4. ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ

4.1. Экспериментальные данные по надежности

Первичные данные по надежности можно получить только путем сбора и обработки экспериментальных данных (ЭД), формируемых в процессе испытаний или нормальной эксплуатации изделий [9, 12]. Такие данные обычно представляют собой цензурированные выборки. *Цензурированием* называется событие, приводящее к прекращению наблюдений за изделием до наступления системного события либо к свершению события в неизвестный момент времени в пределах некоторого интервала. *Цензурированной* называется выборка, элементами которой являются полные наработки и наработки до цензурирования (неполные наработки) или только наработки до цензурирования. Полной наработкой является наработка изделия от начала некоторого этапа его эксплуатации до системного события, например наработка до отказа. Неполная наработка характеризует наработку изделия: от начала эксплуатации (испытаний) до фиксированного момента времени, но до наступления системного события; от некоторого произвольного момента, не связанного с системным событием, до системного события или до конкретного момента времени.

Интервал, в котором наступает системное событие, причем точное значение наработки до системного события неизвестно, называется интервалом неопределенности. Этот интервал ограничен:

слева (цензурирование слева). Наблюдения за объектами прекращаются в конкретный момент времени. К этому моменту часть объектов отказала. Другая часть продолжает работать, причем неизвестно, как долго эти объекты проработают без отказа;

справа (цензурирование справа). К началу наблюдений объекты уже проработали некоторое неизвестное время без отказа. Отказавшие к моменту начала наблюдений объекты не учитываются;

слева и справа (цензурирование интервалом). Цензурирование интервалом является наиболее общим случаем цензурирования.

Различают однократно и многократно цензурированные выборки. К однократно цензурированным относят, в частности, цензурированные слева выборки, содержащие полные и неполные наработки, причем все неполные наработки равны друг другу. Если у объектов моменты или интервалы цензурирования различаются, то такие выборки являются многократно цензурированными. Применительно к задачам оценки надежности по результатам наблюдений в процессе эксплуатации цензурирование обычно связано с ограниченностью интервалов наблюдения.

Существует ряд типовых планов наблюдений. Обозначение плана включает три элемента. Первый элемент характеризует количество объектов N, предназначенных для наблюдений. Второй – действия с отказавшими объектами: U – отсутствие замены или восстановления отказавших объектов; R – замена отказавших объектов; M – восстановление отказавших объектов. Третий элемент (одна или две буквы) – определяет признак окончания наблюдений: T – наблюдения заканчиваются по истечении фиксированного интервала времени; r – наблюдения заканчиваются по достижении фиксированного количества реализаций (отказов, восстановлений); z – наблюдения заканчиваются при наработке i–го объекта, равной τ_i.

Обозначение или план [NUT] указывает, что под наблюдением находится N объектов, отказавшие объекты не заменяются и не восстанавливаются U, наблюдения заканчиваются по истечении заданного интервала времени T (однократно цензурированная выборка). План [NUz] означает, что наблюдение за конкретным объектом заканчивается при возникновении его отказа или при достижении конкретного значения наработки (многократно цензурированная выборка). При цензурировании по плану [NUT] фиксируется время проведения наблюдений, число событий представляет собой случайную величину. При цензурировании по плану [NUr] заранее задается число событий (доля событий), после наступления которых наблюдения прекращаются, время наблюдения заранее не фиксируется, т. е. оно случайно.

Выбор конкретного плана зависит от целей исследования. Далее рассматриваются планы типа [… U …]. Обработка результатов по плану типа [… R …] сводятся к предыдущему типу путем переноса начала наблюдений каждого нового объекта к некоторому условному началу испытаний всех объектов. Планы типа [… M …] можно рассматривать как планы типа [… U …], если каждую наработку между отказами трактовать как наработку некоторого невосстанавливаемого объекта (полное восстановление ресурса объекта после отказа). Очевидно, что план типа [NUN] соответствует полной выборке.

Оценка надежности проводится с начала эксплуатации на некоторый момент или за определенный интервал времени. В первом случае имеет место цензурирование слева по текущему моменту времени. Для невосстанавливаемых объектов часть из них к этому моменту времени может отказать, а другая часть продолжает работать, что соответствует плану наблюдения [NUT]. Значения наработок исправных объектов неизвестны, но очевидно, что они превышают интервал наблюдения. Во втором случае оценка надежности связана с цензурированием выборки интервалом: продолжительность работы средств до начала наблюдения точно неизвестна; часть средств может отказать до начала наблюдения и не учитывается на текущем интервале; другая часть может отказать на текущем интервале, а третья продолжит работу и по завершении периода наблюдения. В этих вариантах цензурирование осуществляется по фиксированным моментам времени, и число наблюдений в выборке является случайным.

В ряде случаев цензурирование осуществляется по конкретным событиям, например при определенном числе отказов объектов, что характерно при проведении испытаний однотипных объектов, планы типа [NUr]. У этих планов объем выборки не является случайным, случайна продолжительность наблюдений. В планах наблюдения [$NU(r,T)$] прекращение наблюдений происходит после отказа r объектов или по достижению момента времени T в зависимости от того, какое из событий происходит ранее. При этом необходимо принимать во внимание чередование состояний применения по назначению, нахождения в выключенном состоянии и хранения. Чередование состояний влияет не только на показатели, но и на модель надежности.

Выборки по надежности могут иметь: однократное цензурирование слева (например, период наблюдения – от начала эксплуатации до текущего момента времени); цензурирование интервалом (период наблюдения определяется календарными сроками); многократное цензурирование слева; многократное цензурирование интервалом. Для цензурированных выборок применяют свои методы оценки показателей, проверки статистических гипотез.

4.2. Непараметрические методы оценивания показателей

Если закон распределения исследуемого показателя неизвестен и нет необходимости его аналитического описания, то применяют непараметрические методы [9, 12, 14]. Эти методы проще, чем параметрические, но они не позволяют прогнозировать значения показателей надежности. К непараметрическим относят методы, построения "множительной" оценки, ядерных оценок и другие. Методы различаются сложностью реализации и качеством получаемых оценок.

Далее будем рассматривать вопросы оценки показателей безотказности (показатели ремонтопригодности оцениваются аналогично). Построение эмпирической функции распределения наработки до отказа по формуле $F_N(t) = i/N$ при $t > 0$ (где N – объем выборки; i – количество наработок до отказа, попавших в интервал [0, t], $i = \overline{1, N}$) неприменимо для планов [NUr], [NUT] и [NUz], так как этот подход предполагает использование информации по всей выборке. Если исключить наработки до цензурирования, то будут иметь место значительные ошибки в определении $F_N(t)$. Наличие цензурирования приводит к неопределенности для $F_N(t)$ в области цензурирования, которая увеличивается с ростом числа неполных наработок.

Постановка задачи определения показателей надежности по цензурированным выборкам формулируется следующим образом.

Имеются выборочные значения наработки до отказа $t_1, t_2, \ldots, t_r$ и до цензурирования $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$. Количество наработок до отказа r и до цензурирования k, объем выборки $N = r + k$.

Необходимо определить: эмпирическую функцию распределения наработок до отказа, оценки вероятности безотказной работы и среднего значения наработки до отказа.

Допущения: результаты получены с использованием одного из планов типа [NUr], [NUT] или [NUz].

Решение задачи включает: предварительную обработку ЭД; построение эмпирической функции распределения $F_N(t)$; оценивание вероятности безотказной работы $p^*(t)$ и средней наработки до отказа $T_О$.

Предварительная обработка ЭД предусматривает построение общего вариационного ряда – наработки на отказ и на цензурирование упорядочивают по возрастанию. Если наработка на отказ равна наработке до цензурирования, то в вариационном ряду первыми ставят наработку на отказ, а затем наработку до цензурирования.

В *методе множительной оценки* определение значений оценок $p^*(t)$ и $F_N(t)$ производится по простым соотношениям:

$$p^*(t)=1,\ t < t_1$$

$$p^*(t_i)=\prod_{t_j \le t_i}[1-1/(N_j+1)], \tag{4.1}$$

$$F_N(t_i)=1-p^*(t_i),$$

где t_1 – время возникновения первого отказа, N_j – количество работоспособных объектов после отказа при наработке, равной t_i.

По эмпирической функции распределения наработки до отказа или по функции вероятности безотказной работы можно получить оценки других показателей надежности невосстанавливаемых изделий. Точечная оценка вероятности безотказной работы за наработку t $(t < t_r)$ определяется с помощью линейной интерполяции

$$p^*(t)=d\,p^*(t_v) + (1-d)\,p^*(t_{v-1})],$$

где t_{v-1} и t_v – наработки до отказа, между которыми лежит наработка t; $d=(t-t_{v-1})/(t_v-t_{v-1})$.

При известном законе распределения средняя наработка до отказа $T_О=\int_0^\infty (1-F(t))dt$. Для цензурированных слева выборок время наблюдения ограничено, это обстоятельство позволяет получить только нижнюю границу средней наработки

$$T_{\text{O}} = \sum_{i=1}^{r} t_i \left[F_N(t_i) - F_N(t_{i-1})\right] + \left[1 - F_N(t_r)\right] z, \qquad (4.2)$$

где $z = \max(t_r,\ \tau_k)$; $t_0 = 0$.

Для многократно цензурированных выборок при $N_{u,i} > 0$ оценка интенсивности отказов $\lambda^*\{t_i - t_{i\text{-}1}\} = r_i / [N_{u,i}(t_i - t_{i\text{-}1})]$, где $N_{u,i}$ – количество объектов, за которыми ведется наблюдение в интервале времени $t_i - t_{i\text{-}1}$, r_i – количество наработок до отказа в этом интервале. Дисперсия оценки $\lambda^*\{t_i - t_{i\text{-}1}\}$ увеличивается с ростом функции $F_N(t)$.

Основные свойства оценок рассмотренных параметров определяются свойствами функции распределения наработки до отказа, в частности, если оценка функции несмещенная, то и оценка нижней границы средней наработки до отказа также будет несмещенной. Предложенная оценка функции распределения применима для выборок, многократно и однократно цензурированных слева.

Эта же оценка применима и к функции распределения для выборок, цензурированных справа или интервалом. Простым переходом к такому применению является приравнивание начала неопределенных на периоде наблюдения наработок до отказа (начало таких наработок лежит вне периода наблюдения и поэтому точно неизвестно) некоторой правдоподобной величине, например правой границе или середине интервала неопределенности.

Рассмотренный подход к построению эмпирической функции распределения прост в реализации, не требует большого объема данных и сложных вычислений. С его помощью удается получить (за исключением ситуаций, в которых $N_{u,i} = 0$) несмещенные, состоятельные, асимптотически нормальные оценки значений функции распределения наработки объекта до отказа. Основным недостатком оценок является невозможность их применения в интересах прогнозирования надежности изделий. Преодоление данного недостатка возможно на основе параметрического оценивания показателей, которое позволяет сформировать оценки с более высокой точностью, чем непараметрические методы.

Пример 4.1. По плану [NUz] проведено наблюдение за 10 объектами. Наработки шести объектов до отказа составили 1922, 2576, 2314, 1873, 2135, 2018 часов. К моменту оценки четыре объекта безотказно проработали 2107, 3936, 2010, 2397 часов. Необходимо построить эмпирическую функцию распределения наработки до отказа и оценить вероятность безотказной работы за наработку в 2000 часов.

Решение. Построим общий вариационный ряд, табл. 4.1 (звездочками помечены наработки на цензурирование).

Таблица 4.1

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_ν	1873	1922	2010*	2018	2107*	2135	2314	2397*	2576	3936*
t_r	t_1	t_2		t_3		t_4	t_5		t_6	
τ_k			τ_1		τ_2			τ_3		τ_4
i	1			2		3			4	
r_i	2			1		2			1	
k_i	1			1		1			1	

Рассчитаем оценку вероятности безотказной работы и эмпирическую функцию распределения наработки до отказа:

$p^*(t<1873)=1;$ $F_{10}(t<1873)=0;$

$p^*(t_1) = p^*(1873) = 1 – 1/10=0{,}9;$ $F_{10}(t_1) =1– p^*(1873) = 0{,}1;$

$p^*(t_2) = p^*(1922) = 0{,}9(1–1/9)=0{,}8;$ $F_{10}(t_2) = 0{,}2;$

$p^*(t_4) = p^*(2018) = 0{,}8(1–1/7)=0{,}686;$ $F_{10}(t_4) = 0{,}314;$

$p^*(t_6) = p^*(2135) = 0{,}686(1–1/5)=0{,}549;$ $F_{10}(t_6) = 0{,}451;$

$p^*(t_7) = p^*(2314) = 0{,}549(1–1/4)=0{,}411;$ $F_{10}(t_7) = 0{,}589;$

$p^*(t_9) = p^*(2576) = 0{,}397(1–1/2)=0{,}206;$ $F_{10}(t_9) = 0{,}794.$

Оценка средней наработки до отказа

$$T_О = 1873(0{,}1 – 0)+1922(0{,}2 – 0{,}1)+2018(0{,}314 – 0{,}2)+ +2135(0{,}451 – 0{,}314)+2314(0{,}589 – 0{,}451)+ +2576(0{,}794 – 0{,}589)+ (1 – 0{,}794)3936 = 2559{,}9 \text{ часа.}$$

Простое вычисление среднего значения по всем наработкам дает величину, равную 2328,8 часа, что меньше $T_О$.

Оценка вероятности безотказной работы за наработку 2000 часов:

$d= (2000 – 1922)/(2018 – 1922)=0{,}813;$

$p^*(2000)=0{,}813*0{,}686+(1 – 0{,}813)0{,}8=0{,}707.$

4.3. Параметрические методы оценивания показателей

Применение параметрических методов предполагает априорное знание закона распределения исследуемой величины или его определение по эмпирическим данным, что обусловливает необходимость проверки согласованности ЭД и выбранного закона [9, 14]. Параметрическая оценка по цензурированным выборкам основывается на методах максимального правдоподобия, моментов, квантилей, методах линейных оценок и ряде других.

Обработка многократно цензурированных выборок *методом максимального правдоподобия* допускается при следующих условиях:

$6 < N <10,$ $r/N \ge 0{,}5;$

$10 \le N <20,$ $r/N \ge 0{,}3;$

$20 \le N <50,$ $r/N \ge 0{,}2.$

Если указанные ограничения не выполняются, то вычисляется только нижняя доверительная граница параметров распределения. Оценки, получаемые по методу максимального правдоподобия, при относительно нежестких ограничениях асимптотически эффективны, не смещены и распределены асимптотически нормально.

Максимум функции правдоподобия находится обычными методами. Решение уравнения правдоподобия при различных схемах цензурирования является достаточно сложной задачей. Для типовых законов распределения соответствующие уравнения известны [9].

Экспоненциальное распределение. Точечные оценки параметра распределения λ при различных планах наблюдения:

$$\lambda = \frac{rN}{(N-1)\left(\sum_{i=1}^{r} t_i + \sum_{j=1}^{k} \tau_j\right)}, \quad r > 1, \quad \text{для } (NUz);$$

$$\lambda = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + (N-r)T}, \quad r > 0, \qquad \text{для } (NUT), \tag{4.3}$$

$$\lambda = \frac{r-1}{\sum_{i=1}^{r} t_i + (N-r)t_r}, \quad r > 1, \qquad \text{для } (NUr).$$

Нормальное распределение. Оценки параметров μ и σ для планов наблюдения [*NUr*], [*NUT*] и [*NUz*] находятся из системы уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r}(t_i - \mu)/\sigma + \sum_{j=1}^{k} f\left(\frac{\mu-\tau_j}{\sigma}\right)/\Phi\left(\frac{\mu-\tau_j}{\sigma}\right) = 0,\\ r - \sum_{i=1}^{r}\frac{(t_i-\mu)^2}{\sigma^2} + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\mu-\tau_j}{\sigma}\right) f\left(\frac{\mu-\tau_j}{\sigma}\right)/\Phi\left(\frac{\mu-\tau_j}{\sigma}\right) = 0,\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\Phi(x)$ – функция нормального распределения, $f(x)$ – функция плотности нормального распределения. Система уравнений (4.4) допускает только численное решение. В качестве начальных приближений для μ и σ берут оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения, вычисленные по объединенной выборке.

Распределение Вейбулла – Гнеденко. Оценки параметров δ и β для плана [*NUz*] вычисляются на основе системы уравнений

$$\begin{gathered}(r/\beta + \sum_{i=1}^{r}\ln t_i)(\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta} + \sum_{j=1}^{k}\tau_j^{\beta}) - (\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta}\ln t_i + \sum_{j=1}^{k}\tau_j^{\beta}\ln\tau_j)r = 0,\\ \delta = [\ (\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta} + \sum_{j=1}^{k}\tau_j^{\beta})/r\ ]^{1/\beta}.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Для планов наблюдения [*NUr*] и [*NUT*] оценки указанных параметров находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned}&(r/\beta+\sum_{i=1}^{r}\ln t_i)(\sum_{i=1}^{r}t_i^{\beta}+(N-r)t_m^{\beta})-(\sum_{i=1}^{r}t_i^{\beta}\ln t_i+(N-r)t_m^{\beta}\ln t_m)r=0,\\&\delta=\left[\ (\sum_{i=1}^{r}t_i^{\beta}+(N-r)t_m^{\beta})/r\ \right]^{1/\beta},\end{aligned} \qquad (4.6)$$

где $t_m = t_r$ для плана [*Nur*], $t_m = T$ для плана [*NUT*].

Системы уравнений (4.5) – (4.6) не имеют аналитического решения и требуют применения численных методов: вначале находится корень первого уравнения (оценка параметра β), затем прямой подстановкой значение оценки параметра δ. Для двухпараметрического распределения Вейбулла – Гнеденко большие (β > 4) или малые (β < 0,5) значения параметра свидетельствуют о том, что ЭД не подчиняются этому закону или отношение r/N мало. В таких случаях следует применить непараметрические методы оценивания.

Трудности применения метода максимального правдоподобия обусловливают разработку других методов. Метод моментов обычно приводит к простым вычислительным процедурам, позволяет получить асимптотически эффективные, несмещенные и нормально распределенные оценки, но требует учета типа цензурирования и применим при относительно большом объеме выборки (не менее 30). Метод квантилей менее критичен к типу цензурирования. Высокая точность оценок достигается оптимальным подбором квантилей, хотя такой подбор не всегда удается осуществить. Метод линейных оценок применяют при небольшом объеме выборки, он обеспечивает высокую эффективность, состоятельность и несмещенность оценок параметров распределения. Этот метод основан на нахождении линейной функции от порядковых статистик (упорядоченных элементов выборки), которая была бы несмещенной оценкой искомого параметра. Применение связано с необходимостью использования специальных видов распределений, что вызывает определенные неудобства.

Единого метода, лучшего для всех ситуаций оценивания, не существует. В каждом случае необходимо выбирать метод, подходящий по своим возможностям для заданного типа выборки и требований к оценкам показателей надежности, наличного ресурса по обработке данных. Рациональным является комбинированное использование методов, например нахождение приближенных оценок на основе квантилей с последующим их уточнением по формулам, полученным методом максимального правдоподобия.

Применение параметрического оценивания требует проверки гипотезы о соответствии выбранного теоретического закона и ЭД. Нулевая гипотеза H_0 такой проверки соответствует утверждению, что ЭД являются выборкой из генеральной совокупности, подчиняющейся закону распределения $F(t)$ или, другими словами, эмпирическая функция распределения $F_N(t)$ эквивалентна теоретической $F(t)$.

Исследования цензурированных ЭД показали, что часть традиционных критериев практически не применима (критерий хи-квадрат Пирсона), другие (критерии Колмогорова, Мизеса) теряют свои полезные свойства, становятся зависимыми от типа цензурирования, а их поведение остается еще слабо изученным в асимптотической области. Основной недостаток традиционных критериев состоит в том, что наибольший вклад в значение статистики критерия вносят те участки эмпирической функции распределения, которые характеризуются повышенной неопределенностью из-за цензурирования.

Более полезным в условиях цензурирования является критерий Мозеса и его модификации. В теории вероятностей доказано, что если случайная величина t имеет непрерывную функцию распределения $F(t)$, то величина $Y = F(t)$ подчиняется равномерному распределению в интервале от 0 до 1. Статистика критерия Мозеса для однократно цензурированных выборок определяется как $w = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} F(t_i)$, где $F(t_\mathrm{i})$ – теоретическое значение функции распределения в точке t_i , r – объем выборки, t_1, t_2, …, t_r – совокупность зарегистрированных полных наработок. Случайные величины $F(t_\mathrm{i})$ распределены асимптотически равномерно на интервале от 0 до 1. При достаточно большом объеме выборки значение статистики критерия Мозеса является асимптотически нормальным со средним значением 0,5 и дисперсией $1/(12r)$. Областью принятия нулевой гипотезы является соблюдение условия

$$0{,}5 - (12r)^{-0{,}5}\, u_{(1-\alpha/2)} \le w \le 0{,}5 + (12r)^{-0{,}5}\, u_{(1-\alpha/2)}, \tag{4.7}$$

где $u_{(1-\alpha/2)}$ – квантиль уровня $(1 - \alpha/2)$ стандартного нормального распределения, величина α определяет уровень значимости критерия.

Это асимптотическое распределение можно применять, если

$$r \ge u_{(1-\alpha/2)} / \alpha\ . \tag{4.8}$$

Например, если $\alpha = 0{,}1$, то r должно превышать 16. В противном случае следует воспользоваться более точным распределением статистики критерия – областью принятия гипотезы является интервал

$$0{,}5 - \varphi\,(r,\alpha) \le w \le 0{,}5 + \varphi\,(r,\alpha).$$

Значения функции $\varphi\,(r,\alpha)$ определяются по специальным таблицам. Теоретически критерий Мозеса обладает высокой эффективностью. Но суммирование ошибок при вычислении статистики критерия, особенно в случае многократного цензурирования исходных данных, приводит к снижению его эффективности.

Для преодоления этого недостатка критерий Мозеса модифицируют, исходя из следующих положений. При многократном цензурировании для каждого i-го интервала наблюдения считается, что составляющие его наработки t_j ($\tau_{i-1} \le t_j \le \tau_i$) представляют собой случайную выборку объема r_i. Величина $F(t_i)$ распределена равномерно на интервале $\Delta F = F(\tau_{i-1}) - F(\tau_i)$. Тогда величина

$$w_i = [F(t_j) - F(\tau_{i-1})]/[F(\tau_{i-1}) - F(\tau_i)] \qquad (4.9)$$

распределена равномерно на интервале от 0 до 1. Статистика $w = \frac{1}{r}\sum_{r=1}^{r} w_j$ имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием 0,5 и дисперсией $1/(12r)$ при таком же условии, что и для однократно цензурированной выборки.

Проверка однородности цензурированных выборок с целью объединения результатов наблюдений за различными объектами производится аналогично проверке однородности нецензурированных выборок. Гипотеза проверяется с помощью непараметрических критериев (независимых от функции распределения переменной), в качестве которых целесообразно взять критерии, предусматривающие переход от абсолютных значений наработок к их рангам в объединенном вариационном ряду. Возникающую при этом неопределенность рангов наблюдений цензурированных выборок, преодолевают различным образом. Одним из подходов является суммирование весов только полных наработок и введение для каждого компонента суммы специальной поправки, учитывающей количество предшествующих данному событию цензурированных элементов выборки (критерий Кокса). Вес слагаемого зависит от количества элементов, за которыми продолжается наблюдение в данный момент.

Пример 4.2. Необходимо оценить параметры и проверить возможность описания ЭД, представленных в примере 4.1, законом распределения Вейбулла – Гнеденко. Уровень значимости для проверки гипотезы $\alpha = 0{,}1$.

Решение. Вычислим параметры распределения, исходя из предположения, что ЭД подчиняются распределению Вейбулла – Гнеденко. Заданная выборка соответствует плану наблюдения [*NUz*]. Численное решение первого уравнения (4.5) относительно β произведем с помощью функции *root* пакета MathCAD. В качестве начального приближения β выберем 4. В результате получим $\beta = 3{,}352$. Зная величину β, можно по второму равенству (4.5) вычислить $\delta = 2932$. Расчеты по проверке гипотезы H_0 о принадлежности выборки закону распределения Вейбулла – Гнеденко оформим в виде таблицы, табл. 4.2.

Таблица 4.2

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_ν	1873	1922	2010*	2018	2107*	2135	2314	2397*	2576	3936*
$F(t)$	0,199	0,215	0,245	0,248	0,280	0,291	0,363	0,398	0,475	0,931
w_i	0,812	0,877		0,080		0,091	0,702		0,146	

В таблице $F(t)$ соответствует значениям функции распределения Вейбулла – Гнеденко. Величины w_i рассчитаны по формуле (4.9). Значение статистики критерия согласия $w = 0{,}451$. Квантиль нормального распределения уровня ($1 – 0{,}1/2 = 0{,}95$) составляет 1,64. Область принятия гипотезы H_0 лежит в пределах от 0,307 до 0,693. Следовательно, на уровне значимости 0,1 выборка может принадлежать генеральной совокупности, распределенной по закону Вейбулла – Гнеденко.

Применение рассмотренного критерия в данных условиях не вполне обосновано, так как для статистики w не выполнено условие (4.8). Поэтому проведем дополнительную проверку гипотезы H_0 по наработкам до отказа (шесть точек ряда) с помощью критерия Колмогорова. Эта проверка дает статистику критерия, равную 0,97, что меньше критического значения функции Колмогорова, равного 1,22. Следовательно, и по критерию Колмогорова нет оснований отвергать гипотезу H_0.

4.4. Оценка надежности восстанавливаемых изделий

Восстановление изделий после отказов осуществляется путем ремонта или замены отказавших. Данные по надежности для восстанавливаемых изделий упрощенно можно представить в виде последовательности моментов времени $t_0 < t_1 < t_2 <..< t_n <...$, где t_0 – момент включения в работу изделия, элементы выборки с нечетными номерами соответствуют моментам отказов, а с четными – моментам восстановления. Предполагается, что все интервалы времени работоспособности и восстановления являются независимыми случайными величинами со своими законами распределения. Для выборок, цензурированных слева заданным моментом времени, на последнем интервале отсутствует отказ, если это интервал работоспособности, или отсутствует восстановление, если это интервал восстановления. Аналогичные рассуждения следует провести относительно первого интервала изменения работоспособности, если выборка цензурирована справа моментом начала наблюдения. Следует учитывать, что ремонт и замена, вообще говоря, приводят к изменению свойства надежности изделий.

При оценке надежности процесс отказов и восстановлений часто представляют в виде процесса восстановления, для которого выборка содержит только моменты отказов или только моменты восстановлений, а функции распределения времени между отказами $F_i(t)$ для всех интервалов одинаковы и равны $F(t)$. Такое представление допустимо, если время восстановления значительно меньше средней наработки между отказами и проводится полное восстановление ресурса отказавшего изделия.

Если нет априорных сведений о виде закона распределения $F(t)$, то применяют *непараметрические методы*, при этом оценка параметра потока отказов проводится с использованием соотношения $\overline{\omega}(t,t+\Delta t)=d(t,t+\Delta t)/(n(t)\Delta t)$, где $d(t,t+\Delta t)$ – количество отказавших изделий в интервале $[t,\ t+\Delta t]$; $n(t)$ – общее количество эксплуатируемых изделий в момент времени t. При многократном цензурировании в моменты T_1, T_2, ..., T_m значение $n(t)$ постепенно уменьшается, начиная с исходного значения n_1, и определяется по формулам

$$n(t)=\begin{cases} n_1 & \text{при} \quad 0<t<T_1 \\ n_1-k_1^* & \text{при} \quad T_1<t<T_2 \\ . \quad . \quad . \quad . & \\ n_1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}k_i^* & \text{при} \quad T_{m-1}<t<T_m\,. \end{cases} \tag{4.10}$$

Величина k_i^*, в отличие от k_i для невосстанавливаемых изделий, включает в себя отказавшие и исправные изделия.

Коэффициент оперативной готовности $K_{\text{ОГ}}(t,\tau)$ для малых значений интервала времени τ и при постоянном контроле работоспособности приближенно можно определить как $K_{ОГ}(t,\tau)\approx 1-\overline{\omega}(t)\tau$. Коэффициент готовности определяется по известному соотношению $K_{\text{Г}} = T_{\text{О}}$ /($T_{\text{О}} + T_{\text{В}}$). Оценка вероятности отказа в предположении биномиального распределения числа отказавших изделий $d(t,\ t+\Delta t)$ соответствует $q(t,\ t+\Delta t) = d(t,\ t+\Delta t)/n(t)$.

Если восстановление производится на основе "новых" изделий, выработанный ресурс которых не совпадает с ресурсом отказавшего компонента, то вероятность отказа на интервале $[t,\ t+\Delta t]$ будет отличаться от предшествующего интервала, за исключением экспоненциального закона распределения (для него интенсивность отказа составляет постоянную величину). В случае различных вероятностей проявления какого-либо события при каждом испытании можно оценить среднюю вероятность события в серии из L испытаний по формуле $q_{ср} = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} q_j$, где q_j – вероятность появления события в j-м опыте. Полученные оценки показателей надежности являются оценками средних значений этих показателей, определяемых с учетом различных вероятностей отказа изделий в интервале $[t, t+\Delta t]$.

Восстановление отказавших изделий с использованием "старых" компонентов обусловливает равенство параметра потока отказов значению интенсивности отказов $\omega(t)=\lambda(t)$.

Параметрические методы применяют при известном законе распределения наработки на отказ. В случае непрерывного контроля работоспособности и мгновенной замены отказавших изделий новыми для некоторых видов законов распределения удается получить аналитические выражения, определяющие параметр потока отказов:

экспоненциальное распределение, $\omega(t)=\lambda$;

распределение Эрланга

$$\omega(t) = \lambda/\delta + (\lambda/\delta)\sum_{i=1}^{\delta-1} \frac{\xi}{1-\xi^i}\left[1 - \exp(-\lambda t(1-\xi^i))\right],$$

где $\xi = \exp(2\pi j/\delta), \quad j = \sqrt{-1}$;

нормальное распределение. Функция распределения времени наработки до r-го отказа при $\sigma \ll \mu(t)$ имеет вид $F_r(t) = \Phi_л\left([t - r\mu(t)]/\sigma\right)$. Здесь $\Phi_л(x)$ – функция Лапласа (при $x > 0$ $\Phi_л(x)=\Phi_н(x) - 0{,}5$, где $\Phi(x)$ функции нормального распределения). Параметр потока отказов определяется по формуле

$$\omega(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi r}} \exp\left(-\frac{(t - r\mu(t))^2}{2\sigma^2 r}\right).$$

Для распределения Вейбулла – Гнеденко и общего вида гамма–распределения получить аналитические выражения для показателей надежности не удается, поэтому соответствующие уравнения следует решать численными методами, например с использованием конечных разностей или разложением уравнений в ряд Фурье.

Рассмотренные методы решения задачи экспериментальной оценки надежности позволяют определить основные показатели для ряда типовых условий эксплуатации. Однако следует учитывать незавершенность исследований в области экспериментального оценивания надежности, наличие других или появление новых моделей с более широкими возможностями, а также моделей, предназначенных для исследования различных аспектов эксплуатации, например, учитывающих периодичность контроля работоспособности или особенности оценки надежности при модернизации изделий.