Численное дифференцирование и интегрирование

Лекция 8-9-10.

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

План

1. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)
2. Метод последовательных приближений Пикара
3. Метод Эйлера. Понятие явных и неявных методов. Неявный метод Эйлера
4. Метод Эйлера-Коши. Понятие о методах “предиктор-корректор”
5. Метод Рунге-Кутта
6. Методы Адамса
7. Краевые задачи для ОДУ второго порядка
8. Задача Коши для систем ОДУ
9. Системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Анализ характерных временных масштабов на основе собственных чисел. Жесткие системы

Литература

1. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л., Численные методы. –М.: Физматлит, 2004. - 400 с.
2. Поршнев С.В., Беленкова И.В., Численные методы на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.
3. Киреев В.И., Пантелеев А.В., Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. М. Высшая школа, 2006 г., - 460 с.

Задача Коши для дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка: $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ **(1)**

ДУ, разрешенное относительно производной: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ **(2)**

Решение ДУ на интервале I – непрерывно дифференцируемая функция ***y* = *φ*(*x*),** превращающая уравнение в тождество на интервале ***I*:**

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x))$$

Интегральная кривая – график решения ДУ ***y* = *φ*(*x*)**

Задача Коши (начальная задача) – задача о нахождении решения ДУ (2), удовлетворяющего начальному условию:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

Если функция *f* определена и непрерывна в некоторой замкнутой области ***G*** и имеет в этой области ограниченную частную производную по ***y*** $f'_y(x, y)$, то ***существует и притом только одно*** решение задачи Коши с начальным условием во внутренних точках x_0 области ***G*.**

Задача Коши в виде эквивалентного интегрального уравнения

Задача Коши:
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Переписываем ДУ:
$$dy = f(x,y)dx;$$

Интегрируем от x_0 до x:
$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

Получаем интегральное уравнение:
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

Проверка:
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \right) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x,y)dx = y_0 \end{cases}$$

Метод последовательных приближений Пикара

Ищем приближенное аналитическое решение задачи Коши

Интегральное уравнение, эквивалентное задаче Коши:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \qquad (1)$$

- Нулевое приближение: $y_0(x) = y_0 = const$
- Первое приближение – подставляем нулевое приближение в (1) $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$
- Второе приближение – подставляем первое приближение в (1) $y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$
- и так далее $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$

Т.о. имеем последовательность аналитических функций, сходящуюся к решению при $|x - x_0| \le d$

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \dots$$

Оценка погрешности *k*-го приближения:

$$|y(x) - y_k(x)| \le M^k N \frac{d^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$M = \max\left|f_y'(x, y)\right|; \qquad N = \max\left|f(x, y)\right|; \qquad d = \min\left(a, b/N\right)$$

Сеточные методы решения задачи Коши

Решение ищется в ***узлах сетки***: $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

Шаг сетки (***шаг интегрирования***): $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \ldots, n-1$

Равномерная (***регулярная***) ***сетка***:

$$h_{i+1} = h = \mathrm{const}$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \ldots, n$$

Неравномерная (***нерегулярная***) ***сетка***: $h_{i+1} \neq \mathrm{const}$

$$y_0, y_1, \ldots, y_n$$

$$y_0, y(x_1), \ldots, y(x_n)$$

Решение находится в виде ***последовательности значений***, являющихся приближением значений точного решения в узлах сетки Ω_n

$$\varphi(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

Сеточное представление известной функции $\varphi(x)$ называется ***проекцией*** $\varphi(x)$ на сетку Ω_n

$$y_{i+1} = \Phi(x_{i-k+1}, \ldots, x_i, y_{i-k+1}, \ldots, y_i)$$

$$y_{i+1} = \Phi(x_{i-k+1}, \ldots, x_i, \boxed{x_{i+1}}, y_{i-k+1}, \ldots, y_i, \boxed{y_{i+1}})$$

$$k = 1$$

$$k > 1$$

Явный метод:

Ошибки сеточных методов

Локальная ошибка численного метода решения ОДУ – ошибка на одном шаге сетки: $\varepsilon_{i+1}(h) = \hat{y}_{i+1} - y(x_{i+1})$

Глобальная ошибка численного метода решения ОДУ – ошибка, накапливающаяся к последнему шагу сетки, сумма всех локальных ошибок: $e_n(h) = \hat{y}_n - y(x_n)$

Порядок точности (***точность***) численного метода решения ОДУ - число p такое, что глобальная ошибка связана с шагом сетки соотношением: $e_n(h) = O(h^p)$

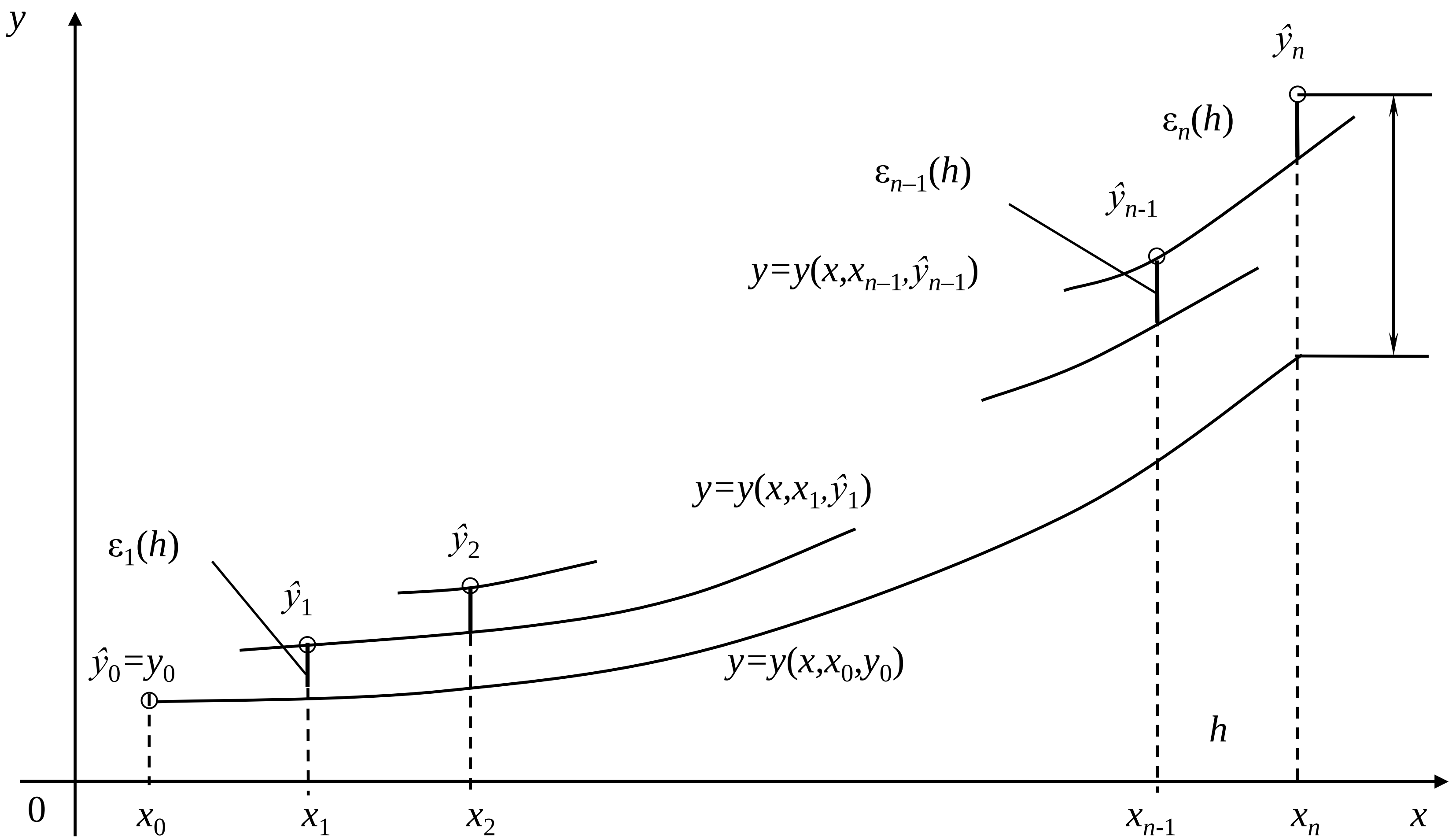
Часто используемая на практике характеристика точности метода:

$$\varepsilon(h) = \max_{i=0,1,\ldots,n} \left| \hat{y}_i - y(x_i) \right|$$

Источники глобальной ошибки

- ***Методические ошибки*** - ошибки метода (например, ошибки численной аппроксимации производных)
- ***Переходные ошибки*** – ошибки, связанные с неточностью значений, полученных на предыдущих шагах
- ***Ошибки округления***

Локальная и глобальная ошибки



Устойчивость и сходимость сеточных методов

Устойчивость численного метода - непрерывная зависимость численных результатов от входных данных и ограниченность погрешности при заданных пределах изменения параметров метода (шагов сетки, числа итераций и др.).

Сходимость численного метода - стремление численных результатов к точному решению, при стремлении параметров метода к определенным предельным значениям, например, шага сетки к 0 или количества итераций к бесконечности.

Проверка сходимости метода. Фиксируется некоторая точка $x > x_0$ и строится последовательность сеток Ω_n , таких, что шаг сетки $h \to 0$, $x = x_n = x_0 + nh$. Тогда, если $\left|\hat{y}_n - y(x_n)\right| \to 0$ при $h \to 0$ $(s \to \infty)$, то метод является *сходящимся* в точке x. Если метод сходится в каждой точке $x \in [c,d] \subset (a,b)$, то он сходящийся на $[c,d]$.

Метод Эйлера

$$y_0 = y(x_0)$$

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 0,1,2\ldots)$$

$$(L_0L_1): \quad y = y_0 + f(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)$$

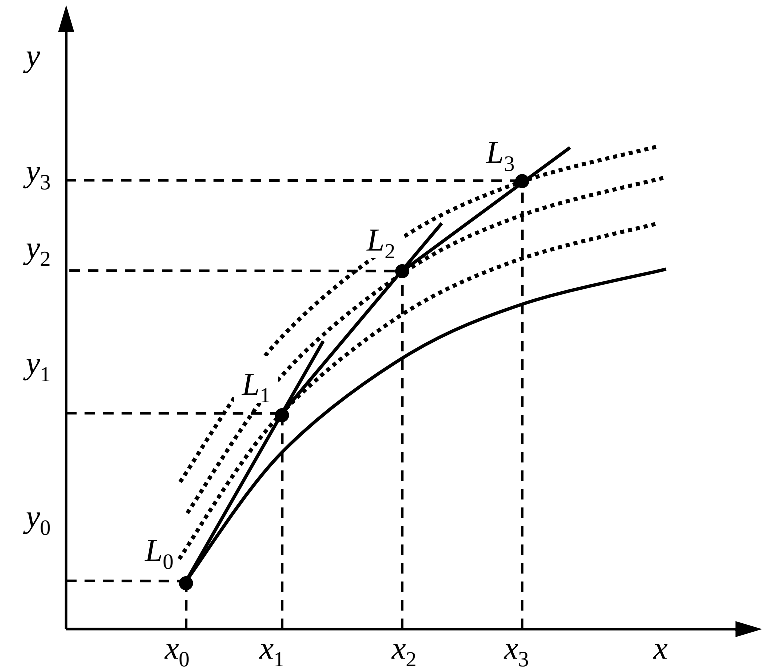
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$\Delta y_0 = hf(x_0, y_0)$$

$$(L_1L_2): \quad y = y_1 + f(x_1, y_1)\cdot(x - x_1)$$

$$\Delta y_k = hf(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$



Метод Эйлера – метод ломаных

$$\Delta = y(x_1) - \left(y_0 + hf(x_0, y_0)\right) = y(x_0 + h) - \left(y_0 + hf(x_0, y_0)\right) =$$

$$= y_0 + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \ldots - \left(y_0 + hf(x_0, y_0)\right) \approx y''(x_0)\frac{h^2}{2!} = O(h^2)$$

$$\Delta_S \propto N\Delta = N \cdot O(h^2) = \frac{b-a}{h} O(h^2) = O(h)$$

Пример. Явный метод Эйлера

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{a} \\ y(0) = A \end{cases}$$

$$y(x) = A\exp(-x/a)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = -\frac{y_i}{a}$$

Пример. Явный метод Эйлера

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{a} \\ y(0) = A \end{cases}$$

$$y(x) = A\exp(-x/a)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = -\frac{y_i}{a}$$

$$y_{i+1} = y_i(1 - h/a)$$

$$y_i = y_0(1 - h/a)^i$$

Пример. Неявный метод Эйлера

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{a} \\ y(0) = A \end{cases}$$

$$y(x) = A\exp(-x/a)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = -\frac{y_{i+1}}{a}$$

Пример. Неявный метод Эйлера

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{a} \\ y(0) = A \end{cases}$$

$$y(x) = A\exp(-x/a)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = -\frac{y_{i+1}}{a}$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{1 + h/a} y_i$$

$$y_i = \frac{1}{(1 + h/a)^i} y_0$$

Метод Эйлера-Коши

Интегрирование задачи Коши

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$

Численное интегрирование методом трапеций

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + O(h^3)$$

Реализация метода

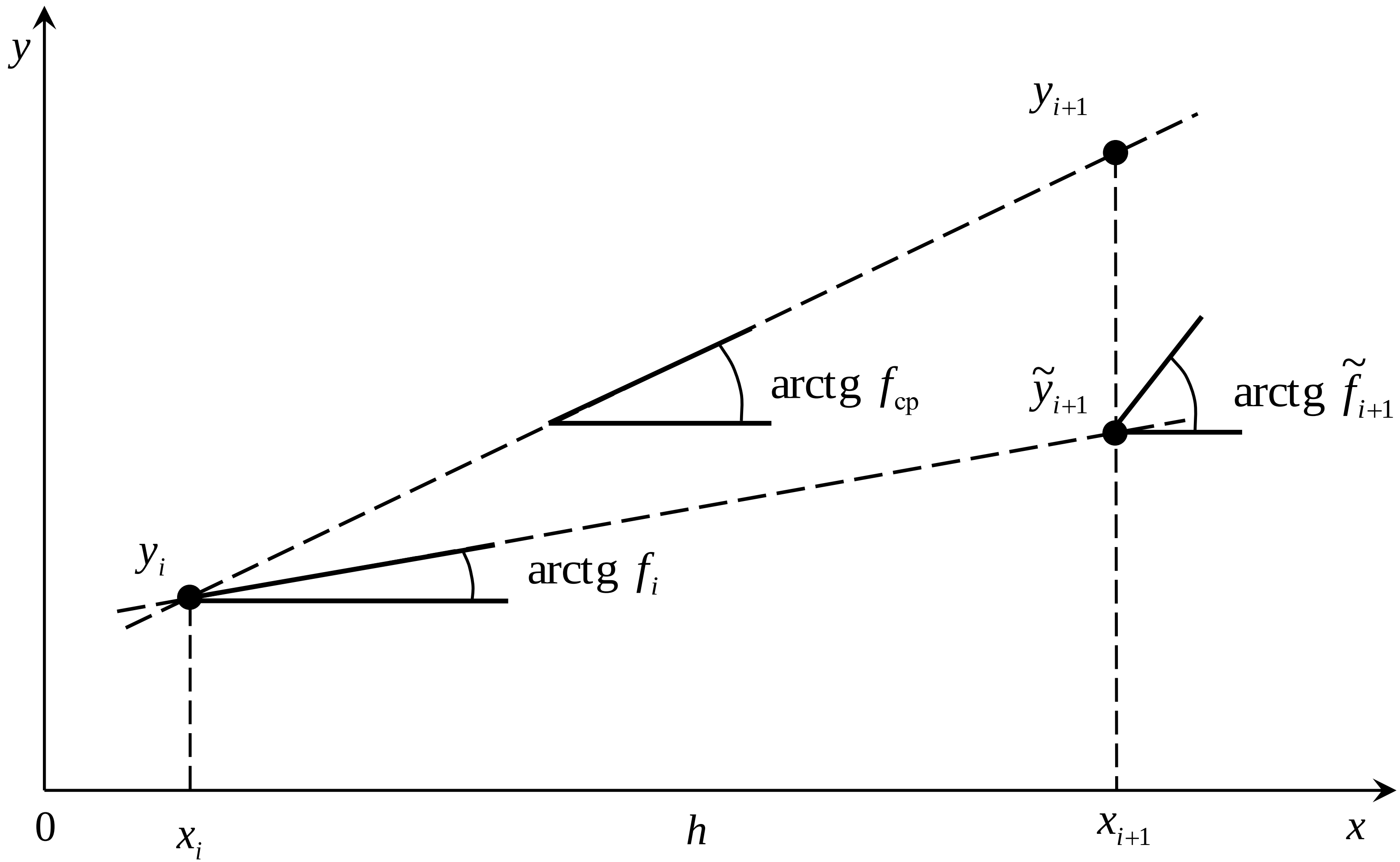
$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] + O(h^3) \end{cases}$$

- Шаг - “предиктор”
- Шаг - “корректор”

Можно применить итерационную обработку

Локальная ошибка ***O*(*h*³)**, глобальная ошибка ***O*(*h*²)**

Метод Эйлера-Коши – графическая интерпретация



Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л., Численные методы. – М.: Физматлит, 2004, с. 157

Пример. Уравнение релаксационного типа (жесткая задача)

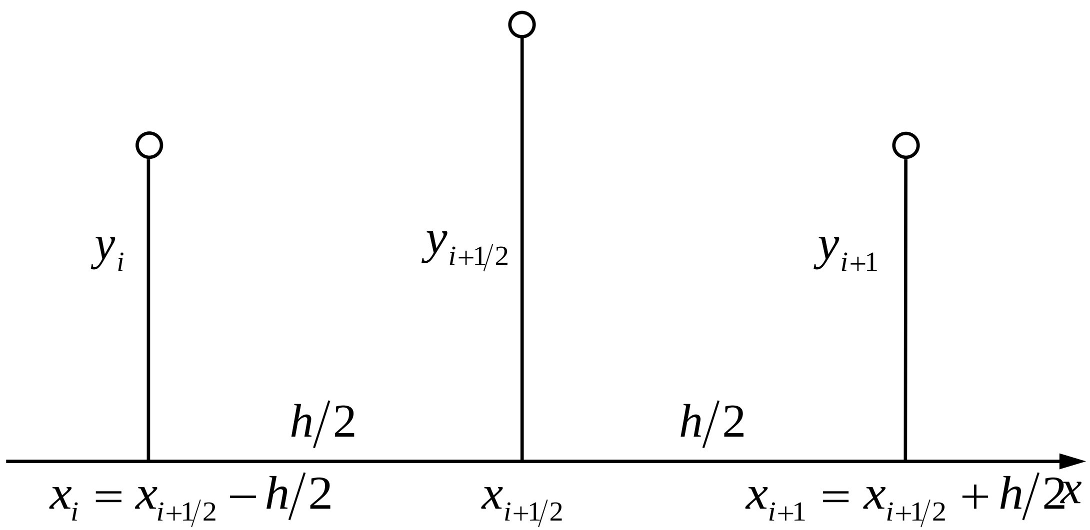
Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности

Интегрирование задачи Коши

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$

Численное интегрирование методом Симпсона

Вводим промежуточную точку: $x_{i+1/2} = x_i + h/2$



Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л., Численные методы. – М.: Физматлит, 2004, с. 160

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx = y_i + \int_{x_{i+1/2}-h/2}^{x_{i+1/2}+h/2} f(x, y(x))dx$$

Формула Симпсона для шага *h*/2

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h/2}{3}[f(x_i, y_i) + 4f(x_{i+1/2}, \boxed{y_{i+1/2}}) +$$

Значения неизвестны - можно аппроксимировать разными способами

Неявные выражения

$$+ f(x_{i+1}, \boxed{y_{i+1}})] + O(h^5)$$

Наиболее употребительный вариант аппроксимации неявных значений - симметричный

$$4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) =$$

$$= 2f\left(x_{i+1/2}, y^{\mathrm{I}}_{i+1/2}\right) + 2f\left(x_{i+1/2}, y^{\mathrm{II}}_{i+1/2}\right) + f(x_{i+1}, y^{\mathrm{III}}_{i+1})$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности

$$f(x_i, y_i) + 4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) =$$
$$= f(x_i, y_i) + 2f\left(x_{i+1/2}, y^{\mathrm{I}}_{i+1/2}\right) + 2f\left(x_{i+1/2}, y^{\mathrm{II}}_{i+1/2}\right) + f(x_{i+1}, y^{\mathrm{III}}_{i+1})$$

$$y^{I}_{i+1/2} = y_i + \frac{\Delta y^{I}_{i+1}}{2} \qquad \Delta y^{\mathrm{I}}_{i+1} = hf(x_i, y_i)$$

$$y^{II}_{i+1/2} = y_i + \frac{\Delta y^{II}_{i+1}}{2} \qquad \Delta y^{\mathrm{II}}_{i+1} = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{\Delta y^{\mathrm{I}}_{i+1}}{2}\right) = hf\left(x_{i+1/2}, y^{\mathrm{I}}_{i+1/2}\right)$$

$$y^{III}_{i+1} = y_i + \Delta y^{III}_{i+1} \qquad \Delta y^{\mathrm{III}}_{i} = hf(x_{i+1}, y_i + \Delta y^{\mathrm{II}}_{i+1})$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

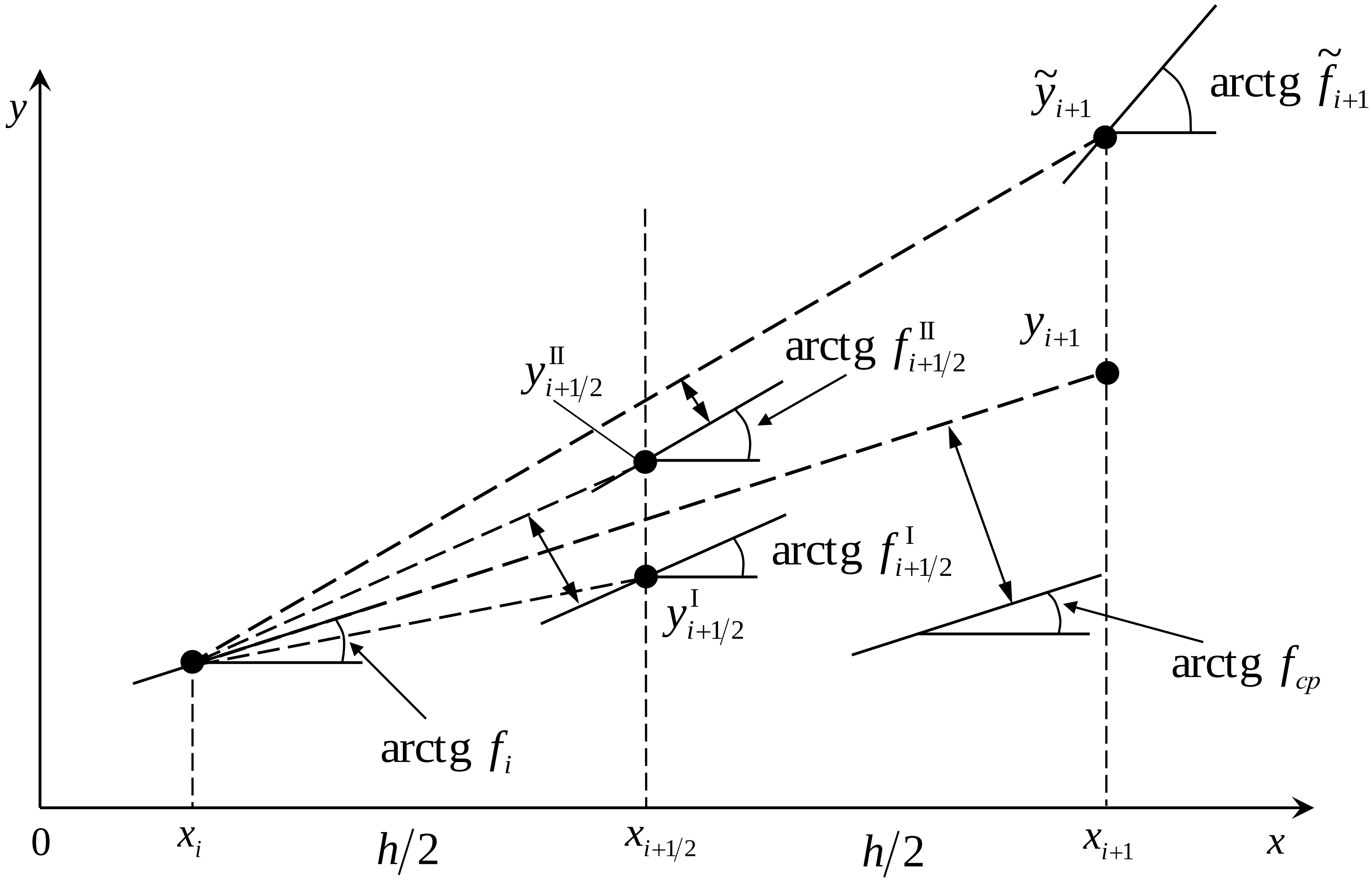
Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности

Сводка формул для реализации метода

$$\begin{cases} k_i^1 = hf(x_i, y_i) & \\ k_i^2 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + k_i^1/2\right) & = \Delta y_i^I \\ k_i^3 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + k_i^2/2\right) & = \Delta y_i^{II} \\ k_i^4 = hf(x_{i+1}, y_i + k_i^3) & = \Delta y_i^{III} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ \Delta y_i = \dfrac{1}{6}[k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4] \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта – графическая интерпретация



Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л., Численные методы. – М.: Физматлит, 2004, с. 161

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка для нормальных систем ОДУ

Задача Коши для нормальной системы ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \\ y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}. \end{cases}$$

Приращения для $y_1(x)$ и $y_2(x)$
на каждом этапе вычисляются одновременно

Реализация метода Рунге-Кутта для нормальных систем

$$\begin{cases} y_{1i+1} = y_{1i} + \Delta y_{1i+1} \\ y_{2i+1} = y_{2i} + \Delta y_{2i+1} \\ \Delta y_{1i+1} = \dfrac{k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4}{6} \\ \Delta y_{2i+1} = \dfrac{l_i^1 + 2l_i^2 + 2l_i^3 + l_i^4}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_i^1 = hf_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \\ l_i^1 = hf_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \\ k_i^2 = hf_1\left(x_{i+1/2}, y_{1i} + k_i^1/2, y_{2i} + l_i^1/2\right) \\ l_i^2 = hf_2\left(x_{i+1/2}, y_{1i} + k_i^1/2, y_{2i} + l_i^1/2\right) \\ k_i^3 = hf_1\left(x_{i+1/2}, y_{1i} + k_i^2/2, y_{2i} + l_i^2/2\right) \\ l_i^3 = hf_2\left(x_{i+1/2}, y_{1i} + k_i^2/2, y_{2i} + l_i^2/2\right) \\ k_i^4 = hf_1(x_{i+1}, y_{1i} + k_i^3, y_{2i} + l_i^3) \\ l_i^4 = hf_2(x_{i+1}, y_{1i} + k_i^3, y_{2i} + l_i^3) \end{cases}$$

Методы Адамса – многошаговые методы

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^{k} C_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$ k-шаговый метод Адамса

$C_0 = 0$ - явный метод

$C_0 \neq 0$ - неявный метод

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$ интегрирование задачи Коши

Подинтегральная функция заменяется интерполяционным полиномом, построенным по точкам $\{(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}),\ \ j = 0,1,\dots,k\}$

$$f(x, y(x)) \approx P(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx$$

Явный метод– экстраполяционный, неявный - интерполяционный

Простейший явный метод Адамса

$$f(x, y(x)) \approx f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Линейная экстраполяция f как функции x

Простейший явный метод Адамса

$$f(x, y(x)) \approx f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Линейная экстраполяция f как функции x

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right) dx =$$

$$= (x_{i+1} - x_i) f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \left(\frac{(x_{i+1} - x_{i-1})^2}{2} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} \right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(3 f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right)$$

Расчетная формула метода на равномерной сетке с шагом h

Простейший неявный метод Адамса

$$f(x, y(x)) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Линейная интерполяция f как функции x

Простейший неявный метод Адамса

$$f(x, y(x)) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Линейная интерполяция f как функции x

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \right) dx =$$

$$= (x_{i+1} - x_i) f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} = (x_{i+1} - x_i) \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big(f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i) \big) + O(h^3)$$

Расчетная формула метода на сетке с шагом h совпадает с формулой метода Эйлера-Коши

Локальная ошибка $\boldsymbol{O(h^3)}$, глобальная ошибка $\boldsymbol{O(h^2)}$

Выбор шага численного интегрирования задач Коши

При численном решении задач Коши для ОДУ и систем ОДУ
шаг численного решения можно выбирать априорно и апостериорно.

В обоих случаях первоначальное значение шага *h* задается.
При априорном выборе шага расчет ведется с первоначально выбранным шагом *h* с получением функции $[y(x_i)]_h, \quad i = 0,1,2,\ldots$
и с шагом *h*/2 с получением функции $[y(x_{2i})]_{h/2}, \quad i = 0,1,2,\ldots$

Затем в точках более грубой сетки анализируется неравенство

$$\max_i \left| [y(x_i)]_h - [y(x_{2i})]_{h/2} \right| \leq \varepsilon$$

Если оно выполнено, то решение с шагом *h*/2 принимается за истинное.
Иначе расчет повторяется с шагом *h*/4 : $[y(x_{4i})]_{h/4}, \quad i = 0,1,2,\ldots$
после чего по норме сравниваются решения на сетках с шагами *h*/2 и *h*/4
и т.д. до тех пор пока неравенство не будет выполнено для двух последовательных решений

Выбор шага численного интегрирования задач Коши

При апостериорном выборе шага последний изменяется в процессе счета на основе получаемой информации о поведении решения и на основе заданной точности ε. Пусть *h* — первоначально выбранный шаг.

1. Выбранным методом на отрезке $x \in [x_0, x_1]$, $x_1 = x_0 + h$ решается задача Коши с шагом *h* с получением значения $y_{x=h}^{h}$.
2. Тем же методом с шагом *h*/2 решается задача Коши с получением $y_{x=h/2}^{h/2}$ и $y_{x=h}^{h/2}$.
3. Анализируется неравенство

$$\left| y_{x=h}^{h} - y_{x=h}^{h/2} \right| \le \varepsilon .$$

   Если данное неравенство удовлетворяется, то значение шага численного интегрирования на следующем шаге увеличивается вдвое по сравнению с первоначально выбранным шагом, т.е. становится равным 2*h*, алгоритм повторяется начиная с п.1

4. Если приведенное выше неравенство не выполняется, то счет ведется с шагом *h*/4 начиная с отрезка $x \in [x_0, x_0 + h/4]$ и после получения значения $y_{x=h/2}^{h/4}$ анализируется неравенство

$$\left| y_{x=h/2}^{h/2} - y_{x=h/2}^{h/4} \right| \le \varepsilon .$$

   Если оно удовлетворяется, то дальнейший счет ведется с шагом *h*/2 и т.д.

Процедура Рунге оценки погрешности и уточнения численного решения задачи Коши

$y(x) = y_h + \varphi(x)h^p + O(h^{p+1})$ Метод *p*-го порядка на сетке с шагом *h*

$y(x) \approx y_h$ Численное решение задачи Коши на сетке с шагом *h*

$R_p = \varphi(x)h^p$ Главный член погрешности

Повторно решаем Задачу Коши на сетке с шагом *h*/2

$y(x) = y_{h/2} + \varphi(x)(h/2)^p + O(h^{p+1})$ Решение на сетке с шагом *h*/2

$$\varphi(x)(h/2)^p = \frac{y_{h/2} - y_h}{2^p - 1} + O(h^{p+1})$$

Апостериорная оценка погрешности (в узлах сетки с шагом *h*)

$$y(x) = y_{h/2} + \frac{y_{h/2} - y_h}{2^p - 1} + O(h^{p+1})$$

Метод (*p*+1)-го порядка (в узлах сетки с шагом *h*)

Процесс уточнения с применением последней формулы можно применять и дальше, проводя расчеты с шагами *h*/4, *h*/8 и т.д., пока не выполнится условие:

$$\max\left| y_{h/2^{k-1}} - y_{h/2^k} \right| \le \varepsilon, \quad k = 1,2,\ldots$$