Лекция 2. Численное решение уравнений. Определение существование корня на отрезке. Локализация (отделение корней). Уточнение корней. Конечные методы решения нелинейного уравнения. Метод дихотомии. Метод хорд. Сравнительная характеристика методов. Итерационные методы. Сходимость итерационного метода, принцип сжимающихся отображений. Метод простых итераций. Метод Ньютона.

2 Решение нелинейных
приближенными методами алгебраических
2.1 Основные
уравнений уравнений.
понятия.
Виды
уравнений
Способы
решения

В современной математике алгебру называют наукой о системах объектов (величин), над которыми определены операции, аналогичные сложению и умножению действительных чисел.

16Алгебраическим выражением называется, выражение, состоящее из имен объектов, знаков операций и вспомогательных знаков.

(a+b):(c+d)-f;
(a+b)/(c+d)-f ;
a + b
− f ;
c + d

Выражения, содержащие знак корня называют иррациональным x / 2 y .

Два алгебраических выражения, соединенные одним из знаков
<,<=,>,>=, ≠ образуют неравенство.

Неравенство называется тождественным или универсальным, если оно выполняется (в арифметическом смысле) для любых действительных значений входящих в неравенство величин. Неравенство называется выполненным, если существует непустое множество входящих в неравенство величин, при подстановке которых неравенство оказывается справедливым, и невыполнимым, если таких значений не существует.

$x^2+1>0$ – тождественное;
$2x+4>0$ – выполнимое;
$x^2+y^2+5<0$ – невыполнимое.

Два алгебраических выражения, соединенные знаком = образуют уравнение.

5x-2y=z+1.

Любое уравнение $P(x_1,...,x_n)=0$, где $P(x_1,...,x_n)$ есть многочлен (отличный от нулевого) относительно $x_1,...,x_n$ называется алгебраическим уравнением относительно переменных $x_1,...,x_n$. Коэффициенты многочлена могут быть при этом как постоянными, так и параметрами или функциями таких параметров.

$3x^2-x+5=0$ – алгебраическое.
$x^2+2y^2-xy-3=0$ – алгебраическое.
$y^3-y\sin(x)-2\sin^2(x)-7=0$ – не алгебраическое относительно x и y , но если x рассматривать как параметр, то это уравнение будет алгебраическим относительно y .
4 x − 7 + 5 = 1 − 2 x 3 - не алгебраическое.

Алгебраические уравнения, в которых переменные, рассматриваются как неизвестные, входят под знаком трансцендентных функций называются транс-

цендентными.
Sin(x)-e x +5=0 – трансцендентное.
Всякое алгебраическое уравнение относительно x можно записать в виде
n
A 0 x + A 1 x n-1 +...+ A n-1 x+A n =0 при A 0 ≠ 0, n>=1 . A i называются коэффициентами уравнения, n-его порядка.
Если все коэффициенты A i являются параметрами, то уравнение называется общим алгебраическим уравнением относительно x степени n .
17Если алгебраическое уравнение разделить на A 0 ≠ 0 , то обозначив A i /A 0 через a i (i=1...n) получим каноническую форму алгебраического уравнения n-й степени относительно x : x n +a 1 x n-1 + a 2 x n-2 +...+ a n-1 x+a n =0.
В общем случае алгебраическое уравнение можно записать в виде F(x)=0 , где функция F(x) определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале [a,b].
Всякое число ξ∈ [a,b] , обращающее функцию F(x) в нуль, т.е. такое, при котором F(ξ)=0 , называют корнем уравнения или нулем функции F(x) .
Мы будем предполагать, что уравнение F(x)=0 имеет лишь изолированные корни, т.е. для каждого корня уравнения существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.
Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения обычно складывается из двух этапов:
1) Отделение корней, т.е. возможно тесных промежутков [a,b] , в которых содержится только один корень.
2) Уточнение приближенных коней, т.е. доведение их до заданной степени точности.
Теорема: Если непрерывная функция F(x) принимает значение разных знаков на концах отрезка [a,b] , т.е. F(a)*F(b)<0 , то внутри этого отрезка содержится, по крайней мере, один корень уравнения F(x)=0 , т.е. найдется хотя бы одно число ξ∈ (a,b) , такое, что F(ξ)=0 .
Корень ξ заведомо будет единственным, если производная F ′ (x) существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (a,b), т.е. если F ′ (x)>0 (F ′ (x)<0) при a<x<b.
Действительные корни уравнения F(x)=0 приближенно можно рассматривать как абсциссы точек пересечения графика функции y = F(x) с осью OX .
Если уравнение не имеет близких между собой корней, то этим способом его корни легко отделяются. На практике часто бывает выгодно уравнение F(x) заменить равносильным ему уравнением φ (x)=ψ (x) ,
где φ (x), ψ(x) – более простые функции, чем функция F(x).
Тогда построив графики функций y= φ (x) и y= ψ(x) , искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.
Пример 2.1 : xlg(x)=1 . Представим в виде 1/x=lg(x) . Построим два графика функций y=1/x и y=lg(x) (см. рисунок 2.1).
181,0
0,5
y=lgx
y=1/x
0,0
0,0
1,0
2,0
3,0
4,0

5,0
6,0
7,0
-0,5
X
Рисунок 2.1- Графики функций y=1/x и y=lg(x)
Пример 2.2 : Sin(2x)-ln(x)=0 . Представим в виде Sin(2x)=ln(x) . Построим два графика y=Sin(2x) и y=ln(x) (см. рисунок 2.2)
1,5
1,0
0,5
0,0
0,0
0,4
0,8
1,2
1,6
2,0
2,4
2,8
3,2
3,6
y=lnx
y=Sin2x
-0,5
-1,0
-1,5
X
Рисунок 2.2- Графики функций y=Sin(2x) и y=ln(x)
Пример 2.3 : x 3 -2x 2 +1=0 . Представим в виде x 3 =2x 2 -1 . Построим два графика y=x 3 и y=2x 2 -1 (см. рисунок 2.3)
191,5
1,0
0,5
0,0
-2,0
-1,0
0,0
1,0
y=x^3
y=2x^2-1
2,0
-0,5
-1,0
-1,5
X
Рисунок 2.3- Графики функций y=x 3 и y=2x 2 -1
2.2 Метод половинного деления для решения нелинейного уравнения
Пусть дано уравнение
(2.1).
f(x)=0,
Функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и выполняется условие

$f(a)*f(b)<0$. (см. рисунок 2.4).
y
f(x)
a
c
b
f(a)
f(c)
Рисунок 2.4 – График функции f(x)
20
f (b)
xДля нахождения корня уравнения $f(x)=0$, делим отрезок [a,b] пополам, т. е. $c=(a+b)/2$.
Если $f(c)=0$, то $x=c$ – корень уравнения.
Если $f(c) \neq 0$, то выбираем ту из половин [a,c], [c,b] , на концах которой функция f(x) имеет противоположные знаки. В нашем случае это отрезок [c,b] .
Новый, суженный отрезок $[a_1 ,b_1]$ снова делим пополам и проводим тоже рассмотрение, что и выше.
В результате проведенных рассуждений, получаем последовательность вложенных отрезков $[a_1 ,b_1], [a_2 ,b_2], [a_3 ,b_3],....., [a_n ,b_n],...$ таких, что и
$f(a_n)*f(b_n) \leq 0$, (2.2)
$b_n - a_n = (b-a)/2^n$ (n=1,2,3.....), (2.3)
Т. к. левые концы $a_1 , a_2 , a_3 , ... a_n ,..$ образуют монотонную, не убывающую, ограниченную последовательность, а правые концы $b_1 , b_2 , b_3 , ... b_n ,..$ монотонную, не возрастающую, ограниченную последовательность, то в силу равенства (3) при $n \to\infty$ существует общий предел $\xi = \lim a_n = \lim b_n$, т. е.
$n \to\infty$
$n \to\infty$
$f(\xi)=0$ и ξ является корнем уравнения.
2.2.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом половинного деления
Найти корни уравнения $(1-x)^{0.5} -\tan(x)=0$ с точностью до $\varepsilon =0,001$ с помощью метода половинного деления .
Исходное уравнение представим в виде $(1-x)^{0.5} = \tan(x)$ и рассмотрим графики двух функций $y= 6*x+8$ и $y1= x^3$.
I. Строим таблицу.
$f(x)=(1-x)^{0,5} -\tan(x)=0$
$y=(1-x)^{0,5}$
$y1=\tan(x)$
$f'(x)=((1-x)^{0,5} -\tan(x))'=-0,5/(1-x)^{0,5} -1/(\cos(x))^2$
$f''(x)=(-0,5/(1-x)^{0,5} -1/(\cos(x))^2)'=-0,25/(1-x)^{3/2} -2*\sin(x)/(\cos(x))^3$
Таблица 2.1 – Значения функций $y=(1-x)^{0.5}$ и $y1=\tan(x)$
0,5
y=(1-x)
y1=tan(x)
f(x)
f'(x)
f''(x)
x
y
y1

-1,00
1,41
-1,56
2,97
-0,80
1,34
-1,03
2,37
-0,60
1,26
-0,68
1,95
-0,40
1,18
-0,42
1,61
-0,20
1,10
-0,20
1,30
0,00
1,00
0,00
1,00
0,20
0,89
0,20
0,69
-1,60
-0,77
0,40
0,77
0,42
0,35
0,60
0,63
0,68
-0,05
0,80
0,45
1,03
-0,58
-3,18
-7,04
1,00
0,00
1,56
-1,56
21II. Строим график:
Г р а ф и к и ф у нк ц и й y = (1 -x)^ 0 ,5 и y 1 = ta n (x)
2 ,0 0
1 ,5 0

1 ,0 0
0 ,5 0
0 ,0 0
-1 ,0 0
-0 ,8 0
-0 ,6 0
-0 ,4 0
-0 ,2 0
0 ,0 0
0 ,2 0
0 ,4 0
0 ,6 0
0 ,8 0
1 ,0 0
y
y1
-0 ,5 0
-1 ,0 0
-1 ,5 0
-2 ,0 0

Рисунок 2.5 – Графики функций y=(1-x) 0.5 и y1=tan(x)

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале [0.2,0.8] .

Проверим условие существования корня на отрезке [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0.
f(0.2)=0.69, f(0.8)=-0.58. Следовательно, f(0)*f(1)<0, т. е. корень существует.

2.3 Метод хорд для решения нелинейных уравнений

Пусть дано уравнение

f(x)=0,
(2.4)

где функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и f(a)*f(b)<0 . Пусть для определенности f(a)<0 и f(b)>0 . Тогда, вместо того чтобы делить отрезок [a, b] пополам более естественно разделить его в отношении f(a)/f(b) (см. рисунок 2.6).

Это дает нам приближенное значение корня

x 1 =a+h 1 ,

Из подобия треугольников aAc и bBc имеем

22

(2.5)h 1
f (a)
,
=
f (b) b − (a + h 1) (2.6)
f (a)
(b − a),
h 1 = −
f (b) − f (a) (2.7)
−
определяем h 1

y
B(b,f(b))
f (b)
a

h 1
c
ξ
x 1
f(a)
A(a,f(a))
f (b)
b
x
y=f (x)
Рисунок 2.6 - График функции f(x) (f’’(x)>0, f(b)>0)
Подставляя в формулу (2.5) вместо h 1 полученное, имеем

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a), \quad (2.8)$$

Далее применяем тот же процесс к тому из отрезков [a, x1] или [x1, b] , на концах которого функция f(x) имеет противоположные знаки, получим второе приближение корня x_2 и т. д..
(2.8) - формула приближенного значения корня, полученного по методу хорд.
Геометрически способ пропорциональных частей эквивалентен замене кривой y=f(x) проходящей через точки A(a,f(a)) и B(b,f(b)) . В самом деле, уравнение хорды AB есть

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y(x) - f(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (2.9)$$

Отсюда, полагая $x=x_1$ и тогда $y(x_1)=0$, получим:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a), \quad (2.10)$$

Формула (2.10) полностью эквивалентна формуле (2.8).
23В методе хорд:
1) Неподвижен тот конец, для которого знак функции f(x) совпадает со знаком ее второй производной f"(x);
2) Последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня ξ , где функция f(x) имеет знак, противоположный знаку ее второй производной f"(x) (см. рисунок 2.7).
A(a,f(a))
y
B(b,f(b))
y
f(a)
f(b)
x 1
a
ξ

a=x 0 x 1
b=x 0
x x 2 2
x 2
x
f(b)
B(b,f(b))
ξ
b x
f(a)
A(a,f(a))
а)
б)
Рисунок 2.7 – График функции f(x) , для которой f’’(x)>0, f(a)>0 (а) и f(b)>0 (б)

Если точка A неподвижна (рисунок 2.7 - а)), вычисление приближенного корня производится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad (2.11)$$

Если точка B неподвижна (Рисунок 2.7 - б)), вычисление приближенного корня производится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \quad (2.12)$$

2.3.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом хорд

Найти корни уравнения x^3 -6*x-8=0 с точностью до ε =0,001 с помощью метода хорд .

24Исходное уравнение представим в виде x^3 =6*x+8 и рассмотрим графики двух функций y= 6*x+8 и y1= x^3 .

I. Строим таблицу.

f(x)=x^3 -6*x-8=0
y=6*x+8
y1=x^3
f'(x)=(x^3 -6*x-8)'=3*x2-6
f''(x)=(3*x^2 -6)'=6*x

Таблица 2.2 – Значения функций y= 6*x+8 и y1= x^3

y=6*x+8
y1=x 3
f(a)*f(b)>0
f'(a)*f(b)>0
f''(a)*f’’(b)>0
f(a)*f''(a)<0
x
-1 -0,5
0 0,5
1

y
2
5
8 11 14
y1 -1,00 -0,13 0,00 0,13 1,00
проверка существования корня
проверка первой производной
проверка второй производной
выбор начального приближения
a
b
1,5
2
2,5
3
3,5
4
17 20
23
26
29
32
3,38 8,00 15,63 27,00 42,88 64,00
-7,38
13,9
12,8
30,8
15
21
-111
291
x 0
II. Строим графики функций (см. рисунок 2.8).
Графики функций y=x^3 и y1=6*x+8
70
60
50
40
y=6*x+8
30
y1=x^3
20
10
0
-10 -1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5

3
3,5
4
Рисунок 2.8 – Графики функций $y=6*x+8$ и $y1=x$ 3
Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале [2.5,3.5] .
Проверим условие существования корня на отрезке [a,b], т.е. $f(a)*f(b)<0$.
$f(2.5)=-7.38$, $f(3.5)=13.9$. Следовательно, $f(2.5)*f(3.51)<0$, т. е. корень существует.
252.4 Метод Ньютона (касательных)
Пусть корень ξ уравнения
$f(x)=0$,
2.13)
отделен на отрезке [a, b] . На данном отрезке первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки. Зададим n -ое приближение корня x_n , тогда можно записать, что
$\xi=x_n+h_n$,
(2.14)
где h_n - малая величина.
$f(\xi)=0$ или $f(x_n+h_n)=0$,
(2.15)
Применяя формулу Тейлора, получим
$f(x_n+h_n)\approx f(x_n)+f'(x_n)*h_n=0$,
(2.16)
тогда
$h_n = -$
$f(x_n)$
,
$f'(x_n)$
(2.17)
Подставим (2.17) в (2.14), с учетом (2.16) получим
$x_{n+1} = x_n -$
$f(x_n)$
,
$f'(x_n)$
(2.18)
где x_{n+1} - новое приближение корня.
Если $f(x_{n+1})<=\varepsilon$, тогда x_{n+1} корень уравнения $f(x)=0$ с заданной степенью точности ε.
Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене дуги кривой $y= f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой в соответствии с рисунком 2.9.
26B(b,f(b))
f (b)
a
x_2
f(a)
A(a,f(a))
x_1
$x_0=b$
x
y=f (x)

Рисунок 2.9 - График функции f(x) (f’’(x)>0, f(b)>0)
где x n -x n+1 =h . x n+1 - точка пересечения касательной к точке B с осью X .
При выборе начального приближения x n необходимо задавать x n в той части отрезка [a, b] , в которой выполняется условие f(x n)*f’’(x n)>0 .
Из формулы (2.18) видно, что, чем меньше численное значение f’(x) в окрестности данного корня, тем меньше поправка, которую надо учитывать в первом приближении, а, значит, быстрее сходимость.
2.4.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона (касательных)
Найти корни уравнения x 3 -3*x 2 -24*x-3=0 с точностью до ε =0,001 с помощью метода Ньютона(касательных) .
Исходное уравнение представим в виде x 3 =3*x 2 +24*x+3 и рассмотрим графики двух функций y= 3*x 2 +24*x+3 и y1= x 3 .
I. Строим таблицу
f(x)=x 3 -3x 2 -24x-3=0
y=3*x 2 +24*x+3
y1=x^3
f'(x)=(x^3-3*x 2 -24*x-3)'=3*x 2 -6*x-24
f''(x)=(3*x 2 -6*x-24)'=6*x-6
27Таблица 2.3 – Значения функций y= 3*x 2 +24*x+3 и y1= x 3
y=3*x 2 +24*x+3
y1=x
3
x -0,50 -0,40 -0,30 -0,20 -0,10 0,00 0,10 0,20 0,30 0,40 0,50
y -8,25 -6,12 -3,93 -1,68 0,63 3,00 5,43 7,92 10,47 13,08 15,75
y1 -0,13 -0,06 -0,03 -0,01 0,00 0,00 0,00 0,01 0,03 0,06 0,13
f(a)*f(b)<0 проверка существования корня 1,67
-0,63
f'(a)*f'(b)>0 проверка первой производной -22,68 -23,37
f''(a)*f''(b)>0 проверка второй производной
-1,00 -0,50
f(a)*f''(a)>0 проверка условия выбора x 0
-1,67
0,32
x 0
II. Строим графики функций (см. рисунок 2.10)
Г р а ф и к и ф у н к ц и й y=3*x^2+24*x+3 и y1=x^3
20,00
15,00
10,00
y
y1
5,00
0,00
-5,00
-0,50 -0,40 -0,30 -0,20 -0,10 0,00 0,10 0,20 0,30 0,40 0,50
-10,00
Рисунок 2.10 – Графики функций y=3*x 2 +24*x+3+8 и y1=x 3
Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале [-0.2,-0.1] .
Проверим условие существования корня на отрезке [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0.
f(-0.2)=1.67, f(-0.1)=-0.63. Следовательно, f(-0.2)*f(-0.1)<0, т. е. корень сущест-

вует.
282.5 Метод итерации
Пусть дано уравнение
$f(x)=0$,
(2.19)
где $f(x)$ – непрерывная функция, и требуется определить его веществен-
ные корни. Заменим уравнение (2.19) равносильным уравнением
$x=\varphi(x)$,
(2.20)
Выберем каким-либо способом грубо приближенное значение корня x_0 и
подставим его в первую часть уравнения (2.20). Тогда получим некоторое число
$x_1=\varphi(x_0)$,
(2.21)
Подставляя теперь в правую часть равенства (2.21) вместо x_0 число x_1 ,
получим новое число $x_2=\varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последова-
тельность чисел
$x_n=\varphi(x_{n-1})$ $(n=1,2,3,...)$,
(2.22)
$x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ – последовательность приближений (итерационная после-
довательность).
Если эта последовательность – сходящаяся, т.е. существует придел $\xi=\lim$
x_n , то, переходя к пределу в равенстве (2.22) и предполагая функцию $\varphi(x)$ – не-
прерывной, найдем: $\lim x_n=\varphi(\lim x_{n-1})$ или
$\xi=\varphi(\xi)$,
(2.23)
Таким образом, предел ξ является корнем уравнения (2.20) и может быть
вычислен по формуле (2.22) с любой степенью точности.
Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим обра-
зом (см. рисунок 2.11).
Построим на плоскости XOY график функции $y=x$ и $y=\varphi(x)$. Каждый дей-
ствительный корень ξ уравнения (2.20) является абсциссой точки пересечения
M кривой $y=\varphi(x)$ с прямой $y=x$.
Отправляясь от некоторой точности $A_0 [x_0, \varphi(x_0)]$, строим ломаную
$A_0 B_1 A_1 B_2 A_2$ ... (лестница) (см. рисунок 2.11), звенья которой попеременно па-
раллельны оси OX и OY , вершины A_0, A_1, A_2, ... лежат на кривой $y=\varphi(x)$, а вер-
шины B_1, B_2, B_3 ... - на прямой $y=x$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1 , A_2 и B_2 , ...,
очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения
x_1, x_2, ... корня ξ .
29y
$y=\varphi(x$
B
A
B
A
B
A
x_3
x_2
x_1
x_0
$y=x$
x

Рисунок 2.11 – График сходящегося итерационного процесса «лестница»
Возможен также другой вид ломаной $A_0 B_1 A_1 B_2 A_2$ ...(спираль) (см. рисунок 2.12). Легко сообразить, что решение в виде «лестница» получается, если производная φ’(x) положительна, а решение в виде «спираль», если производная φ’(x) отрицательна.

y
y=φ(x)
y=x
A_1
B_2
A_0
B_1
x_1
x_2
x_0
x

Рисунок 2.12 – График сходящегося итерационного процесса «спираль»

На рассмотренных рисунках $|\varphi'(x)| <1$, и процесс итерации сходится.

Однако, если рассмотреть рисунок 2.13, где $|\varphi'(x)| >1$, то процесс итерации может быть расходящимся. Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

30y=x
A_2
y
A_1
B_2
A_0
B_1
x_1
x_0
x_2
x
y=φ(x)

Рисунок 2.13 – График расходящегося итерационного процесса

Теорема: Пусть функция φ(x) определена и дифференцируема на отрезке [a,b] , причем, все ее значения φ(x) принадлежат [a,b] . Тогда, если существует правильная дробь q такая, что

$|\varphi'(x)|\le q<1$, (2.24)

$x_n = \varphi(x_{n-1})$ (n=1,2,3,...), (2.25)

при $a<x<b$, то:

1) процесс итерации
нения
сходиться независимо от начального значения x_0 € [a,b] ;
2) предельное значение $\xi=\lim x_n$ является единственным корнем урав-
x=φ(x),
(2.26)

Отсюда ясно, что сходимость процесса итерации будет тем быстрее, чем меньше число q .

Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последних приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства

$| x_n - x_{n-1} |\le((1-q)/q)*\varepsilon$, при $0<\varphi'(x)<q$

и
$| x n - x n-1 | \leq \varepsilon$, при $\varphi'(x) < 0$.

312.5.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом итерации

Найти корни уравнения 3 x +x+2=0 с точностью до ε =0,001 с помощью метода итерации .

Исходное уравнение представим в виде x=-(3 x +2) и рассмотрим графики двух функций y= -(3 x +2) и y= x.

I. Строим таблицу
3 x +x+2=0
x=-3 x -2=-(3 x +2)
φ(x)=-3 x -2=-(3 x +2)
y=x
φ'(x)=-3 x *LN(3)

Таблица 2.4 – Значения функций y=-(3 x +2) и y= x
x
φ(x)
y
f(a)*f(b)
abs(φ'(x))<1
-3
-2,04
-3,00
-2,5
-2,06
-2,50
-0,44
0,07
x 0
-2
-2,11
-2,00
-1,5
-2,19
-1,50
-1
-2,33
-1,00
1,33
0,37
-0,5
-2,58
-0,50
0
-3,00
0,00
0,5
-3,73
0,50
1
-5,00
1,00

II. Строим графики функций (см. рисунок 2.14)
Рисунок 2.14 – Графики функций y=-(3 x +2) и y=x
32
1,5
2
-7,20 -11,00
1,50
2,00Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале [-2.5,-1] .
Проверим условие существования корня на отрезке [a,b] , т.е. f(a)*f(b)<0.
f(-2.5)=-0.44, f(-1)=1.33 . Следовательно, f(-2.5)*f(-1)<0 , т. е. корень существует.
Проверим условие сходимости эквивалентного уравнения на полученном интервале, т. е. abs(φ'(x))<1. Abs(φ'(-2.5))=0.07<1, abs(φ'(-1))=0.37<1 . Следовательно, для эквивалентного уравнения метод итераций применить можно и за x 0 рекомендуется взять точку a, т. е. x 0 =-2.5 .
2.6 Комбинированный метод хорд и касательных
Методы хорд и касательных дают приближения к корню с разных сторон.
Если один из них дает приближения слева, то другой - справа, и наоборот. Если за один проход цикла в алгоритме уточнения корня применить оба эти способа одновременно, заданная точность результата будет получена быстрее.
Пусть уравнение F(x) = 0 имеет единственный корень на отрезке [a; b], а функция F(x) на этом отрезке монотонна и не меняет характера выпуклости, т. е. первая и вторая производная сохраняют на интервале постоянные знаки.
Применяя расчетные формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.27)$$

и

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a),$$

или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \qquad (2.28)$$

для метода касательных и хорд, следует правильно определить, какой конец отрезка отделения корня (левый или правый) нужно будет принять за начальное значение корня для одного метода, а какой - для другого. Для этого надо в качестве параметра начального приближения x 0 для формулы (2.28) выбрать тот конец отрезка [a; b], для которого F(x 0) * F’’(x 0) < 0 . А другой конец отрезка принять в качестве начального приближения к корню для метода касательных. Один из возможных способов одновременного расположения хорды и касательной показан на рисунке 2.15.
33Рис. 2.15 - Геометрический смысл комбинированного метода хорд и касательных:
Для комбинированного метода хорд и касательных существует удобный способ оценки погрешности корня. Если на n -ом шаге итерационного процесса

за приближенное значение корня ξ, принимают середину отрезка, ограниченно-
го последними приближениями слева и справа (обозначим их соответственно x_l и x_r), т.е.

$$\xi = \frac{1}{2}(x_l + x_r), \quad (2.29)$$

то допускаемая при этом погрешность корня Δξ не будет превышать половины длины этого отрезка:

$$\Delta\xi \le \frac{1}{2}|x_r - x_l|, \quad (2.30)$$

2.6.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения комбинированным методом хорд и касательных

Найти корни уравнения x^3 -6*x-8=0 с точностью до ε =0,001 с помощью комбинированного метода хорд и касательных .

Исходное уравнение представим в виде x^3 =6*x+8 и рассмотрим графики двух функций y= 6*x+8 и y1= x^3 .

II.

Строим таблицу.

f(x)=x^3 -6*x-8=0

y=6*x+8

y1=x^3

f'(x)=(x^3 -6*x-8)'=3*x2-6

f''(x)=(3*x^2 -6)'=6*x

34Таблица 2.5 – Значения функций y= 6*x+8 и y1= x^3

y=6*x+8

y1=x^3

f(a)*f(b)>0

f'(a)*f(b)>0

f''(a)*f''(b)>0

f(a)*f''(a)<0

x

-1 -0,5

0 0,5

1

y

2

5

8 11 14

y1 -1,00 -0,13 0,00 0,13 1,00

проверка существования корня

проверка первой производной

проверка второй производной

выбор начального приближения

a

b

1,5

2

2,5

3
3,5
4
17 20
23
26
29
32
3,38 8,00 15,63 27,00 42,88 64,00
-7,38
13,9
12,8
30,8
15
21
-111
291
x l
x r
III. Строим графики функций (см. рисунок 2.16).
Графики функций y=x^3 и y1=6*x+8
70
60
50
40
y=6*x+8
y1=x^3
30
20
10
0
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
-10
Рисунок 2.16 – Графики функций y=6*x+8 и y1=x 3