Лекция 8.
Многочлены Чебышева.
Оптимизация погрешности интерполяции. Сходимость интерполяционного процесса. Сплайн-интерполирование. Построение кубического сплайна. Интерполирование с кратными узлами. Многомерная интерполяция.

8.1. Многочлены Чебышева

Определение 1. Многочленом Чебышева называется функция
$T_n(x) = \cos[n \arccos x]$,
(8.1)
где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in [-1, 1]$.
Прежде всего, покажем, что функция $T_n(x)$, представленная с помощью тригонометрических функций, на самом деле является многочленом при любом
Действительно,
известна
формула
$n = 0, 1, 2, \ldots$.
$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$. Отсюда, полагая $\theta = \arccos x$, имеем
$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \ge 1$.
(8.2)
Так как $T_0 = 0$, $T_1 = x$, то из рекуррентной формулы (8.2) следует, что выражения (8.1) действительно есть многочлены.
Нетрудно
проверить,
что
$T_2(x) = 2x^2 - 1$,
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$,
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ и т.д. Анализ рекуррентной формулы (8.2) показывает, что все функции $T_n(x)$ при любом натуральном
$n-1$
n являются многочленами степени n со старшим коэффициентом 2 .
Из уравнения $T_n(x) = \cos[n \arccos x] = 0$ находим корни полинома
Чебышева $x_k = \cos$
$(2k+1)\pi$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Видно, что $T(x)$ имеет ровно n
n
2 n
корней и все они лежат на отрезке $[-1, 1]$.
Из (8.2) следует, что $T_n(x) \le 1$ при $x \le 1$, и точки экстремумов
$m\pi$
полинома
$T_n(x)$
есть
$x(m) = \cos$
,
$m = 0, 1, \ldots, n$.
Причем
n
m

$T_n(x(m)) = \cos \pi m = (-1)$.
125Рассмотрим многочлен $T_n(x) =$
1
$T(x) = x^n + \ldots$.
$n-1$ n
2
Лемма. Если $P_n(x)$ – произвольный многочлен степени n со старшим
коэффициентом единица, то
$\max P_n(x) \geq \max T_n(x) =$
$x \in [-1, 1]$
$x \in [-1, 1]$
1
.
2^{n-1}
(8.3)
Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим разность
$T_n(x) - P_n(x)$, это многочлен степени $(n-1)$. В точках экстремумов полинома
(
)
Чебышева $x(m)$ $\operatorname{sign}(T_n(x(m)) - P_n(x(m))) = \operatorname{sign}((-1)\, 2^{1-n} - P_n(x(m))) =$
$\operatorname{sign}(-1)$, т.к.
1
согласно предположению $P_n(x(m)) < n-1$ при любом m . Таким образом,
2
между каждыми двумя точками $x(m)$, $x(m+1)$ многочлен $T_n(x) - P_n(x)$ меняет
знак. Следовательно, отличный от нуля многочлен $T_n(x) - P_n(x)$ степени
$(n-1)$ имеет n различных корней. Противоречие. Полученное противоречие
завершает доказательство леммы.
Итак, многочлен $T_n(x)$ таков, что его максимальное по модулю
значение на отрезке $[-1, 1]$ не превосходит максимального по модулю
значения на том же отрезке любого другого многочлена степени n со
старшим коэффициентом единица. Отсюда его название:
Определение 2. Многочлен $T_n(x)$ называется многочленом, наименее
уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.
Если рассматриваем некоторый отрезок
$[a, b]$, то замена
$b + a$ $b - a$
$x' =$
+
x переведет отрезок $[-1, 1]$ в отрезок $[a, b]$. Тогда многочлен
2
2
T_n
$[a, b]$
$(x) = (b - a)$
2
2^{n-1}
n
m
$\left(2x - (b + a) \right.$
$T_n \Big|$
$\Big|$

⎝ b − a ⎠
m
(8.4)
со старшим коэффициентом единица является многочленом, наименее
уклоняющимся от нуля на отрезке [a, b] .
Корнями многочлена (8.4) являются
x k =
b + a b − a
⎛ π (2 k + 1) ⎞
+
cos ⎜
⎟ , k = 0 , 1 ,..., n − 1 .
2
2
⎝ 2 n ⎠
(8.5)
126Если P n (x) – любой многочлен степени n со старшим коэффициентом
единица, то справедлива оценка max P n (x) ≥ max T n
x ∈ [a , b]
[a , b]
x ∈ [a , b]
(x) = (b − a)
2 2 n − 1
n
.
8.2. Минимизация оценки остаточного члена интерполяционного
многочлена Лагранжа (выбор узлов интерполирования)
Из формулы остаточного
Лагранжа вытекает оценка
max f (x) − L n (x) ≤
x ∈ [a , b]
члена
интерполяционного
M n + 1
max ω n + 1 (x)
(n + 1) ! x ∈ [a , b]
полинома
(8.6)
где M n + 1 = max f (n + 1) (x) .
x ∈ [a , b]
Как минимизировать выражение, стоящее справа в оценке (8.6)?
По построению ω n + 1 (x) = (x − x 0)(x − x 1) ... (x − x n) – это многочлен
степени
(n + 1) со старшим коэффициентом единица. Поэтому
n + 1
(
b − a)
max ω n + 1 (x) ≥
при произвольном выборе узлов интерполяции.
x ∈ [a , b]
2 2 n + 1
Если в качестве узлов интерполирования взять корни полинома

$b + a$ $b - a$
⎛ $\pi (2k + 1)$ ⎞
+
cos ⎜
Чебышева $T_{n+1}(x)$, а именно: $x_k =$
⎟ , $k = 0, 1, \ldots, n$, то
2
2
⎝ $2n + 2$ ⎠
$n + 1$
$n + 1$
(
(
$b - a$)
$b - a$)
⎛ $2x - (b + a)$ ⎞
$\omega_{n+1}(x) =$
.
$\omega_{n+1}(x) =$
T_{n+1} ⎜
⎟ , и max
$x \in [a, b]$
$2\ 2n + 1$
$2\ 2n + 1$
⎝ $b - a$ ⎠

Следовательно, при таком расположении узлов справедлива наилучшая из оценок, которая может быть получена как следствие оценки (13.14).

$M_{n+1} (b - a)^{n+1}$
.
$\max f(x) - L_n(x) \le$
$x \in [a, b]$
$(n + 1)!\ 2\ 2n + 1$
(8.7)

Итак, если в качестве узлов интерполирования взяты корни полинома Чебышева, то получаем наименьшую погрешность интерполяции на отрезке при фиксированном числе узлов интерполяции.

1278.3. О сходимости интерполяционного процесса

Поставим следующий вопрос. Можно ли другим способом, чем в предыдущем пункте повысить точность интерполяции на отрезке? А именно, будет ли уменьшаться погрешность интерполяции на отрезке, если все более и более увеличивать количество узлов интерполяции на отрезке? Чтобы ответить на этот вопрос, построим последовательности узлов интерполяции:

$\Omega_0 = \{x_0(0)\}$, $\Omega_1 = \{x_0(1), x_1(1)\}$, ..., $\Omega_n = \{x_0(n), x_1(n), \ldots, x_n(n)\}$, ...,
(8.8)

здесь верхний индекс означает номер последовательности, нижний – номер узла. По каждой последовательности узлов Ω_n строим интерполяционный полином для функции $y = f(x)$, который обозначим $L_n(f, x)$. Тем самым получаем последовательность интерполяционных полиномов $\{L_n(f, x)\}$. Как говорят, построили интерполяционный процесс для функции $y = f(x)$.

Определение 3 Интерполяционный процесс для функции $y = f(x)$ сходится в точке $x^* \in [a, b]$, если существует lim
$L_n(f, x^*) = f(x^*)$.

$n \to \infty$

Это мы привели определение поточечной сходимости. Теперь дадим определение равномерной сходимости.

Определение 4. Интерполяционный процесс сходится равномерно на $[a, b]$, если $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - L_n(f, x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

С ростом n элементы последовательностей Ω_n, т.е. узлы интерполяции, все более плотно заполняют отрезок $[a, b]$, так что в любой его части, в окрестности любой точки отрезка, начиная с некоторого n, находится по крайней мере один узел. Причем, как мы помним, в каждом узле значение соответствующего интерполяционного полинома Лагранжа совпадает со значением функции в этой точке. Поэтому на первый взгляд кажется, что должна быть равномерная сходимость $\{L_n(f, x)\}$ к $f(x)$ хотя бы для непрерывных функций. Однако оказывается не так.

Фабером было показано, что для любой системы узлов вида (8.8) найдется такая непрерывная функция $f(x)$, что построенные для нее интерполяционные многочлены Лагранжа по этим узлам не сходятся равномерно на $[a, b]$ к $f(x)$.

Более того, как показал Бернштейн, последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа $\{L_n(f, x)\}$, построенных для 128функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ по равноотстоящим узлам ($x_0^{(n)} = -1$; $x_n^{(n)} = 1$) не стремится с возрастанием n к $f(x)$ ни в одной точке отрезка за исключением точек $-1, 0, 1$.

С другой стороны Марцинкевич показал: если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется такая последовательность сеток, для которой соответствующий интерполяционный процесс сходится равномерно на $[a, b]$. Однако строить такие сетки очень сложно, причем для каждой $f(x)$ нужно строить свою последовательность сеток.

Итак, в общем случае нет равномерной сходимости интерполяционного процесса, поэтому избегают строить интерполяционные многочлены высокой степени, чтобы избежать накопления вычислительной погрешности.

8.4. Сплайн – интерполяция

Если функция $f(x)$ очень сложно меняется на различных частях $[a, b]$ или отрезок $[a, b]$ – большой, то трудно аппроксимировать её с хорошей точностью на всем $[a, b]$ с помощью одного интерполяционного полинома $L_n(x)$. Можно разбить отрезок $[a, b]$ на какие-то части. На каждой части отрезка построить свой интерполяционный полином, а потом «срастить» их в точках разбиения отрезка $[a, b]$. Примерно такая идея заложена в сплайн-интерполяции.

Понятие сплайнов было введено в вычислительную математику примерно в 40-х годах прошлого века. Слово «сплайн» (английское spline) означает гибкую линейку, используемую для проведения гладких кривых через заданные точки плоскости.

Преимуществом интерполяционных сплайнов перед Лагранжевой интерполяцией является, во-первых, их сходимость и, во-вторых, устойчивость процесса вычислений.

Дадим определение интерполяционного сплайна степени m.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точки сетки $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$.
Тем самым будем считать, что отрезок $[a, b]$ разбит на систему Δ
подотрезков: $\Delta = \{ [x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{N-1}, x_N], x_0 = a, x_N = b, x_i \neq x_j$, при $i \neq j \}$. В
узлах сетки заданы значения функции $y_0, y_1, ..., y_N$ ($y_j = f(x_j)$).
129Определение 5. Интерполяционным сплайном степени m для функции
$f(x)$, построенным по системе подотрезков Δ на отрезке $[a, b]$, называется
функция $S_\Delta^m(f, x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) на каждом подотрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., N$ она является многочленом степени m;
2) на всем отрезке $[a, b]$ она $(m - 1)$ раз непрерывно дифференцируема;
3) в узлах сетки она принимает заданные значения: $S_\Delta^m(f, x_i) = y_i$, $i = 0, ..., N$.

Для примера рассмотрим, как строится кубический сплайн. Следует
отметить, что кубические сплайны, а также сплайны второй степени имеют
большое практическое применение и довольно хорошо изучены.
На каждом подотрезке $[x_{i-1}, x_i]$ кубический сплайн, который для
удобства обозначим через $S(x)$, будем искать в виде многочлена третьей
степени:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1}) + d_i(x - x_{i-1}),$$
$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, \; i = 1, ..., N,$$
2
3
(8.9)

где a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты, подлежащие определению. Их следует
искать из условий непрерывности функции $S(x)$ и её первой и второй
производных в узлах системы подотрезков Δ и требований $S(x_j) = y_j$.
Подставляя в (8.9) $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ имеем

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \; 1 \leq i \leq N,$$
$$S(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \; h_i = x_i - x_{i-1}, \; 1 \leq i \leq N.$$
(8.10)
(8.11)

Этими соотношениями мы удовлетворяем требованиям интерполяции и
непрерывности $S(x)$ в узлах сетки.
Найдем $S'(x)$ и $S''(x)$:

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1}), \; x \in [x_{i-1}, x_i], \; 1 \leq i \leq N,$$
$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \; x \in [x_{i-1}, x_i], \; 1 \leq i \leq N.$$
2

Потребуем непрерывности этих функций во всех точках, включая
внутренние узлы. Приравнивая во внутренних узлах правые и левые пределы
производных, имеем

130$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \; 1 \leq i \leq N - 1,$$
$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \; 1 \leq i \leq N - 1.$$
(8.12)
(8.13)

Итак, получили $4N - 2$ уравнения на $4N$ неизвестных коэффициентов
a_i, b_i, c_i, d_i.
Недостающие два уравнения находят из краевых условий, которые, как

правило, задают на концах отрезка $[a, b]$ в зависимости от решаемой задачи. Для простоты потребуем, чтобы $S''(x_0) = 0$ и $S''(x_N) = 0$. Отсюда получаем еще два уравнения на коэффициенты:

$$c_1 = 0, \quad c_N + 3 d_N h_N = 0. \tag{8.14}$$

В итоге имеем систему $4N$ линейных алгебраических уравнений относительно $4N$ неизвестных. Эту систему можно решать по-разному, в частности методом исключения Гаусса. Решим ее следующим образом. Из (8.10) находим все a_i. Из (8.13) и (8.14) выражаем d_i через c_i:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad 1 \le i \le N-1, \quad d_N = -\frac{c_N}{3h_N}. \tag{8.15}$$

Подставляя (8.15) в (8.11) и одновременно исключая $a_i = y_{i-1}$, имеем

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{3} h_i (c_{i+1} + 2c_i), \quad 1 \le i \le N-1,$$
$$b_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{2}{3} h_N c_N. \tag{8.16}$$

Теперь, исключая из (8.12) b_i и b_{i+1} с помощью (8.16), а d_i – с помощью (8.15), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно c_i, которую нетрудно представить в виде

$$c_1 = 0,$$
$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \quad 2 \le i \le N,$$
$$c_{N+1} = 0. \tag{8.17}$$

Так как матрица этой системы трёхдиагональная, то решение легко найти методом прогонки, которая в данном случае устойчива. По найденным

коэффициентам c_i коэффициенты b_i и d_i вычисляются по формулам (8.15) и (8.16).

Для кубического сплайна доказан [10] замечательный результат, который мы приведем без доказательств.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in C^4[a, b]$. Тогда для интерполяционного кубического сплайна $S(x)$, построенного на сетке $\{x_n\}_0^N$ неравенства

, справедливы
max $f(x) - S(x) \le M$ 4 h 4 ,
[a , b]
max $f'(x) - S'(x) \le M$ 4 h 3 ,
[a , b]
max $f''(x) - S''(x) \le M$ 4 h 2 ,
[a , b]
где
M 4 = max f (4) (x) , h = max (x n + 1 − x n) .
[a , b]
n
Отсюда следует, что при $h \to 0$ последовательность функций S (k) (x) ,
$k = 0, 1, 2$ (кубический сплайн и первые две его производные) сходится,
соответственно, к f (k) (x) .
Замечание. Кубический сплайн можно получить как решение
следующей задачи. Обозначим через S 2 множество непрерывных,
непрерывно дифференцируемых и дважды кусочно непрерывно
дифференцируемых функций $s(x)$, удовлетворяющих условиям s (x i) = y i ,
1
$i = 0, 1, \ldots, N$, и через I 2 (s) = ∫ (s (x)) 2 dx < ∞ . Требуется найти функцию s 3 (x) ,
0
дающую inf I 2 (s) .
s∈ S 2
Решением поставленной задачи является кубический сплайн s 3 (x) ,
удовлетворяющий условиям s 3 ′ ′ (x 0) = 0 и s 3 ′ ′ (x N) = 0 , где x 0 = 0 , x N = 1 .
8.5. Интерполирование с кратными узлами . Интерполяционный полином
Эрмита
Рассмотрим более общую задачу интерполирования.
132Пусть теперь заданы в точках { x i } 0 не только значения функции, но и ее
производных до какого-то порядка, в каждом узле своего. Как строить
интерполяционный полином?
Итак, пусть φ 0 (x), φ 1 (x),..., φ n (x),... – это базисная система функций на
[a , b] .
Требуется найти такую функцию
n
m
φ (x) = ∑ c i φ i (x) ,
(8.18)
i = 0
что
φ (x j) = y j ,
φ ′ (x j) = y ′ j ,
j = 0 ,..., n ,
j = 0 ,..., n ,
. . . .
φ
(α j − 1)
(x j) = y j
(α j − 1)
(8.19)
, j = 0 ,..., n ,
где y (j k) = f (k) (x j) – заданные числа, x j ∈ [a , b] , x i ≠ x j при i ≠ j , i , j = 0,..., n .

Чтобы найти функцию $\varphi(x)$ единственным образом, очевидно нужно потребовать, чтобы число неизвестных коэффициентов c_i в (8.18) совпадало с числом условий, т.е. чтобы

$$m + 1 = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n \quad (8.20)$$

и, чтобы определитель

φ 0 (x 0)
φ 0 ′ (x 0)
φ 1 (x 0)
φ 1 ′ (x 0)
... φ m (x 0)
... φ m ′ (x 0)
...
...
... ...
(α − 1)
(α − 1)
φ 0 (x 0) φ 1 (x 0) ... φ m (α − 1) (x 0)
φ 0 (x 1)
φ 1 (x 1)
... φ m (x 1)
0
0
0
(8.21)
...
...
... ...
(α − 1)
(α − 1)
φ 0 (x n) φ 1 (x n) ... φ m (α − 1) (x n)
n
n
n

не равнялся нулю.

Для простоты рассмотрим только случай $\varphi_i(x) = x^i$, т.е. нам нужно построить обычный полином степени не выше m, удовлетворяющий 133условиям (8.19). Обозначим его $H_m(x)$. Наряду с $H_m(x)$ рассмотрим интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, принимающий в узлах $x_0, x_1, ..., x_n$ значения $y_0, y_1, ..., y_n$.

Разность $H_m(x) - L_n(x)$ должна быть многочленом степени не выше m, обращающимся в нуль в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, следовательно

$$H_m(x) - L_n(x) = \omega_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x), \quad (8.22)$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Очевидно, что при любом многочлене $H_{m-n-1}(x)$, полином

$$H_m(x) = L_n(x) + \omega_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x) \quad (8.23)$$

принимает в узлах интерполяции $x_0, x_1, ..., x_n$ значения $y_0, y_1, ..., y_n$.

Подберем теперь многочлен $H_{m-n-1}(x)$ так, чтобы удовлетворялись и остальные условия в (8.19). Дифференцируя (8.23), получаем

$H'_m(x) = L'_n(x) + \omega'_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x) + \omega_{n+1}(x) H'_{m-n-1}(x)$.
(8.24)
Подставляя сюда $x = x_i$, имеем
$y'_i \equiv H'_m(x_i) = L'_n(x_i) + \omega'_{n+1}(x_i) H_{m-n-1}(x_i)$.
(8.25)
Так как $\omega'_{n+1}(x_i) \neq 0$, то в каждой точке, в которой задано значение
$H'_m(x)$, по формулам (8.25) определим и $H_{m-n-1}(x_i)$, т.е. значения полинома
$H_{m-n-1}(x)$ в узлах интерполирования.
Продифференцируем (8.24) еще раз, получаем
$H''_m(x) = L''_n(x) + \omega''_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x) + 2\omega'_{n+1}(x) H'_{m-n-1}(x) +$
$\omega_{n+1}(x) H''_{m-n-1}(x)$.
Подставляя сюда $x = x_i$, находим
$y''_i \equiv H''_m(x_i) = L''_n(x_i) + \omega''_{n+1}(x_i) H_{m-n-1}(x_i) + 2\omega'_{n+1}(x_i) H'_{m-$
$n-1}(x_i)$.
Из последних равенств мы найдем значения $H'_{m-n-1}(x_i)$ в тех точках, в
которых заданы $H''_m(x_i)$. Продолжаем этот процесс дальше. Причем каждый
раз при старшей производной от $H_{m-n-1}(x)$ в качестве коэффициента будет
134стоять константа, умноженная на $\omega'_{n+1}(x_i)$. Следовательно, исходную задачу о
построении полинома $H_m(x)$, удовлетворяющего условиям (8.19), мы свели
к задаче построения полинома $H_{m-n-1}(x)$, удовлетворяющего условиям
$H_{m-n-1}(x_j) = z_j$,
$H'_{m-n-1}(x_j) = z'_j$,
. . . . . .
$(\alpha-2)$
$(\alpha-2)$
, $j = 0, 1, ..., n$.
$H_{m-n-1}(x_j) = z$
j
(8.26)
j
Справа в (8.26) стоят известные числа.
К полиному $H_{m-n-1}(x)$ применяем тот же алгоритм, а именно строим
~
~ (x) H
(x) и т.д.
H
$(x) = L(x) + \omega$
$m-n-1$
n
$n+1$
$m-2n-2$
В конце концов, придем к построению интерполяционного полинома
Лагранжа, принимающего некоторые заданные значения $\{\eta_0, \eta_1, ..., \eta_n\}$ в узлах
$x_0, x_1, ..., x_n$. Проделав обратный путь, найдем $H_m(x)$.
Многочлен $H_m(x)$ называется интерполяционным полиномом
Эрмита.

8.6. Многомерная интерполяция

Интерполирование функций многих переменных значительно сложнее,
чем функции одной переменной. Это вызвано не только тем, что
рассуждения и выкладки становятся более громоздкими, но и
принципиальными трудностями.
Для краткости ограничимся случаем функции двух переменных

$z = f(x, y)$.
Пусть на плоскости (x, y) даны $(n + 1)$ точки $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$. Будем разыскивать многочлен $P(x, y)$ возможно низшей степени, который в этих точках принимает заданные значения $z_0, z_1, ..., z_n$. Искомый полином запишем в виде

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + ...$$
$$... + a_{m0}x^m + a_{m-1,1}x^{m-1}y + ... + a_{0m}y^m,$$

135тогда, подставляя данные значения точек и приравнивая левую часть соответствующему значению z_i, получаем систему $(n + 1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $1 + 2 + ... + (m + 1) = \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}$ неизвестных a_{ij}. Эти уравнения, вообще говоря, независимы. Следовательно, если на $P(x, y)$ не накладывать дополнительных условий, то $(n + 1)$ должно равняться $\frac{(m + 1)(m + 2)}{2}$. Это первое принципиальное затруднение, т.е. уже не можем решить задачу при произвольном количестве узлов интерполирования.

Пусть $n = 2$. Рассмотрим определитель полученной системы

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель обращается в нуль, если три точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ лежат на одной прямой, и поэтому возникает вопрос о существовании и единственности решения. Аналогично соответствующие определители будут обращаться в нуль, если точки – узлы интерполяции будут лежать на кривых второго, третьего и т.д. порядков. Это порождает второе принципиальное затруднение: узлы интерполирования не могут быть расположены произвольно. Проверка того, что определители не обращаются в нуль, чрезвычайно затруднительна. Третье принципиальное затруднение возникает при оценке остаточного члена. Теорема Ролля для рассматриваемого случая не действует.

В связи с указанными трудностями, рассмотрим специальный случай двумерной интерполяции.

Возьмем $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ узлов и расположим их следующим образом

$$\begin{array}{llll} (x_0, y_0), & (x_1, y_0), & ..., (x_{n-1}, y_0), & (x_n, y_0), \\ (x_0, y_1), & (x_1, y_1), & ..., (x_{n-1}, y_1), & \\ . & . & . & \\ & & & \\ . & & & \end{array}$$

$(x_0, y_{n-1}), (x_1, y_{n-1}),$
$(x_0, y_n),$
$(x_i \neq x_j,\ i \neq j;\ y_i \neq y_j,\ i \neq j).$
(8.27)
136Значения x_i и y_j могут быть произвольными, так что взаимное расположение узлов может быть довольно общим. Проверим, что нет кривой n -го порядка, проходящей через все эти узлы. В самом деле, если бы такая кривая имелась, она содержала бы точки, расположенные в первом ряду. Этих точек $(n+1)$, и все они лежат на одной прямой. Следовательно, вся прямая также принадлежала бы кривой порядка n. В этом случае кривая порядка n распалась бы на прямую и кривую порядка $(n-1)$, проходящую
$n(n+1)$
через все остальные
точек.
2
Для нее провели бы аналогичные рассуждения. Продолжая этот процесс, мы в конце концов пришли бы к заключению, что три точки (x_0, y_{n-1}), (x_1, y_{n-1}) и (x_0, y_n) лежат на одной прямой. Этого нет. Следовательно, выбранные нами узлы не могут лежать на одной кривой порядка n.
Построим теперь интерполяционный полином по нашим узлам.
Обозначим его через $P_n(x, y)$, а $P_n(x_i, y_j)$ через z_{ij}, где z_{ij} – соответствующие значения функции в узлах.
Если рассмотреть только те из выбранных нами узлов, для которых $i + j < n$, то на тех же основаниях мы можем построить интерполяционный многочлен $P_{n-1}(x, y)$ степени $(n-1)$, принимающий в точках (x_i, y_j), $i + j < n$, значения z_{ij}.
Образуем разность $P_n(x, y) - P_{n-1}(x, y)$. Она будет многочленом степени не выше n, обращающимся в нуль в точках (x_i, y_j), $i + j < n$. Представим эту разность в виде
$P_n(x, y) - P_{n-1}(x, y) = A_{n,0}(x - x_0)...(x - x_{n-1}) + A_{n-1,1}(x - x_0)...(x - x_{n-2})(y - y_0) +$
$+ A_{n-2,2}(x - x_0)...(x - x_{n-3})(y - y_0)(y - y_1) + ... + A_{0,n}(y - y_0)(y - y_1)...(y - y_{n-1}).$
Покажем, что можно так подобрать $A_{n-i,i}$, что этот многочлен обращающийся в нуль в точках (x_i, y_j), $i + j < n$,
будет равен
$P_n(x_i, y_j) - P_{n-1}(x_i, y_j)$ при $i + j = n$.
В точке (x_i, y_{n-i}) все его члены обратятся в нуль за исключением
$A_{i,n-i}(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(y_{n-i} - y_0)...(y_{n-i} - y_{n-i-1})$. Таким образом, коэффициенты
$A_{i,n-i}$ определяются однозначно. В силу единственности интерполяционного многочлена по выбранным нами узлам это и будет единственным значением разности. Итак
137
$$P_n(x, y) = P_{n-1}(x, y) + \sum_{i=0}^{n} A_{n-i,i}(x - x_0)...(x - x_{n-i-1})(y - y_0)...(y - y_{i-1})$$
(8.28)
Поступая также с $P_{n-1}(x, y)$, $P_{n-2}(x, y)$ и т.д. получим
$P_n(x, y) = A_{00} + A_{10}(x - x_0) + A_{01}(y - y_0) + A_{20}(x - x_0)(x - x_1) +$
$+ A_{11}(x - x_0)(y - y_0) + A_{02}(y - y_0)(y - y_1) + ...$
$... + A_{n0}(x - x_0)...(x - x_{n-1}) + A_{n-1,1}(x - x_0)...(x - x_{n-2})(y - y_0) + ...$

(8.29)
$+ A_{0n}(y - y_0)\ldots(y - y_{n-1})$.

Выразим теперь A_{ij} через значения функции $z_{kl} = f(x_k, y_l)$ в узлах сетки. Подставляя в правую часть (x_0, y_0) получим $A_{00} = z_{00} \equiv f(x_0, y_0)$. В точке (x_1, y_0) $P_n = f(x_1, y_0)$, а правая часть (8.29) равна $A_{00} + A_{10}(x_1 - x_0)$, следовательно

$$A_{10} = \frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0}.$$

Это отношение является разделенной разностью функции $f(x, y_0)$ при фиксированном $y = y_0$. Обозначим его через $f(x_0; x_1; y_0)$. Аналогично получаем $A_{01} = f(x_0; y_0; y_1)$. Зафиксируем теперь $y = y_0$, получаем

$$P(x, y_0) = A_{00} + A_{10}(x - x_0) + A_{20}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_{n0}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Что мы получили? Это интерполяционный полином относительно x, принимающий в точках (x_i, y_0) значения $f(x_i, y_0)$. Следовательно, вспоминая, что такое интерполяционный полином Ньютона, видим, что

$$A_{i0} = f(x_0; x_1; \ldots x_i; y_0).$$

При $y = y_1$ наш интерполяционный полином $P_n(x, y)$ принимает вид

$$P(x, y_1) = [A_{00} + A_{01}(y_1 - y_0)] + [A_{10} + A_{11}(y_1 - y_0)](x - x_0) +$$
$$+ [A_{20} + A_{21}(y_1 - y_0)](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + [A_{n-1,0} + A_{n-1,1}(y_1 - y_0)](x - x_0)\ldots(x - x_{n-2}) + A_{n0}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

138

Этот интерполяционный полином относительно x должен в точках (x_i, y_1), $i = 0, 1, \ldots, n-1$, принимать значения $f(x_i, y_1)$. Последний член при этих значениях x_i обращается в нуль. Следовательно, все члены правой части кроме последнего дают интерполяционный полином Ньютона степени $(n-1)$, принимающий в точках (x_i, y_1), $i = 0, 1, \ldots, n-1$ значения $f(x_i, y_1)$.

Таким образом

$$A_{k0} + A_{k1}(y_1 - y_0) = f(x_0; x_1; \ldots; x_k; y_1).$$

Отсюда

$$A_{k1} = \frac{f(x_0; x_1; \ldots; x_k; y_1) - f(x_0; x_1; \ldots; x_k; y_0)}{y_1 - y_0}.$$

Это разделенная разность по переменной y, обозначим ее так

$$A_{k1} = f(x_0; x_1; \ldots; x_k; y_0; y_1).$$

Аналогично, если уже знаем $A_{ki} = f(x_0; x_1; \ldots; x_k; y_0; y_1; \ldots; y_i)$ для всех $i < m$, то рассматривая $P(x, y_m)$, получаем

$$P(x, y_m) = [A_{00} + A_{01}(y_m - y_0) + \ldots + A_{0m}(y_m - y_0)\ldots(y_m - y_{m-1})]$$
$$+ [A_{10} + A_{11}(y_m - y_0) + \ldots + A_{1m}(y_m - y_0)(y_m - y_1)\ldots(y_m - y_{m-1})](x - x_0)$$
$$+ \ldots.$$

Рассуждая как и прежде, найдем

$$A_{k0} + A_{k1}(y_m - y_0) + \ldots + A_{km}(y_m - y_0)\ldots(y_m - y_{m-1}) = f(x_0; x_1; \ldots; x_k; y_m).$$

Рассматривая это выражение, как функцию y_m, получаем

$$A_{ki} = f(x_0; x_1; \ldots; x_k; y_0; y_1; \ldots; y_i).$$

Таким образом, окончательно нашу интерполяционную формулу можем записать в виде

$n-i \quad i-1 \quad j-1$
$i=0 \quad j=0 \quad p=0 \quad q=0$

n

$$P_n(x, y) = \sum \sum f(x_0;...;x_i;y_0;...;y_j) \cdot \prod (x - x_p) \prod (y - y_q) . \quad (8.30)$$

139Это – обобщенный интерполяционный полином Ньютона для неравных промежутков в случае интерполирования функции двух переменных.