Принятие решения: постановка задачи оптимизации, цель, предпочтения, критерии, процесс отладки

Основное допущение теории оптимизации:

- **Не существует наилучшего в абсолютном смысле решения**.
- Решение может считаться наилучшим лишь для данного лица, принимающего решение (ЛПР), в соответствии с поставленной целью.
- **Лицо, принимающее решение** (ЛПР) — лицо, орган или устройство выбирающее решение на основе анализа информации.
- **Принятие решений** — процесс, позволяющий выбрать только одну из имеющихся возможностей (альтернативу).
- **Альтернатива** — вариант, выбранный из совокупности всех возможностей.
- **Критерии** — числовые функции, позволяющие различать альтернативы.

- Задача оптимизации является **многокритериальной**, если выбор альтернатив производится по двум и более критериям.
- Целью многокритериальной оптимизации является оценка качества исходов и выявление предпочтений между ними на основе их алгоритмической обработки в соответствии с моделью.

- Математическая модель задачи принятия решений — формальное описание составляющих ее элементов:
  - Цель.
  - Средства.
  - Результаты.
  - Способы связи между средствами и результатами.
- Методология выбора:
  - Цель -> постановка задачи.
  - Средства -> выбор метода решения.
  - Результат -> анализ полученного результата.

Множеству альтернатив X соответствует некоторое множество исходов A, при этом между альтернативами и исходами могут быть различные зависимости (или способы связи средств с результатами):

- Полная определённость: каждая альтернатива приводит к единственному исходу
- Условия риска: каждая альтернатива может привести к одному из нескольких исходам с некоторыми вероятностями появления.
- Неопределённость: каждая альтернатива может привести к одному из нескольких исходам, причем невозможно указать какую-либо стохастическую зависимость исходов от альтернатив.

Требования к модели:

- Отражение структуры предпочтений ЛПР.
- Отсутствие логических противоречий.
- Предоставление возможности использования всей информации о формулируемой ЛПР задаче.
- Содержание описания всех значимых элементов задачи и их свойств.
- Доступность для анализа и использования.

Элементы модели многокритериальной задачи:

- **Постановка задачи.**
- **Множество критериев и множество шкал критериев.**
- **Множество векторных оценок критериев.**
- **Система предпочтений лица, принимающего решение** — совокупность суждений о влиянии определенных изменений отдельных компонентов векторных оценок или наборов этих компонентов на общую предпочтительность альтернатив.
- **Решающее правило** — принцип сравнения векторных оценок и вынесения суждения о предпочтительности альтернатив. Отражается в методе решения.

Цель:

- Качественная цель: всякий возможный исход либо полностью удовлетворяет этой цели, либо полностью не удовлетворяет.

$$\varphi(a)=1 \text{ для } a \in B,\ \varphi(a)=0 \text{ для } a \notin B$$

- Цель в виде максимизации (минимизации): для принятия решений в случаях, когда оптимальный результат отождествляется с экстремумом заданной функции, называемой целевой.

$$\varphi(x) \to max\ (min)$$

Принципы задания целевой функции

1. **Принцип соответствия:** выбор такой целевой функции, чтобы модель существенно влияла на изменение значений целевой функции и обеспечивала наблюдаемые результаты.
2. **Принцип однозначности**: если имеются две целевые функции:

   $P_1(x,y)\to\max$ и $P_2(x,y)\to\min$,

   то целесообразно заменить $V(x,y)=1/P_1(x,y)$

   и искать $F(x,y)= A_1V(x,y)+ A_2P_2(x,y)$,

   где A_1 и A_2 – весовые коэффициенты.
3. **Принцип модификации**: целевая функция должна задаваться через переменные, на которые можно целенаправленно воздействоать.
4. **Принцип подходящей формы**: функции, имеющие разрывы, локальные экстремумы и пр. являются нежелательными для выбора в качестве целевой.

Примеры видов целевых функций (наиболее распространенные)

- **Экономической эффективности**:

$$W = \sum V_i P_i - \sum F_j(R_j),$$

где V_i – коэффициент эффективности i-го компонента процесса или системы; P_i - i-ый эффект процесса; $F_j(R_j)$ - стоимость j-го ресурса; R_j - расход j-го ресурса.

- **Стоимости:**

$$W = \sum F_i(R_i),$$

где – $F_i(R_i)$ стоимость получения результата i-го выхода; R_i - результат по i-му выходу

- **Качества:**

$$W = \sum A_i (Y_i - y_i)^2,$$

где A_i – весовые коэффициенты; Y_i - требуемые значения; y_i - фактические значения переменных.

Классификация критериев

- Количественные: возможно указать численные значения или отношения «во сколько раз лучше-хуже». В этом случае используются шкалы:
  - Численных значений
  - Отношений
  - Интервалов
- Качественные: используют ранжирование или порядковую шкалу.
- Критерии с балльными шкалами.

Свойства критериев:

- Признаются лицом принимающим решение, в качестве характеристик достижения поставленной цели.
- Имеют монотонную связь с качеством (в смысле «чем больше (меньше), тем лучше»).
- Являются общими и измеримыми для всех допустимых решений.
- Не могут быть представлены в виде конкретно заданных значений для всего множества альтернатив заранее.
- Множество критериев может быть задано заранее или сформировано в процессе исследования.
- Для каждого критерия указывается подмножество *G*, из которого он принимает свои значения, называемое шкалой.

- Условие: множество X выбирается из множества R^n при помощи ограничений:

$$X = \{x \in R^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_l(x) \geq 0\},$$

где $g_i(x)$ — числовые функции, составляющие вектор-функцию ограничений:

$$g(x) = [g_1, \ldots, g_l]^T$$

- Критерии $Ф_1$, $Ф_2$,...$Ф_m$ также определяются на множестве R^n
- Пусть дано множество критериев $Ф_1$, $Ф_2$,...$Ф_m$. Тогда критерии $Ф_i$ называются частными (локальными), если верно:

$$\overrightarrow{Ф} = [Ф_1, \ldots, Ф_i, \ldots Ф_m].$$

- Функцию φ называют допустимым преобразованием критерия $Ф_i$, если функция $\varphi(Ф_i)$ является критерием, задающим то же свойство.

Требования к набору критериев:

- **Полнота** — использование дополнительных критериев не изменяет результата, а отбрасывание одного из набора оказывает влияние.
- **Неизбыточность** — отсутствие логических пересечений (отражения одних и тех же аспектов несколько раз).
- **Минимальность** — набор должен содержать как можно меньшее количество критериев.
- **Измеримость** — допущение количественной или качественной оценки характеризуемого свойства.
- **Операциональность** — каждый критерий должен иметь прозрачную для ЛПР формулировку, однозначный смысл и характеристику.
- **Декомпозируемость** — возможность разделения задачи на подзадачи.

Система предпочтений ЛПР

- Конечная: X содержит конечное число элементов.
- Дискретная: X счетно.
- Целочисленная: компоненты $x_i \in \vec{x}$, $(\vec{x} \in X)$ целые числа.
- Булева: $x_i \in [1,0]$, т.е. векторы $\vec{x}$ состоят их нулей и единиц.
- Выпуклая: все Φ_i и g_i выпуклые функции.
- Линейная: X полиэдральное множество, а Φ_i - линейные.
- Дифференцируемая: все Φ_i и g_i дифференцируемы.

Описания системы предпочтений ЛПР

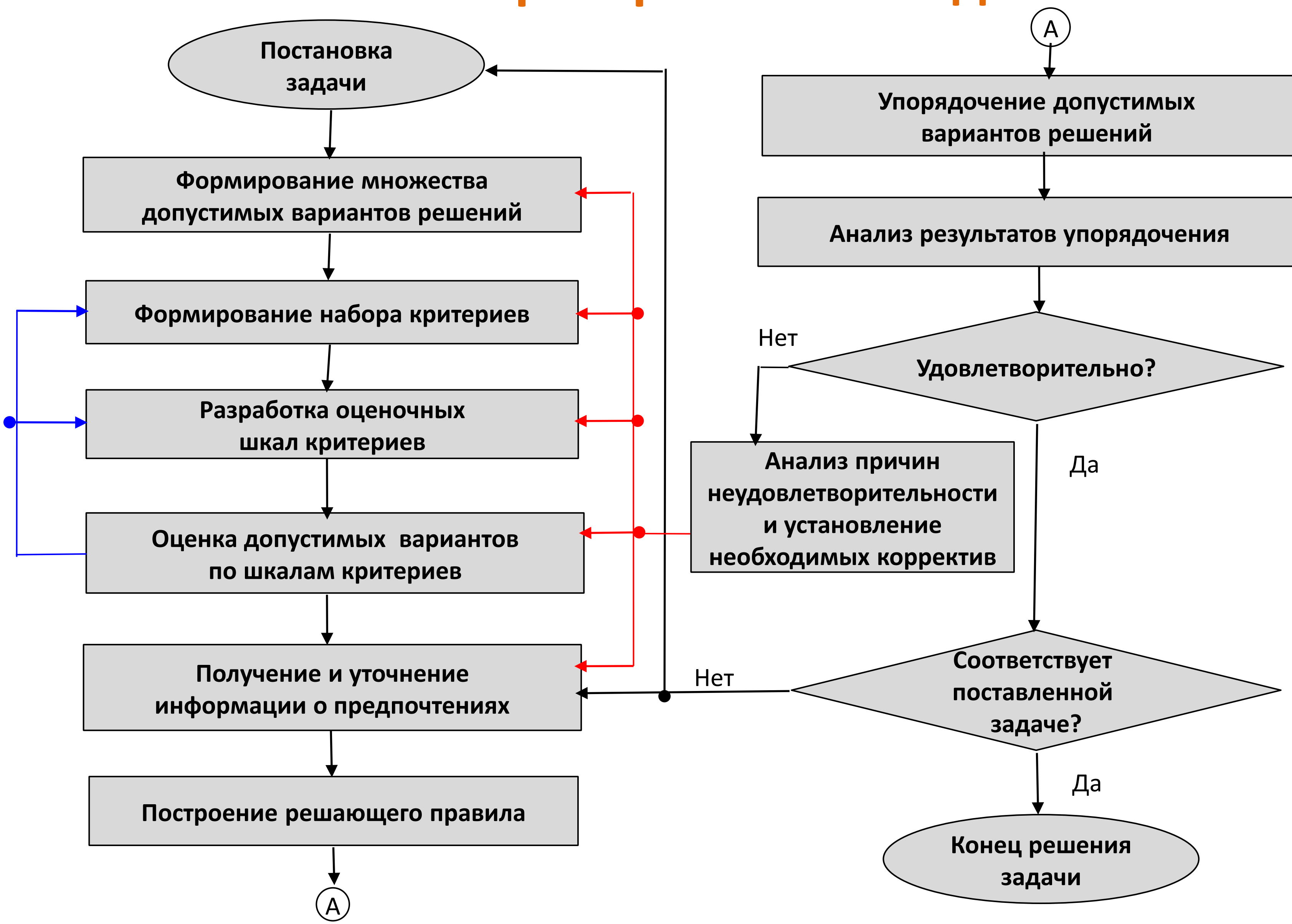
- Чаще всего используются бинарые отношения.
- Бинарным отношением $\mathscr{R}$ на множестве A называется подмножество $A^2 = A \times A$, состоящее из упорядоченных пар элементов (a, b), где $a, b \in A$.
- Прядок компонент в паре является существенным: если $a \neq b$, то (a, b) и (b, a) различны.
- Запись $(a, b) \in \mathscr{R}$ или $a \mathscr{R} b$ означает, что a с b находятся в отношении $\mathscr{R}$.
- Для бинарных отношений применимы все понятия, вводимые для множеств: равенства, включения, пересечения, объединения, дополнения.
- Дополнительные операции:
  - обращение операций
  - умножение отношений

Свойства отношений

- **Рефлексивность:** отношение на множестве A, когда каждый элемент множества находится в отношениях сам с собою.
- **Антирефлексивность:** ни один элемент множества A не находится в отношениях сам с собою
- **Симметричность:** на каждую упорядоченную пару приходится упорядоченная пара с переставленными компонентами
- **Асимметричность:** из двух выражений $a \mathscr{R} b$ и $b \mathscr{R} a$ по крайне мере одно не справедливо
- **Антисимметричность:** если $(a, b) \in \mathscr{R}$ и $(b, a) \in \mathscr{R}$, то обязательно $a = b$

- **Транзитивность:** если $(a, b) \in \mathscr{R}$ и $(b, c) \in \mathscr{R}$, то $(a, c) \in \mathscr{R}$
- **Линейность**: отношение на множестве A линейно, если для любых $a, b \in A$ верно $a\mathscr{R}b$ или $b\mathscr{R}a$.
- **Толерантность:** если отношение одновременно рефлексивно и симметрично. Два объекта являются сходными (толерантными), если они обладают хотя бы одним общим признаком.
- **Квазипорядок и порядок**: отношения квазипорядка - обладают свойствами рефлексивности и транзитивности; отношения порядка – рефлексивности, транзитивности и антисимметричности.
- **Эквивалентность:** отношение обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности.

Алгоритм построения и отладки модели многокритериальной задачи



Вид модели	Типовые задачи	Основные методы решений
Линейная	Линейное программирование	Симплекс-метод
Нелинейная	Нелинейное программирование	Метод неопределенных множителей Лагранжа
Целочисленные	Целочисленное программирование	Комбинаторные, методы отсечений и прю
Игровые	Парные игры с нулевой суммой	Смешанные стратегии, игры с обучением
Графо-матричные	Задачи о покрытии, кратчайшем расстоянии и пр.	Алгоритм Литтла, Краскала, Дейкстры
Потоковая	О максимальном потоке	Алгоритм Форда-Фалкерсона
Марковские процессы	Определение вероятности состояний	Уравнения Эрланга, имитационное моделирование,
Многоэтапные процессы с переменными	Динамическое программирование	Принцип Понтрягина
Со смысловыми переменными	Оптимизация принимаемых решений	Парето-оптимизация
С логическими переменными	Минимизация булевых функций	Булева алгебра

Трудности при постановке и анализе многокритериальных задач

- Отсутствие полного перечня допустимых вариантов решений.
- Неполнота перечня решений, характеризующих качество решений.
- Некорректность (несоответствие возможностям оценки) или отсутствие шкал критериев.
- Несоответствие информации или допущения предпочтениям.
- Выпадение из анализа допустимого варианта решения.
- Неполнота набора критериев, используемых в моделях.
- Неточное определение понятия «допустимый вариант».
- Отсутствие формулировки решающего правила.