рисунка 5.11:

$$A_1 = 2R \sin(\delta/2); \quad A = 2R \sin \frac{N\delta}{2} = A_1 \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin(\delta/2)}. \quad (5.14)$$

Учитывая, что интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, для суммарной интенсивности $I_\Sigma(\varphi)$ волны на экране в рассматриваемом направлении получим:

$$I_\Sigma(\varphi) = I(\varphi) \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2(\delta/2)}, \quad (5.15)$$

где $I(\varphi)$ представляет распределение интенсивности света на экране от одной щели. Согласно (5.10)

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)^2} \quad (5.16)$$

Подстановкой (5.16) в (5.15) для суммарной интенсивности $I_\Sigma(\varphi)$ волны на экране в рассматриваемом направлении получим:

$$I_\Sigma(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right) \sin^2 \left(\frac{N\delta}{2} \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}, \quad (5.17)$$

где I_0 - интенсивность в центре дифракционной картины ($\varphi = 0$).

С увеличением φ , т.е. при удалении от центрального максимума разность фаз $N\delta$ увеличивается и при некотором значении φ , когда $\delta = 2\pi/N$ станет равной 2π , цепочка векторов на рис.5.11 замкнется и суммарная амплитуда обратится в ноль. Очевидно, это будет иметь место и при кратных $2\pi/N$ значениях разности фаз:

$$\delta_n = 2\pi n/N, \text{ где } n = 1, 2, \dots, (N-1), (N+1), \dots, (2N-1), (2N+1), \dots \quad (5.18)$$

Значения, кратные полному числу щелей N , исключены, так при этих значениях все вектора выстраиваются в одну линию ($\delta = 2\pi$), что соответствует условию главных максимумов.

Таким образом, условие (5.18) для разности фаз волн от соседних щелей определяет условия добавочных минимумов. Число добавочных минимумов, располагающихся между соседними главными максимумами, как следует из (5.18) равно $N-1$.

Между добавочными минимумами находятся добавочные максимумы. Однако их интенсивность мала и практической роли они не играют.

На рис. 5.10 представлено распределение интенсивности света на экране для числа щелей $N = 4$. Для наглядности взято небольшое число щелей. Обычно для дифракционных решёток $N \gg 1$, и число добавочных минимумов и максимумов велико.

Оценим угловую ширину главных максимумов. Для этого приравняем правые части равенства (5.13) и равенства (5.18) для разности фаз δ_n , затем запишем углы дифракции φ_n , при которых возникают добавочные минимумы:

$$\varphi_n = \arcsin \frac{n\lambda}{Nd}, \text{ где } n = 1, 2, \dots, (N-1), (N+1), \dots, (2N-1), (2N+1), \dots \quad (5.19)$$

Для примера рассмотрим центральный главный максимум. Для ближайших к нему добавочных минимумов слева и справа $n = 1$. Таким образом, угловая ширина центрального максимума равна:

$$\Delta\varphi = 2 \arcsin \frac{\lambda}{Nd} \approx \frac{2\lambda}{Nd} \ll 1 \quad (5.20)$$

Таков же порядок величины для угловой ширины и других главных максимумов. Так как обычно $N \gg 1$, то угловая ширина главных максимумов очень мала.

5.5. Дифракционная решетка как спектральный прибор

Если на дифракционную решётку падает естественный некогерентный свет, то для каждой из длин волн на экране будут наблюдаться дифракционные максимумы, смещённые относительно друг друга, в соответствии с условием главных максимумов (5.11). Произойдет разложение света в сплошной спектр – от коротковолнового синего цвета к длинноволновому красному (рис. 5.12). Естественно, спектров будет несколько, соответствующих разным порядкам m , и расположенных симметрично слева и справа от центрального неокрашенного максимума ($\varphi = 0$). Это свойство решетки разлагать падающий свет в спектр делает ее одним из основных

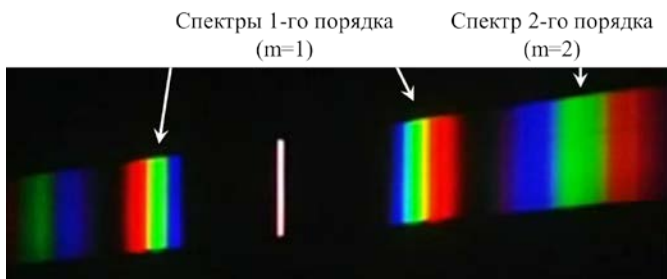


Рис.5.12 Вид сплошных спектров, полученных при помощи дифракционной решётки.

приборов для изучения сплошных и линейчатых спектров источников света.

Линейчатые спектры наблюдаются от атомных или молекулярных источников света и выглядят как яркие цветные линии на фоне сплошных спектров излучения нагретых тел. Некоторые линии оказы-

ваются слабо различимыми или накладываются одна на другую. Эти проблемы оказываются разрешимыми, если использовать современные дифракционные решётки с большим числом «щелей» и малой величиной d . Такие решётки работают, как правило, в отражённом свете и представляют собой систему штрихов, нанесенных на поверхность подложки специальной «делительной» машиной. К настоящему времени техника изготовления дифракционных решеток стала настолько совершенной, что в современных спектрометрических приборах применяются решётки с числом «штрихов», равным до 2400 на 1 мм.! [5].

Введём важные с практической точки зрения характеристики дифракционной решётки.

Угловой дисперсией называется величина

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \quad (5.21)$$

где $\delta\varphi$ - изменение угла дифракции, для которого имеет место главный максимум, при изменении длины волны на величину $\delta\lambda$. Найдем связь угловой дисперсии с параметрами решетки. Взяв вариацию от левой и правой частей уравнения (5.11), получим:

$$d \cdot \cos \varphi \cdot \delta\varphi = m\delta\lambda$$

Отсюда:

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos \varphi}. \quad (5.22)$$

Таким образом, угловая дисперсия, т.е. угловое расхождение линий спектра тем больше, чем больше порядок спектра и чем меньше период решетки.

Чтобы две спектральные линии, имеющие близкие по величине длины волн λ_1 и λ_2 (пусть $\lambda_1 < \lambda_2$) были видны раздельно и не сливались, надо чтобы кривая зависимости интенсивности от длины волны имела провал (рис. 5.13). Условие максимумов (5.11) для двух близких по величине линий в спектре одного порядка запишем в виде

$$d \sin \varphi_1^{\max} = m\lambda_1; \quad d \sin \varphi_2^{\max} = m\lambda_2. \quad (5.23)$$

Как установил Релей, две линии будут видны раздельно, если в области провала интенсивность не превышает 80% от интенсивности в областях максимумов. В свою очередь это выполняется, если максимум для длины волны λ_1 совпадет с добавочным минимумом, ближайшим к максимуму длины волны λ_2 в спектре данного порядка:

$$d \sin \varphi_1^{\max} = d \sin \varphi_2^{\min} \quad (5.24)$$

Между двумя главными максимумами монохроматического излучения, как следует из условия (5.18), располагается $(N - 1)$ минимум. Положение ближайшего к длине волны λ_2 слева минимума запишем в виде:

$$d \sin \varphi_2^{\min} = m\lambda_2 - \frac{\lambda_2}{N}. \quad (5.25)$$

После подстановки (5.23) и (5.25) в (5.24) получим:

$$m\lambda_1 = m\lambda_2 - \frac{\lambda_2}{N}$$

Отсюда:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = mN \quad (5.26)$$

Отношение λ к минимальной $\delta\lambda_{\min}$, которая может быть разрешена данной решеткой, называют **разрешающей способностью** дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = mN. \quad (5.27)$$

Таким образом, разрешающая способность решетки зависит от порядка спектра m и общего числа штрихов в решетке N .

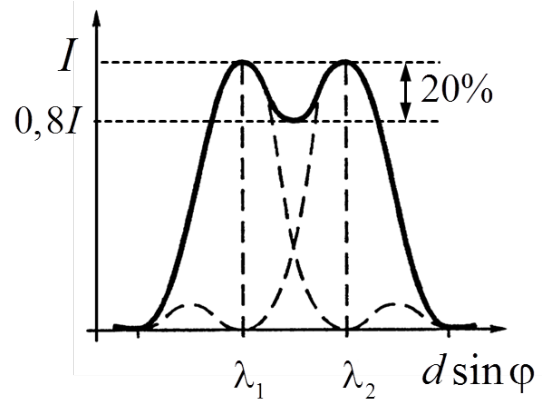
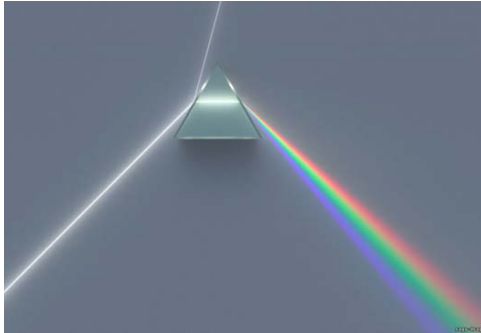


Рис. 5.13 Разрешение близких по величине спектральных линий.

6. ДИСПЕРСИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН

6.1. Понятие о дисперсии света

Дисперсией света называются явления, связанные с зависимостью показателя преломления света от длины волны (частоты): $n = n(\lambda)$. С дисперсией света связано разложение белого света в сплошной спектр, включающий в себя красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий и



Ф.С.Г.З.Ж.О.К.

Рис. 6.1 Классический опыт по наблюдению дисперсии света. (Ф - фиолетовый, С - синий..., К - красный).

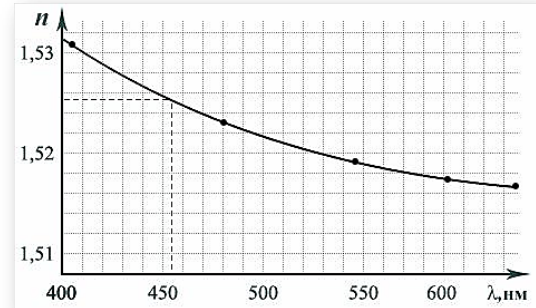


Рис. 6.2 Зависимость показателя преломления стекла от длины волны в оптическом диапазоне

фиолетовый цвета. Явление дисперсии наблюдается при прохождении естественного света через стеклянную призму (рис. 6.1 **Ошибка! Источник ссылки не найден.**). Для большинства прозрачных веществ показатель преломления уменьшается с увеличением длины волны (рис.6.2): $(dn/d\lambda) < 0$. «Фиолетовые» лучи преломляются сильнее «красных» лучей.

Исследование дисперсии электромагнитных волн в более широком диапазоне длин волн, включая инфракрасные и ультрафиолетовые волны, показывает, что зависимость показателя преломления от длины волны $n = n(\lambda)$ носит более сложный характер (рис.6.3).

В диапазоне длин волн, отмеченных буквой «H» на рис.6.3, показатель преломления n уменьшается с увеличением λ . В этом случае $(dn/d\lambda) < 0$ и дисперсию называют «**нормальной**».

В диапазоне длин волн, отмеченном буквой «A» на рис.6.3, показатель преломления n увеличивается с ростом λ . В этом случае $(dn/d\lambda) > 0$ и дисперсию называют «**аномальной**». Величина $dn/d\lambda$ называется **дисперсией вещества**.

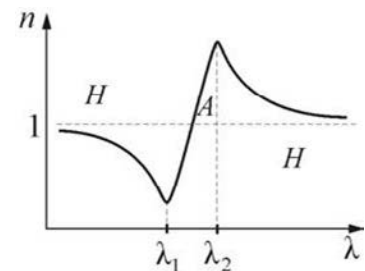


Рис. 6.3 Зависимость показателя преломления от длины волны в широком диапазоне длин волн.

В основе объяснения явления дисперсии света лежит механизм распространения электромагнитной волны в веществе. В приближении классической физики атом вещества рассматривается как гармонический осциллятор, состоящий из электрона (так называемый «оптический» электрон) с отрицательным зарядом и оставшейся части атома с положительным зарядом. Электрон связан с положительным зарядом атома «квазиупругой» силой, пропорциональной смещению его от положения

равновесия x под действием поля световой волны с частотой ω . Собственная частота колебаний гармонического осциллятора ω_0 близка по величине к резонансной частоте и соответствует частоте, при которой происходит наибольшее поглощение энергии осциллятором.

Падающая электромагнитная волна $E = E_m \cos \omega t$ вызывает вынужденные колебания «оптических» электронов в атомах вещества, которые можно рассматривать как вторичные источники колебаний, излучающие электромагнитные волны в первоначальном направлении их распространения [4].

Взаимодействие электромагнитной волны с диэлектриком связано с явлением поляризации вещества [3]. В случае однородной поляризации для физически малого объёма ΔV , содержащего N атомов, вектор поляризации \vec{P} по модулю равен:

$$|\vec{P}| = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} |\vec{p}_i| = \frac{N|q||x(t)|}{\Delta V}, \quad (6.1)$$

где $|\vec{p}_i| = |q||x(t)| = |q|a|\cos(\omega t - \varphi)|$ - электрический момент диполя осциллятора.

Вектор поляризации зависит от напряженности электрического поля в электромагнитной волне [3]:

$$P = \kappa \varepsilon_0 E(t) = \kappa \varepsilon_0 E_m \cos \omega t, \quad (6.2)$$

где κ - диэлектрическая восприимчивость, связанная с диэлектрической проницаемостью ε и показателем преломления n вещества ($\mu \approx 1$):

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu} \approx \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \kappa} \quad (6.3)$$

Из соотношений (6.1), (6.2) и (6.3) следует зависимость показателя преломления от частоты световой волны:

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \kappa = 1 + \frac{N|q|a|\cos(\omega t - \varphi)|}{\Delta V \varepsilon_0 E_m \cos \omega t}, \quad (6.4)$$

где $N/\Delta V$ имеет смысл концентрации излучающих диполей; a - амплитуда смещения оптических электронов при вынужденных колебаниях, зависящая от соотношения частот ω и ω_0 [6]:

$$a = \frac{|q| E_m}{m |\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (6.5)$$

Для прозрачных диэлектриков во всей видимой части спектра справедливо неравенство $\omega \ll \omega_0$. Иными словами, частота собственных колебаний оптического электрона, т.е. частота поглощения, соответствует ультрафиолетовой, невидимой области спектра. И в диапазоне частот значительно меньших собственной частоты поглощением можно пренебречь. Следова-

тельно, $\varphi = 0$ [6] и выражение (6.4) после подстановки в него (6.5) упрощается:

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{Nq^2}{\Delta V \varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (6.6)$$

Вдали от резонанса амплитуда смещения a (6.5) и показатель преломления n (6.6) уменьшаются с уменьшением ω (увеличением длины волны). Наблюдается нормальная дисперсия, которой соответствует правая часть кривой, отмеченная на рис.6.3 буквой «H», и рис.6.2.

В околорезонансной области, напротив, происходит резкое возрастание $n(\lambda)$, сопровождаемое повышенным поглощением энергии волны, расходуемым на возбуждение вошедших в резонанс атомов. Это область аномальной дисперсии, которой соответствует центральная часть кривой, отмеченная на рис.6.3 буквой «A».

6.2. Групповая скорость

Для гармоники (т.е. бесконечной синусоиды, не имеющей ни конца, ни начала – рис. 3.2а) скорость распространения, называемая «фазовой скоростью», равна $v = c/n$, где c – скорость света в вакууме, n – показатель преломления в веществе. Однако реальное излучение света атомами происходит не гармониками, а их «кусками» - цугами (рис. 3.2б). Для примера, на рис. 6.4 показано положение цуга в разные моменты времени на оси x .

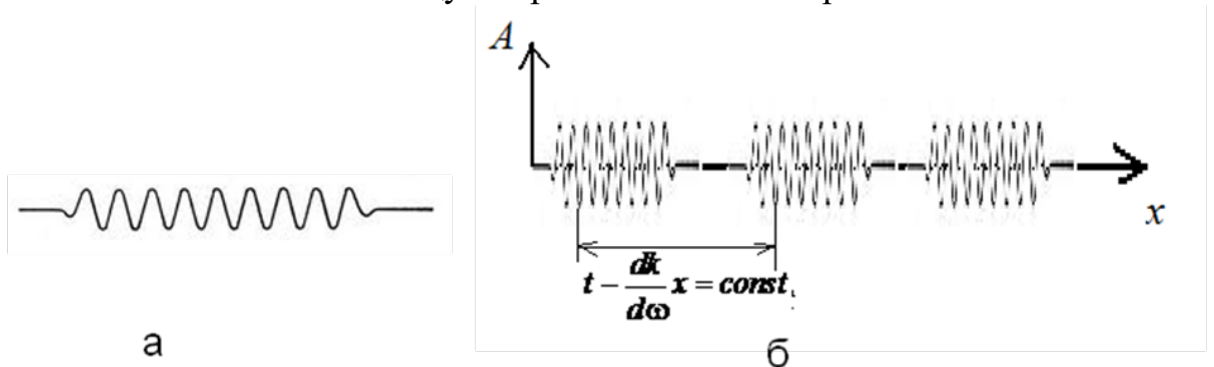


Рис. 0.4. К определению групповой скорости; распространение цуга в пространстве в различные моменты времени t_1, t_2, t_3 .

Уравнение гармоники удобно представить в комплексном виде:

$E(x, t) = E_m(\omega) \cdot e^{i(\omega t - kx)}$. С точки зрения теории интегралов Фурье, цуг представляет собой бесконечную суперпозицию гармоник, напряженность поля которой в комплексной форме записывается как

$$E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \cdot e^{i(\omega t - kx)} dX\omega, \quad (6.7)$$

где $\tilde{F}(\omega)$ - амплитуда отдельной гармоники с частотой ω , $k = \omega/v = \omega n(\omega)/c$ - волновое число. На практике (в обычных условиях) не нужно учитывать бесконечное количество гармоник, казалось бы, предписываемых формулой **Ошибка! Источник ссылки не найден.7)**. Для достаточно длинных импульсов в сравнении с длиной волны (как это будет, например, для импульса на рис. 6.4) модуль $\tilde{F}(\omega)$ резко возрастает в довольно узкой области $\Delta\omega$. Такие импульсы называются «группами волн» или «волновыми пакетами». Для волнового пакета вместо бесконечных пределов интегрирования, можно ограничиться интервалом $\Delta\omega$:

$$E(x,t) \cong \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \tilde{F}(\omega) \cdot e^{i(\omega t - kx)} d\omega. \quad (6.8)$$

Это выражение существенно проще, чем **Ошибка! Источник ссылки не найден.7)**.

Введем новую переменную интегрирования $\omega' = \omega - \omega_0$ и учтем, что в условиях малости $\Delta\omega$ по сравнению с ω_0 , волновое число $k(\omega)$ можно разложить в ряд Тейлора, сохраняя лишь члены первого порядка малости по $\omega' = \omega - \omega_0$:

$$k(\omega) = k(\omega_0 + \omega') \approx k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \cdot \omega' = k_0 + \frac{dk}{d\omega} \omega'. \quad (6.9)$$

В последней части формулы введено обозначение $k(\omega_0) = k_0$ и опущен значок около $dk/d\omega$. Подстановка 6.9) в **Ошибка! Источник ссылки не найден.8)** и замена переменных дает

$$\begin{aligned} E(x,t) &\cong \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \tilde{F}(\omega_0 + \omega') \cdot e^{i[(\omega_0 + \omega')t - (k_0 + \frac{dk}{d\omega}\omega')x]} d\omega' = \\ &= e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \tilde{F}(\omega_0 + \omega') \cdot e^{i(t - \frac{dk}{d\omega}x)\omega'} d\omega' = A(x, t - \frac{dk}{d\omega}x) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Как и следовало ожидать, получившееся выражение наилучшим образом «наследует» свойства гармоники с основной частотой ω_0

($E_0(x,t) = A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$), только вместо постоянной амплитуды A_0 в формуле (6.10) присутствует зависящая от времени и координаты функция

$$A(x, t - \frac{dk}{d\omega}x) = \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \tilde{F}(\omega_0 + \omega') \cdot e^{i(t - \frac{dk}{d\omega}x)\omega'} d\omega'. \quad (6.11)$$

Если задать t , то модуль $A(x,t)$ описывает амплитуду цуга или, лучше сказать, его огибающую (рис. 6.4) в зависимости от координаты x . Если задать x , то модуль $A(x,t)$ описывает огибающую цуга в зависимости от времени t при прохождении цуга через координату x . Из свойств определенного интеграла следует, что $A(x,t)$ сохраняет постоянное значение в любой точке пространства, для которой :

$$t - x \frac{dk}{d\omega} = const . \quad (6.12)$$

Таким образом, можно сказать, что условие (6.12) определяет скорость перемещения точки с постоянным значением A , находящейся внутри импульса. Так как эта скорость одинакова для любой точки внутри импульса, она определяет и саму скорость перемещения импульса как единого целого. Она называется «**групповой скоростью**» и определяется формулой

$$u = dx/dt = d\omega/dk . \quad (6.13)$$

В рассматриваемом приближении (6.9) форма импульса не меняется при его распространении.

Полезно сравнить выражение для групповой скорости с похожим выражением для фазовой скорости: $v = \omega/k$. При этом, фазовая и групповая скорости не совпадают, а связаны т.н. соотношением Рэлея, которое получается, если продифференцировать формулу $\omega = kv$:

$$u = d\omega/dk = v + k \cdot dv/dk .$$

Учтя, что $k = 2\pi/\lambda$ и $dk = -2\pi \cdot d\lambda/\lambda^2$, придем к соотношению Рэлея

$$u = d\omega/dk = v - \lambda \cdot dv/d\lambda \quad (6.14)$$

В среде с дисперсией фазовая скорость различных гармоник – разная. Наиболее быстрые из них будут «убегать» вперед, а наиболее медленные – отставать. Это приведет к некоторой «деформации» (изменению формы) исходного импульса, так как гармоники сдвигаются по мере распространения в среде. Однако для не очень большой дисперсии, изменением формы можно пренебрегать, и считать, что практически исходный импульс распространяется в среде с групповой скоростью u .

Список литературы

1. А. Д. Андреев, Л. М. Черных Физика. Волны: учебное пособие. – СПб.: СПбГУТ, 2015.

2. . Андреев, А. Д. Физика. Магнетизм : конспект лекций / А. Д. Андреев, Л. М. Черных; Федер. агентство связи, ФГОУ ВПО СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича. - СПб.: СПбГУТ, 2009. - 56 с.: ил.

3. Андреев, А. Д. Физика. Электростатика : конспект лекций / А. Д. Андреев, Л. М. Черных Л.М. ; ред. А. А. Костин ; рец. В. А. Подхалюзин; М-во информ. технологий и связи РФ, СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича. - СПб.: СПбГУТ, 2004. - 36 с.

4. Н.И.Калитиевский "Волновая оптика" М., "Высшая школа", 1978.

5. Андреев А. Д. Физика. Колебания: конспект лекций / А. Д. Андреев, Л. М. Черных; СПбГУТ. – СПб., 2013. – 47 с.

6. Сайт ГОИ им. Вавилова - www.npkgoi.ru