

Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

С.Д. ШАПОРЕВ, Б.П. РОДИН

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Учебник

Допущено

*научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада
в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по направлениям
160403 – Системы управления движением и навигация; 200200 – Оптотехника;
210300 – Радиотехника; 230100 – Информатика и вычислительная техника;
230200 – Информационные системы*

Санкт-Петербург
2010

УДК 519.216:519.876.5:004.42-027.22(075.8)

Ш 24

Шапоров, С.Д.

Ш 24 Случайные процессы: учебник / С.Д. Шапоров, Б.П. Родин; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2010. – 237 с.
ISBN 978-5-85546-499-3

Рассмотрены основы теории случайных процессов. Описаны важнейшие модели процессов с дискретным и непрерывным временем, их действие на линейные стационарные системы автоматического управления, а также методы математического моделирования случайных процессов. Рассмотрены решения типовых примеров, поясняющих теоретический курс, приведены семь лабораторных работ, выполняемых в двух математических пакетах: Mathcad и Matlab.

Для студентов и аспирантов технических университетов, обучающихся по радиотехническим специальностям. Книга может быть полезна преподавателям, читающим соответствующие курсы.

УДК 519.216:519.876.5:004.42-027.22(075.8)

Рецензенты: кафедра математического моделирования и оптимизации химико-технологических процессов СПбГТИ (ТУ) (зав. каф. д-р техн. наук, проф. *В.А. Холоднов*); д-р техн. наук, проф. *М.С. Попов*

ISBN 978-5-85546-499-3

© С.Д. Шапоров, Б.П. Родин, 2010
© БГТУ, 2010

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Случайные процессы. Основные определения

Случайной функцией называется семейство случайных величин, зависящих от параметра t , $t \in T$, T – произвольное множество.

Пусть (Ω, M, P) – вероятностное пространство, t – параметр, $t \in T$, $\omega \in \Omega$ – элементарное событие. Тогда случайной функцией $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ называется измеримое отображение $\xi: \Omega \rightarrow R^n$ пространства элементарных событий Ω в R^n , зависящее от параметра t . Когда T – множество действительной прямой, а параметр t интерпретируется как время, вместо термина случайная функция употребляется термин *случайный процесс*.

Случайный процесс является математической моделью для описания случайных явлений, развивающихся во времени. Процесс, для которого характерно изменение физической величины во времени случайным образом, принято называть случайным или *стохастическим*. Как видно, он описывается случайной функцией, представляющей собой функцию одного или нескольких аргументов, которая при всех или нескольких значениях этих аргументов является случайной величиной.

Обычно, когда это не приводит к неясности, зависимость $\xi(t, \omega)$ от ω не указывается и случайный процесс обозначается просто $\xi(t)$.

Если $n = 1$, случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$ называется *скалярным случайным процессом*, а при $n \geq 2$ – *векторным* или n -мерным случайным процессом. Если $T \equiv N$, то вместо случайной функции $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ употребляется термин *случайная последовательность*, которую обозначают $\{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$.

Пусть $t_0 \in T$ – фиксированный момент. Случайная величина $\xi_{t_0}(\omega) = \xi(t_0, \omega)$ называется *сечением случайного процесса* в точке $t_0 \in T$. Таким образом, случайный процесс представляет собой не

что иное, как систему случайных величин – всех сечений этого процесса. При фиксированном $\omega_0 \in \Omega$ неслучайная функция $\xi_{\omega_0}(t) = \xi(t, \omega_0), t \in T$, называется *траекторией*, соответствующей элементарному исходу $\omega_0 \in \Omega$. Часто траектории называются *реализациями* или *выборочными функциями* случайного процесса. Таким образом, случайный процесс, описываемый случайной функцией $\xi(t, \omega)$, – это ансамбль из множества реализаций: $\xi_{\omega_1}(t), \xi_{\omega_2}(t), \dots, \xi_{\omega_k}(t), \dots$

Семейство реализаций случайного процесса – основной экспериментальный материал, на основе которого можно получить характеристики случайного процесса.

Пример 1. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ определён формулой $\xi(t) = t\xi, t \in [0,1], \xi \sim R[0,1]$. Найдём множество сечений и траекторий случайного процесса $\xi(t)$.

В данном случае, при фиксированном $t_0 \in [0,1]$ сечение $\xi_{t_0}(\omega) = t_0\xi$ является случайной величиной, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, t_0]$, т.е. $\xi_{t_0}(\omega) \sim R[0, t_0]$. Неслучайные функции $\xi_{\omega_0}(t)$ (траектории процесса) – это прямые линии, выходящие из точки $(0,0)$ со случайным тангенсом угла наклона, равным ξ_0 . Все траектории непрерывны (рис. 1.1).

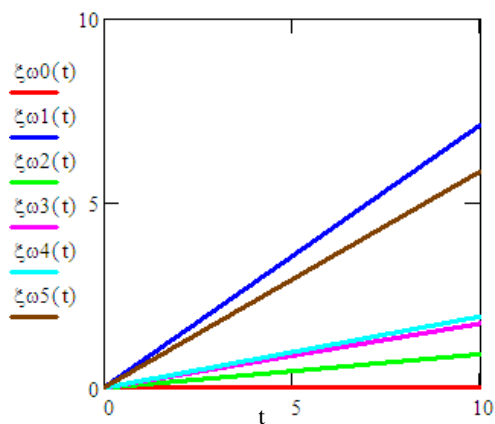


Рис. 1.1. Некоторые траектории движения случайного процесса $t\xi$

1.2. Элементарная классификация случайных процессов

Поскольку всякая классификация условна, то один и тот же случайный процесс может удовлетворять нескольким квалификационным критериям. Например, случайные процессы могут быть описаны с единых позиций в соответствии с наличием у них тех или иных общих признаков.

1. Классификация по зависимости характеристик процесса от начала отсчёта времени: а) стационарные случайные процессы; б) нестационарные случайные процессы.

Стационарным называется такой случайный процесс, у которого определённая группа вероятностных характеристик инвариантна во времени, т.е. не изменяется при сдвиге времени – замене аргумента t значением $t + \tau$, где τ – произвольный интервал. Различают стационарные в узком и широком смысле случайные процессы.

Случайный процесс называется стационарным в узком смысле, если n -мерное распределение вероятностей не изменяется со временем, т.е. выражения для плотности вероятностей любого порядка не зависят от выбора начала отсчёта:

$$f_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = f_n(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau).$$

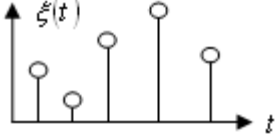
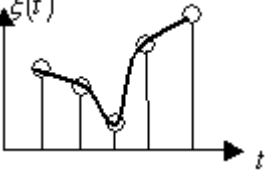
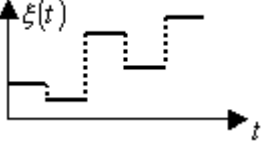
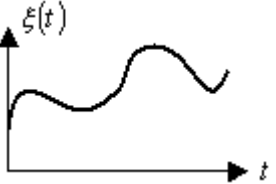
Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его средняя и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит лишь от разности времени τ . Стационарные процессы, стационарные в узком смысле, стационарны и в широком, но не наоборот.

Наиболее труден для изучения класс *нестационарных* случайных процессов. Они делятся по различным дополнительным признакам на элементарные, квазистационарные, периодические и почти периодические, аддитивные, мультипликативные, сепарабельные, структурно однородные и т.п. случайные процессы.

2. Классификация по типу областей существования и изменения случайных процессов (табл. 1).

Это процессы с дискретным и непрерывным временем, с дискретными и непрерывными состояниями. Таким образом, в зависимости от характера множества T и множества состояний случайной функции $\xi(t)$ такие процессы делятся на четыре подкласса, указанные в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Свойства t	Свойства $\xi(t)$	Вид одной реализации	Примеры
Параметр t дискретен	Случайная функция $\xi(t)$ дискретна		Цепи Маркова
Параметр t дискретен	Случайная функция $\xi(t)$ непрерывна		Обобщённые цепи Маркова
Параметр t непрерывен	Случайная функция $\xi(t)$ дискретна		Потоки заявок на обслуживание в системах массового обслуживания
Параметр t непрерывен	Случайная функция $\xi(t)$ непрерывна		Задачи теории управления

3. Классификация по наличию или отсутствию зависимости вероятности распределения координат случайной функции от её предыстории: а) марковские; б) немарковские.

Случайный процесс называется *марковским*, если его будущее зависит лишь от настоящего значения и не зависит от прошлого. Более точное определение будет дано позднее в терминах условных плотностей распределения случайных величин $\xi_{t_i}(\omega)$.

Оказывается, что многие реальные физические системы имеют не более чем счётное множество возможных состояний, а их поведение адекватно моделируется посредством марковских процессов.

4. Классификация по наличию или отсутствию связей между средним по аргументу t и средним по множеству реализаций: а) эргодические; б) неэргодические.

Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если его вероятностные характеристики могут быть получены с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, в результате операции усреднения по времени одной реализации, достаточно большой (теоретически бесконечной) длительности.

5. Классификация по типу законов распределения.

По этому типу может быть выделено наибольшее количество различных законов, например: нормальные процессы, процессы с независимыми приращениями, винеровские, марковские и пуассоновские процессы, потоки событий (процессы массового обслуживания), процессы авторегрессии и скользящего среднего и т.п.

1.3. Конечномерные распределения случайного процесса

Пусть $\xi(t), t \in T$ – действительный случайный процесс и задано некоторое произвольное множество моментов времени $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$. Тогда соответствующий набор случайных величин $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ имеет n -мерную функцию распределения

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) &= P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = \\ &= P\{(\xi(t_1) \leq x_1) \wedge (\xi(t_2) \leq x_2) \wedge \dots \wedge (\xi(t_n) \leq x_n)\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

которая называется n -мерной функцией распределения случайного процесса $\xi(t)$.

Совокупность функций (1.1) для различных $n = 1, 2, \dots$ и всех возможных моментов времени $t_i \in T$ называется *семейством конечномерных распределений* случайного процесса $\xi(t)$.

Рассмотрим подробнее n -мерные функции распределения и некоторые связанные с ними функции для $n = 1$ и $n = 2$.

Одномерная функция распределения вероятностей непрерывного случайного процесса $\xi(t)$ определяется в соответствии с формулой (1.1) как

$$F_{\xi}(x_i, t_i) = F(x_i, t_i) = P\{\xi(t_i) \leq x_i\}. \quad (1.2)$$

Множество реализаций $\xi_i(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ и определение одномерной функции распределения по формуле (1.2) показаны на рис. 1.2.

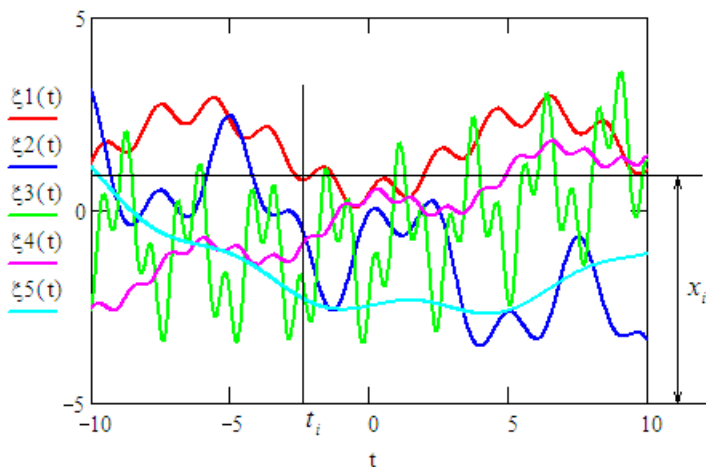


Рис. 1.2. Реализации случайного процесса с одномерной функцией распределения

Свойства $F(x, t)$ стандартны – это обычные свойства функции распределения:

- 1) $F(x, t) \geq 0, -\infty < x < +\infty$;
- 2) $0 \leq F(x, t) \leq 1$;
- 3) $F(\infty, t) = 1, F(-\infty, t) = 0$;
- 4) $F(x, t)$ – неубывающая функция по x .

Если процесс дискретен, то

$$F(x, kT_0) = P\{\xi(kT_0) \leq x\}. \quad (1.3)$$

Плотность распределения вероятностей случайного процесса $\xi(t)$ – функция $f_\xi(x, t) = f(x, t)$ – представляет собой производную по x от функции распределения, т.е.

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \text{ или } f(x, t)dx \approx P\{x < \xi(t) \leq x + dx\}. \quad (1.4)$$

Основные свойства функции плотности распределения:

1. $f(x, t) \geq 0, -\infty < x < \infty;$
2. $\int_{-\infty}^x f(x, t) dx = F(x, t);$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 1.$

При решении многих задач используется характеристическая функция процесса $\xi(t)$, которая может служить столь же эффективной характеристикой, что и плотность вероятности:

$$\varphi_{\xi}(\alpha, t) = \varphi(\alpha, t) = M[\exp(i\alpha\xi(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha\xi(t)) f(x, t) dx, \quad (1.5)$$

где α – аргумент характеристической функции. Видно, что характеристическая функция (1.5) является преобразованием Фурье от соответствующей плотности распределения вероятностей $f(x, t)$. Применение обратного преобразования Фурье к характеристической функции $\varphi(\alpha, t)$ приводит к выражению

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\alpha\xi(t)) \varphi(\alpha, t) d\alpha. \quad (1.6)$$

Основные свойства характеристической функции:

- 1) $\varphi(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 1;$
- 2) $|\varphi(\alpha, t)| \leq 1;$
- 3) $\varphi^*(\alpha, t) = \varphi(-\alpha, t)$, где φ^* – комплексно сопряжённая функция к φ ;
- 4) если $X(t) = a\xi(t) + b$, то $\varphi_X(\alpha, t) = \varphi_{\xi}(a\alpha, t) \exp(ib\alpha);$
- 5) если $X(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t)$, то $\varphi_X(\alpha, t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(\alpha, t).$

Аналогичным образом определяется и двумерная функция распределения вероятностей случайного процесса $\xi(t)$. Одномерные законы распределения случайного процесса в достаточной мере характеризуют его, когда значения $\xi(t)$ в различные моменты

времени (в различных сечениях ансамбля реализаций) рассматриваются изолированно. Для решения задач, требующих рассмотрения совместно значений одной случайной функции при двух значениях аргумента t или двух различных случайных функций при одном и том же значении аргумента, пользуются двумерными законами распределения.

Двумерная функция распределения характеризует:

а) в случае одного процесса – вероятность того, что значения случайной функции $\xi(t)$, описывающей процесс, в различные моменты t_1 и t_2 , будут меньше уровней x_1 и x_2 (рис. 1.3);

б) в случае двух процессов – вероятность того, что значения случайной функции $\xi(t)$, описывающей первый процесс в момент t_1 , будут меньше x , а значения другой случайной функции $\zeta(t)$, описывающей второй процесс в момент времени t_2 , – меньше y :

$$F(x, t_1, y, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x, \zeta(t_2) \leq y\}. \quad (1.7)$$

Аналогично определяются двумерные плотности распределения:

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, t_1, x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.8)$$

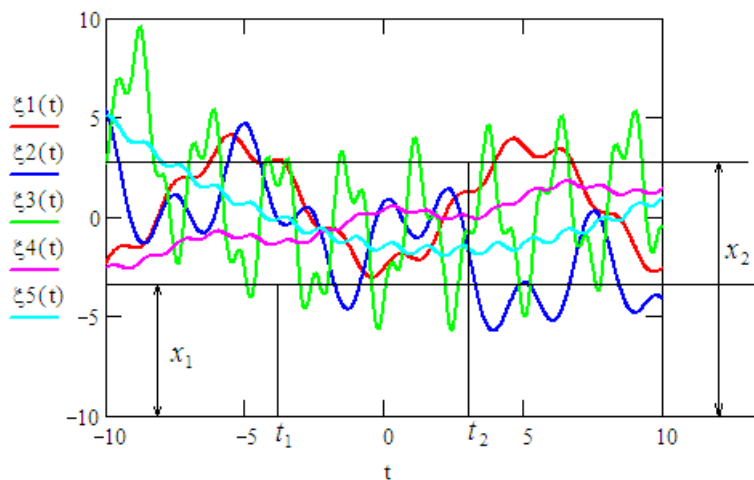


Рис. 1.3. Реализации случайного процесса с двумерной функцией распределения

Определение n -мерной функции распределения случайного процесса $\xi(t)$ дано формулой (1.1), из которой видно, что случайный процесс $\xi(t, \omega)$ можно рассматривать как совокупность всех его возможных сечений. Каждое сечение случайного процесса $\xi(t, \omega)$ при фиксированном t представляет собой n -мерный случайный вектор. В общем случае случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ не может быть полностью определённым, так как он представим несчётной совокупностью своих сечений. Поэтому при решении различных задач, как теоретического, так и прикладного характера, приходится ограничиваться конечномерными законами распределения.

n -мерная функция распределения случайного процесса $\xi(t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $0 \leq F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \leq 1$ – условие нормировки;
- 2) $F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$ – неубывающая функция по переменным x_i , т.е. $\Delta_1 \dots \Delta_n F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \geq 0$, где $\Delta_i F = F(x_1, t_1, \dots, x_{i-1}, t_{i-1}, x_i + h_i, t_i, \dots, x_n, t_n) - F(x_1, t_1, \dots, x_{i-1}, t_{i-1}, x_i, t_i, \dots, x_n, t_n)$, а $h_1, h_2, \dots, h_n \geq 0$ произвольны;
- 3) если $\exists x_i, i = \overline{1, n}$, что $x_i \rightarrow -\infty$, то $F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \rightarrow 0$, если же $\forall x_i, i = \overline{1, n}$, $x_i \rightarrow \infty$, то $F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \rightarrow 1$;
- 4) для любой перестановки индексов $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ $F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = F(x_{k_1}, t_{k_1}, x_{k_2}, t_{k_2}, \dots, x_{k_n}, t_{k_n})$.

Условия 3-4 называются *условиями согласованности* семейства конечномерных распределений. Как видно, свойства функции, определённой формулой (1.2), являются частным случаем вышеприведённых свойств.

Аналогично (1.4) и (1.8) n -мерная функция плотности распределения вероятностей определяется как

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}, \quad (1.9)$$

а n -мерная характеристическая функция

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2, \dots, \alpha_n, t_n) &= M \left[\prod_{j=1}^n \exp(i\alpha_j \xi_j(t)) \right] = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \exp \left(i \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j(t) \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Оперировать формулами (1.1), (1.9), (1.10) при больших значениях n крайне неудобно, к тому же объём экспериментального материала, необходимого для их получения, с увеличением числа сечений растёт чрезвычайно быстро. Поэтому на практике более чем двумерные законы распределения применяются крайне редко.

Плотности или функции распределения меньших порядков ($k \leq n$) можно получить обычным способом, известным из теории вероятностей:

$$\begin{aligned} f(x_1, t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_2, \\ f_k(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_k, t_k) &= \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-k} f_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_{k+1} dx_{k+2} \dots dx_n. \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.4. Моментные функции случайного процесса

Совокупность всех конечномерных законов распределения случайного процесса является его полной характеристикой.

Однако в ряде случаев для решения практически важных задач оказывается достаточным рассмотреть более простые характеристики, в частности *моментные функции*.

Моментами k -го порядка случайного процесса $\xi(t)$ называют соответствующие моменты его сечений. Различают *начальные* и *центральные моменты*.

Моментная функция $m_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, зависящая от n несовпадающих аргументов t_1, t_2, \dots, t_n , называется n -мерной на-

чальной моментной функцией k -го порядка ($k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$).
 Её вид определяется формулой

$$m_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = M[\xi^{k_1}(t_1)\xi^{k_2}(t_2)\dots\xi^{k_n}(t_n)] = \\
 = \int \dots \int \underbrace{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}_n f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (1.12)$$

Одномерная начальная функция первого порядка

$$m_1(t) = M[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t) dx \quad (1.13)$$

называется *математическим ожиданием* (средним значением) случайного процесса $\xi(t)$ (рис. 1.4). Часто используется также двумерная начальная моментная функция второго порядка

$$m_{1,1}(t_1, t_2) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2, \quad (1.14)$$

называемая *корреляционной функцией* случайного процесса $\xi(t)$.

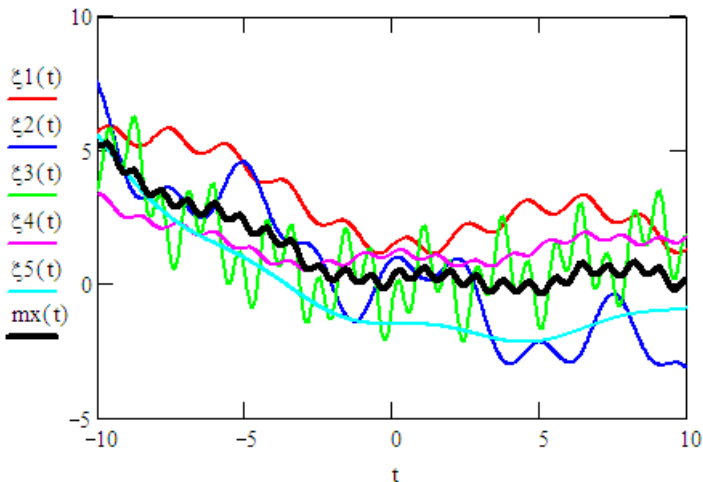


Рис. 1.4. Графическая иллюстрация средней одномерного случайного процесса

Вместо моментных функций $m_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ можно рассматривать n -мерные центральные моментные функции k -го порядка ($k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$), которые определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= M \left[(\xi(t_1) - m_1(t_1))^{k_1} (\xi(t_2) - m_2(t_2))^{k_2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots (\xi(t_n) - m_n(t_n))^{k_n} \right] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n (x_1 - m_1(t_1))^{k_1} (x_2 - m_2(t_2))^{k_2} \dots \quad (1.15) \\ &\quad \dots (x_n - m_n(t_n))^{k_n} f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Формула для p -мерного центрального момента ($p \leq n$) записывается аналогично $p = (k_1 + k_2 + \dots + k_p)$:

$$\begin{aligned} \mu_{k_1, k_2, \dots, k_p}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= M \left[(\xi(t_1) - m_1(t_1))^{k_1} (\xi(t_2) - m_2(t_2))^{k_2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots (\xi(t_p) - m_p(t_p))^{k_p} \right] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n (x_1 - m_1(t_1))^{k_1} (x_2 - m_2(t_2))^{k_2} \dots \quad (1.16) \\ &\quad \dots (x_p - m_p(t_p))^{k_p} f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_p. \end{aligned}$$

Двумерная центральная моментная функция второго порядка

$$\begin{aligned} \mu_{1,1}(t_1, t_2) &= K_{\xi}(t_1, t_2) = M \left[(\xi(t_1) - m_1(t_1)) (\xi(t_2) - m_2(t_2)) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1(t_1)) (x_2 - m_2(t_2)) f(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (1.17) \end{aligned}$$

называется *ковариационной функцией* случайного процесса $\xi(t)$.

Для дискретных случайных процессов (1.17) превращается в

$$\begin{aligned} K_{\xi}(n_1, n_2) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left\{ (x_i(n_1) - m_x(n_1)) (x_j(n_2) - m_x(n_2)) \times \right. \\ &\quad \left. \times P \{ x_i(n_1), x_j(n_2) \} \right\}, \quad (1.17a) \end{aligned}$$

где $x_i(n_1), x_j(n_2)$ – значения случайного процесса $\xi(n)$ в моменты появления i -го и j -го события.

Ковариационная функция представляет собой матричную функцию $K_\xi(t_1, t_2)$ размера $n \times n$ двух скалярных переменных t_1 и t_2 , значения которых при фиксированных $t_1, t_2 \in T$ равны ковариации двух случайных векторов: $\xi(t_1, \omega)$ и $\xi(t_2, \omega)$, т.е. $K_\xi(t_1, t_2) = \text{cov}[\xi(t_1, \omega), \xi(t_2, \omega)]$.

Моментные функции могут быть определены из характеристической функции путём дифференцирования. Например, значение k -й производной от характеристической функции $\varphi(\alpha, t)$ при $\alpha = 0$ даёт одномерную начальную моментную функцию k -го порядка:

$$m_k(\xi(t)) = \frac{1}{i^k} \left[\frac{\partial^k \varphi(\alpha, t)}{\partial \alpha^k} \right]_{\alpha=0}. \quad (1.18)$$

Аналогичная по математическому содержанию формула даёт значение k -й производной от n -мерной характеристической функции:

$$m_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = i^{-(k_1 + k_2 + \dots + k_n)} \times \left[\frac{\partial^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)} \varphi(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2, \dots, \alpha_n, t_n)}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2} \dots \partial \alpha_n^{k_n}} \right]_{\alpha=0}, \quad (1.19)$$

где $k = (k_1 + k_2 + \dots + k_n)$.

Итак, в общем случае математическое ожидание одномерного случайного процесса $\xi(t)$ определяется формулой (1.13). У стационарных случайных процессов математическое ожидание не зависит от времени и постоянно. Если процесс не только стационарен, но и обладает эргодическим свойством, то у такого процесса среднее по ансамблю реализаций равно с вероятностью, близкой к единице, среднему по времени, определяемому по одной реализации, т.е.

$$m_\xi(t) = \overline{\xi(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) dt. \quad (1.20)$$

Если процесс дискретен, то

$$m_{\xi}(kT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, kT_0) dx \quad (1.21)$$

и $m_{\xi}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \xi(kT_0)$ для эргодического случайного процесса.

Полагая в формуле (1.17) $t_1 = t_2 = t$, получим следующее значение одномерной центральной моментной функции второго порядка:

$$\mu_{1,1}(t) = M \left[(\xi(t) - m_{\xi}(t))^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m(t)) f(x, t) dx = D_{\xi}(t). \quad (1.22)$$

Это выражение определяет дисперсию случайного процесса $\xi(t)$ (рис. 1.5). Таким образом, как математическое ожидание, так и дисперсия случайного процесса определяются его одномерным законом распределения.

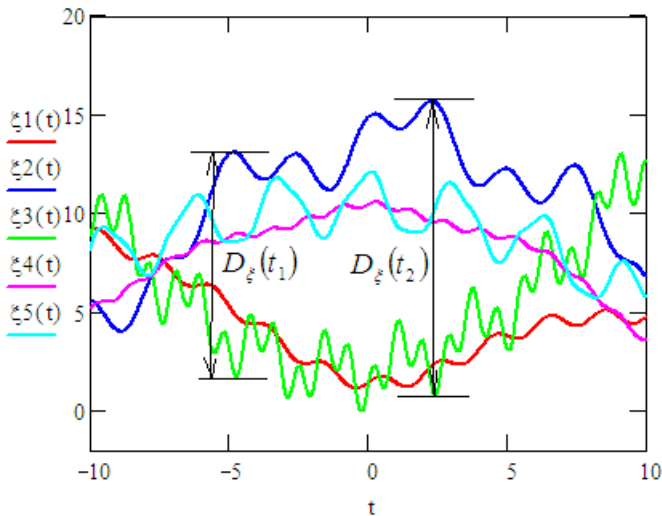


Рис. 1.5. Графическая иллюстрация дисперсии случайного процесса

Квадратный корень из дисперсии $D_{\xi}(t)$ называется средним квадратическим отклонением $\sigma_{\xi}(t)$ случайного процесса $\xi(t)$:

$$\sigma_{\xi}(t) = \sqrt{D_{\xi}(t)}. \quad (1.23)$$

Ковариационная функция (1.17) характеризует степень линейной связи между значениями случайного процесса в различные моменты времени (между двумя случайными векторами – сечениями случайного процесса), а также разброс этих сечений относительно математического ожидания (рис. 1.6). Если случайный процесс стационарен хотя бы в широком смысле, ковариационная функция является функцией лишь разности $\tau = t_2 - t_1$ аргументов, а не их значений, и принимает одно и то же значение при всех аргументах t_1 и t_2 , отличающихся друг от друга на одинаковую величину τ : $K_\xi(\tau) = M[(\xi(t) - m_\xi)(\xi(t + \tau) - m_\xi)]$. При стационарных и эргодических (по отношению к функции корреляции) случайных процессах ковариационная функция может быть определена по одной реализации процесса:

$$K_\xi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\xi(t) - m_\xi)(\xi(t + \tau) - m_\xi) dt. \quad (1.24)$$

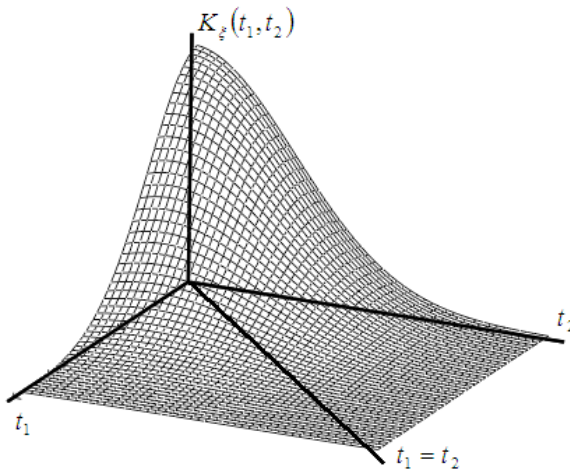


Рис. 1.6. График ковариационной функции

Основные свойства ковариационной функции:

1. Ковариационная функция симметрична. Перестановка аргументов даёт выражение, комплексно сопряжённое с исходным, т.е. $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi^*(t_2, t_1)$. Для действительного случайного процесса

$K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t_2, t_1)$. При стационарных в широком смысле процессах $K_\xi(\tau) = K_\xi^*(-\tau)$, а для действительных случайных процессов $K_\xi(\tau) = K_\xi(-\tau)$.

2. При $t_1 = t_2 = t$ ковариационная функция равна дисперсии случайного процесса: $K_\xi(t, t) = D_\xi(t)$.

3. $|K_\xi(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}$. Неравенство 3 является формой неравенства Коши–Буняковского. Если записать евклидову норму ковариационной функции, то $\|K_\xi(t_1, t_2)\| \leq \sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}$.

4. Для стационарных эргодических случайных процессов $\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_\xi(\tau) = 0$.

В теоретических расчётах и практических исследованиях часто пользуются нормированной ковариационной функцией

$$r_\xi(t_1, t_2) = \frac{K_\xi(t_1, t_2)}{\sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}} = \frac{K_\xi(t_1, t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)}. \quad (1.25)$$

Свойства функции $r_\xi(t_1, t_2)$ вытекают из её определения и того факта, что коэффициент корреляции любых двух случайных величин по модулю не превосходит единицу.

В теории случайных процессов используется понятие *интервала корреляции*

$$\tau_k = \int_0^\infty |r_\xi(\tau)| d\tau = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \int_0^\infty |K_\xi(\tau)| d\tau. \quad (1.26)$$

Эта величина даёт ориентировочное представление о том, на каких интервалах времени в среднем имеет место корреляция между сечениями случайного процесса. Геометрически это выражается в виде рис. 1.7. Таким образом, τ_k – это длина основания (или половина длины основания) прямоугольника высотой $K_\xi(0)$, площадь которого равна площади под кривой $K_\xi(\tau)$.

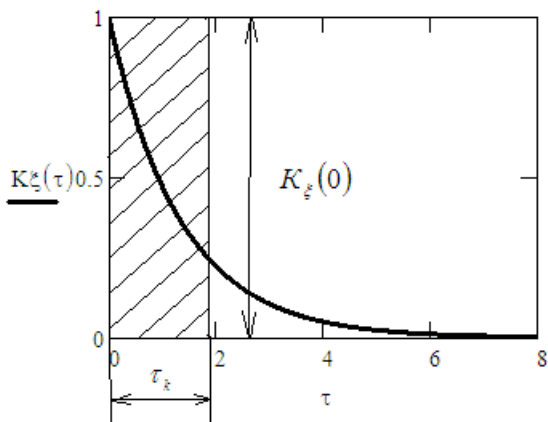


Рис. 1.7. Графическая интерпретация интервала корреляции

Пример 2. Построить семейство реализаций (траекторий) скалярного случайного процесса $\xi(t, \omega) = \frac{1}{1+t^2} u(\omega)$, $t \in T = [a, b]$, где $u(\omega)$ – скалярная случайная величина, распределённая по закону Пуассона с параметром $\lambda = 0,5$. Найти математическое ожидание и дисперсию этого случайного процесса.

Здесь, как и в примере 1, для получения траекторий достаточно знать (и задать конкретные значения) величины случайной переменной $u(\omega)$. Так как $u(\omega)$ распределена по закону Пуассона с

$$\lambda = 0,5, \text{ то } P(u = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, $u(\omega)$ может принимать значения $0, 1, 2, \dots$. Следовательно, неслучайная функция $\xi_{\omega_0}(t)$ – траектории процесса будут описываться формулой

$$\xi(t) = \frac{n}{1+t^2}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Найдём математическое ожидание процесса по определению $m_\xi(t) = M[\xi(t, \omega)] = M\left[\frac{1}{1+t^2} u(\omega)\right] = \frac{1}{1+t^2} M[u(\omega)]$. Так как математическое ожидание величины, распределённой по закону Пуас-

сона, равно параметру этого закона λ , то $m_\xi(t) = \frac{\lambda}{1+t^2} = \frac{1}{2(1+t^2)}$.

Аналогично с дисперсией

$$D_\xi(t) = D\left[\frac{1}{1+t^2}u(\omega)\right] = \frac{1}{(1+t^2)^2}D[u(\omega)] = \frac{1}{2(1+t^2)^2}.$$

Пример 3. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию, дисперсию, одномерный и двумерный законы распределения скалярного случайного процесса $\xi(t, \omega) = \alpha(\omega)t + \beta(\omega)t^2$, $t \in T = [0, \infty]$, где $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ – независимые скалярные случайные величины, распределённые по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,25.

Выпишем характеристики случайных величин $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$, $m_\alpha = m_\beta = 0$, $D_\alpha = D_\beta = 0,25$. Функции плотности вероятности обеих случайных величин одинаковы и равны

$$f_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x^2}, f_\beta(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}. \text{ Тогда}$$

$$m_\xi(t) = M[\xi(t, \omega)] = M[\alpha(\omega)t + \beta(\omega)t^2] = tM[\alpha(\omega)] + t^2M[\beta(\omega)] = 0,$$

$$\begin{aligned} D_\xi(t) &= D[\xi(t, \omega)] = D[\alpha(\omega)t + \beta(\omega)t^2] = \\ &= t^2D[\alpha(\omega)] + t^4D[\beta(\omega)] = 0,25t^2(1 + t^2). \end{aligned}$$

По определению ковариационной функции,

$$\begin{aligned} K_\xi(t_1, t_2) &= M[(\xi(t_1, \omega) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2, \omega) - m_\xi(t_2))] = \\ &= M[\xi(t_1, \omega)\xi(t_2, \omega)] = M[(\alpha(\omega)t_1 + \beta(\omega)t_1^2)(\alpha(\omega)t_2 + \beta(\omega)t_2^2)] = \\ &= M[(\alpha(\omega))^2 t_1 t_2 + \alpha(\omega)\beta(\omega)t_1^2 t_2 + \alpha(\omega)\beta(\omega)t_1 t_2^2 + (\beta(\omega))^2 t_1^2 t_2^2] = \\ &= t_1 t_2 M[(\alpha(\omega))^2] + t_1^2 t_2 M[\alpha(\omega)\beta(\omega)] + t_1 t_2^2 M[\alpha(\omega)\beta(\omega)] + \\ &\quad + t_1^2 t_2^2 M[(\beta(\omega))^2] = D_\alpha t_1 t_2 + D_\beta t_1^2 t_2^2 = 0,25 t_1 t_2 (1 + t_1 t_2), \end{aligned}$$

так как $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ независимы и, следовательно, не коррелированы.

Случайный процесс $\xi(t, \omega)$ при любом фиксированном значении t представляет собой линейную комбинацию нормальных случайных функций и в силу этого также является нормальным. Тогда

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi(t)}} e^{-\frac{(x-m_\xi(t))^2}{2D_\xi(t)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi t^2(1+t^2)}} \exp\left(-\frac{2x^2}{t^2(1+t^2)}\right).$$

Для написания формулы функции плотности двумерного закона распределения случайного процесса $\xi(t, \omega)$ следует вспомнить формулу функции плотности нормального закона на плоскости:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}.$$

При некоррелированности случайных величин X и Y предыдущая формула упрощается:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}.$$

В нашем случае $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ не коррелированы, т.е.

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-m_\xi(t_1))^2}{\sigma_\xi^2(t_1)} + \frac{(x_2-m_\xi(t_2))^2}{\sigma_\xi^2(t_2)}\right]\right\} = \frac{2}{\pi t_1 t_2 \sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}} \exp\left[-\frac{x_1^2}{t_1\sqrt{1+t_1^2}} - \frac{x_2^2}{t_2\sqrt{1+t_2^2}}\right].$$

2. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Стационарные случайные процессы

Важным классом случайных процессов являются стационарные случайные процессы. Свойство стационарности означает независимость некоторых характеристик от времени.

Рассмотрим одномерную плотность распределения $f(x, t)$ стационарного случайного процесса $\xi(t, \omega)$. Эта плотность не зависит от места сечения t , т.е. $f(x, t_1) = f(x, t_2) = \dots = f(x)$. Математическое ожидание и дисперсия такого процесса будут постоянны:

$$M[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = m_x = \text{const}, \quad (2.1)$$

$$D[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = D_x = \text{const}.$$

Случайный процесс $\xi(t, \omega), t \in T = [a, b]$ называется *стационарным в узком смысле*, если $\forall n \geq 1, t_k \in T, k = \overline{1, n}$ и $\tau \in R$, такого, что $t_k + \tau \in T, k = \overline{1, n}$, имеет место тождество

$$F_{\xi}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \equiv F_{\xi}(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau)$$

или, что то же самое,

$$f_{\xi}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \equiv f_{\xi}(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau). \quad (2.2)$$

Очевидно, что из формул (2.2) сразу следуют формулы (2.1). Действительно, рассмотрим, например, одномерную плотность распределения $f(x, t) = f(x, t + \tau)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t + \tau)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, a)dx = m_x(a) = \text{const}.$$

$\tau = a - t, a \in R, t + \tau = a$

Аналогичная ситуация и с дисперсией. Ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов, т.е. $\text{cov}[\xi(t_1, \omega), \xi(t_2, \omega)] = K_\xi(t_2 - t_1)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 K_\xi(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau) dx_1 dx_2 = \\
 &\quad \tau = a - t_1, a \in R, t_1 + \tau = a, t_2 + \tau = (t_2 - t_1) + a \quad (2.3) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, a, x_2, (t_2 - t_1) + a) dx_1 dx_2 = \\
 &\quad = K_\xi(t_2 - t_1).
 \end{aligned}$$

Если $\tau = t_2 - t_1$, то $f(x_1, t_1, x_2, t_2) = f(x_1, x_2, \tau)$ и $K_\xi(t_2 - t_1) = K_\xi(\tau) = K_\xi(-\tau)$ — по свойствам ковариационной функции (см. подразд. 1.4).

Случайный процесс $\xi(t, \omega), t \in T$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание — постоянный вектор, а ковариационная функция зависит от разности аргументов, т.е. $M[\xi(t, \omega)] = m_x = \text{const}$, $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t_2 - t_1) = K_\xi(\tau)$. Это означает, что у таких процессов функции распределения первого и второго порядков инвариантны по отношению к началу отсчёта времени, а остальные функции (более высоких порядков) могут не удовлетворять этому условию.

Очевидно, что если случайный процесс является стационарным в узком смысле, то он является стационарным и в широком смысле. Обратное не всегда справедливо.

Стационарные случайные процессы могут обладать или не обладать эргодическим свойством. Если это свойство присутствует, то в случайном процессе устанавливается стационарный режим функционирования, заключающийся в том, что любая реализация этого процесса рано или поздно пройдёт через любое состояние независимо от того, в каком состоянии находился этот процесс в начальный момент времени. Это значит, что любая реализация эргодического стационарного процесса достаточной продолжительности несёт в себе сведения обо всей совокупности реализаций данного процесса.

В этом случае математическое ожидание, дисперсия и ковариационная функция определяются формулами (1.20), (1.22) и (1.24).

Таким образом, путём временного усреднения можно определить различные статистические характеристики стационарного эргодического случайного процесса.

Пример 4. Случайные величины A и φ независимы. Математическое ожидание и дисперсия первой из них равны соответственно: $m_A = 0$ и $D_A = \sigma^2$, а $\varphi \in R(-\pi, \pi)$. Доказать, что случайный процесс $\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ стационарен в широком смысле (ω_0 – неслучайная величина).

Найдём m_ξ и K_ξ :

$$\begin{aligned} m_\xi &= M[\xi(t)] = M[A \cos(\omega_0 t + \varphi)] = M[A] \cdot M[\cos(\omega_0 t + \varphi)] = 0, \\ K_\xi(t_1, t_2) &= M[\xi(t_1)\xi(t_2)] = M[A \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cdot A \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)] = \\ &= M\left[\frac{A^2}{2}(\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi) + \cos(\omega_0(t_1 - t_2)))\right] = \\ &= M\left[\frac{A^2}{2}\right] \cdot \{M[\cos(\omega_0(t_1 - t_2))] + M[\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)]\} = \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 \cos(\omega_0(t_1 - t_2)) + \frac{1}{2}\sigma^2 M[\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)]. \end{aligned}$$

Чтобы найти значение последнего члена в предыдущей формуле, воспользуемся аппаратом числовых характеристик случайных функций. Именно, если X – непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f(x)$, а $Y = \varphi(X)$, то

$$m_y = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx. \text{ В нашем случае}$$

$$\begin{aligned} M[\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)] &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)d2\varphi = \frac{1}{4\pi} \sin(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{4\pi} [\sin(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\pi) - \sin(\omega_0(t_1 + t_2) - 2\pi)] = 0. \end{aligned}$$

Итак, процесс $\xi(t)$ стационарен в широком смысле, так как его математическое ожидание постоянно ($m_\xi = 0$), а ковариационная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_\xi(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \sigma^2 \cos(\omega_0(t_2 - t_1)) = K_\xi(\tau).$$

Рассмотрим подробнее вопрос об эргодичности стационарных случайных процессов. Конкретно свойство эргодичности определяется по отношению к некоторым выбранным числовым характеристикам случайного процесса $\xi(t)$.

Случайный процесс $\xi(t, \omega), t \in T = [0, l]$, интегрируемый на множестве T с весом $\mu(t_1, t_2) = 1/l, t_1, t_2 \in T$ и обладающий постоянным математическим ожиданием m_ξ , называется *эргодическим по отношению к математическому ожиданию* m_ξ , если существует предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) dt = m_\xi. \quad (2.4)$$

Необходимым и достаточным условием эргодичности случайного процесса $\xi(t)$ по отношению к математическому ожиданию является выполнение равенства

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0. \quad (2.5)$$

Практическая проверка реализации условия (2.5) может быть во многих случаях затруднительной, поэтому часто в случае стационарных случайных процессов используют достаточное условие эргодичности:

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} K_\xi(t_1, t_2) = 0. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом определяется эргодичность случайного процесса по отношению к дисперсии.

Стационарный случайный процесс $\xi(t, \omega), t \in T = [0, l]$, интегрируемый на множестве T с весом $1/l$, называется *эргодическим по отношению к дисперсии* D_ξ , если существует предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l [\xi(t, \omega) - m_\xi]^2 dt = D_\xi. \quad (2.7)$$

Необходимым и достаточным условием эргодичности $\xi(t)$ по отношению к дисперсии является формула (2.5), а достаточным условием – (2.6).

Обычно стационарный случайный процесс бывает неэргодическим, когда он протекает неоднородно. Например, неэргодичность $\xi(t)$ может быть вызвана тем, что в нём в качестве слагаемого присутствует случайная величина X с характеристиками m_x и D_x . Тогда, так как $\xi_1(t) = \xi(t) + X$, то $m_{\xi_1} = m_\xi + m_x$, $K_{\xi_1}(\tau) = K_\xi(\tau) + D_x$ и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_{\xi_1}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [K_\xi(\tau) + D_x] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} K_\xi(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow \infty} D_x = D_x \neq 0$.

2.2. Спектральное разложение стационарного случайного процесса и преобразование Фурье. Спектральная плотность

Основная идея спектрального представления случайных процессов заключается в том, что их можно изобразить в виде суммы некоторых гармоник. Такое представление даёт возможность сравнительно просто проводить различные, как линейные, так и нелинейные, преобразования над случайными процессами. Можно, например, исследовать, как распределяется дисперсия случайного процесса по частотам составляющих его гармоник. Использование подобной информации составляет существо спектральной теории стационарных случайных процессов.

Спектральная теория позволяет использовать в расчётах изображение по Фурье случайного процесса. В ряде случаев это существенно упрощает выкладки и широко применяется, особенно в теоретических исследованиях.

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ может быть задан своим каноническим или спектральным разложением:

$$\xi(t) = m_\xi + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k \cos \omega_k t + y_k \sin \omega_k t), \quad (2.8)$$

где $M[x_k] = M[y_k] = 0$, $D[x_k] = D[y_k] = D_k$, $M[x_k y_k] = M[x_i x_j] = M[y_i y_j] = M[x_i y_j] = 0$, $i \neq j$. При этом его ковариационная функция

$$\begin{aligned} K_{\xi}(t_1, t_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k (t_2 - t_1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k (\cos \omega_k t_1 \cos \omega_k t_2 + \sin \omega_k t_1 \sin \omega_k t_2) = \quad (2.9) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau = K_{\xi}(\tau). \end{aligned}$$

Выражение (2.8) может быть представлено в виде

$$\xi(t) = m_{\xi} + \sum_{k=0}^{\infty} z_k \cos(\omega_k t - \psi_k), \quad (2.10)$$

где ψ_k – фаза гармонического колебания элементарного случайного процесса, представляющая собой случайную величину, распределённую равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, z_k – амплитуда гармонического колебания элементарного случайного процесса, причём z_k – также случайная величина с некоторыми m_z и D_z .

Действительно, пусть $\xi_k(t) = x_k \cos \omega_k t + y_k \sin \omega_k t$, тогда $m_{\xi_k} = 0$,

$$\begin{aligned} K_{\xi_k}(t_1, t_2) &= M[(x_k \cos \omega_k t_1 + y_k \sin \omega_k t_1)(x_k \cos \omega_k t_2 + y_k \sin \omega_k t_2)] = \\ &= M[x_k^2 \cos \omega_k t_1 \cos \omega_k t_2 + x_k y_k (\sin \omega_k t_1 \cos \omega_k t_2 + \\ &\quad + \cos \omega_k t_1 \sin \omega_k t_2) + y_k^2 \sin \omega_k t_1 \sin \omega_k t_2] = \\ &= M[x_k^2] \cos \omega_k t_1 \cos \omega_k t_2 + M[y_k^2] \sin \omega_k t_1 \sin \omega_k t_2 = \\ &= D_k \cos \omega_k (t_2 - t_1) = D_k \cos \omega_k \tau. \end{aligned}$$

Если же теперь положить $\xi_k(t) = z_k \cos(\omega_k t - \psi_k)$, где $\psi_k \in R(0, 2\pi)$, ω_k – неслучайная величина, а z_k – случайная величина с известными m_z и D_z , то $\xi_k(t) = z_k \cos \psi_k \cos \omega_k t + z_k \sin \psi_k \sin \omega_k t$ и

$$M[\cos \psi_k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0, \quad M[\sin \psi_k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

$$D[\cos \psi_k] = M[\cos^2 \psi_k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2},$$

$$D[\sin \psi_k] = M[\sin^2 \psi_k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}, \quad D[\sin \psi_k \cos \psi_k] = 0.$$

Отсюда $m_{\xi_k} = M[z_k \cos \psi_k \sin \omega_k t + z_k \sin \psi_k \sin \omega_k t] = 0,$

$$\begin{aligned} K_{\xi_k}(t_1, t_2) &= M[(z_k \cos \psi_k \sin \omega_k t_1 + z_k \sin \psi_k \sin \omega_k t_1) \times \\ &\quad \times (z_k \cos \psi_k \cos \omega_k t_2 + z_k \sin \psi_k \sin \omega_k t_2)] = \\ &= M[z_k^2] \cdot \{M[\cos^2 \psi_k] \cdot \cos \omega_k t_1 \cos \omega_k t_2 + \\ &\quad + M[\sin \psi_k \cos \psi_k] \sin \omega_k t_1 \cos \omega_k t_2 + \\ &\quad + M[\cos \psi_k \sin \psi_k] \cos \omega_k t_1 \sin \omega_k t_2 + \\ &\quad + M[\sin^2 \psi_k] \sin \omega_k t_1 \sin \omega_k t_2\} = \frac{D_{z_k} + m_{z_k}^2}{2} \cos(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Таким образом, при сделанных в формулах (2.8) и (2.10) предположениях о свойствах, входящих в эти формулы случайных величин, представления (2.8) и (2.10) эквивалентны. При этом случайные величины z_i и $\psi_i, i = \overline{1, \infty}$ зависимы, так как, очевидно, имеют место соотношения

$$z_k \cos \psi_k = x_k, \quad z_k \sin \psi_k = y_k, \quad \frac{D_{z_k} + m_{z_k}^2}{2} = D[x_k] = D[y_k] = D_k.$$

Поскольку ковариационная функция стационарного случайного процесса – чётная функция, то её на интервале $(-T, T)$ можно раз-

ложить в ряд Фурье по косинусам, т.е. $K_{\xi}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau,$

$$\omega_k = k\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T}, \quad D_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T K_{\xi}(\tau) d\tau, \quad D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T K_{\xi}(\tau) d\tau.$$

Полагая $\tau = 0,$ получим

$$K_{\xi}(0) = D_{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k 0 = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \quad (2.11)$$

Поскольку ω_k можно интерпретировать как гармоники спектрального разложения стационарного случайного процесса (2.8), то общая дисперсия стационарного случайного процесса, представленная своим каноническим (спектральным) разложением, равна сумме дисперсий всех гармоник его спектрального разложения. На рис. 2.1 показан набор дисперсий D_k , соответствующих различным гармоникам ω_i . Чем более длинный интервал разложения по формуле (2.9) будет взят, тем точнее будет разложение по этой формуле. Если взять $T' = 2T$, то спектр дисперсии разложения спектрального процесса $\xi(t)$ на интервале $(0, T')$ будет содержать в два раза больше составляющих (см. рис. 2.1, частоты ω'_i).

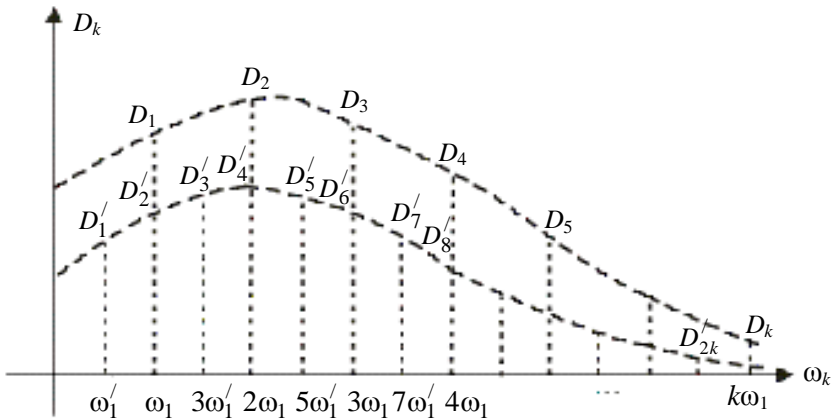


Рис. 2.2. «Спектр дисперсий» стационарного случайного процесса

Перепишем (2.9) в несколько ином виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta\omega} (\cos k\Delta\omega\tau) \Delta\omega,$$

где $\Delta\omega = \omega_1$ есть интервал между соседними частотами. Если положить

$$\frac{D_k}{\Delta\omega} = \frac{D_k}{\omega_1} = S_{\xi}(\omega_k), \quad (2.12)$$

то

$$\begin{aligned}
 K_{\xi}(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta\omega} (\cos k\Delta\omega\tau) \Delta\omega = \\
 &= \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega\tau d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Величина $S_{\xi}(\omega_k)\Delta\omega = D_k$ представляет собой часть общей дисперсии стационарного случайного процесса $\xi(t)$, приходящуюся на k -ю гармонику. При $T \rightarrow \infty$ (или при $\Delta\omega \rightarrow 0$) функция $S_{\xi}(\omega_k)$ будет неограниченно приближаться к кривой $S_{\xi}(\omega)$, которая называется *спектральной плотностью стационарного случайного процесса* $\xi(t)$ (рис. 2.2). Из (2.13) следует, что функции $K_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$ связаны между собой косинус-преобразованием Фурье. Таким образом,

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau.
 \tag{2.14}$$

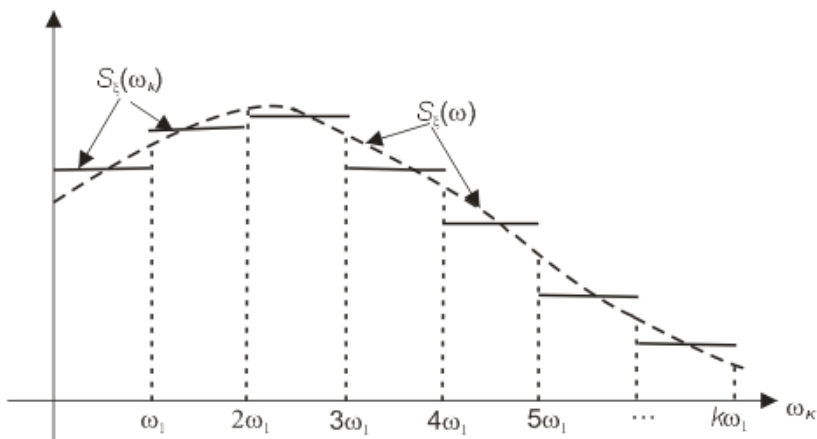


Рис. 2.2. Графики функций $S_{\xi}(\omega_k)$ и $S_{\xi}(\omega)$

Спектральная плотность по аналогии с функцией плотности вероятности обладает следующими свойствами:

$$1. S_{\xi}(\omega) \geq 0.$$

$$2. \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos(0 \cdot \omega) d\omega = K_{\xi}(0) = D_{\xi}.$$

Если ввести функцию $S_{\xi}^*(\omega)$, определённую следующим образом:

$$S_{\xi}^*(\omega) = \begin{cases} S_{\xi}(\omega), & \omega \geq 0, \\ \frac{S_{\xi}(-\omega)}{2}, & \omega < 0, \end{cases}$$

называемую *спектральной плотностью стационарного случайного процесса в комплексной форме*, то эта функция помимо двух приведённых свойств обладает ещё третьим свойством – свойством чётности (рис. 2.3).

$$3. S_{\xi}^*(\omega) = S_{\xi}^*(-\omega).$$

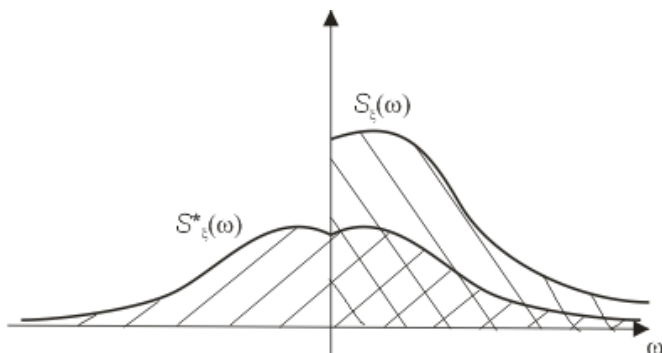


Рис. 2.3. Графики функции спектральной плотности

Перепишем (2.8) в следующем виде:

$$\xi(t) = m_{\xi} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x_k}{\Delta\omega} (\cos k\Delta\omega t) \Delta\omega + \frac{y_k}{\Delta\omega} (\sin k\Delta\omega t) \Delta\omega \right].$$

Пусть $\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{x_k}{\Delta\omega} = X(\omega)$, $\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{y_k}{\Delta\omega} = Y(\omega)$, тогда при $T \rightarrow \infty$ можно получить *интегральное каноническое представление* стационарного случайного процесса:

$$\xi(t) = m_\xi + \int_0^\infty X(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^\infty Y(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (2.15)$$

где случайные функции $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ представляют так называемый «белый шум» (см. подразд. 2.4). Статистические характеристики этих функций следующие: $M[X(\omega)] = M[Y(\omega)] = 0$, $K_X(\omega_1, \omega_2) = K_Y(\omega_1, \omega_2) = S_\xi(\omega) \delta(\omega_2 - \omega_1)$, где $\delta(x)$ – дельта-функция.

Так как $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, то $\xi_k(t) = x_k \cos \omega_k t + y_k \sin \omega_k t = \frac{x_k - iy_k}{2} e^{i\omega_k t} + \frac{x_k + iy_k}{2} e^{i\omega_k t}$. Если обозначить $z_k = \frac{x_k - iy_k}{2}$, $\bar{z}_k = \frac{x_k + iy_k}{2}$, то $\xi(t) = z_k e^{i\omega_k t} + \overline{z_k e^{i\omega_k t}}$, где знак $\bar{}$ означает комплексную сопряжённость. Следовательно, спектральное разложение стационарного случайного процесса в комплексной форме имеет вид

$$\xi(t) = m_\xi + \sum_{k=0}^{\infty} \left(z_k e^{i\omega_k t} + \overline{z_k e^{i\omega_k t}} \right) = m_\xi + \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{i\omega_k t}. \quad (2.16)$$

Аналогичные действия можно провести с ковариационной функцией, представленной в виде (2.9), и получить

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i\omega_k \tau}. \quad (2.17)$$

Формулу (2.13) с учётом введения функции $S_\xi^*(\omega)$ можно переписать в следующем виде:

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2.18)$$

а функцию $S_{\xi}^*(\omega)$ – как

$$S_{\xi}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2.19)$$

Формулы (2.18) и (2.19) представляют собой преобразование Фурье спектральной плотности $S_{\xi}^*(\omega)$ и ковариационной функции $K_{\xi}(\tau)$ в комплексной форме.

Поскольку спектральная плотность $S_{\xi}(\omega)$ представляет собой плотность распределения дисперсии случайного процесса по частотам его гармоник, то в некоторых приложениях теории случайных процессов $K_{\xi}(0) = D_{\xi}(t)$ интерпретируют как энергию стационарного случайного процесса, а $S_{\xi}(\omega)$ – как плотность этой энергии на единицу частоты. Эта трактовка появилась после применения теории стационарных случайных процессов в электротехнике.

Пример 5. Найти спектральную плотность $S_{\xi}^*(\omega)$ элементарного случайного процесса $\xi_k(t) = x_k \cos \omega_k t + y_k \sin \omega_k t$.

Ранее было показано, что $m_{\xi_k} = 0$, $K_{\xi_k}(t_1, t_2) = D_k \cos \omega_k \tau$, где $M[x_k] = M[y_k] = 0$, $D[x_k] = D[y_k] = D_k$, $\tau = t_2 - t_1$. По формуле (2.14)

$$\begin{aligned} S_{\xi_k}(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\xi_k}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{D_k}{\pi} \int_0^{\infty} [\cos(\omega - \omega_k)\tau + \cos(\omega + \omega_k)\tau] d\tau = \\ &= \frac{D_k}{2\pi} \int_0^{\infty} [e^{i(\omega - \omega_k)\tau} + e^{-i(\omega - \omega_k)\tau} + e^{i(\omega + \omega_k)\tau} + e^{-i(\omega + \omega_k)\tau}] d\tau, \end{aligned}$$

так как по формуле Эйлера $\cos \omega \tau = \frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2}$. Далее,

$$\begin{aligned}
S_{\xi_k}(\omega) &= \frac{D_k}{2\pi} \left[(-1) \int_0^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_k)\tau} d(-\tau) + \int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_k)\tau} d\tau + \right. \\
&\quad \left. + (-1) \int_0^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_k)\tau} d(-\tau) + \int_0^{\infty} e^{i(\omega+\omega_k)\tau} d\tau \right] = \\
&= \frac{D_k}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{i(\omega-\omega_k)(-\tau)} d(-\tau) + \int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_k)\tau} d\tau + (-1) \int_{-\infty}^0 e^{i(\omega+\omega_k)(-\tau)} d(-\tau) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{i(\omega+\omega_k)\tau} d\tau \right] = \frac{D_k}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega_k)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+\omega_k)\tau} d\tau \right] = \\
&= D_k [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)],
\end{aligned}$$

где $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau$ – интегральное представление в виде пре-

образования Фурье δ -функции Дирака. Выражение для $S_{\xi_k}(\omega)$ можно было таким и оставить, но для положительных ω (так как $\omega_k > 0$), принимая во внимание свойства δ -функции, (см. табл. 6 на с. 141), $\delta(\omega + \omega_k) \equiv 0$. Таким образом, $S_{\xi}(\omega) = D_k \delta(\omega - \omega_k)$.

Тогда $S_{\xi_k}^*(\omega) = \frac{1}{2} S_{\xi_k}(\omega) = \frac{D_k}{2} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)]$.

Найдём теперь заданную спектральную плотность в комплексной форме. Функции $S_{\xi}(\omega)$ и $S_{\xi_k}^*(\omega)$ – действительные неотрицательные функции. $S_{\xi_k}^*(\omega)$ – чётная функция, определённая на интервале $(-\infty, \infty)$, $S_{\xi}(\omega)$ – определена на интервале $(0, \infty)$, и на этом интервале $S_{\xi_k}^*(\omega) = \frac{1}{2} S_{\xi_k}(\omega)$ (см. рис. 2.3).

По формуле (2.19)

$$S_{\xi_k}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi_k}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_k \tau e^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{D_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau}}{2} e^{-i\omega \tau} d\tau \right] = \\
&= \frac{D_k}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_k) \tau} d\tau + e^{-i(\omega + \omega_k) \tau} d\tau \right] = \\
&= \frac{D_k}{4\pi} \left[(-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_k)(-\tau)} d(-\tau) + (-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega + \omega_k)(-\tau)} d(-\tau) \right] = \\
&= \frac{D_k}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_k) \tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega + \omega_k) \tau} d\tau \right] = \frac{D_k}{2} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)].
\end{aligned}$$

Пример 6. Найти спектральную плотность случайного процесса, если его ковариационная функция $K_{\xi}(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|}$.

По формуле (2.19)

$$\begin{aligned}
S_{\xi_k}^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi_k}(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega \tau} d\tau = \\
&= \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha|\tau| + i\omega \tau)} d\tau = \frac{D}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau - i\omega \tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega \tau} d\tau \right] = \\
&= \frac{D}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha - i\omega} e^{\alpha\tau - i\omega \tau} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-\alpha - i\omega} e^{-\alpha\tau - i\omega \tau} \Big|_0^{\infty} \right] = \\
&= \frac{D}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} \right] = \frac{D}{2\pi} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.
\end{aligned}$$

Более подробно вопросы спектрального представления стационарных случайных процессов и соответствующие формулы, выражающие характеристики этих процессов, рассмотрены в подразд. 3.1 – 3.3.

2.3. Нормальные случайные процессы

Случайный процесс $\xi(t, \omega), t \in T \subset R$ называется *нормальным* или *гауссовским процессом*, если любые его конечномерные законы распределения являются нормальными, т.е. случайный вектор

$(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))^T$ имеет нормальное распределение при любых $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$.

Нормальные случайные процессы являются одними из самых распространённых при решении технических задач. Согласно центральной предельной теореме любые случайные процессы приобретают свойство нормальных, если они возникают вследствие смещения большого числа малых воздействий. Кроме того, отклики узкополосных линейных систем также имеют нормальный характер, даже если на вход системы подаётся случайный процесс с негауссовским распределением.

Рассмотрим одномерное сечение нормального случайного процесса. В этом случае функция плотности вероятности будет иметь вид

$$f(\xi_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi}} e^{-\frac{(\xi_1 - m_\xi)^2}{2D_\xi}}, \text{ т.е. } \xi_i \in N(m_\xi, D_\xi).$$

Двумерное гауссовское распределение, характеризующее пару сечений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ нормального случайного процесса, рассмотрено в примере 3. Для многомерных случайных процессов целесообразнее пользоваться матричными обозначениями. Пусть $m_\xi(t_k) = M[\xi(t_k, \omega)]$, $k = \overline{1, n}$, вектор $\overline{m}_n = (m_\xi(t_1), m_\xi(t_2), \dots, m_\xi(t_n))^T$, а ковариационная матрица

$$K = \begin{pmatrix} K_\xi(t_1, t_1) & K_\xi(t_1, t_2) & \dots & K_\xi(t_1, t_n) \\ K_\xi(t_2, t_1) & K_\xi(t_2, t_2) & \dots & K_\xi(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_\xi(t_n, t_1) & K_\xi(t_n, t_2) & \dots & K_\xi(t_n, t_n) \end{pmatrix} \text{ и } |K| \neq 0.$$

Тогда n -мерная функция плотности вероятности для случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ будет иметь вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |R|}} \times \exp \left[-\frac{1}{2|R|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i - m_\xi(t_i)}{\sqrt{D_\xi(t_i)}} \cdot \frac{x_j - m_\xi(t_j)}{\sqrt{D_\xi(t_j)}} \cdot R_{ij} \right], \quad (2.20)$$

где R_{ij} – соответствующее алгебраическое дополнение определителя $|R|$, а сам определитель R равен:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \text{ причём}$$

величины r_{ij} определяются по формуле (1.25).

Из формулы (2.20) следует, что n -мерная плотность вероятности нормального случайного процесса определяется лишь его математическим ожиданием и ковариационной функцией и больше ни от чего не зависит. Поэтому корреляционная теория даёт полное описание нормальных случайных процессов. Если $\xi(t, \omega), t \in T$ – n -мерный стационарный нормальный процесс, то его математическое ожидание – постоянный n -мерный вектор, а аргументом ковариационной функции является параметр $\tau = t_2 - t_1$. Тогда оказывается, что n -мерная плотность распределения вероятности зависит лишь от разности отсчётов. Таким образом, гауссовский случайный процесс, стационарный в широком смысле, является стационарным и в узком смысле.

Многомерная характеристическая функция нормального процесса будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2, \dots, \alpha_n, t_n) &= M \left\{ \exp \left[i \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi(t_k) \right] \right\} = \\ &= \exp \left[i \sum_{k=1}^n m_{\xi}(t_k) \alpha_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n K_{\xi}(t_k, t_l) \alpha_k \alpha_l \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

где α_i – произвольные вещественные числа, $t_i \in T$, $K_{\xi}(t_k, t_l) = \text{cov}[\xi(t_k), \xi(t_l)]$.

Выражения для двумерной и одномерной характеристической функции нормального случайного процесса (при нулевом математическом ожидании) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2) &= \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 K_{\xi}(t_k, t_l) \alpha_k \alpha_l \right], \\ \varphi(\alpha, t) &= \exp \left[-\frac{1}{2} D_{\xi}(t) \alpha^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Пример 7. Пусть Z_1, Z_2, \dots, Z_n – совокупность случайных величин, совместное распределение которых нормальное. Показать, что случайный процесс $\xi(t) = \sum_{l=1}^n Z_l f_l(t)$, где $f_l(t)$ – некоторые детерминированные функции, является нормальным. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$.

Запишем для некоторого набора моментов времени t_1, t_2, \dots, t_k характеристическую функцию совместного распределения сечений $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_k)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2, \dots, \alpha_k, t_k) &= M \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^k \xi(t_j) \alpha_j \right) \right] = \\ &= M \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n Z_l f_l(t_j) \alpha_j \right) \right] = \\ &= M \left[\exp \left(i \sum_{l=1}^n Z_l \sum_{j=1}^k f_l(t_j) \alpha_j \right) \right] = M \left[\exp \left(i \sum_{l=1}^n Z_l c_l \right) \right], \end{aligned}$$

где $c_l = \sum_{j=1}^k f_l(t_j) \alpha_j$. Так как совместное распределение случайных величин Z_1, Z_2, \dots, Z_n нормальное, применим формулу (2.21):

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2, \dots, \alpha_k, t_k) &= \\ &= \exp \left\{ i \sum_{l=1}^n M[Z_l] c_l - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n K_{\xi}(t_m, t_l) c_m c_l \right\} = \\ &= \exp \left\{ i \sum_{l=1}^n M[Z_l] c_l - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \text{cov}(t_m, t_l) c_m c_l \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \sum_{l=1}^n M[Z_l] c_l &= \sum_{l=1}^n \left\{ M[Z_l] \sum_{j=1}^k f_l(t_j) \alpha_j \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^k M \left[\sum_{l=1}^n Z_l f_l(t_j) \alpha_j \right] = \sum_{j=1}^k M[\xi(t_j)] \alpha_j, \end{aligned}$$

$$M[\xi(t)] = M\left[\sum_{l=1}^n Z_l f_l(t)\right] = \sum_{l=1}^n M[Z_l] f_l(t) = m_\xi(t) \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \text{cov}(Z_m, Z_l) c_m c_l &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \{M[Z_m Z_l] - M[Z_m] M[Z_l]\} c_m c_l = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ \{M[Z_m Z_l] - M[Z_m] M[Z_l]\} \sum_{i=1}^k f_m(t_i) \alpha_i \times \right. \\ &\times \left. \sum_{j=1}^k f_l(t_j) \alpha_j \right\} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \{M[Z_m Z_l] - f_m(t_i) \alpha_i f_l(t_j) \alpha_j\} - \right. \\ &- \left. M[Z_m] f_m(t_i) \alpha_i M[Z_l] f_l(t_j) \alpha_j \right\} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \{M[\xi(t_i) \xi(t_j)] - \\ &- m_\xi(t_i) m_\xi(t_j)\} \alpha_i \alpha_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k K_\xi(t_i, t_j) \alpha_i \alpha_j = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \text{cov}[\xi(t_i), \xi(t_j)] \alpha_i \alpha_j, \end{aligned}$$

так как $\text{cov}(Z_m, Z_l) = M[(Z_m - m_{Z_m})(Z_l - m_{Z_l})] = M[(Z_m - M[Z_m])(Z_l - M[Z_l])] = M[Z_m Z_l] - M[Z_m] M[Z_l]$. Таким образом, характеристическая функция процесса $\xi(t)$ удовлетворяет формуле (2.21), ибо

$$\varphi(\alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2, \dots, \alpha_k, t_k) = \exp\left(i \sum_{l=1}^k m_\xi(t_l) \alpha_l - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^k K_\xi(t_m, t_l) \alpha_m \alpha_l\right)$$

и рассмотренный случайный процесс $\xi(t) = \sum_{l=1}^k Z_l f_l(t)$ является нормальным.

Пример 8. Найти одномерную характеристическую функцию нормального процесса $\xi(t)$, имеющего функцию плотности распределения вероятностей, равную:

$$f(x, t) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[-\frac{(x - m)^2}{2D}\right].$$

Так как $m_\xi = m \neq 0$, то воспользуемся формулой, аналогичной (2.22), но с учётом ненулевого математического ожидания: $\varphi(\alpha, t) = \exp\left[im_\xi(t)\alpha - \frac{1}{2}D_\xi(t)\alpha^2\right]$. Тогда $\varphi(\alpha, t) = \varphi(\alpha) = \exp\left(im\alpha - \frac{D}{2}\alpha^2\right)$.

2.4. Абсолютно случайный процесс (белый шум)

Случайный процесс $\xi(t)$, у которого ковариационная функция равна произведению неслучайной функции $f(t)$ на дельта-функцию $\delta(t_2 - t_1) = \delta(\tau)$, т.е.

$$K_\xi(t_1, t_2) = f(t_1)\delta(t_2 - t_1) = f(t_1)\delta(\tau), \quad (2.23)$$

называется *нестационарным белым шумом*. Если $f(t)$ не зависит от t , т.е. $f(t) = c = \text{const}$, то

$$K_\xi(t_1, t_2) = c\delta(t_2 - t_1) = c\delta(\tau) \quad (2.24)$$

и случайный процесс $\xi(t)$ называется *стационарным белым шумом*. Название «белый шум» возникло по аналогии с белым светом, который в видимой части имеет равномерный сплошной спектр.

Интеграл от дельта-функции по любому интервалу, содержащему точку $\tau = 0$, равен единице: $\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \forall \varepsilon \in R$.

Из этого следует, что значения рассматриваемого процесса $\xi(t)$ в любые два, сколь угодно близкие моменты времени не коррелированы, а следовательно, независимы. Поэтому подобный процесс называют абсолютно случайным процессом. Ковариационная функция белого шума равна нулю для всех τ , кроме $\tau = 0$, при котором $K_\xi(\tau) = \infty$ и имеет структуру дельта-функции (рис. 2.4), т.е.

$$K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(\tau) = \begin{cases} 0, & t_1 \neq t_2, \tau \neq 0, \\ \infty, & t_1 = t_2, \tau = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

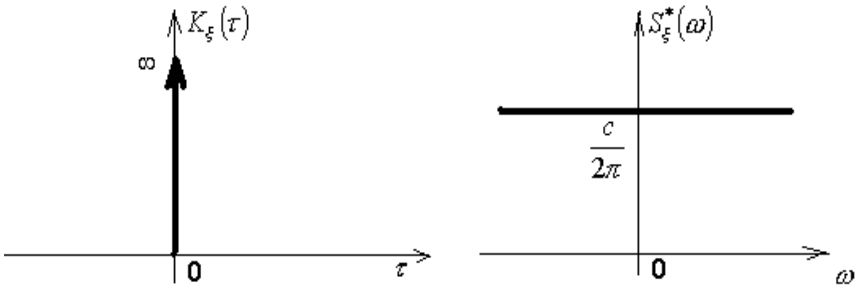


Рис. 2.4. Графики функций $K_\xi(\tau)$ и $S_\xi^*(\omega)$ белого шума

Найдём спектральную плотность абсолютно случайного процесса. По формуле (2.19)

$$\begin{aligned}
 S_\xi^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c\delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\
 &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{c}{2\pi} e^{-i\omega 0} = \frac{c}{2\pi} = \text{const}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, спектральная плотность белого шума постоянна на всех частотах (см. рис. 2.4). Абсолютно случайный процесс можно представить как предельный случай последовательности коротких независимых и одинаково распределённых импульсов с большой дисперсией. Такие процессы встречаются в инженерных задачах при рассмотрении различных естественных помех типа теплового и радишума.

При $\tau=0$ $K_\xi(\tau)=\infty$, что физически невозможно, поэтому формулы (2.23), (2.24) и (2.25) следует рассматривать как удобную математическую абстракцию.

Пример 9. На оси $0t$ имеется простейший поток событий (стационарный пуассоновский, см. подразд. 2.5) с интенсивностью λ . Случайный процесс $\xi(t)$ в момент появления i -го события ($i=1,2,3,\dots$) принимает случайное значение X_i и сохраняет его до следующего события в потоке (рис. 2.5). В начальный момент $\xi(0)=X_0$, причём случайные величины $X_0, X_1, \dots, X_i, \dots$ независимы и одинаково распределены. Рассмотреть предельный случай

для случайного процесса $\xi(t)$ при условии $\lambda \rightarrow \infty, D_x \rightarrow \infty$ и $\frac{D_x}{\lambda} = c = \text{const}$.

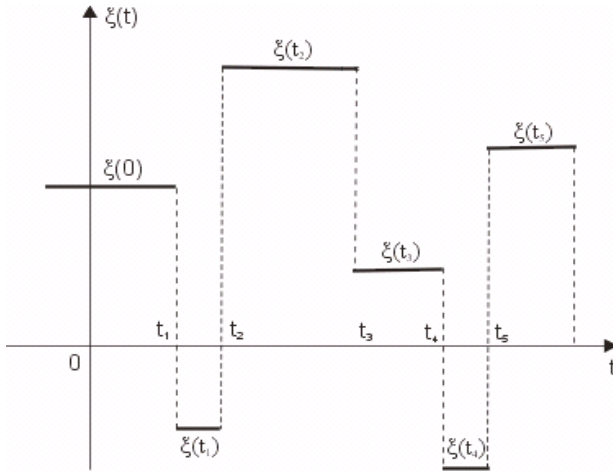


Рис. 2.5. Графическое представление простейшего потока событий

Найдём вначале характеристики случайного процесса в непрерывном случае. Пусть функция плотности вероятности распределения равна $f(x)$. Тогда

$$M[X_i] = m_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = m_x,$$

$$D[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = D_x.$$

Для нахождения ковариационной функции воспользуемся формулой $K_\xi(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - m_x)(\xi(t_2) - m_x)]$.

Если между точками t_1 и t_2 не появилось ни одного события, то $\xi(t_1) - m_x = \xi(t_2) - m_x$ и $K_\xi(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - m_x)^2] = D_x$. Если же между точками t_1 и t_2 появилось хотя бы одно событие (см. рис. 2.5), то $M[(\xi(t_1) - m_x)(\xi(t_2) - m_x)] = 0$, так как величины X_i независимы по условию задачи.

Для вычисления ковариационной функции нужно применить формулу (1.17а) для дискретных случайных процессов (см. подразд. 1.4). В нашей схеме следует учесть два случая: когда в ин-

тервале (t_1, t_2) длиной τ произошло хотя бы одно событие процесса $\xi(t)$ или не произошло ни одного. Для пуассоновского процесса $P(\xi(t, t + \tau) = n) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}$, где $\lambda = \text{const}$ – параметр пуассоновского процесса. Очевидно, $P(\xi(t, t + \tau) = 0) = e^{-\lambda\tau}$, а $P(\xi(t, t + \tau) > 0) = 1 - e^{-\lambda\tau}$. Тогда по формуле (1.17a) $K_\xi(t_1, t_2) = e^{-\lambda\tau} D_x + (1 - e^{-\lambda\tau}) \cdot 0 = D_x e^{-\lambda\tau}$. Если $t_2 < t_1$, то $K_\xi(t_1, t_2) = D_x e^{-\lambda(-\tau)}$ и в общем случае $K_\xi(\tau) = D_x e^{-\lambda|\tau|}$. Таким образом, ковариационная функция рассматриваемого процесса $\xi(t)$ не зависит от вида функции $f(x)$, а зависит только от дисперсии D_x , т.е. процесс $\xi(t)$ стационарен. Вид ковариационной функции $K_\xi(\tau)$ показан на рис. 2.6. При увеличении параметра λ ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ «стягивается» к началу координат, т.е. ведёт себя как дельтаподобная функция. При $\lambda \rightarrow \infty$ $K_\xi^{(1)}(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} K_\xi(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} D_x e^{-\lambda|\tau|}$. Отсюда

$$K_\xi^{(1)}(\tau) = \begin{cases} D_x, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases}$$

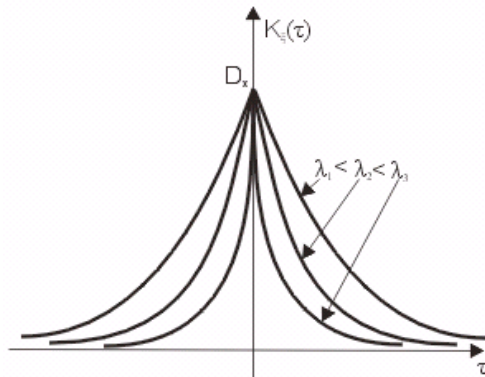


Рис. 2.6. Графики функции $K_\xi(\tau)$ для разных значений параметра λ

$$\begin{aligned} & \text{Учтём ещё условия } D_x \rightarrow \infty \text{ и } \frac{D_x}{\lambda} = c. \text{ Тогда } K_\xi(\tau) = D_x e^{-\lambda|\tau|} = \\ & = \frac{D_x}{\lambda} \lambda e^{-\lambda|\tau|} = c \lambda e^{-\lambda|\tau|}. \quad K_\xi^{(2)}(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} c \lambda e^{-\lambda|\tau|} = c \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda e^{-\lambda|\tau|} = c \delta(\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, случайный процесс $\xi(t)$ представляет собой белый шум.

2.5. Пуассоновские процессы, потоки событий

Пуассоновским процессом с параметром λ называется случайный процесс $\xi(t, \omega), t \in T = [0, \infty]$, обладающий следующими свойствами:

- а) $\xi(0, \omega) \equiv 0$;
- б) $\forall n > 1$ и $t_k \in T, k = \overline{1, n}$ таких, что $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$, случайные величины $\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega), k = \overline{1, n}$ являются независимыми;
- в) $\forall t_1, t_2 \in T$ таких, что $0 \leq t_1 < t_2$ случайная величина $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda(t_2 - t_1)$, т.е.

$$P\{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega) = k\} = \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}, \quad k \in \{0\} \cup N. \quad (2.26)$$

Рассмотрим приведённое формальное определение более подробно. Пуассоновский процесс описывает распределение потока событий, регистрируемых во времени в порядке их поступления.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени: поток вызовов на телефонной станции, поток забитых шайб при игре в хоккей, поток электронов, испускаемых в электронной лампе, и т.п.

Пусть $\xi(t_1, t_2)$ – число событий на интервале (t_1, t_2) – случайная величина, принимающая дискретные значения $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностью $P\{\xi(t_1, t_2) = n\} = P_n(t_1, t_2)$. Найдём распределение вероятностей $P_n(t_1, t_2)$ при учёте следующих условий, которым удовлетворяют пуассоновские процессы.

1. *Условие независимости.* Для любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ случайные величины $\xi(t_i, t_{i+1})$ независимы. Это значит, что число событий, попадающих на любой интервал времени $\tau = t_j - t_i$, не зависит от того, сколько событий попало на любой другой не пересекающийся с ним интервал. Условие независимости пуассоновских событий друг от друга означает отсутствие последействия в потоке. Если $\xi(t)$ – число событий потока на интервале $(0, t)$, то $\xi(t)$ будет случайной неубывающей целочисленной функцией от t ; она остаётся постоянной во всяком промежутке, в котором не произошло ни одного события.

2. *Условие однородности или стационарности* потока означает, что вероятности $P_n(t_1, t_2)$ не зависят от выбора начального момента t_1 . Это значит, что вероятность попадания того или другого числа событий в любой интервал времени длиной τ зависит только от величины τ и не зависит от того, где именно на оси $0t$ этот интервал расположен. Это свойство неизменности вероятностного режима для всех промежутков одинаковой длительности.

Таким образом, поток событий $\xi(t)$ однороден во времени, случайные величины $\xi(t_1, t_2)$ и $\xi(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$ одинаково распределены. За малый промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ с вероятностью $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ возникает только одно событие из потока $P\{\xi(t, t + \Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, где λ – параметр пуассоновского потока, $o(\Delta t)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt .

3. *Условие ординарности.* Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на элементарный интервал Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события, т.е. $P\{\xi(t, t + \Delta t) \geq 2\} = o(\Delta t)$. Практически ординарность потока событий означает, что события в нём появляются «поодиночке», а не группами по два, по три и т.д.

Поток событий называется *простейшим*, если события в нём независимы, сам поток однороден и стационарен. Ординарный поток независимых событий называется *пуассоновским* потоком. Простейший поток есть частный случай пуассоновского (а именно стационарный пуассоновский поток, см. пример 9 в подразд. 2.4).

Найдём вероятности событий пуассоновского потока, т.е. выведем формулу (2.26):

$$P_k(\tau) = P\{\xi(t, t + \Delta t) = k\} = P\{\xi(t, t + \tau) = k\} = \\ = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} = \frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda\Delta t}.$$

Рассмотрим вначале случай $k=0$. Из условий 1 и 2 пуассоновского потока следует, что $P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot P_0(\Delta t)$, где $P_0(t)$ – вероятность того, что на интервале $(0, t)$ не произойдёт ни одного события.

Очевидно, $P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) - P_2(\Delta t) - \dots = 1 - P_1(\Delta t) - \phi(\Delta t)$, где $\phi(\Delta t) = P_2(\Delta t) + P_3(\Delta t) + \dots$. Так как $P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) = (\lambda + \varepsilon_1)\Delta t$ и $\phi(\Delta t) = \varepsilon_2\Delta t$, где ε_1 и ε_2 – бесконечно малые более высокого порядка, чем Δt , то $P_0(\Delta t) = 1 - (\lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Delta t$, а $P_0(t + \Delta t) = P_0(t)[1 - (\lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Delta t]$. Отсюда $\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -(\lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)P_0(t)$.

При переходе в последнем уравнении к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получим дифференциальное уравнение относительно $P_0(t)$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P_0'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [-(\lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)P_0(t)] = -\lambda P_0(t),$$

т.е. $P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$. С учётом очевидного начального условия $P_0(0) = 1$ это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными даёт

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (2.27)$$

Итак, получена вероятность неоявления ни одного события ($k=0$) на интервале $(0, t)$.

Найдём теперь вероятность $P_k(t + \Delta t)$ при $k \geq 1$. Произведём опять разбиение интервала на два $(0, t) \cup (t, t + \Delta t)$. Если интервал Δt достаточно мал, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δt (как в предыдущем случае), либо за время Δt происходит одно событие совместно с тем, что за время t уже произошло $k-1$ событие, либо за Δt не происходит ни одного события совместно с тем, что за время t произошло k событий.

Следовательно, если Δt мало, то по условию 1 (условие независимости) $P_k(t + \Delta t) \cong P_{k-1}(t) \cdot P_1(\Delta t) + P_k(t) \cdot P_0(\Delta t)$. Тогда, так как $P_1(\Delta t) \cong \lambda \Delta t, P_0(\Delta t) \cong 1 - \lambda \Delta t$, то $\frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$ для $k = 1, 2, 3, \dots$

Очевидными начальными условиями для этой системы дифференциальных уравнений, получаемых в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$, являются условия $P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, \dots, P_k(0) = 0$. Введём производящую функцию для вероятностей $P_k(t)$, а именно $U(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) x^k$. Так как $0 < P_k(t) \leq 1$, то этот ряд сходится при $|x| \leq 1$. Продифференцировав ряд по t в его области сходимости, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k'(t) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} [-\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)] x^k = \\ &= -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) x^k + \lambda x \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(t) x^{k-1} = -\lambda U + \lambda x U, \end{aligned}$$

т.е. $\frac{\partial U}{\partial t} = -\lambda U + \lambda x U = \lambda U(x - 1)$. Здесь, как и в предыдущем

случае, переменные разделяются: $\frac{\partial U}{U} = \lambda(x - 1) \partial t$,

$\ln U(t, x) \Big|_0^t = \lambda(x - 1)t \Big|_0^t$, но $U(0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) x^k = 1$, а $P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_k(0) = 0$.

$$\text{Итак, } U(t, x) = e^{\lambda(x-1)t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda x t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right] x^k.$$

Тогда

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (2.28)$$

Определим математическое ожидание и дисперсию случайного процесса. Продифференцируем обе части равенства

$$e^{-\lambda t} e^{\lambda x t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k \text{ по } x \text{ и положим } x=1, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \left[e^{\lambda x t} \cdot \lambda t \right]_{x=1} &= \lambda t = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} k x^{k-1} \right]_{x=1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \cdot k, \end{aligned}$$

т.е. $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \cdot k = \lambda t$. Для дискретной случайной величины X по

определению математическое ожидание равно: $m_x = \sum_{k=1}^n P_{X_i} \cdot x_i$.

Следовательно, в нашем случае

$$m_{\xi}(t) = M[\xi(t)] = \lambda t. \quad (2.29)$$

Аналогично, дифференцируя это же равенство ещё раз, получим

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \left[e^{\lambda x t} \lambda^2 t^2 \right]_{x=1} &= \lambda^2 t^2 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} k(k-1) x^{k-2} \right]_{x=1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} k(k-1) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) k^2 - \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) k = m_2(t) - m_1(t), \end{aligned}$$

где $m_2(t) = M[\xi^2(t)]$ и $m_1(t) = M[\xi(t)]$ – соответствующие моментные функции. Но $D(\xi(t)) = M[\xi^2(t)] - \{M[\xi(t)]\}^2$, тогда

$$D_{\xi}(t) = D(\xi(t)) = \lambda^2 t^2 + \lambda t - \lambda^2 t^2 = \lambda t. \quad (2.30)$$

Таким образом, пуассоновский случайный процесс – нестационарный случайный процесс.

Найдём теперь ковариационную функцию $K_{\xi}(t_1, t_2)$. Пусть $t_2 > t_1$. Рассмотрим промежуток $(0, t_2]$, разбив его на два промежутка: $(0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$. Приращение пуассоновского случайного

процесса на всём промежутке $(0, t_2]$ равно сумме его приращений на промежутках $(0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$: $\xi_1(t_2) = \xi_1(t_1) + \xi_2(t_2 - t_1)$, где $\xi_2(t_2 - t_1) = \xi_1(t_2) - \xi_1(t_1)$ – приращение процесса за промежутков $(t_1, t_2]$, т.е. число событий за время $(t_1, t_2]$.

По определению пуассоновского случайного процесса его приращения на непересекающихся промежутках времени являются независимыми случайными величинами. Тогда

$$\begin{aligned} M[(\xi_1(t_1) - M[\xi_1(t_1)])(\xi_2(t_2 - t_1) - M[\xi_2(t_2 - t_1)])] &= 0. \text{ Из-за независимости процессов } \xi_1(t_1) \text{ и } \xi_2(t_2 - t_1) \text{ получим } \\ M[\xi_1(t_1)\xi_2(t_2 - t_1)] &= \\ &= M[\xi_1(t_1)]M[\xi_2(t_2 - t_1)] = \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1) = \lambda^2 t_1 (t_2 - t_1). \text{ С другой стороны,} \\ M[\xi_1(t_1)\xi_2(t_2 - t_1)] &= M[\xi_1(t_1)(\xi_1(t_2) - \xi_1(t_1))] = \\ &= M[\xi_1(t_1)\xi_1(t_2)] - M[\xi_1^2(t_1)]. \text{ Тогда } M[\xi_1(t_1)\xi_1(t_2)] = \\ &= \lambda^2 t_1 (t_2 - t_1) + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1, \text{ так как } M[\xi_1^2(t_1)] = \lambda^2 t_1 + \lambda t_1. \end{aligned}$$

Отсюда можно легко найти ковариационную функцию пуассоновского процесса: $K_\xi(t_1, t_2) = \text{cov}[\xi_1(t_1)\xi_1(t_2)] =$

$$\begin{aligned} &= M[(\xi_1(t_1) - \lambda t_1)(\xi_1(t_2) - \lambda t_2)] = M[\xi_1(t_1)\xi_1(t_2) - \lambda t_2 \xi_1(t_1) - \lambda t_1 \xi_1(t_2) - \lambda^2 t_1 t_2] = \\ &= M[\xi_1(t_1)\xi_1(t_2)] - \lambda t_2 M[\xi_1(t_1)] - \lambda t_1 M[\xi_1(t_2)] + \lambda^2 t_1 t_2 = \\ &= M[\xi_1(t_1)\xi_1(t_2)] - \lambda^2 t_1 t_2 - \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 = M[\xi_1(t_1)\xi_1(t_2)] - \lambda^2 t_1 t_2. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$K_\xi(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1 - \lambda^2 t_1 t_2 = \lambda t_1. \quad (2.31)$$

Аналогично при $t_1 > t_2$ найдём $K_\xi(t_1, t_2) = \lambda t_2$. Объединив оба результата, получим

$$K_\xi(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2). \quad (2.32)$$

При $t_1 = t_2$ $K_\xi(t, t) = D_\xi(t) = \lambda t$, что совпадает с результатом формулы (2.30). Выражение для нормированной ковариационной функции (см. формулу (1.25)) найдём при $t_1 < t_2$:

$$r_\xi(t_1, t_2) = \frac{K_\xi(t_1, t_2)}{\sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}} = \frac{\lambda t_1}{\sqrt{\lambda t_1 \lambda t_2}} = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}. \quad (2.33)$$

Приведём в заключение формулу для характеристической функции процесса Пуассона:

$$\varphi(\alpha, t) = M \left[e^{i\alpha\xi(t)} \right] = \exp(\lambda t (\exp i\alpha) - 1). \quad (2.34)$$

По формуле (1.18) найдём, например, математическое ожидание

$$m_1(\xi(t)) = m_\xi(t) = \left. \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{i} \exp(\lambda t (\exp i\alpha) - 1) \lambda t \exp(i\alpha) i \Big|_{\alpha=0} = \lambda t,$$

что соответствует действительному положению.

Таковы основные характеристики пуассоновского случайного процесса.

Пример 10. Пусть $\xi(t)$ – однородный пуассоновский случайный процесс с параметром λ . Обозначим через $\{\tau_n\}$ последовательность моментов наступления случайных событий. Доказать, что временные разности $\tau_{n+1} - \tau_n, n = 0, 1, 2, \dots, \tau_0 = 0$ – одинаково распределённые независимые случайные величины с функцией распределения $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ при $t \geq 0$ и $F(t) = 0$ при $t < 0$.

По формуле (2.27) вероятность неоявления ни одного события на интервале $(t_0, t_0 + \Delta t)$ равна $P_0(t) = e^{-\lambda t}$. Если обозначить через τ случайную длину промежутка до первого появления события пуассоновского процесса после момента t_0 , то

$$P(\tau > t) = e^{-\lambda t}. \quad \text{Тогда} \quad F(t) = P(\tau \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad \text{Таким образом,}$$

длительность ожидания появления события в процессе Пуассона распределена по показательному закону, т.е. плотность вероятности $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Показательный закон часто наблюдается в распределении случайных промежутков, например в распределении сроков службы некоторых приборов, материалов и т.п.

Пример 11 [6]. Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью $\lambda = 2$. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую

попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T , которое ему придётся ждать, его математическое ожидание m_T и дисперсию D_T .

Простейший поток – это поток без последействия. Таким образом, время ожидания здесь не зависит от того, сколько времени назад прошла последняя машина. Следовательно, распределение времени T точно такое же, как в предыдущем примере, т.е. аналогично распределению промежутка времени между появлением соседних машин, а именно $F(T) = 1 - e^{-\lambda T}$, $\lambda = 2$. Отсюда

$$m_T = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}, D_T = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}.$$

2.6. Потоки Эрланга и Пальма

В подразд. 2.5 дано определение простейшего потока. Это стационарный пуассоновский поток, т.е. ординарный, стационарный и без последействия. Рассмотрим теперь примеры потоков с *ограниченным последействием*. Так называются потоки (*потоки Пальма*), у которых интервалы $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ между соседними по времени событиями – независимые случайные величины (рис. 2.7). Очевидно, что стационарный пуассоновский поток является потоком Пальма, поскольку интервалы времени между его соседними событиями распределены одинаково по показательному закону (см. пример 10). В связи с одинаковостью распределений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ поток Пальма всегда стационарен. Поток Пальма, отличный от простейшего, получится, если интервал времени

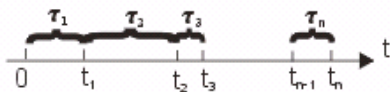


Рис. 2.7. Ординарный поток событий

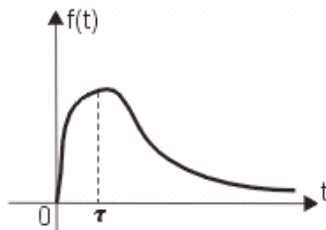


Рис. 2.8. Пример функции плотности вероятности интервалов времени в потоке

между соседними событиями является случайной величиной с распределением, отличным от показательного распределения (таким, например, как на рис. 2.8).

Потоки Пальма применяются при решении прикладных задач теории надёжности технических устройств, в частности в теории восстановления.

Потоком Эрланга k -го порядка называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда в нем сохраняется каждая k -я точка (событие), а все промежуточные выбрасываются (рис. 2.9).

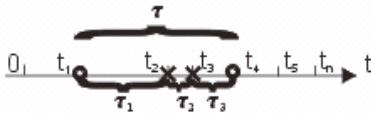


Рис. 2.9. Поток Эрланга 3-го порядка

Очевидно, что интервал $\tau^{(k)}$ между двумя событиями в таком потоке есть сумма k независимых случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром λ – параметром исходного простейшего потока, т.е.

$$\tau^{(k)} = \sum_{i=1}^k \tau_i . \quad (2.35)$$

Простейший поток, таким образом, представляет собой поток Эрланга 1-го порядка. Для потока Эрланга k -го порядка функция плотности вероятности имеет вид

$$f^{(k)}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} , \quad t > 0, k = 1, 2, \dots , \quad (2.36)$$

а функция распределения $F^{(k)}(t) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} . \quad (2.37)$

Числовые характеристики случайной величины $\tau^{(k)}$ равны:

$$m_t^{(k)} = \frac{k}{\lambda} , \quad D_t^{(k)} = \frac{k}{\lambda^2} . \quad (2.38)$$

С ростом k интенсивность потока за счёт «прореживания» уменьшается. Чтобы избежать этого, переходят к масштабированию оси времени, уменьшая масштаб на ней в k раз при формировании потока Эрланга k -го порядка. Для этого делят интервал $\tau^{(k)}$

между соседними событиями потока порядка на k . Таким образом получают *нормированный поток Эрланга* k -го порядка. Характеристики этого потока следующие:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^{(k)} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tau_i, \\ \tilde{f}^{(k)}(t) &= k f^{(k)}(tk) = \frac{\lambda k (\lambda tk)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda tk}, \\ \tilde{m}_i^{(k)} &= \frac{1}{\lambda}, \tilde{D}_i^{(k)} = \frac{1}{k\lambda^2}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Пример 12 [6]. На оси $0t$ имеется простейший поток событий с интенсивностью λ . Из этого потока формируется другой поток следующим образом: интервал между каждыми двумя соседними событиями делится пополам и в точке деления вставляется ещё одно событие. Найти плотность распределения $f(t)$ интервала τ между соседними событиями в новом потоке. Будет ли этот поток простейшим? Будет ли он потоком Пальма?

Пусть X – случайная величина – распределение промежутков времени между событиями в исходном простейшем потоке. Очевидно, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, кроме того, $\tau = \frac{X}{2}$ по условию задачи.

Известно, что если X – непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, а случайная величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$, то плотность Y выражается формулой $g(y) = f(\psi(y)) \left| \psi'(y) \right|$, где ψ – функция, обратная к функции φ . В нашем случае $\tau = \frac{X}{2}$, т.е. φ – линейная функция

$$Y = kX, k = \frac{1}{2}, \varphi(x) = kx = \frac{x}{2}, \text{ отсюда } \psi(y) = 2y, \psi'(y) = 2, \left| \psi'(y) \right| = 2.$$

Тогда $g(y) = 2f(2y) = 2\lambda e^{-2\lambda y}$, т.е. функция плотности вероятности распределения интервалов τ в новом потоке будет иметь вид $f_1(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t}$, $t > 0$.

Таким образом, вновь получаем показательное распределение с параметром $\lambda_1 = 2\lambda$, причём интервалы между событиями рас-

пределены одинаково. Однако они не являются независимыми. Действительно, два соседних интервала между событиями потока с вероятностью $1/2$ независимы (в исходном потоке их половинки принадлежали разным соседним интервалам), а с вероятностью $1/2$ равны друг другу, т.е. зависимы (в исходном потоке их половинки располагались в одном интервале). Таким образом, новый поток не пальмовский и не простейший, так как простейший поток – частный случай пальмовского.

Значит, показательное распределение интервала между событиями – недостаточное условие для того, чтобы поток был простейшим.

2.7. Марковские процессы (дискретные состояния, дискретное время)

В зависимости от того, какие значения, непрерывные или дискретные, принимают случайные величины $\xi(t)$ и их аргумент $t \in [0, T]$, различают четыре основных вида марковских случайных процессов: *марковские цепи* ($\xi(t)$ и t дискретны), *марковские последовательности* ($\xi(t)$ непрерывно, t дискретно), *дискретные марковские процессы* ($\xi(t)$ дискретно, t непрерывно) и *непрерывные марковские процессы* ($\xi(t)$ и t непрерывны).

Основное свойство всех видов марковских процессов таково: случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любых моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_i \in [0, T]$ условная функция распределения значения $\xi(t_n)$ при фиксированных значениях $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_{n-1})$ зависит только от $\xi(t_{n-1})$, т.е.

$$\begin{aligned} P \{ \xi(t_n) < x_n / \xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \dots, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1} \} = \\ = P \{ \xi(t_n) < x_n / \xi(t_{n-1}) = x_{n-1} \}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Если вести речь о какой-нибудь физической системе, то для любого $t_i, i = \overline{1, n}$ вероятность любого ее состояния в будущем (при $t > t_i$) зависит только от состояния в настоящем (при $t = t_i$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние. Свойство (2.40) называется *марковским свойством*.

При анализе марковских процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – графом состояний (орграфом), который изображает возможные состояния физической системы и возможные ее переходы из одного состояния в другое. Состояния изображаются вершинами орграфа, а возможные переходы – дугами.

Условную функцию распределения

$$F_{\xi} \{y, t/x, \tau\} = P \{ \xi(t) < y / \xi(\tau) = x \} \quad (2.41)$$

называют *переходной функцией* марковского процесса.

Марковский процесс $\xi(t)$ называется *однородным (стационарным)* по времени, если его переходная функция $F_{\xi} \{y, t/x, \tau\}$ зависит только от разности $t - \tau$. Марковский процесс $\xi(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если при любых $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_i \in [0, T]$ случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы. Процесс с независимыми приращениями называется *однородным*, если для любых $\tau, t_1, t_2, (t_1 < t_2)$ приращения $\xi(t_2) - \xi(t_1), \xi(t_2 + \tau) - \xi(t_1 + \tau)$ распределены одинаково, т.е. не зависят от τ .

Рассмотрим подробнее марковские цепи. Пусть для определённости $\xi(t)$ принимает лишь целые значения $0, 1, 2, \dots$ для $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$. График процесса $\xi(t)$ изображён на рис. 2.10. При этом $\xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_{n-1}) = i$, где i_0, i_1, \dots, i – некоторые заданные целые числа. Условная вероятность равенства $\xi(t_n) = j$ в соответствие с формулой (2.40) равна: $P \{ \xi(t_n) = j / \xi(t_0) = i_0, \dots, \xi(t_{n-1}) = i \} = P \{ \xi(t_n) = j / \xi(t_{n-1}) = i \}$.

Таким образом, каковы бы ни были значения i_0, i_1, \dots, i_{n-2} , принятые $\xi(t)$ до момента t_{n-1} , это не даёт никакой дополнительной информации, если известно значение $\xi(t_{n-1}) = i$.

Переходная функция для марковской цепи имеет вид

$$P \{ \xi(t_n) = j / \xi(t_{n-1}) = i \} = p_{ij}(t_{n-1}, t_n). \quad (2.42)$$

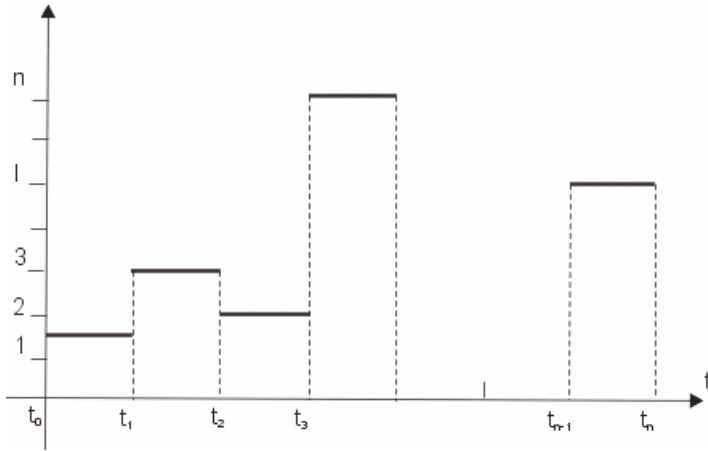


Рис. 2.10. Марковская цепь

Значения p_{ij} называются *переходными вероятностями* процесса $\xi(t)$. Для однородной цепи, очевидно, $p_{ij}(t_{n-1}, t_n) = p_{ij}(\tau)$, где $\tau = t_n - t_{n-1}$ при всяких t_{n-1} и t_n , т.е. в этом случае переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход.

Для марковской цепи моменты t_1, t_2, \dots, t_n , в которые физическая система меняет своё состояние, удобно рассматривать как последовательные шаги процесса смены состояний системы $\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(n)$; в качестве аргумента выбрать не время t , а номер шага: $1, 2, \dots, n$ (здесь $\xi(0)$ – начальное состояние системы).

Событие $\{\xi(n) = j\} = \{\text{после } n\text{-го шага система находится в состоянии } j\}$ случайное, поэтому последовательность состояний $\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(n)$ можно рассматривать как последовательность случайных событий.

Введём вероятности $p_i(k)$ того, что после k -го шага система будет в состоянии i ($i = 1, 2, \dots, n$). Вероятности $p_i(k)$ называются *вероятностями состояний* марковской цепи. Очевидно, что для

любого k $\sum_{i=1}^n p_i(k) = 1$, поскольку для каждого фиксированного k

всегда имеется полная группа событий. Распределение вероятностей в начале процесса $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$ называется начальным распределением вероятностей марковской цепи.

Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от номера шага k .

Переходные вероятности (2.42) однородной марковской цепи образуют квадратную матрицу $P_{n \times n}$, равную:

$$P = \|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Для любой строки матрицы P имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.44)$$

Вероятности p_{ij} суть не что иное, как вероятности того, что система, пришедшая к данному шагу в состояние i , в нём же и задержится на очередном шаге, т.е. это вероятности задержки системы в данном состоянии. Равенство (2.44) описывает тот факт, что физическая система на каждом шаге может находиться только в одном из множества взаимно исключающих друг друга состояний, поэтому сумма вероятностей по строкам (сумма вероятностей перехода из i -го состояния) должна равняться единице.

Выведем формулу для вероятности нахождения системы на k -м шаге в состоянии j для однородной марковской цепи:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1)p_{ij}, k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.45)$$

Формула (2.45) получается рекуррентным образом при помощи формулы полной вероятности $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$, где

$H_i, i = \overline{1, n}$ – полная группа гипотез, сопровождающих событие A .

Пусть заданы начальное распределение вероятностей $p_i(0), i = 1, 2, \dots, n$ и матрица переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$. Предположим, что в начальный момент (на нулевом шаге) система находится в состоянии i . Это будет одна из однотипных гипотез нашей схемы. Вероятность этой гипотезы равна: $p_i(0) = P\{\xi(0) = i\}$. Условная вероятность того, что система на первом шаге будет находиться в состоянии j , равна переходной вероятности $p_{ij} = P\{\xi(1) = j / \xi(0) = i\}$. Тогда по формуле полной вероятности получим

$$\begin{aligned} p_j(1) &= \sum_{i=1}^n P\{\xi(0) = i\} P\{\xi(1) = j / \xi(0) = i\} = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i(0) p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом, можно найти вероятности $p_1(1), p_2(1), \dots, p_n(1)$. По описанной схеме определяются и вероятности нахождения системы на втором шаге. Здесь поменяются лишь вероятности гипотез схемы, именно $p_i(1) = P\{\xi(1) = i\}$, которые будут вычислены на первом шаге, переходные же вероятности не изменятся. Следовательно,

$$\begin{aligned} p_j(2) &= \sum_{i=1}^n P\{\xi(1) = i\} P\{\xi(2) = j / \xi(1) = i\} = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i(1) p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Применяя данный приём k раз, придём к формуле (2.45).

Во многих технических задачах используется так называемый *стационарный* или *установочный* режим работы физической системы. Этот режим характеризуется тем, что по прошествии достаточно большого времени t вероятности пребывания системы в различных состояниях стабилизируются, т.е. состояния системы n меняются случайным образом, но их вероятности $p_i(t), i = 1, 2, \dots$ остаются постоянными. Это значит, что в стационарном режиме существует постоянный предел этих вероятностей, т.е.

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t). \quad (2.46)$$

Вероятности p_i , когда они существуют, называются *финальными* или *предельными* вероятностями состояний. Финальная вероятность есть не что иное, как средняя доля времени, которое в стационарном режиме проводит физическая система в конкретном состоянии i . Стационарный режим характерен тем, что система продолжает блуждать по состояниям, но вероятности этих состояний уже не зависят от номера шага.

Оказывается, что условия существования стационарного режима для физической системы с конечным числом состояний n таковы:

1) множество всех состояний системы должно быть эргодическим. Это определение нуждается в пояснении. Множество состояний системы называется *связанным* или *эргодическим*, если из любого состояния, входящего в множество состояний, можно попасть в любое другое состояние, принадлежащее этому же множеству;

2) марковская цепь должна быть однородной, т.е. $p_{ij}(k) = p_{ij}$;

3) марковская цепь не должна быть «циклической», т.е. граф состояний этой цепи не должен содержать циклов.

Марковские цепи, удовлетворяющие этим трём условиям, называются *эргодическими марковскими цепями*.

Финальные вероятности системы можно найти из решения системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из уравнений (2.45). Действительно, если однородная марковская цепь стационарна, то вероятность p_j состояния j на $(k+1)$ -м шаге не изменяется, т.е. она должна быть такой же, что и на k -м шаге:

$p_j(k+1) = p_j = \sum_{i=1}^n p_i(k)p_{ij} = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}$, т.е. $p_j = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}$. Пре-

образуя последнее уравнение, получаем

$$\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^n p_i p_{ij} + p_j(p_{jj} - 1) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.47)$$

Это система линейных однородных алгебраических уравнений относительно финальных вероятностей p_1, p_2, \dots, p_n . Поскольку

система однородна, она имеет бесконечное множество решений. К системе (2.47) можно добавить условие *нормировки* $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, заменив им любое из ее уравнений. Тогда получим линейную неоднородную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^n p_i p_{ij} + p_j (p_{jj} - 1) = 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.48)$$

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1,$$

которая имеет единственное решение, однозначно определяя финальные вероятности p_1, p_2, \dots, p_n .

Приведём без доказательства ещё одно свойство стационарных марковских цепей. Назовём выражение $p_i p_{ij}$ потоком вероятностей, переводящим физическую систему из состояния i в состояние j . Тогда для марковской цепи в стационарном режиме суммарный поток вероятностей, переводящий систему в состояние j из других состояний, равен суммарному потоку вероятностей, выводящему систему из состояния j :

$$\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^n p_i p_{ij} = p_j \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^n p_{ji}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.49)$$

Эти условия часто называют *балансовыми условиями* для состояния j . Из (2.49) с добавлением условия нормировки и удалением любого уравнения также можно получить значения финальных вероятностей системы.

Пример 13 [6]. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: 1 – полностью исправна, 2 – имеет незначительные неисправности оперативной памяти, при которых она может решать задачи, 3 – имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач, 4 – полностью вышла из строя. В начальный момент време-

ни ЭВМ полностью исправна (состояние 1). Её проверка производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2 и t_3 . Процесс, протекающий в ЭВМ, может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая и третья проверка ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.35 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.35 & 0.45 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.35 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}. \text{ Найти вероятности состояний}$$

ЭВМ после трёх проверок.

Изобразим вначале граф состояний данной физической системы (ЭВМ) (рис. 2.11).

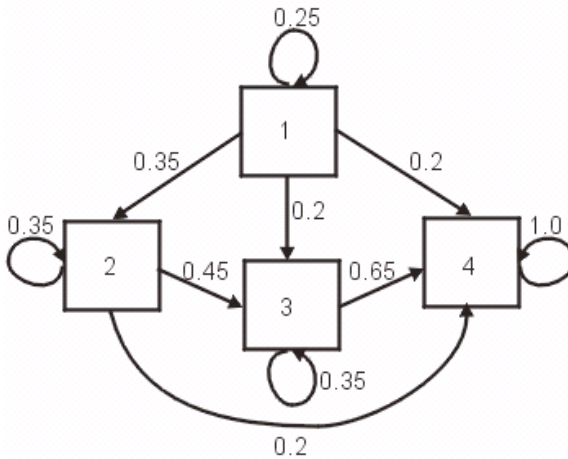


Рис. 2.11. Граф состояний ЭВМ

Вероятности переходов матрицы $\|p_{ij}\|$ указаны на соответствующих дугах. Очевидно, начальные вероятности состояний таковы: $p_1(0)=1, p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=0$. По формуле (2.45) найдём вероятности следующих состояний. При этом учтём только те, из которых возможен непосредственный переход в данные состояния (см. рис. 2.11).

Итак, по формуле (2.45)

$$p_1(1) = \underbrace{p_1(0)p_{11}}_{i=1,k=0} + \underbrace{p_2(0)p_{21}}_{i=2,k=0} + \underbrace{p_3(0)p_{31}}_{i=3,k=0} + \underbrace{p_4(0)p_{41}}_{i=4,k=0} =$$

$= 1 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,25$. Аналогично $p_2(1) = p_1(0)p_{12} = 1 \cdot 0,35 = 0,35$,
 $p_3(1) = p_1(0)p_{13} = 1 \cdot 0,2 = 0,2$, $p_3(1) = p_1(0)p_{14} = 1 \cdot 0,2 = 0,2$. Для следующих шагов цепочка переходов в данное состояние может быть длинней (см. рис. 2.11):

$$p_1(2) = p_1(1)p_{11} = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625,$$

$$p_2(2) = p_1(1)p_{12} + p_2(1)p_{22} = 0,25 \cdot 0,35 + 0,35 \cdot 0,35 = 0,021,$$

$$p_3(2) = p_1(1)p_{13} + p_2(1)p_{23} + p_3(1)p_{33} = 0,25 \cdot 0,2 + 0,35 \cdot 0,45 + 0,2 \cdot 0,35 = 0,02775,$$

$$p_4(2) = p_1(1)p_{14} + p_2(1)p_{24} + p_3(1)p_{34} + p_4(1)p_{44} = 0,25 \cdot 0,2 + 0,35 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,65 + 0,2 \cdot 1,0 = 0,45,$$

$$p_1(3) = p_1(2)p_{11} = 0,0625 \cdot 0,25 = 0,0156,$$

$$p_2(3) = p_1(2)p_{12} + p_2(2)p_{22} = 0,0625 \cdot 0,35 + 0,21 \cdot 0,35 = 0,0954,$$

$$p_3(3) = p_1(2)p_{13} + p_2(2)p_{23} + p_3(2)p_{33} = 0,0625 \cdot 0,2 + 0,21 \cdot 0,65 + 0,2775 \cdot 0,35 = 0,2461,$$

$$p_4(3) = p_1(2)p_{14} + p_2(2)p_{24} + p_3(2)p_{34} + p_4(2)p_{44} = 0,0625 \cdot 0,2 + 0,21 \cdot 0,2 + 0,2775 \cdot 0,65 + 0,45 \cdot 1,0 = 0,6883.$$

Итак, $p_1(3) = 0,0156$, $p_2(3) = 0,0954$, $p_3(3) = 0,2461$, $p_4(3) = 0,6883$.

Пример 14 [8]. Известна матрица P переходных вероятностей однородной цепи Маркова. Определить: 1) число возможных состояний этой цепи; 2) вероятности состояний после двух шагов, если на нулевом шаге состояния одинаковы, а

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix};$$

3) финальные вероятности этой марковской цепи.

Изобразим граф состояний данной физической системы (рис. 2.12). Тогда очевидно, что число возможных состояний равно трём. По условию задачи $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = \frac{1}{3}$. По формуле (2.45)

$$\begin{aligned}
p_1(1) &= p_1(0)p_{11} + p_2(0)p_{21} + p_3(0)p_{31} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
p_2(1) &= p_1(0)p_{12} + p_2(0)p_{22} + p_3(0)p_{32} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \\
p_3(1) &= p_1(0)p_{13} + p_2(0)p_{23} + p_3(0)p_{33} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \\
p_1(2) &= p_1(1)p_{11} + p_2(1)p_{21} + p_3(1)p_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
p_2(2) &= p_1(1)p_{12} + p_2(1)p_{22} + p_3(1)p_{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \\
p_3(2) &= p_1(1)p_{13} + p_2(1)p_{23} + p_3(1)p_{33} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

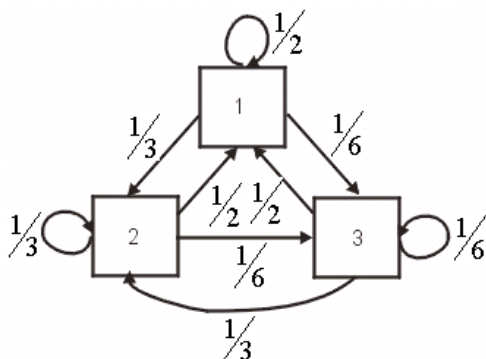


Рис. 2.12. Граф состояний задачи примера 14

Итак, $p(2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)^T$, причём все три состояния доступны за

эти два шага.

Финальные вероятности найдём по формулам (2.48), которые в данном случае будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
p_2 p_{21} + p_3 p_{31} + p_{11}(p_{11} - 1) &= 0, \\
p_1 p_{12} + p_3 p_{32} + p_{22}(p_{22} - 1) &= 0, \\
p_1 p_{13} + p_2 p_{23} + p_{33}(p_{33} - 1) &= 0, \\
p_1 + p_2 + p_3 &= 1.
\end{aligned}$$

Уберём из этой системы, например, первое уравнение и подставим значения переходных вероятностей. Получим

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{3} + \frac{p_3}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right) &= 0, \\ \frac{p_1}{6} + \frac{p_2}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - 1\right) &= 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1.\end{aligned}$$

Система легко решается подстановкой. Значения финальных вероятностей таковы: $p_{\text{фин}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)^T$. Таким образом, система уже на первом шаге переходит в стационарный режим.

2.8. Марковские процессы (дискретные состояния, непрерывное время)

Рассмотрим однородный марковский процесс $\xi(t)$ с конечным или счётным числом состояний $1, 2, \dots$, отличающийся от рассмотренных в подразд. 2.7 тем, что время t меняется непрерывно и переход из одного состояния в другое возможен в любой момент времени t . Для такого процесса вероятность перехода из состояния i в состояние j для любого момента времени равна нулю. Вместо вероятности перехода p_{ij} рассматривается *плотность вероятности перехода* λ_{ij} , которая определяется как $\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}}{\Delta t}$, то есть $p_{ij} = \lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$. Плотность вероятности перехода может быть как постоянной ($\lambda_{ij} = \text{const}$), так и зависящей от времени: $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$ (неоднородные процессы).

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно представлять переходы процесса $\xi(t)$ из состояния в состояние происходящими под влиянием некоторых *потоков событий*; при этом плотности вероятностей перехода получают смысл *интенсивностей* λ_{ij} соответствующих потоков событий. Как только происходит первое собы-

тие в потоке с интенсивностью λ_{ij} , система (процесс) из состояния i скачком переходит в состояние j . Если эти потоки пуассоновские (т.е. ординарные и без последствия с постоянной (однородные) или зависящей от времени (неоднородные) интенсивностью), то процесс будет марковским.

Как и случайные процессы рассмотренные в предыдущем подразделе, марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно изображать ориентированными графами состояний, на которых против каждой дуги, ведущей из состояния i в состояние j , проставлена интенсивность потока событий λ_{ij} , переводящего систему по данной дуге (рис. 2.13).

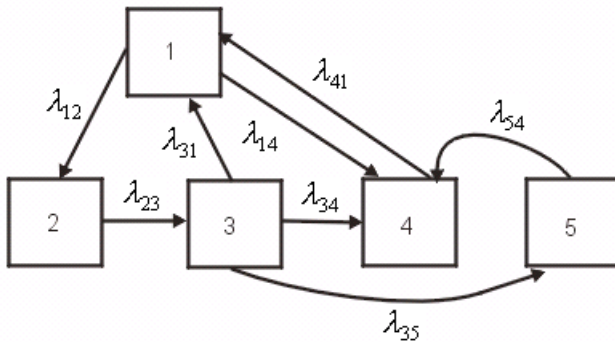


Рис. 2.13. Граф состояний с интенсивностями переходов

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ имеет конечное число состояний $1, 2, \dots, n$. Для описания вероятностного режима физической системы используются вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$, где $p_i(t) = P\{\xi(t) = i\}$, т.е. $p_i(t)$ – вероятность того, что в момент t система находится в состоянии i . Очевидно, что $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$.

Вероятности состояний $p_i(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j(t)\lambda_{ji}(t) - p_i(t)\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.50)$$

Эти уравнения называются уравнениями Колмогорова, их удобно составлять, пользуясь графом состояния системы и следуя следующему правилу: *производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков, идущих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.*

Например, для графа состояний на рис. 2.13 система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} &= \lambda_{31}p_3 + \lambda_{41}p_4 - (\lambda_{12} + \lambda_{14})p_1, \\ \frac{dp_2}{dt} &= \lambda_{12}p_1 - \lambda_{23}p_2, \\ \frac{dp_3}{dt} &= \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{35})p_3, \\ \frac{dp_4}{dt} &= \lambda_{14}p_1 + \lambda_{34}p_3 + \lambda_{54}p_5 - \lambda_{41}p_4, \\ \frac{dp_5}{dt} &= \lambda_{35}p_3 - \lambda_{54}p_5.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Так как для любого t выполняется условие $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$, то можно любую из вероятностей системы (2.50) выразить через остальные и таким образом уменьшить число уравнений на одно.

Чтобы решить систему (2.50) для $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$, нужно задать начальное распределение вероятностей $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$.

При этом $\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1$.

Все интенсивности $\lambda_{ij}(t)$ в системе (2.50) можно записать в виде матрицы интенсивностей:

$$\|\lambda(t)\| = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12}(t) & \lambda_{13}(t) & \dots & \lambda_{1n}(t) \\ \lambda_{21}(t) & 0 & \lambda_{23}(t) & \dots & \lambda_{2n}(t) \\ \lambda_{31}(t) & \lambda_{32}(t) & 0 & \dots & \lambda_{3n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1}(t) & \lambda_{n2}(t) & \lambda_{n3}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.52}$$

На главной диагонали этой квадратной матрицы стоят нули, если же $i \neq j$, то $\lambda_{ij}(t)$ – интенсивности потока событий, переводящего систему из состояния i в состояние j . Если все интенсивности $\lambda_{ij}(t)$ не зависят от t , то марковский процесс называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Уравнения (2.50) выводятся по очень простой вероятностной схеме. Рассмотрим физическую систему с n возможными состояниями $1, 2, \dots, n$. Для каждой пары состояний i и j будем считать известными интенсивности λ_{ij} , если возможен непосредственный переход из состояния i в состояние j , и будем полагать интенсивность $\lambda_{ij} = 0$, если непосредственный переход из состояния i в состояние j невозможен.

Пусть $p_i(t)$ – вероятность того, что в момент t система находится в состоянии i . Дадим t приращение Δt и найдём вероятность $p_i(t + \Delta t)$. Это вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ система будет находиться в состоянии i . Обозначим это событие $A = \{ \text{система в момент } t + \Delta t \text{ находится в состоянии } i \}$.

Событие A может произойти в двух случаях: 1) если в момент t система была в состоянии i и за время Δt не вышла из этого состояния (событие B); 2) когда в момент t система была в одном из состояний j , из которых возможен непосредственный переход в i , и за время Δt перешла из состояния j в состояние i (событие C). Очевидно, $A = B + C$.

Вероятность события B равна вероятности $p_i(t)$ того, что система в момент t была в состоянии i , умноженной на условную вероятность того, что за время Δt она из этого состояния не выйдет, т.е. не произойдёт ни одного события в потоке событий, выводящих систему из состояния i . Последняя вероятность равна единице минус сумма интенсивностей всех возможных потоков из i за время Δt (появление хотя бы одного события), т.е.

$1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t)\Delta t$. Тогда $P(B) \cong p_i(t) \left(1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t)\Delta t \right)$. Два последних

равенства справедливы с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δt .

Вероятность события C также легко вычисляется. В силу ординарности потоков $C = \sum_{j=1}^n C_j$, где C_j – событие, заключающееся

в том, что система перешла из состояния j в состояние i для тех пар состояний, где этот непосредственный переход возможен. Но

$$P(C_j) \cong p_j(t) \lambda_{ji}(t) \Delta t \text{ и } P(C) \cong \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji}(t) \Delta t.$$

$$\text{Тогда } P(A) \cong p_i(t + \Delta t) = p_i(t) \left(1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t \right) + \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji}(t) \Delta t,$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Вычитая из этого выражения $p_i(t)$, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим формулы (2.50).

Для марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем также при некоторых условиях может существовать *стационарный* режим; вероятности его состояний при $t \rightarrow \infty$ не зависят от времени, т.е. уже не меняются и становятся равными: $p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (см. формулу (2.46)). Эти вероятности называются *финальными* или *предельными* вероятностями состояний.

Для существования стационарного режима марковский процесс должен удовлетворять тем же свойствам, что и марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (см. подразд. 2.7).

Финальные вероятности состояний, если они существуют, находят из решения системы линейных алгебраических уравнений. Эти уравнения получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова (2.50), если их левые части, т.е. производные вероятностей состояний, положить равными нулю. Можно составлять эти уравнения непосредственно по графу состояний, пользуясь следующим правилом: *для каждого состояния суммарный входящий поток вероятностей должен быть равен суммарному выходящему потоку*. Например, для графа, изображённого на рис. 2.14, будем иметь следующую систему:

$$\begin{cases} \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 = (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2, \\ \lambda_{23}p_2 + \lambda_{43}p_4 = (\lambda_{32} + \lambda_{34})p_3, \\ \lambda_{34}p_3 = \lambda_{43}p_4. \end{cases}$$

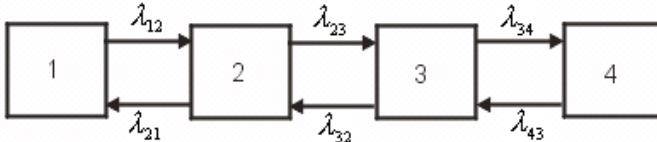


Рис. 2.14. Граф состояний, иллюстрирующий правило расчета потока вероятностей

К этой системе добавляют ещё нормировочное уравнение $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, пользуясь которым, можно любую из вероятностей p_i выразить через другие и соответственно отбросить одно из исходных уравнений.

Пример 15 [6]. Рассматривается процесс работы ЭВМ. Поток отказов (сбоев) в работе простейший с интенсивностью λ . Если ЭВМ даёт сбой, то он немедленно обслуживается и обслуживающий персонал приступает к устранению неисправности (ремонт). Закон распределения времени ремонта показательный с параметром μ : $\varphi(t) = \mu e^{-\mu t}$ ($t > 0$). В момент $t = 0$ ЭВМ исправна. Найти: 1) вероятность того, что в момент t ЭВМ будет работать; 2) финальные вероятности состояний ЭВМ.

Состояний физической системы (ЭВМ) два: 1) исправна, 2) неисправна, т.е. ремонтируется. Граф состояний системы изображён на рис. 2.15. Система дифференциальных уравнений Колмогорова будет иметь вид

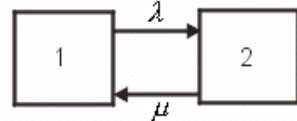


Рис. 2.15. Граф состояний системы примера 15

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \mu p_2 - \lambda p_1, \\ \frac{dp_2}{dt} &= \lambda p_1 - \mu p_2. \end{aligned}$$

Одно из этих уравнений можно заменить условием нормировки $p_1 + p_2 = 1$, например $p_2 = 1 - p_1$. Тогда получим лишь одно дифференциальное уравнение $\frac{dp_1}{dt} = \mu - (\lambda + \mu)p_1$, начальным условием для которого, очевидно, является $p_1(0) = 1$. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Напомним алгоритм его аналитического решения.

Исходное уравнение записывается в виде $y' + P(x)y = Q(x)$. Оно решается в два этапа: вначале решается однородное уравнение $y' + P(x)y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, его решение $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Общее решение неоднородного уравнения, где величина $C(x)$ находится методом Лагранжа, имеет вид $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right)$.

В нашем случае линейное однородное уравнение таково: $\frac{dp_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu)p_1 = 0$. Тогда $\int \frac{dp_1(t)}{dt} = -\int (\lambda + \mu)dt$, $\ln p_1(t) = -(\lambda + \mu)t + \ln C$ и $p_1(t) = C(t)e^{-(\lambda + \mu)t}$. Подставляя полученный результат в исходное неоднородное дифференциальное уравнение, получим $C'(t)e^{-(\lambda + \mu)t} = \mu$, $C'(t) = \mu e^{(\lambda + \mu)t}$. Отсюда $C(t) = \mu \int e^{(\lambda + \mu)t} dt = \frac{\mu e^{(\lambda + \mu)t}}{\lambda + \mu} + C_1$. Из начального условия $p_1(0) = 1$ находим $C_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Тогда $p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right]$. Но $p_2(t) = 1 - p_1(t)$, отсюда $p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left[1 + e^{-(\lambda + \mu)t} \right]$.

Значения финальных вероятностей можно получить из выражений для $p_1(t)$ и $p_2(t)$, именно, при $t \rightarrow \infty$

$p_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, $p_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$. Эти же значения легко находятся и из гра-

фа состояний (см. рис. 2.15). Система алгебраических уравнений для финальных вероятностей имеет вид $\begin{cases} \lambda p_1 = \mu p_2, \\ \mu p_2 = \lambda p_1. \end{cases}$ Добавляя условие нормировки $p_1 + p_2 = 1$, получим $p_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ и $p_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

3. СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС И ЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ

3.1. Действительная форма спектрального разложения стационарного случайного процесса

Рассмотрим элементарный случайный процесс

$$\xi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (3.1)$$

для которого случайные величины A и B имеют нулевые математические ожидания и равные дисперсии так, что

$$M[A] = M[B] = 0 \text{ и } M[A^2] = M[B^2] = d. \quad (3.2)$$

Определим, какие дополнительные ограничения нужно наложить на случайные величины A и B , чтобы элементарный случайный процесс (3.1) был стационарным в широком смысле, т.е. чтобы его ковариационная функция $K_\xi(t_1, t_2)$ зависела только от разности моментов времени $t_2 - t_1 = \tau$. Случайные величины $\xi(t_1) = A \cos \omega t_1 + B \sin \omega t_1$ и $\xi(t_2) = A \cos \omega t_2 + B \sin \omega t_2$, которые являются значениями процесса (2.8) в моменты времени t_1 и t_2 , имеют нулевые математические ожидания, поэтому их ковариация равна математическому ожиданию их произведения:

$$K_\xi(t_1, t_2) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)]. \quad (3.3)$$

Преобразуем произведение этих случайных величин: $\xi(t_1)\xi(t_2) = A^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + AB \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 + AB \sin \omega t_1 \cos \omega t_2 + B^2 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2$. Далее, применяя формулу для синуса суммы двух углов, придём к выражению

$$\begin{aligned} \xi(t_1)\xi(t_2) &= A^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \\ &+ B^2 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 + AB \sin \omega(t_1 + t_2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и вспоминая формулу для косинуса разности двух углов, получим с учетом (3.2)

$$K_\xi(t_1, t_2) = d \cos \omega(t_2 - t_1) + M[AB] \sin \omega(t_1 + t_2). \quad (3.5)$$

Если $M[AB] = 0$, то

$$K_\xi(t_1, t_2) = d \cos \omega(t_2 - t_1). \quad (3.6)$$

Таким образом, для того чтобы элементарный случайный процесс (3.1) был стационарным, достаточно к условию (3.2) добавить условие некоррелированности случайных величин A и B , т.е. условие $M[AB] = 0$.

Пусть теперь случайный процесс есть конечная сумма элементарных случайных процессов вида (3.1) (см. также формулу(2.8)):

$$\xi(t) = m_\xi + \sum_{l=1}^n (A_l \cos \omega_l t + B_l \sin \omega_l t). \quad (3.7)$$

Круговые частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ выбраны произвольно. Случайные величины $A_l, B_l (l = 1, 2, \dots, n)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} M[A_l] &= M[B_l] = 0, \quad M[A_l^2] = M[B_l^2] = d_l, \\ M[A_l A_k] &= 0, l \neq k, \quad M[B_l B_k] = 0, l \neq k, \quad M[A_l B_k] = 0, \end{aligned}$$

при выполнении которых слагаемые в сумме (3.7) некоррелированы. Ковариационная функция суммы некоррелированных слагаемых равна сумме ковариационных функций (3.6) этих слагаемых:

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sum_{l=1}^n d_l \cos \omega_l(t_2 - t_1). \quad (3.8)$$

Таким образом, ковариационная функция случайного процесса (3.7) зависит только от разности $t_2 - t_1$, что говорит о стационарности этого процесса. Обозначая разность $t_2 - t_1 = \tau$, перепишем (3.8) в виде

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sum_{l=1}^n d_l \cos \omega_l \tau. \quad (3.9)$$

Выберем теперь спектр частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ случайного процесса (3.7) специальным образом:

$$\omega_l = \frac{\pi l}{T} \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Этот дискретный спектр частот процесса будет бесконечным и

$$\Delta\omega = \omega_{l+1} - \omega_l = \frac{\pi}{T}, \quad (3.11)$$

где T – положительное число. Формулы (3.7) и (3.9) принимают вид

$$\xi(t) = m_\xi + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l \cos \omega_l t + B_l \sin \omega_l t), \quad (3.12)$$

$$K_\xi(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l \cos \omega_l \tau. \quad (3.13)$$

Предположим, что дисперсии d_l случайных величин A_l и B_l убывают достаточно быстро, так что ряд с положительными членами $\sum_{l=1}^{\infty} d_l$ сходится. Эта сходимость обеспечивает абсолютную сходимость ряда (3.13) и конечность дисперсии случайного процесса (3.12), так как

$$D_\xi = K_\xi(0) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l. \quad (3.14)$$

Формула (3.13) дает разложение в ряд Фурье по косинусам четной $2T$ -периодической функции $K_\xi(\tau)$. Коэффициенты d_l этого ряда Фурье связаны с функцией $K_\xi(\tau)$ формулой

$$d_l = \frac{1}{T} \int_{-T}^T K_\xi(\tau) \cos \omega_l \tau d\tau \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (3.15)$$

Подынтегральная функция в правой части (3.15) четная, а промежуток интегрирования симметричен, поэтому

$$d_l = \frac{2}{T} \int_0^T K_\xi(\tau) \cos \omega_l \tau d\tau \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (3.16)$$

Если увеличивать T , уменьшая соответственно промежуток $\Delta\omega = \pi/T$ между частотами, то число слагаемых на любой фиксированный интервал частот (ω_a, ω_b) в разложении (3.12) растет обратно пропорционально $\Delta\omega$. Чтобы составляющая случайного процесса (3.12), приходящаяся на этот интервал частот, не возрас- тала бесконечно, должны выполняться условия

$$A_l = A_T(\omega_l)\Delta\omega, \quad B_l = B_T(\omega_l)\Delta\omega, \quad d_l = S_T(\omega_l)\Delta\omega. \quad (3.17)$$

Перепишем формулы (3.12), (3.13) и (3.16) с учетом обозначений (3.17) и равенства (3.11):

$$\xi(t) = m_\xi + \sum_{l=1}^{\infty} (A_T(\omega_l) \cos \omega_l t + B_T(\omega_l) \sin \omega_l t) \Delta\omega, \quad (3.18)$$

$$K_\xi(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} S_T(\omega_l) \cos \omega_l \tau \Delta\omega, \quad (3.19)$$

$$S_T(\omega_l) = \frac{d_l}{\Delta\omega} = \frac{2}{\pi} \int K_\xi(\tau) \cos \omega_l \tau d\tau. \quad (3.20)$$

При стремлении $\Delta\omega$ к нулю и соответственно $T \rightarrow \infty$ спектр случайного процесса (3.18) из дискретного превращается в непрерывный, а представление его рядом переходит в интегральное представление:

$$\xi(t) = m_\xi + \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (3.21)$$

При этом формулы (3.19) и (3.20) принимают соответственно вид

$$K_\xi(\tau) = \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (3.22)$$

$$S_\xi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_\xi(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (3.23)$$

(см. также формулу (2.14)).

Равенство (3.21) представляет стационарную случайную функцию $\xi(t)$, аргументом которой является время t , через две

другие случайные функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$, аргументом которых является круговая частота ω . Исходя из свойств функций (3.17)

$$A_T(\omega_l) = \frac{A_l}{\Delta\omega}, \quad B_T(\omega_l) = \frac{B_l}{\Delta\omega} \quad \text{и} \quad S_T(\omega_l) = \frac{D_l}{\Delta\omega}. \quad (3.24)$$

Отсюда можно получить представление о свойствах случайных функций $A(\omega)$ и $B(\omega)$.

Функции $A_T(\omega_l)$ и $B_T(\omega_l)$ не коррелированы, и значения каждой из них при различных значениях аргумента не коррелированы, так что

$$M[A_T(\omega_l)B_T(\omega_l)] = 0, \\ M[A_T(\omega_l)A_T(\omega_k)] = M[B_T(\omega_l)B_T(\omega_k)] = 0 \quad \text{при} \quad \omega_l \neq \omega_k.$$

Ввиду этого заключаем, что случайные функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ не коррелированы и их значения при любых сколь угодно близких, но различных значениях аргумента ω не коррелированы.

Перейдем к рассмотрению дисперсий, помня, что константа выносится из-под знака дисперсии в квадрате: $D[A_T(\omega_l)] = D\left[\frac{A_l}{\Delta\omega}\right] = \frac{D[A_l]}{\Delta\omega^2} = \frac{d_l}{\Delta\omega^2} = \frac{S_T(\omega_l)}{\Delta\omega}$, так как

$$D[A_l] = M[A_l^2] = d_l. \quad \text{Аналогично находим}$$

$$D[A_T(\omega_l)] = D[B_T(\omega_l)] = \frac{S_T(\omega_l)}{\Delta\omega}. \quad (3.25)$$

Из (3.25) следует, что дисперсии случайных функций $A(\omega)$ и $B(\omega)$ бесконечны. Из того, что ковариация $K_{A_T}(\omega_l, \omega_k) = M[A_T(\omega_l)A_T(\omega_k)]$ равна нулю при $\omega_l \neq \omega_k$ и равна $\frac{S_T(\omega_l)}{\Delta\omega}$ при $\omega_l = \omega_k$, следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} K_{A_T}(\omega_l, \omega_k) \Delta\omega = S_T(\omega_l). \quad (3.26)$$

При $\Delta\omega \rightarrow 0$ формула (3.26) принимает вид

$$\int_0^{\infty} K_A(\omega_1, \omega_2) d\omega_2 = S_{\xi}(\omega_1), \quad (3.27)$$

откуда заключаем, что

$$K_A(\omega_1, \omega_2) = S_\xi(\omega_1)\delta(\omega_2 - \omega_1). \quad (3.28)$$

Аналогично для ковариационной функции $K_B(\omega_1, \omega_2)$ случайной функции $B(\omega)$ от частоты ω имеем равенство

$$K_B(\omega_1, \omega_2) = S_\xi(\omega_1)\delta(\omega_2 - \omega_1). \quad (3.29)$$

Таким образом, случайные функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ от частоты ω в спектральном разложении (3.21) стационарного случайного процесса с непрерывным спектром имеют ковариационные функции, пропорциональные δ -функции. Формула (3.23), полученная предельным переходом при $\Delta\omega \rightarrow 0$ из равенства (3.20), представляет спектральную плотность $S^*(\omega)$ дисперсии стационарного случайного процесса (3.21). Если в (3.22) положить $\tau = 0$ и $D_\xi = K(0) = \int_0^\infty S_\xi(\omega)d\omega$, то можно убедиться, что дисперсия процесса (3.21) равна площади под графиком его спектральной плотности $S_\xi^*(\omega)$.

Если мы выделим аддитивную часть случайного процесса (3.21), соответствующую промежутку частот (ω_1, ω_2) в его спектре, то получим стационарный процесс

$$\xi_{\omega_1, \omega_2}(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega, \quad (3.30)$$

дисперсия которого определяется интегралом от спектральной плотности $S_\xi(\omega)$ по промежутку $[\omega_1, \omega_2]$:

$$D[\xi_{\omega_1, \omega_2}(t)] = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_\xi(\omega) d\omega. \quad (3.31)$$

Если весь интервал $(0, \infty)$ частот разбить на отдельные подынтервалы, то случайный процесс (3.21) будет представлен суммой некоррелированных слагаемых вида (3.30), а дисперсия этого процесса – суммой дисперсий этих слагаемых, вычисляемых по (3.31).

На этом основании можно сказать, что спектральная плотность $S_{\xi}(\omega)$ стационарного случайного процесса (3.21) даёт распределение его дисперсии по непрерывному спектру его частот (см. рис. 2.1 и 2.2).

3.2. Комплексная форма спектрального разложения стационарного случайного процесса

В подразд. 3.1 рассмотрена действительная форма спектрального разложения стационарного случайного процесса

$$\xi(t) = m_{\xi} + \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (3.32)$$

Круговые частоты ω в этом разложении принимают неотрицательные значения. Вектор единичной длины на комплексной плоскости, исходящий из начала координат и вращающийся с угловой скоростью $\omega \geq 0$ против часовой стрелки, можно представить в виде

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (3.33)$$

Если же вращение этого вектора происходит по часовой стрелке,

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t, \quad (3.34)$$

т.е. его угловая скорость отрицательна. Это наблюдение позволяет осмыслить наличие отрицательных значений в спектре стационарного случайного процесса при переходе к комплексной форме его спектрального разложения. Выразим из формул Эйлера (3.33) и

$$(3.34) \text{ косинус и синус: } \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad \sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

и подставим полученные выражения в спектральное разложение (3.32) процесса $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} \xi(t) = m_{\xi} + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} A(\omega) + \frac{1}{2i} B(\omega) \right) e^{i\omega t} d\omega + \\ + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} A(\omega) - \frac{1}{2i} B(\omega) \right) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Во втором интеграле в правой части равенства (3.35) выполним замену $\omega = -\lambda$:

$$\begin{aligned} \xi(t) = m_{\xi} + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (A(\omega) - iB(\omega)) e^{i\omega t} d\omega + \\ + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} (A(-\lambda) + iB(-\lambda)) e^{i\lambda t} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Введем в рассмотрение комплекснозначную случайную функцию, которая для $\omega > 0$ определяется равенством $C(\omega) = \frac{1}{2}(A(\omega) - iB(\omega))$, а для отрицательных значений аргумента – равенством

$$C(\omega) = \frac{1}{2}(A(-\omega) + iB(-\omega)) \text{ при } \omega < 0. \quad (3.37)$$

С помощью этой функции разложение (3.36) можно записать в виде

$$\xi(t) = m_{\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.38)$$

Поскольку вещественная и мнимая части случайной функции (3.37) имеют нулевые математические ожидания, комплекснозначная функция $C(\omega)$ имеет нулевое математическое ожидание при всех значениях угловой скорости ω вращения вектора $e^{i\omega t}$.

Изучение ковариационной функции $K_C(\omega_1, \omega_2)$ требует рассмотрения четырех случаев:

- 1) $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$,
- 2) $\omega_1 < 0, \omega_2 < 0$,
- 3) $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$,
- 4) $\omega_1 < 0, \omega_2 > 0$.

При $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ $K_C(\omega_1, \omega_2) = M[C(\omega_1)\bar{C}(\omega_2)] = \frac{1}{4}(K_A(\omega_1, \omega_2) + K_B(\omega_1, \omega_2))$. Таким образом, с учетом (3.29) в

этом случае $K_C(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} S_{\xi}(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2)$. При $\omega_1 < 0$ и $\omega_2 < 0$

$$K_C(\omega_1, \omega_2) = M[C(\omega_1)\bar{C}(\omega_2)] = \frac{1}{4}(K_A(-\omega_1, -\omega_2) + K_B(-\omega_1, -\omega_2)).$$

Тогда учетом четности δ -функции получим $K_C(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}S_\xi(-\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2)$. В случаях, когда ω_1 и ω_2 имеют разные знаки, легко убедиться, что $K_C(\omega_1, \omega_2) = 0$.

Введем функцию, определенную при всех значениях $\omega \in (-\infty, +\infty)$:

$$S_\xi^*(\omega) = \frac{1}{2}S_\xi(|\omega|) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_\xi(\tau) \cos \tau \omega d\tau \quad (3.39)$$

(см. также формулу (2.19)). С её помощью можно записать единое для всех ω выражение ковариационной функции комплексной случайной функции $C(\omega)$:

$$K_C(\omega_1, \omega_2) = S_\xi^*(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (3.40)$$

Значения случайной функции $C(\omega)$ при любых различных значениях ω_1 и ω_2 не коррелированы, а её дисперсия бесконечна. С учетом чётности подынтегральной функции в равенстве (3.39) его можно переписать в виде

$$S_\xi^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_\xi(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (3.41)$$

Отнимем от правой части (3.41) интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку $\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_\xi(\tau) \sin \omega \tau d\tau = 0$. Тогда получим формулу

$$S_\xi^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.42)$$

выражающую спектральную плотность $S_\xi^*(\omega)$ через ковариационную функцию $K_\xi(\tau)$ в комплексной форме.

Из равенства (3.22) с учетом четности $S_\xi^*(\omega)$

$$K_{\xi}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_{\xi}^*(\omega) \cos \omega \tau d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}^*(\omega) \cos \omega \tau d\tau. \quad (3.43)$$

Прибавляя к правой части (3.43) интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку $0 = i \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}^*(\omega) \sin \omega \tau d\tau$, получим комплексную форму спектрального разложения корреляционной функции стационарного случайного процесса:

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.44)$$

При $\tau = 0$ из (3.44)

$$D_{\xi} = K_{\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}^*(\omega) d\omega. \quad (3.45)$$

Спектральная плотность $S_{\xi}^*(\omega)$ стационарного случайного процесса (3.38) даёт распределение его дисперсии по всем значениям угловых скоростей ω вращения комплексного вектора $e^{i\omega t}$, как положительных, так и отрицательных, при этом

$$S_{\xi}^*(\omega) + S_{\xi}^*(-\omega) = S_{\xi}(|\omega|). \quad (3.46)$$

В практических приложениях чаще применяется комплексная форма спектрального разложения стационарного процесса:

$$\xi(t) = m_{\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.47)$$

в которой каждая гармоника представлена двумя слагаемыми: $C(\omega)e^{i\omega t} d\omega$ и $C(-\omega)e^{-i\omega t} d\omega$. Дисперсия этой гармоники делится поровну между этими слагаемыми. Значения случайной функции $C(\omega)$ при различных значениях частоты не коррелированы. Ее ковариационная функция

$$K_C(\omega_1, \omega_2) = S_{\xi}^*(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (3.48)$$

пропорциональна δ -функции и спектральной плотности.

3.3. Векторный стационарный случайный процесс и его характеристики

Пусть $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{t}) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))^T$ – векторный случайный процесс. Математическим ожиданием векторного случайного процесса $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{t})$ называется вектор-функция, компонентами которой являются математические ожидания соответствующих компонент процесса

$$m_{\xi}(t) = M[\boldsymbol{\xi}(t)] = (M[\xi_1(t)], M[\xi_2(t)], \dots, M[\xi_n(t)])^T. \quad (3.49)$$

Наряду со случайным процессом $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{t})$ удобно рассматривать центрированный случайный процесс

$$\boldsymbol{\xi}^0(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{t}) - M[\boldsymbol{\xi}(t)]. \quad (3.50)$$

Очевидно, что
$$M \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\xi}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.51)$$

Звездочкой будем обозначать операцию транспонирования с одновременным переходом к комплексно-сопряженным значениям так, что $\xi^*(t) = \overline{\xi}^T(t) = (\overline{\xi}_1(t), \dots, \overline{\xi}_n(t))$. Умножение центрированного столбца $\boldsymbol{\xi}^0(\mathbf{t})$ на центрированную строку $\xi^{*0}(t_2)$ дает квадратную матрицу

$$\boldsymbol{\xi}^0(\mathbf{t}) \xi^{*0}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1^0(t_1) \overline{\xi}_1^0(t_2) & \dots & \xi_1^0(t_1) \overline{\xi}_n^0(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \xi_n^0(t_1) \overline{\xi}_1^0(t_2) & \dots & \xi_n^0(t_1) \overline{\xi}_n^0(t_2) \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

со случайными компонентами. Математическое ожидание этой матрицы есть квадратная матрица из математических ожиданий. Она называется ковариационной матричной функцией $K_{\xi}(t_1, t_2)$ случайного процесса $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{t})$. Таким образом, по определению,

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = M[\boldsymbol{\xi}^0(\mathbf{t}) \xi^{*0}(t_2)]. \quad (3.53)$$

На диагонали ковариационной матричной функции стоят ковариационные функции соответствующих компонент случайного

процесса, а на пересечении i -й строки и j -го столбца – взаимная ковариационная функция i -й и j -й компонент случайного процесса

$$M[\xi_i(t_1) \overset{0}{\xi}_j(t_2)] = K_{\xi}^{ij}(t_1, t_2). \quad (3.54)$$

Из формулы (3.54) видно, что перестановка аргументов ковариационной матрицы равносильна транспонированию этой матрицы и переходу к комплексно-сопряженным значениям

$$K_{\xi}(t_2, t_1) = K_{\xi}^*(t_1, t_2). \quad (3.55)$$

Наряду с ковариационной матрицей $K_{\xi}(t_1, t_2)$ вторых центральных моментов векторного случайного процесса применяют матрицу вторых начальных моментов:

$$\Gamma_{\xi}(t_1, t_2) = M[\xi(t_1) \xi^*(t_2)]. \quad (3.56)$$

Установим связь между этими двумя матрицами. Так как

$\xi(t) = \overset{0}{\xi}(t) + m_{\xi}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \xi(t_1) \xi^*(t_2) &= \overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}^*(t_2) + m_{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}^*(t_2) + \\ &+ \overset{0}{\xi}(t_1) m_{\xi}^*(t_2) + m_{\xi}(t_1) m_{\xi}^*(t_2). \end{aligned}$$

Приравнивая математические ожидания правой и левой частей этого равенства, находим

$$\Gamma_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2) + m_{\xi}(t_1) m_{\xi}^*(t_2).$$

Векторный случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание не изменяется во времени, а ковариационная матрица зависит только от разности аргументов $\tau = t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} m_{\xi}(t) &= M[\xi(t)] = \text{const}, \\ K_{\xi}(t_1, t_2) &= K_{\xi}(\tau). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Следует обратить внимание на то, что у ковариационной функции стационарного векторного процесса только от τ зависят не только диагональные элементы, но и внедиагональные. Зависимость только от τ диагональных элементов обуславливает стационарность компонент векторного случайного процесса, зависи-

мость внедиагональных элементов – стационарность корреляционной связи между компонентами случайного процесса.

Исследование систем, в которых протекают стационарные процессы, значительно проще исследования систем с нестационарными процессами. Поэтому процессы во многих системах, насколько это возможно, пусть даже и приближенно, стремятся рассматривать как стационарные.

Для характеристики стационарного векторного случайного процесса $\xi(t)$ наряду с ковариационной матричной функцией $K_\xi(\tau)$ применяется спектральная плотность $S_\xi(\omega)$. Ковариационная матричная функция связана с соответствующей спектральной плотностью двусторонним преобразованием Фурье:

$$S_\xi^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.58)$$

(см. также формулу (2.19)),

$$K_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.59)$$

(см. также формулу (2.18)). Интегрирование матричных функций $K_\xi(\tau)$ и $S_\xi(\omega)$ в правых частях равенств (3.58) и (3.59) осуществляется покомпонентно.

Для стационарного векторного случайного процесса возможно спектральное разложение:

$$\xi(t) = m_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.60)$$

аналогичное разложению (3.47) скалярного случайного процесса.

Ковариационная матричная функция $K_C(\omega_1, \omega_2)$ векторной случайной функции $C(\omega)$ пропорциональна, как и в случае (3.48), δ -функции и матричной спектральной плотности:

$$K_C(\omega_1, \omega_2) = S_\xi(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (3.61)$$

Если компоненты стационарного векторного случайного процесса не коррелированы, то его матричные ковариационная функция и спектральная плотность диагональны.

3.4. Линейная стационарная непрерывная система и ее характеристики

В курсе теории автоматического управления рассматриваются линейные стационарные системы, уравнения состояния и выхода которых имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad (3.62)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор состояния, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$ – входной сигнал, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ – выходной сигнал, $A - n \times n$ – матрица системы, $B - n \times r$ – матрица входа, $C - m \times n$ – матрица выхода, $D - m \times r$ – матрица обхода системы.

Все эти четыре матрицы имеют постоянные элементы. Если эти элементы меняются с течением времени, то система перестает быть стационарной. Число компонент n вектора состояния называют *порядком* системы, число компонент r входного сигнала – *числом входов*, а число компонент m выходного сигнала – *числом выходов*.

$$\text{Например, система } x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = x \quad (3.63)$$

есть система второго порядка с одним входом и двумя выходами.

Характеристическим полиномом $P(\lambda)$ линейной стационарной системы (3.62) называется определитель матрицы $\lambda I - A$, где I – единичная матрица:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A). \quad (3.64)$$

Например, характеристический полином (3.63) в соответствии с этим определением имеет вид

$$P(\lambda) = \det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -2 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6. \quad (3.65)$$

Собственными числами линейной стационарной системы называются корни ее характеристического полинома, т.е. собственные числа матрицы системы $\lambda I - A$. Например, собственные числа (3.63) являются корнями полинома $\lambda^2 + 5\lambda + 6$ и равны: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$.

Уравнение состояния системы (3.62)

$$x' = Ax + Bu \quad (3.66)$$

есть система линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Если известно ее состояние в начальный момент $x(0) = x_0$ и входной сигнал $u = u(t)$ для $t > 0$, то состояние системы $x = x(t)$ может быть найдено для любого $t > 0$.

Применим преобразование Лапласа для решения уравнения состояния (3.66). Пусть

$$x(t) \cdot 1(t) \stackrel{*}{=} X(p) \quad \text{и} \quad u(t)1(t) \stackrel{*}{=} U(p) \quad (3.67)$$

– соответствия между оригиналами и их изображениями по Лапласу, в которых функция Хевисайда (единичного скачка, см. табл. 6 на с. 140, п. 1) обозначена через $1(t)$. По второй теореме о дифференцировании оригинала,

$$x'(t)1(t) \stackrel{*}{=} pX(p) - x_0. \quad (3.68)$$

Преобразуя (3.66) с учетом (3.67) и (3.68) по Лапласу и помня о линейности этого преобразования, получим

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p). \quad (3.69)$$

Перенесем столбец x_0 в правую часть (3.69), а произведение $AX(p)$ в левую:

$$pX(p) - AX(p) = x_0 + BU(p). \quad (3.70)$$

Вынесем столбец $X(p)$ вправо за скобки:

$$(pI - A)X(p) = x_0 + BU(p). \quad (3.71)$$

Умножим правую и левую части (3.71) слева на матрицу $(pI - A)^{-1}$:

$$X(p) = (pI - A)^{-1}x_0 + (pI - A)^{-1}BU(p). \quad (3.72)$$

Первое слагаемое в правой части (3.72) является изображением собственного движения системы, второе – изображением вынужденной составляющей. Преобразуем уравнение выхода $y = Cx + Du$ по Лапласу и подставим в него результат из (3.72):

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1}x_0 + [C(pI - A)^{-1}B + D]U(p). \quad (3.73)$$

Введем обозначение

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B + D \quad (3.74)$$

и запишем (3.73) в виде

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1}x_0 + W(p)U(p). \quad (3.75)$$

Матрица (3.74) называется *передаточной функцией* линейной стационарной системы. Знания этой матрицы достаточно для нахождения выходного сигнала по известному входному при $x_0 = 0$, так как в этом случае (3.75) принимает вид

$$Y(p) = W(p)U(p). \quad (3.76)$$

Как видно из (3.76), передаточная функция имеет столько строк, сколько у системы выходов, и столько столбцов, сколько входов. Найдем, например, передаточную функцию системы (3.63). Составим матрицу $pI - A = \begin{pmatrix} p+1 & 1 \\ -2 & p+4 \end{pmatrix}$. Матрица из алгебраических

дополнений этой матрицы имеет вид $\begin{pmatrix} p+4 & 2 \\ -1 & p+1 \end{pmatrix}$. Транспонируем матрицу из алгебраических дополнений и разделим её на определитель матрицы $pI - A$. В соответствии с (3.74)

$$W(p) = (pI - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{p+3}{p^2 + 5p + 6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После сокращения на множитель $p+3$ получаем $W(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+2} \\ \frac{1}{p+2} \end{pmatrix}$.

Поскольку система (3.63) имеет один вход и два выхода, ее передаточная функция – двухкомпонентный столбец.

Если система имеет один вход и один выход, то её передаточная функция имеет одну строку и один столбец. Например,

система $x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}u$, $y = (1 \ 0)x$ имеет передаточную

функцию

$$W(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+4 & -1 \\ 2 & p+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{p^2 + 5p + 6} = \frac{2p+7}{p^2 + 5p + 6}.$$

Элемент $W_{ij}(p)$ передаточной функции $W(p)$ (3.74), стоящий в i -й строке и j -м столбце, как это видно из (3.76), связывает j -й вход системы (3.62) с её i -м выходом. Этот элемент есть рациональная дробь, у которой степень числителя не превышает степень знаменателя. Знаменатель является либо характеристическим полиномом, либо полиномом меньшей степени, чем порядок системы, но имеющий своими корнями только ее собственные числа.

Линейная система (3.62) обладает свойством, в силу которого все её движения либо устойчивы по Ляпунову, либо неустойчивы. Это свойство позволяет говорить об устойчивости или неустойчивости системы, не выделяя какого-то конкретного её движения. Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (3.62) является отрицательность вещественных частей всех её собственных чисел. Например, система (3.63), имеющая собственными числами -2 и -3 , является асимптотически устойчивой.

Рассмотрим асимптотически устойчивую стационарную линейную систему (3.62) с передаточной функцией (3.74). Для простоты будем считать, что система имеет один вход и один выход, так что ее передаточная функция есть рациональная дробь:

$$W(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}, \quad (3.77)$$

полюсы которой $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ являются собственными числами (3.62). Найдем установившуюся реакцию этой системы на комплексное колебание

$$u(t) = e^{i\gamma t}. \quad (3.78)$$

Если положить $x_0 = 0$, что не влияет на окончательный результат, то по (3.76)

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{R(p)} \frac{1}{p - i\gamma} = \frac{Q(p)}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_k)(p - i\gamma)}. \quad (3.79)$$

Разложим дробь (3.79) на простейшие дроби, полагая для простоты, что среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ нет совпадающих:

$$Y(p) = \frac{L_1}{p - \lambda_1} + \frac{L_2}{p - \lambda_2} + \dots + \frac{L_k}{p - \lambda_k} + \frac{M}{p - i\gamma}, \quad (3.80)$$

где $M = W(i\gamma)$. Переход к оригиналу в (3.80) дает

$$y(t) = L_1 e^{\lambda_1 t} + L_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + L_k e^{\lambda_k t} + W(i\gamma) e^{i\gamma t}. \quad (3.81)$$

Поскольку рассматривается асимптотически устойчивая система, числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ имеют отрицательные действительные части и все экспоненты в правой части равенства (3.81), кроме последней, с течением времени затухают. Следовательно, установившийся выходной сигнал является комплексным колебанием вида

$$y_{\text{уст}}(t) = W(i\gamma) e^{i\gamma t} \quad (3.82)$$

с амплитудой $|W(i\gamma)|$ и начальной фазой $\arg W(i\gamma)$. Угловая скорость (круговая частота) γ этого колебания совпадает с угловой скоростью входного колебания.

В свете этого результата сужение передаточной функции $W(p)$ на мнимую ось называют *частотной характеристикой* линейной стационарной системы. Модуль $|W(i\omega)|$ частотной характеристики называют *амплитудной частотной характеристикой*, аргумент $\arg W(i\omega)$ – *фазовой частотной характеристикой*.

Пусть теперь асимптотически устойчивая линейная стационарная система имеет r входов, на которые поданы комплексные колебания одной частоты, но разных амплитуд и начальных фаз:

$$u(t) = (C_1, C_2, \dots, C_r)^T e^{i\gamma t} = C e^{i\gamma t}. \quad (3.83)$$

Тогда установившийся выходной сигнал будет иметь вид

$$y_{\text{уст}}(t) = W(i\gamma) C e^{i\gamma t}. \quad (3.84)$$

В более общем случае, когда $u(t) = \sum_{l=1}^q C(\gamma_l) e^{i\gamma_l t}$,

$$y_{\text{уст}}(t) = \sum_{l=1}^q W(i\gamma_l) C(\gamma_l) e^{i\gamma_l t}. \quad (3.85)$$

3.5. Преобразование стационарного случайного сигнала линейной стационарной непрерывной системой

Рассмотрим асимптотически устойчивую линейную стационарную систему, имеющую r входов и m выходов с уравнениями движения (3.62). Ее передаточная функция $W(p)$ (3.74) имеет m строк и r столбцов. Найдем установившийся выходной сигнал $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ этой системы, если на её входе стационарный векторный r -компонентный случайный процесс $\mathbf{u}(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_r(t))^T$.

Входной сигнал имеет спектральное разложение (3.60):

$$\xi(t) = \mathbf{m}_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.86)$$

в котором каждая гармоника представлена двумя слагаемыми:

$$C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{ и } C(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.87)$$

Ковариационная матричная функция (3.61) $K_C(\omega_1, \omega_2)$ векторной случайной функции $C(\omega)$ выражается через матричную спектральную плотность $S_\xi^*(\omega)$ входного сигнала и δ -функцию (см. также формулу (3.48)):

$$K_C(\omega_1, \omega_2) = S_\xi^*(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (3.88)$$

Каждой гармонике, представленной слагаемыми (3.87) во входном сигнале, будут отвечать в соответствии с (3.84) в установившемся выходном сигнале слагаемые

$$W(i\omega)C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{ и } W(-i\omega)C(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.89)$$

Столбец \mathbf{m}_ξ в правой части (3.86) можно рассматривать как комплексное колебание нулевой частоты, поэтому в установившемся выходном сигнале ему соответствует слагаемое $W(0)m_\xi$.

Таким образом, приходим к выводу, что установившийся выходной сигнал имеет следующее спектральное разложение:

$$y(t) = W(0)m_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega)C(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.90)$$

Математическое ожидание m_y выходного сигнала равно математическому ожиданию входного, умноженному слева на значение передаточной функции при $p = 0$, т.е. представляет собой первый член в (3.90):

$$m_y = W(0)m_\xi. \quad (3.91)$$

Запишем (3.90) в виде

$$y(t) = m_y + \int_{-\infty}^{\infty} C_y(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.92)$$

где $C_y(\omega) = W(i\omega)C(\omega)$, и найдем ковариационную матричную функцию $K_{C_y}(\omega_1, \omega_2)$ векторной случайной функции $C_y(\omega)$:

$$\begin{aligned} K_{C_y}(\omega_1, \omega_2) &= M[C_y(\omega_1)C_y^*(\omega_2)] = \\ &= M[W(i\omega_1)C(\omega_1)C^*(\omega_2)W^*(\omega_2)]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Вынося из-под знака математического ожидания неслучайные матрицы, получим

$$\begin{aligned} K_{C_y}(\omega_1, \omega_2) &= W(i\omega_1)M[C(\omega_1)C^*(\omega_2)]W^*(i\omega_2) = \\ &= W(i\omega_1)S_\xi^*(\omega_1)W^*(i\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Из (3.94) видно, как спектральная плотность выходного сигнала $S_y(\omega)$ выражается через спектральную плотность $S_\xi^*(\omega)$ входного:

$$S_y(\omega) = W(i\omega)S_\xi^*(\omega)W^*(i\omega). \quad (3.95)$$

Спектральная плотность установившегося выходного сигнала равна спектральной плотности входного, умноженной слева на частотную характеристику системы, а справа – на сопряженную частотную характеристику.

Рассмотрим часто встречающийся частный случай системы с одним входом и одним выходом, в котором передаточная функция имеет одну строку и один столбец. В этом случае множители в правой части (3.95) обладают коммутативным свойством:

$$S_y(\omega) = W(i\omega)W^*(i\omega)S_u(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_u(\omega). \quad (3.96)$$

Для системы с одним входом и одним выходом спектральная плотность установившегося выходного сигнала равна спектраль-

ной плотности входного, умноженной на квадрат амплитудной частотной характеристики системы.

Найдем, например, спектральную плотность установившегося выходного сигнала системы $x' = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $y = x$, на входе

которой – случайный сигнал с постоянной на всех частотах спектральной плотностью, равной единице. Вычислим определитель матрицы $pI - A$:

$$pI - A: \begin{vmatrix} p+2 & 3 \\ -3 & p+2 \end{vmatrix} = (p+2)^2 + 9. \text{ Обращаем матрицу}$$

$$pI - A: (pI - A)^{-1} = \frac{1}{(p+2)^2 + 9} \begin{pmatrix} p+2 & -3 \\ 3 & p+2 \end{pmatrix}. \text{ Находим переда-$$

$$\text{точную функцию: } W(p) = (pI - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+2)^2 + 9} \begin{pmatrix} p-1 \\ p+5 \end{pmatrix}. \text{ По}$$

формуле (3.95) получим

$$S_y(\omega) = \frac{1}{13 - \omega^2 + i4\omega} \begin{pmatrix} -1 + i\omega \\ 5 + i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - i\omega & 5 - i\omega \end{pmatrix} \frac{1}{13 - \omega^2 - i4\omega}.$$

Умножив столбец на строку и учитывая, что произведение сопряженных чисел равно квадрату их модуля, получим

$$S_y(\omega) = \frac{1}{(13 - \omega^2)^2 + 16\omega^2} \begin{pmatrix} 1 + \omega^2 & \omega^2 - 5 + i6\omega \\ \omega^2 - 5 - i6\omega & 25 + \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Лабораторная работа №1. Анализ линейной стационарной непрерывной системы в пакете Matlab

Рассмотрим линейную стационарную непрерывную систему с уравнениями движения

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 1 & -4 & -4 \\ 7 & -4 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

(см. формулу (3.62)).

Пусть на вход этой системы поступает стационарный случайный процесс с ковариационной функцией $K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$. В на-

шем примере примем $\sigma^2 = 2\pi$ и $\lambda = 1$. Спектральная плотность такого сигнала равна $S_u(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{2\lambda}{\omega^2 + \lambda^2}$ (см. формулы 5, 6 в табл. 5 на с. 138, 139).

Найдем спектральную плотность $S_y(\omega)$ установившегося выходного сигнала системы. Для этого сначала убедимся в том, что система асимптотически устойчива. Далее определим ее передаточную функцию $W(p)$ и частотную характеристику $W(i\omega)$. Наконец, вычислим спектральную плотность выходного сигнала по формуле $S_y(\omega) = W(i\omega)S_u(\omega)W^T(-i\omega)$. Поскольку вход u системы один и спектральная плотность входного сигнала – скаляр, эта плотность обладает свойством коммутативности с матрицей $W(i\omega)$. Отсюда следует, что в данном случае $S_y(\omega) = S_u(\omega)W(i\omega)W^T(-i\omega)$. В заключение построим график спектральной плотности первой компоненты выходного сигнала.

В данной лабораторной работе используются следующие подпрограммы системы Matlab:

1. zeros; 2. poly; 3. roots; 4. eye; 5. size; 6. inv; 7. simplify; 8. subs; 9. plot.

Результат действий этих подпрограмм и функций системы Matlab таков: zeros(n, m) – формирование массива (матрицы) нулей, при этом n – число строк, m – число столбцов; poly(A) – вычисление характеристического полинома матрицы A; roots(L) – вычисление корней полинома L (в данной лабораторной работе вычисляются корни характеристического полинома); eye(A) – формирование единичной матрицы; size(A) – определение размера массива (матрицы); inv(A) – вычисление обратной матрицы A^{-1} ; simplify(S) – упрощение каждого элемента символьного массива S; subs(S, OLD, NEW) – замещение свободных символов переменного OLD выражения S новыми символьными переменными или числовыми значениями из списка NEW; plot(x, y) – построение графика функции одного переменного $y = f(x)$ на плоскости.

В командном окне (Command Window) программы Matlab введем матрицы A, B, C, D , определяющие уравнения движения нашей системы, следуя следующим правилам (см. также [25]):

- 1) вводим элементы матрицы по строкам;
- 2) отделяем элементы строки друг от друга запятыми или пробелами;
- 3) печатаем точку с запятой, чтобы разделить строки матрицы;
- 4) весь список элементов вводимой матрицы заключаем в прямоугольные скобки;
- 5) если список не помещается в одной строке командного окна программы MATLAB, печатаем троеточие в конце строки, чтобы указать на продолжение в следующей строке.

Таким образом, печатаем:

```
» A=[1,-1,-7;1,-4,-4;7,-4,-10]
```

A =

```
1 -1 -7
1 -4 -4
7 -4 -10
```

Можно исключить вывод на экран матрицы, напечатав в конце списка элементов вводимой матрицы после прямоугольной скобки точку с запятой.

```
» B=[1;1;1]
```

B =

```
1
1
1
```

```
» C=[1,0,0;0,2,1]
```

C =

```
1 0 0
0 2 1
```

```
» D=zeros(2,1)
```

D =

```
0
0
```

Коэффициенты характеристического полинома системы получаем по формуле (3.64), последовательно выполняя команды:

```
» L=poly(A)
```

L =

```
1.0000 13.0000 60.0000 126.0000
```

Таким образом вычислен характеристический полином:

$P(\lambda) = \lambda^3 + 13\lambda^2 + 60\lambda + 126$. Алгебраическая проблема вычисления

корней полинома решается для пользователя пакета Matlab вводом в строку командного окна текста

```
» r=roots(L)
```

```
r =
```

```
-7.0000  
-3.0000 + 3.0000i  
-3.0000 - 3.0000i
```

Все три собственных числа системы имеют отрицательные вещественные части. Система асимптотически устойчива, и на ее выходе устанавливается с течением времени стационарный процесс, спектральную плотность которого мы вычисляем.

Определим в системе Matlab две символьные переменные p и ω [25]:

```
>> syms p omega
```

По формуле (3.74) $W(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$ строим последовательно передаточную функцию:

```
» H=p*eye(size(A))-A
```

```
H =
```

```
[ p-1, 1, 7]  
[ -1, p+4, 4]  
[ -7, 4, p+10]
```

```
>> H1 = inv(H);
```

```
>> W = C*H1*B+D;
```

```
>> WS = simplify(W)
```

```
WS =
```

```
[1/(p+7)]  
[3/(p+7)]
```

Выполним в передаточной функции, которая для нашей системы является двухкомпонентным столбцом, подстановку $p = i\omega$, т.е. найдём частотную характеристику:

```
>> WOmega = subs(WS, p, i*omega)
```

```
WOmega =
```

```
[ 1/(i*omega+7)]  
[ 3/(i*omega+7)]
```

Найдем сопряженную частотную характеристику $W^*(i\omega) = W^T(-i\omega)$:

```
>> WOmega1 = subs(WOmega, p, -i*omega)
```

```
WOmega1 =
```

```
[ 1/(-i*omega+7)]
[ 3/(-i*omega+7)]
» WOmega2=WOmega1.'
WOmega2 =
    [1/(-i*omega+7), 3/(-i*omega+7)]
```

Введем спектральную плотность входного сигнала $S_u(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.

```
>> Su = 2/(omega^2+1).
```

Найдём теперь амплитудную частотную характеристику, вычислим спектральную плотность $S_y(\omega)$ выходного сигнала по формуле (3.96) и выделим спектральную плотность его первой компоненты.

```
>> Spectr = WOmega*WOmega2
Spectr =
    [ 1/(i*omega+7)/(-i*omega+7), 3/(i*omega+7)/(-i*omega+7)]
    [ 3/(i*omega+7)/(-i*omega+7), 9/(i*omega+7)/(-i*omega+7)]
>> Sy = Su*Spectr
Sy =
    [ 2/(omega^2+1)/(i*omega+7)/(-i*omega+7),
      6/(omega^2+1)/(i*omega+7) / (-i*omega+7)]
    [ 6/(omega^2+1)/(i*omega+7)/(-i*omega+7),
      18/(omega^2+1)/(i*omega+7) / (-i*omega+7)]
>> Sy1 = Sy(1,1)
Sy1 =
    2/(omega^2+1)/(i*omega+7)/(-i*omega+7)
```

Наконец, построим график спектральной плотности выходного сигнала:

```
>> q = -10:0.3:10;
>> z = subs(Sy1,omega,q);
>> plot(q,z) (рис. 3.1)
```

Отметим, что при включении в систему Matlab пакета анализа и синтеза систем управления (Control System Toolbox) передаточную функцию можно найти, выполнив команды:

```
>> sys = ss(A,B,C,D);
>> Wtr = tf(sys)
```

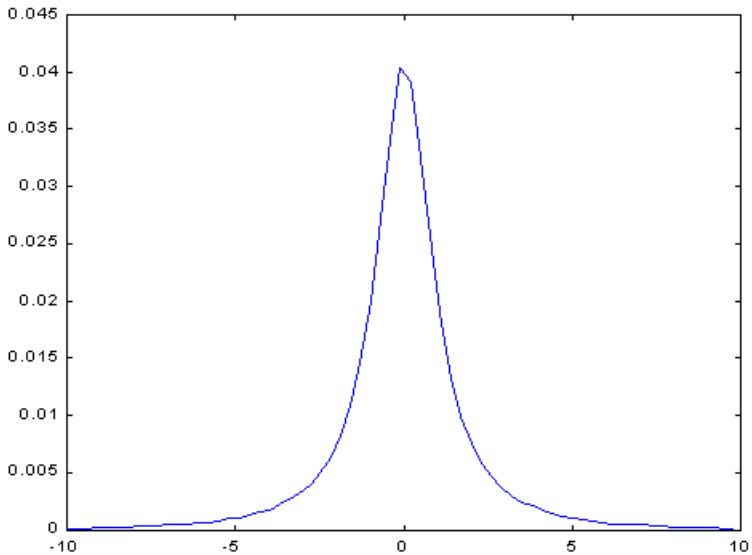


Рис. 3.1. График спектральной плотности выходного сигнала

Задание. В табл. 2 выбрать номер варианта, совпадающий с номером Вашей фамилии в журнале преподавателя. Найти спектральную плотность установившегося выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы с уравнениями движения $x' = Ax + Bu$, $y = Cx$ и построить график спектральной плотности первой компоненты этого сигнала. На вход системы подаётся стационарный случайный процесс с ковариационной функцией

$$K_u(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{2\lambda}{\omega^2 + \lambda^2}.$$

Т а б л и ц а 2

№ вар.	A	B	C	D	σ^2	λ
1	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	2π	1
2	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(1 \ 0 \ 0)$	(0)	4π	3

Продолжение табл. 2

№ вар.	A	B	C	D	σ^2	λ
3	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	6π	1
4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(1 \ 0 \ 0)$	(0)	8π	3
5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	10π	1
6	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 1 & -3 & -4 \\ 7 & -4 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(1 \ 0 \ 0)$	(0)	2π	3
7	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -8 \\ 2 & -4 & -5 \\ 8 & -5 & -10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	4π	1
8	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(1 \ 0 \ 0)$	(0)	2π	1
9	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	4π	3
10	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(1 \ 0 \ 0)$	(0)	6π	1
11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	8π	3
12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(1 \ 0 \ 0)$	(0)	10π	1

№ вар.	A	B	C	D	σ^2	λ
13	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 1 & -3 & -4 \\ 7 & -4 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	2π	3
14	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -8 \\ 2 & -4 & -5 \\ 8 & -5 & -10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(1 \ 0 \ 0)$	(0)	4π	1
15	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -9 \\ 3 & -5 & -6 \\ 9 & -6 & -11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	2π	3

Лабораторная работа № 1. Анализ линейной стационарной непрерывной системы в пакете Mathcad

Ход решения задачи абсолютно идентичен предыдущему, различия заключаются в названиях некоторых подпрограмм, а также способах обработки символьных данных, особенно входящих в матричные структуры.

Итак, решается система вида (3.62), корни характеристического многочлена которой, т.е. собственные числа матрицы A , находятся по формуле (3.64), а передаточная функция $W(p)$ имеет вид (3.74). Наконец, амплитудная характеристика выходного сигнала определяется формулой (3.96).

В системе Mathcad будут использованы следующие подпрограммы:

- 1) eigenvals, 2) identity, 3) cols, 4) XY plot,
- а также команды меню символьных вычислений:
- 5) упрощение выражений (simplify),
 - 6) подстановка переменной (substitute),
 - 7) оператор символьного вывода (\rightarrow),
 - 8) вычисление комплексных выражений (complex).

Используемые подпрограммы пакета Mathcad выполняют следующие действия: eigenvals(A) – вычисление собственных чисел матрицы A ; identity(n) – построение квадратной единичной матрицы размера n ; cols(A) – определение числа столбцов матрицы A ;

XY plot – построение плоского графика функции одного переменного $y = f(x)$.

Итоговая программа в пакете Mathcad может быть такой:

ORIGIN := 1

Ds := 2·π λ := 1 Ds = 6.283 λ = 1

$$S(\omega) := \frac{2 \cdot \lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 1 & -4 & -4 \\ 7 & -4 & -10 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r := \text{eigenvals}(A) \quad r = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 + 3i \\ -3 - 3i \end{pmatrix} \quad n := \text{cols}(A) \quad n = 3$$

$$H := \text{identity}(\text{cols}(A)) \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(p) := p \cdot H - A \quad H(p) \rightarrow \begin{pmatrix} p-1 & 1 & 7 \\ -1 & p+4 & 4 \\ -7 & 4 & p+10 \end{pmatrix}$$

$$H1(p) := H(p)^{-1}$$

$$H1(p) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{p^2 + 14 \cdot p + 24}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} & \frac{(-p) + 18}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} & \frac{(-24) - 7 \cdot p}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} \\ \frac{p - 18}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} & \frac{p^2 + 9 \cdot p + 39}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} & \frac{(-4) \cdot p - 3}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} \\ \frac{7 \cdot p + 24}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} & \frac{(-4) \cdot p - 3}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} & \frac{p^2 + 3 \cdot p - 3}{p^3 + 13 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 126} \end{bmatrix}$$

H1(p) simplify → такое же выражение, как в предыдущей строке

Видно, что выражение для обратной матрицы $H1(p)$ не изменилось при упрощении. Это значит, что либо задача вовсе не имеет аналитического решения, либо она оказывается слишком сложной для символьного процессора пакета Mathcad.

$$W(p) := C \cdot H1(p) \cdot B + D$$

$$W(p) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{p+7} \\ \frac{3}{p+7} \end{pmatrix}$$

$$i := \sqrt{-1}$$

$W(p)$ substitute, $p = i \cdot \omega \rightarrow$ очень длинное аналитическое выражение

$$W(i \cdot \omega) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-\left(6 \cdot i \cdot \omega + 18 - \omega^2\right)}{i \cdot \omega^3 + 13 \cdot \omega^2 - 60 \cdot i \cdot \omega - 126} \\ (-3) \cdot \frac{6 \cdot i \cdot \omega + 18 - \omega^2}{i \cdot \omega^3 + 13 \cdot \omega^2 - 60 \cdot i \cdot \omega - 126} \end{pmatrix}$$

$$W(i\omega) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega + 7} \\ \frac{3}{i\omega + 7} \end{pmatrix}$$

Символьный процессор пакета Mathcad не может упростить до конца выражение для $W(p)$ с подставленным значением $i \cdot \omega$. Если же упрощать по группе символов $i\omega$, получается нужный результат. Аналогично обстоит дело и с подстановкой $p = -i \cdot \omega$.

$W(p)$ substitute, $p = -i \cdot \omega \rightarrow$ очень длинное аналитическое выражение

$$W(-i\omega) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{i\omega - 7} \\ \frac{-3}{i\omega - 7} \end{pmatrix}$$

$$V1(\omega) := \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega + 7} \\ 3 \\ \frac{3}{i\omega + 7} \end{pmatrix} \quad V2(\omega) := \begin{pmatrix} \frac{-1}{i\omega - 7} \\ -3 \\ \frac{-3}{i\omega - 7} \end{pmatrix} \quad V3(\omega) := V2(\omega)^T$$

$$V3(\omega) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{i\omega - 7} & \frac{-3}{i\omega - 7} \end{pmatrix} \quad \text{Spectr}(\omega) := V1(\omega) \cdot V3(\omega)$$

$$\text{Spectr}(\omega) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7)} & \frac{-3}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7)} \\ \frac{-3}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7)} & \frac{-9}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7)} \end{bmatrix}$$

$$Sy(\omega) := S(\omega) \cdot \text{Spectr}(\omega)$$

$$Sy(\omega) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-2}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7) \cdot (1 + \omega^2)} & \frac{-6}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7) \cdot (1 + \omega^2)} \\ \frac{-6}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7) \cdot (1 + \omega^2)} & \frac{-18}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7) \cdot (1 + \omega^2)} \end{bmatrix}$$

$$Sy(\omega) \text{ complex} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{98}{(49 + \omega^2)^2} + 2 \cdot \frac{\omega^2}{(49 + \omega^2)^2} & \frac{294}{(49 + \omega^2)^2} + 6 \cdot \frac{\omega^2}{(49 + \omega^2)^2} \\ \frac{1}{1 + \omega^2} & \frac{1}{1 + \omega^2} \\ \frac{294}{(49 + \omega^2)^2} + 6 \cdot \frac{\omega^2}{(49 + \omega^2)^2} & \frac{882}{(49 + \omega^2)^2} + 18 \cdot \frac{\omega^2}{(49 + \omega^2)^2} \\ \frac{1}{1 + \omega^2} & \frac{1}{1 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

$$Sy1(\omega) := Sy(\omega)_{1,1}$$

$$S_{y1}(\omega) \rightarrow \frac{-2}{(i\omega + 7) \cdot (i\omega - 7) \cdot (1 + \omega^2)}$$

$$S_{y1}(\omega) \text{ complex} \rightarrow \frac{\frac{98}{(49 + \omega^2)^2} + 2 \cdot \frac{\omega^2}{(49 + \omega^2)^2}}{1 + \omega^2}$$

Форма графика функции спектральной плотности выходного сигнала (рис. 3.2) такая же, как в лабораторной работе №1, выполненной в пакете Matlab (см. рис. 3.1 на с. 96).

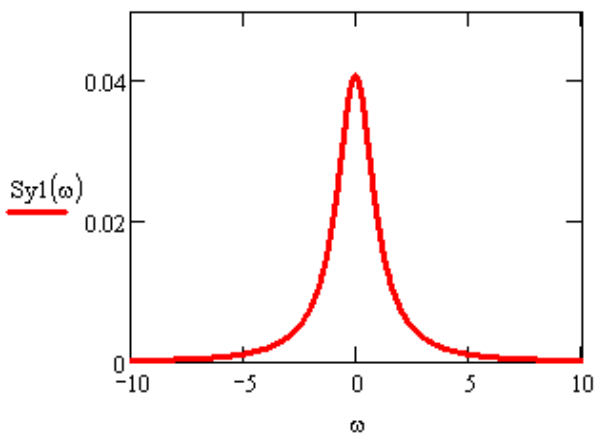


Рис. 3.2. Спектральная плотность выходного сигнала (3.62)

Задание. Задание определяется и выполняется аналогично тому, как указано на с. 96.

Лабораторная работа № 2. Вычисление дисперсии выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы при случайном воздействии в пакете Mathcad

Найдем дисперсию выходного сигнала системы $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $y = (1 \ 0)x$, на вход которой подаётся ста-

ционарный случайный процесс со спектральной плотностью, тождественно равной единице.

В окне приложения системы Mathcad формируем три матрицы A, B, C , определяющие параметры рассматриваемой системы:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C := (1 \ 0).$$

Сформируем также единичную матрицу размером \mathbb{Z} , определяемым порядком системы. Проверим устойчивость системы, для чего вычислим её собственные числа. Если собственные числа лежат левее мнимой оси комплексной плоскости, то это говорит об асимптотической устойчивости системы.

Система имеет один вход и один выход, поэтому ее передаточная функция содержит один столбец и одну строку. Последовательно по формуле $W(p) = C(pI - A)^{-1}B$ вычисляем передаточную функцию.

Таким образом, головная программа в пакете Mathcad имеет следующий вид.

$$\begin{aligned} & \text{ORIGIN} := 1 \\ & A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C := (1 \ 0) \\ & I := \text{identity}(2) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r := \text{eigenvals}(A) \quad r = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & M(p) := p \cdot I - A \quad M(p) \rightarrow \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p + 2 \end{pmatrix} \\ & N(p) := M(p)^{-1} \quad N(p) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{p + 2}{p^2 + 2 \cdot p + 1} & \frac{1}{p^2 + 2 \cdot p + 1} \\ \frac{-1}{p^2 + 2 \cdot p + 1} & \frac{p}{p^2 + 2 \cdot p + 1} \end{pmatrix} \\ & W(p) := C \cdot N(p) \cdot B \quad W(p) \rightarrow \frac{p + 2}{p^2 + 2 \cdot p + 1} + \frac{1}{p^2 + 2 \cdot p + 1} \end{aligned}$$

$$W(p) \text{ simplify} \rightarrow \frac{p+3}{p^2+2\cdot p+1} \quad i := \sqrt{-1}$$

$$W(p) \text{ substitute, } p = i \cdot \omega \rightarrow \frac{i \cdot \omega + 2}{(-\omega^2) + 2 \cdot i \cdot \omega + 1} + \frac{1}{(-\omega^2) + 2 \cdot i \cdot \omega + 1}$$

В передаточной функции выполняем подстановку $p = i\omega$ для вычисления комплекснозначной частотной характеристики $W(i\omega)$. Затем выполняем подстановку $p = -i\omega$ для вычисления сопряженной частотной характеристики $W(-i\omega)$:

$$W(i\omega) \text{ simplify} \rightarrow \frac{i\omega + 3}{i\omega^2 + 2 \cdot i\omega + 1}$$

$$W(p) \text{ substitute, } p = -i \cdot \omega \rightarrow \frac{(-i) \cdot \omega + 2}{(-\omega^2) - 2 \cdot i \cdot \omega + 1} + \frac{1}{(-\omega^2) - 2 \cdot i \cdot \omega + 1}$$

$$W(-i\omega) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-(i\omega - 3)}{i\omega^2 - 2 \cdot i\omega + 1}$$

Здесь ситуация аналогична той, что мы наблюдали в лабораторной работе №1, выполняемой в пакете Mathcad. Упрощение выполняется по группе символов $i\omega$ или $-i\omega$. Следовательно, приходится вводить истинные значения функций $V(\omega)$ и $V1(\omega)$, где символы i и ω соединены знаком умножения:

$$V(\omega) := \frac{i \cdot \omega + 3}{-\omega^2 + 2 \cdot i \cdot \omega + 1} \quad V1(\omega) := \frac{-i \cdot \omega + 3}{-\omega^2 - 2 \cdot i \cdot \omega + 1}$$

Вводим спектральную плотность входного сигнала и вычисляем спектральную плотность выходного:

$$Su := 1 \quad Sy(\omega) := V(\omega) \cdot Su \cdot V1(\omega)$$

$$Sy(\omega) \rightarrow \frac{i \cdot \omega + 3}{(-\omega^2) + 2 \cdot i \cdot \omega + 1} \cdot \frac{(-i) \cdot \omega + 3}{(-\omega^2) - 2 \cdot i \cdot \omega + 1}$$

Упрощаем отдельно числитель и знаменатель спектральной плотности выходного сигнала:

$$(3 + i \cdot \omega) \cdot (3 - i \cdot \omega) \text{ complex} \rightarrow \omega^2 + 9$$

$$(-\omega^2 + 2 \cdot i \cdot \omega + 1) \cdot (-\omega^2 - 2 \cdot i \cdot \omega + 1) \text{ complex} \rightarrow \omega^4 + 2 \cdot \omega^2 + 1$$

$$f1(\omega) := \omega^2 + 9 \quad f2(\omega) := \omega^4 + 2 \cdot \omega^2 + 1$$

$$f(\omega) := \frac{f1(\omega)}{f2(\omega)} \quad f(\omega) \rightarrow \frac{\omega^2 + 9}{\omega^4 + 2 \cdot \omega^2 + 1}$$

Вычислим дисперсию Dy выходного сигнала по формуле $Dy = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega$. Для этого найдем первообразную подынтегральной функции, а затем её значения на верхнем и нижнем пределах интегрирования:

$$\int f(\omega) d\omega \rightarrow 4 \cdot \frac{\omega}{1 + \omega^2} + 5 \cdot \text{atan}(\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(4 \cdot \frac{\omega}{1 + \omega^2} + 5 \cdot \text{atan}(\omega) \right) \rightarrow \frac{5}{2} \cdot \pi$$

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \left(4 \cdot \frac{\omega}{1 + \omega^2} + 5 \cdot \text{atan}(\omega) \right) \rightarrow \frac{-5}{2} \cdot \pi$$

Таким образом,

$$Dy := 2 \cdot \left(5 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad Dy = 15.708$$

Задание. В табл. 3 выбрать номер варианта, совпадающий с номером Вашей фамилии в журнале преподавателя. Найти диспер-

сию выходного сигнала системы $x' = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u$, $y = (1 \ 0)x$, на входе которой – белый шум единичной интенсивности.

Т а б л и ц а 3

№ варианта	1	2	3
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$
№ варианта	4	5	6
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$
№ варианта	7	8	9
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{pmatrix}$
№ варианта	10	11	12
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -9 \end{pmatrix}$
№ варианта	13	14	15
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -18 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -10 \end{pmatrix}$

Лабораторная работа № 2. Вычисление дисперсии выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы при случайном воздействии в пакете Matlab

Вычислим дисперсию выходного сигнала той же линейной системы $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u$, $y = (1 \ 0)x$, на вход которой подается белый шум, т.е. случайный процесс с постоянной спектральной плотностью, равной единице.

Так же как в предыдущей лабораторной работе № 1, нам придётся воспользоваться некоторым набором подпрограмм системы Matlab: poly(a), eye(A), size(A), roots(L), inv(A), simplify(S), subs(S), expand(S), int(R, x), limit(R, x, a). Первые семь из них уже рассмот-

рены в предыдущей работе, результат остальных таков: `expand(S)` раскрывает (и упрощает) каждый элемент символьного массива `S`; `int(R, x)` вычисляет неопределённый интеграл от функции `R` по переменной `x`; `limit(R, x, a)` находит предел функции `R(x)` при $x \rightarrow a$.

В соответствии с описанными в лабораторной работе № 1 правилами вводим следующую программу:

```

» A=[0,1;-1,-2]
A =
    0    1
   -1   -2
» B=[1;1]
B =
    1
    1
» C=[1,0]
C =
    1    0
» L=poly(A)
L =
    1    2    1
» r=roots(L)
r =
   -1
   -1
» syms p omega Sy2 Sy3 R
» M=p*eye(size(A))-A
M =
 [ p, -1]
 [ 1, p+2]
» N=inv(M)

N =
 [ (p+2)/(p^2+2*p+1),  1/(p^2+2*p+1)]
 [ -1/(p^2+2*p+1),  p/(p^2+2*p+1)]
» W=C*N*B
W =
(p+2)/(p^2+2*p+1)+1/(p^2+2*p+1)

```

```

» WS=simplify(W)
WS =
(p+3)/(p^2+2*p+1)
» W1=subs(WS,p,i*omega)
W1 =
(i*omega+3)/(-omega^2+2*i*omega+1)
» W2=subs(WS,p,-i*omega)
W2 =
(-i*omega+3)/(-omega^2-2*i*omega+1)
» W3=W2.'
W3 =
(-i*omega+3)/(-omega^2-2*i*omega+1)
» Su=1
Su =
1
» Sy=W1*Su*W3
Sy =
(i*omega+3)/(-omega^2+2*i*omega+1)*
*(-i*omega+3)/(-omega^2-2*i*omega+1)
» Sy1=simplify(Sy)
Sy1 =
(i*omega+3)*(i*omega-3)/(-omega^2+
+2*i*omega+1)/(omega^2+2*i*omega-1)
» p=expand(-(i*omega+3)*(i*omega-3))
p =
omega^2+9
» Sy2=expand((omega^2+2*i*omega-1)*(omega^2-
-2*i*omega-1))
Sy2 =
omega^4+2*omega^2+1
» Sy3=p/Sy2
Sy3 =
(omega^2+9)/(omega^4+2*omega^2+1)
» R=int(Sy3,omega)
R =
4*omega/(1+omega^2)+5*atan(omega)
» Sy2=limit(R,omega,inf,'left')
Sy2 =
5/2*pi

```

» $Sy_3 = \text{limit}(R, \omega, -\text{inf}, \text{'right'})$

$Sy_3 =$

$-5/2 * \pi$

» $Dy = Sy_2 - Sy_3$

$Dy =$

$5 * \pi$

Задание. Задание определяется и выполняется так, как указано на с. 105 и в табл. 3.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Общая характеристика методов моделирования случайных процессов

К настоящему времени разработан ряд методов моделирования случайных процессов $\xi(t)$ с различными заданными характеристиками. Все известные методы можно разбить на две большие группы: точные и приближённые. В точных методах отсутствует методическая ошибка по ковариационной функции; для приближённых методов равенство заданных и моделируемых характеристик случайных процессов выдерживается не точно, а с некоторой погрешностью. К сожалению, работ по анализу этих погрешностей мало, поэтому основным методом контроля приближённых алгоритмов остаётся статистическая обработка моделируемых реализаций.

Практические методы моделирования случайных процессов также делятся на несколько групп по разным признакам. Наиболее общими являются методы моделирования случайных процессов с заданной многомерной плотностью вероятности. Такая постановка задачи имеет важное значение, так как к ней может быть сведена любая другая задача. В практике моделирования наиболее часто моделируются процессы с заданными корреляционными свойствами. Эти методы являются основой цифрового моделирования случайных процессов.

Моделирование случайных процессов сводится к моделированию независимых случайных величин. В свою очередь моделирование независимых случайных величин с любыми законами распределения осуществляется с помощью датчиков случайных чисел.

В настоящее время в практике цифрового моделирования случайных процессов довольно часто используется около десятка алгоритмов: метод формирующего фильтра, метод скользящего суммирования, методы канонических и неканонических разложений, методы авторегрессии-скользящего среднего, метод условных распределений, метод Неймана и т.д.

4.2. Метод условных распределений

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ с заданной n -мерной плотностью вероятности $f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$. Совместная n -мерная плотность вероятности удовлетворяет следующим условиям:

1) положительности $f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \geq 0$;

2) нормировки

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n}_{n \text{ раз}} = 1; \quad (4.1)$$

3) согласованности

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_k, t_k) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_k, t_k, x_{k+1}, t_{k+1}, \dots, x_n, t_n)}_{n-k \text{ раз}} \times dx_{k+1} dx_{k+2} \dots dx_n, k < n$$

(см. также формулу (1.11)).

Цифровое моделирование случайного процесса $\xi(t)$, заданного n -мерной плотностью вероятности, является самым полным, так как любой случайный процесс может быть описан подобным образом, поэтому метод условных распределений применим для моделирования любых случайных процессов.

На практике метод применяется редко, потому что, во-первых, для многих, часто встречающихся случайных процессов, например нормальных, разработаны более эффективные алгоритмы; во-вторых, он требует численного вычисления многомерных интегралов, выражающих условные плотности распределений.

В общем виде $n \rightarrow \infty$, на практике чем больше n , тем детальнее статистическое описание случайного процесса $\xi(t)$. При заданном n случайный процесс $\xi(t)$ представляется случайным вектором $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, и моделирование случайного процесса можно рассматривать как моделирование случайного вектора с заданной многомерной плотностью вероятности.

Метод основан на определении условных одномерных распределений для каждого момента t_i случайного процесса $\xi(t_i), i = 1, 2, \dots, n$. Каждое значение $\xi(t_i)$ моделируется с помощью датчика случайных чисел, имеющего соответствующее (условное) распределение. Для первого отсчёта текущей реализации случайного процесса $\xi(t_1)$ на основе формулы (1.11) определяется безусловная плотность вероятности:

$$f_1(x_1, t_1) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1 \text{ раз}} f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n. \quad (4.2)$$

Для второго и последующих отсчётов текущей реализации определится условная одномерная плотность вероятности

$$f_2\left(x_2, t_2 / x_1, t_1\right) = \frac{f_{12}(x_1, t_1, x_2, t_2)}{f(x_1, t_1)}, \quad \text{где по формуле (1.11)}$$

$$f_{12}(x_1, t_1, x_2, t_2) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-2 \text{ раз}} f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_3 dx_4 \dots dx_n,$$

аналогично $f_3\left(x_3, t_3 / x_1, t_1, x_2, t_2\right) = \frac{f_{123}(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3)}{f_{12}(x_1, t_1, x_2, t_2)}$ и

$$f_{123}(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-3 \text{ раз}} f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_4 dx_5 \dots dx_n.$$

Очевидно, что для каждого очередного отсчёта условная плотность вероятности, определяемая таким же образом, будет равна:

$$f_k\left(x_k, t_k / x_1, t_1, \dots, x_{k-1}, t_{k-1}\right) = \frac{f_{12\dots k}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_k, t_k)}{f_{12\dots k-1}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_{k-1}, t_{k-1})}.$$

Во всех этих формулах значения величин, стоящих в знаменателях, определяются на предыдущих шагах.

Приведённые рекуррентные соотношения для условных плотностей используются для построения n датчиков случайных чисел с данными (условными) плотностями вероятностей. Каждый i -й датчик моделирует i -й отсчёт конкретной реализации $\xi(t_i)$ случайного процесса $\xi(t)$.

Многомерная плотность вероятности $f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$ выражается через условные плотности вероятностей следующим образом:

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = f_1(x_1, t_1) \cdot f\left(\frac{x_2, t_2}{x_1, t_1}\right) \cdot \dots \times \\ \times f\left(\frac{x_n, t_n}{x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}}\right). \quad (4.3)$$

Итак, метод условных распределений позволяет моделировать случайные процессы с произвольной многомерной плотностью вероятности $f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$. Следует иметь в виду, что на практике приходится вычислять интегралы, выражающие условные плотности вероятности $f_{12\dots k}$, причём часто эти интегралы не выражаются в конечном виде и их вычисляют численно. Это один из недостатков метода условных распределений. Второй недостаток – метод требует реализации n датчиков случайных чисел с несовпадающими распределениями f_1, f_2, \dots, f_n . В общем случае вид плотностей вероятностей $f(x_k, t_k / x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_{k-1}, t_{k-1})$ может меняться при смене текущей реализации, что ещё более усложняет практическое применение метода (третий недостаток).

Пример 16 [22]. Рассмотрим моделирование случайного процесса с двумерной функцией плотности

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2) = \frac{1}{4\pi L} \cdot \frac{(x_1 t_1)^2 + 4(x_2 t_2)^2 + (1/L)^2}{\left[(x_1 t_1)^2 + (x_2 t_2)^2 + (1/L)^2 \right]^{5/2}}, L > 0.$$

Определим безусловную плотность вероятности для первого отсчёта t_1 :

$$f(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_2 = \\ = \frac{1}{4\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 t_1)^2 + 4(x_2 t_2)^2 + (1/L)^2}{\left[(x_1 t_1)^2 + (x_2 t_2)^2 + (1/L)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} dx_2.$$

Неопределённый интеграл этого типа принадлежит к классу интегралов вида $\int R\left(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}\right) dt$. Он рационализируется и приводится к интегралу от тригонометрических функций вида $\int R(\sin z, \cos z) dz$ соответствующей подстановкой:

$$f(x_1, t_1) = \left\langle (x_1 t_1) + \left(\frac{1}{L}\right)^2 = a^2 \right\rangle = \frac{1}{4\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 + 4(x_2 t_2)^2}{\left[a^2 + (x_2 t_2)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} dx_2 = \\ = \left\langle \begin{array}{l} x_2 = \frac{a}{t_2} \operatorname{tg} z, \\ dx_2 = \frac{a}{t_2} \cdot \frac{dz}{\cos^2 z} \end{array} \right\rangle = \frac{a}{4\pi L t_2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 + 4(\operatorname{atg} z)^2}{\left[a^2 + (\operatorname{atg} z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{dz}{\cos^2 z} = \\ = \frac{a}{4\pi L t_2 a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 4\operatorname{tg}^2 z}{\left[1 + \operatorname{tg}^2 z \right]^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{a}{4\pi L t_2 a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos z (\cos^2 z + \\ + 4 \sin^2 z) dz = \frac{a}{\pi L t_2 a^2} = \frac{1}{\pi L t_2 \left[(x_1 t_1)^2 + (1/L)^2 \right]} = \\ = \frac{1}{\pi t_2} \cdot \frac{1}{(L x_1 t_1)^2 + 1} = \frac{1}{t_1 t_2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1/L t_1}{x_1^2 + (1/L t_1)^2}.$$

Полученное распределение является распределением Коши, для которого $f(x) = \frac{\lambda}{\pi [\lambda^2 + (x - \mu)^2]}$, где μ – параметр положения, а $\lambda > 0$ – параметр рассеивания. В нашем случае $\mu = 0$, $\lambda = \frac{1}{L t_1}$, присутствует ещё множитель $\frac{1}{t_1 t_2}$.

Воспользуемся методом *обращения (обратной функции)* для моделирования случайной компоненты $\xi(t_1)$. Здесь каждая компонента моделируется как скалярная величина [23]. Найдём функцию распределения $F(x_1, t_1)$:

$$\begin{aligned} F(x_1, t_1) &= \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, t_1) dx_1 = \frac{1}{\pi t_1 t_2} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{Lt_1} dx_1 = \\ &= \frac{1}{\pi t_1 t_2} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{d(Lt_1 x_1)}{1 + (Lt_1 x_1)^2} = \frac{1}{\pi t_1 t_2} \operatorname{arctg}(Lt_1 x_1) \Big|_{-\infty}^{x_1} = \\ &= \frac{1}{t_1 t_2} \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(Lt_1 x_1) + \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Используя выражение для $F(x_1, t_1)$, получим моделирующий алгоритм для $\xi(t_1)$ методом обращения. Пусть $\gamma_1 \in R(0,1)$, тогда, по методу обратной функции,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{t_1 t_2} \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(Lt_1 x_1) + \frac{1}{2} \right], \gamma_1 t_1 t_2 - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(Lt_1 x_1), \xi(t_1) = x_1 = \frac{1}{Lt_1} \operatorname{tg} \left[\pi \left(\gamma_1 t_1 t_2 - \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Условная плотность вероятности x_2 , т.е. второго отсчёта случайного процесса $\xi(t_2)$, будет равна:

$$\begin{aligned} f\left(x_2, t_2 \middle/ x_1, t_1\right) &= \frac{f(x_1, t_1, x_2, t_2)}{f(x_1, t_1)} = \\ &= \frac{1}{4\pi L} \cdot \frac{\left[(x_1 t_1)^2 + 4(x_2 t_2)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2 \right] \cdot t_1 t_2 \pi \left[x_1^2 + \left(\frac{1}{Lt_1}\right)^2 \right]}{\left[(x_1 t_1)^2 + (x_2 t_2)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2 \right]^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{Lt_1}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t_2}{4} \cdot \frac{\left[(x_1 t_1)^2 + 4(x_2 t_2)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2 \right] \cdot \left[(x_1 t_1)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2 \right]}{\left[(x_1 t_1)^2 + (x_2 t_2)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} = \\
&= \left\langle (x_1 t_1)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2 = a^2, \right\rangle = \frac{t_2}{4} \cdot \frac{a^2 \left[a^2 + 4(x_2 t_2)^2 \right]}{\left[a^2 + (x_2 t_2)^2 \right]^{\frac{5}{2}}},
\end{aligned}$$

где $a^2 = (x_1 t_1)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2$, $a = \sqrt{\left[\xi(t_1)t_1\right]^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2}$.

Для моделирования $\xi(t_2)$ найдём $F\left(x_2, t_2 / x_1, t_1\right)$.

$$\begin{aligned}
F\left(x_2, t_2 / x_1, t_1\right) &= \int_{-\infty}^{x_2} f\left(x_2, t_2 / x_1, t_1\right) dx_2 = \\
&= \frac{a^2 t_2}{4} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{4(x_2 t_2)^2 + a^2}{\left[a^2 + (x_2 t_2)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} dx_2 = \left\langle \begin{array}{l} x_2 = \frac{a}{t_2 \operatorname{tg} z}, \\ dx_2 = \frac{a}{t_2} \cdot \frac{dz}{\cos^2 z}, \\ z = \operatorname{arctg} \frac{x_2 t_2}{a}. \end{array} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x_2 t_2}{a}\right)\right) + \sin^3\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x_2 t_2}{a}\right)\right) \right] \Big|_{-\infty}^{x_2} = \\
&= \frac{1}{4} \left(\sin z + \sin^3 z + 2 \right).
\end{aligned}$$

Воспользуемся вновь методом обращения. Пусть $\gamma_2 \in R(0,1)$, тогда $\sin^3 z + \sin z = 4\left(\gamma_2 - \frac{1}{2}\right)$. Данное кубическое уравнение относительно z может быть решено по формулам Кардано. Напомним

их: решение кубического уравнения $y^3 + 3py + 2q = 0$ зависит от значения дискриминанта $D = q^2 + p^3$. Если $D > 0$, то имеется один действительный и два комплексных корня. В нашем случае $\sin z = y$, $p = \frac{1}{3}$, $q = -2\left(\gamma_2 - \frac{1}{2}\right)$, $D = (2\gamma_2 - 1)^2 + \frac{1}{27} > 0$. Находим един-

ственный действительный корень $y = u + v$, $u = \left(2\gamma_2 - 1 + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}$, $v = \left(2\gamma_2 - 1 - \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}$, т.е. $z = \arcsin y$, $\operatorname{arctg} \frac{x_2 t_2}{a} = \arcsin y$,

$$x_2 t_2 = \operatorname{atg}(\arcsin y) = \operatorname{atg} \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right) = \frac{ay}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Сведём воедино все формулы, решающие поставленную задачу:

$$\gamma_1 \in R(0,1), \quad \xi(t_1) = \frac{1}{Lt_1} \operatorname{tg} \left[\pi \left(\gamma_1 t_1 t_2 - \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$\gamma_2 \in R(0,1), \quad a = \sqrt{[\xi(t_1)t_1]^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2},$$

$$p = \frac{1}{3}, \quad q = -2\left(\gamma_2 - \frac{1}{2}\right), \quad D = (2\gamma_2 - 1)^2 + p^3,$$

$$u = \left(2\gamma_2 - 1 + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad v = \left(2\gamma_2 - 1 - \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y = u + v,$$

$$\xi(t_2) = \frac{ay}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Смоделируем теперь средствами пакета Mathcad 10 отсчётов в моменты $t_1 = 2$ и $t_2 = 5$ разобранного примера. Это можно сделать, например, следующим образом:

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad L := 1.5 \quad t1 := 2 \quad t2 := 5$$

```

SLPROC(L,n,t1,t2) := | p ← 0.3333
                      | π ← 3.1415
                      | for i ∈ 1..n
                      |   γ1 ← rnd(1)
                      |   ξ1i ←  $\frac{1}{L \cdot t1} \cdot \tan\left[\pi \cdot \left(\gamma1 \cdot t1 \cdot t2 - \frac{1}{2}\right)\right]$ 
                      |   γ2 ← rnd(1)
                      |   a ←  $\sqrt{\left(\xi1i \cdot t1\right)^2 + \frac{1}{L^2}}$ 
                      |   q ←  $-2 \cdot \left(\gamma2 - \frac{1}{2}\right)$ 
                      |   D ←  $(2 \cdot \gamma2 - 1)^2 + p^2$ 
                      |   u ←  $2 \cdot \gamma2 - 1 + \sqrt{D}$ 
                      |   a1 ← 1
                      |   a1 ← -1 if u < 0
                      |   u ← a1 ·  $|u|^{\frac{1}{3}}$ 
                      |   v ←  $2 \cdot \gamma2 - 1 - \sqrt{D}$ 
                      |   a1 ← 1
                      |   a1 ← -1 if v < 0
                      |   v ← a1 ·  $|v|^{\frac{1}{3}}$ 
                      |   y ← u + v
                      |   ξ2i ← a ·  $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 
                      |    $\begin{pmatrix} \xi1 \\ \xi2 \end{pmatrix}$ 

```

ξ1 := SLPROC(L, 10, t1, t2)₁

ξ2 := SLPROC(L, 10, t1, t2)₂

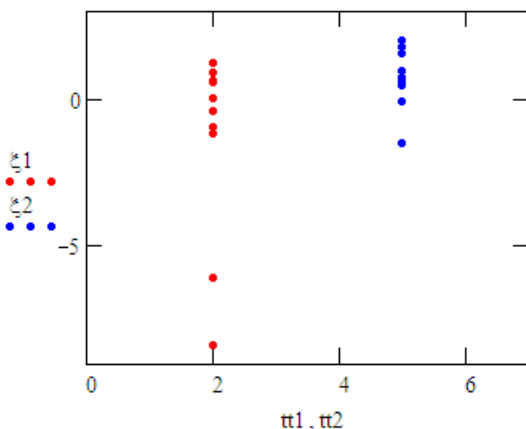
i := 1..10 tt1_i := t1 tt2_i := t2

tt1 =	1	2
	2	2
	3	2
	4	2
	5	2
	6	2
	7	2
	8	2
	9	2
	10	2

tt2 =	1	5
	2	5
	3	5
	4	5
	5	5
	6	5
	7	5
	8	5
	9	5
	10	5

ξ1 =	1	-8.351
	2	0.654
	3	-0.383
	4	-0.976
	5	1.205
	6	0.881
	7	-1.158
	8	-6.064
	9	8.108·10 ⁻³
	10	0.576

ξ2 =	1	1.539
	2	-0.074
	3	0.56
	4	2.008
	5	0.754
	6	0.468
	7	-1.494
	8	1.757
	9	0.979
	10	0.462



4.3. Метод отбора (Неймана)

Рассмотрим сначала идею этого метода при моделировании одномерной случайной величины X . Пусть f_{\max} – максимальное значение функции плотности на интервале $[a, b]$, причём $X \in [a, b]$, т.е. используется усечённое распределение случайной величины X . Датчиком случайных чисел получим пару стандартных равномерно распределённых чисел $x_i, x_{i+1} \in R(0,1)$, с помощью которых найдём $x'_i = a + (b - a)x_i, x'_{i+1} = f_{\max} \cdot x_{i+1}$. Если те-

перь $x'_{i+1} \leq f(x'_i)$, то в качестве реализации случайной величины X с функцией плотности $f(x)$ можно взять число x'_i , если же $x'_{i+1} > f(x'_i)$, то полученная пара x'_i и x'_{i+1} отбраковывается.

Справедливость такого подхода очевидна из рис. 4.1. Действительно, пару чисел x'_i и x'_{i+1} можно рассматривать как координаты случайной точки плоскости, равномерно распределённой внутри прямоугольника $acdb$. Пары x'_i и x'_{i+1} , удовлетворяющие условию $x'_{i+1} \leq f(x'_i)$, – это координаты точки плоскости, расположенной под кривой $f(x)$. Вероятность попадания такой точки в полосу от x до $x + \Delta x$ пропорциональна $f(x)$, а вероятность попадания под всю кривую $f(x)$ равна единице.

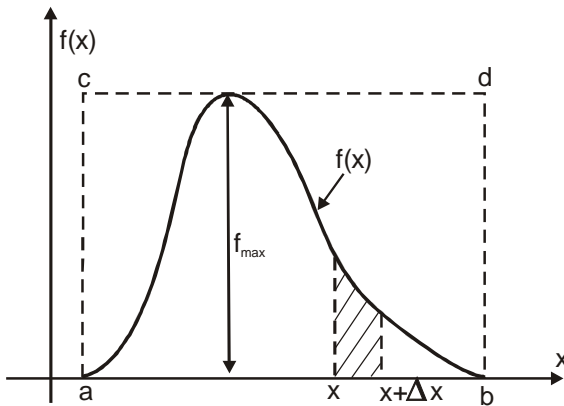


Рис. 4.1. Графическая иллюстрация идеи метода отбора

Для случайного процесса $\xi(t)$ с функцией плотности $f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$ необходимо задать или найти область определения компонент $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, т.е. области $\xi_i \in (a_i, b_i)$. По аналогии с одномерным случаем для формирования реализации случайного процесса необходимо $n + 1$ равномерно распределённое случайное число, причём n чисел должны быть равномерно распределены в интервалах $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, а $n + 1$ -е число –

в интервале $(0, f_{\max})$. Сначала получим стандартные равномерно распределённые случайные величины $x_i \in R(0,1), i = \overline{1, n+1}$, по этим исходным данным определим величины $\xi_i^{(k)} = a_i + (b_i - a_i)x_i, i = \overline{1, n}, \xi_{n+1}^{(k)} = f_{\max} \cdot x_{n+1}$.

Пусть $\bar{\xi}^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)})^T$ – n -мерный случайный вектор, причём k – номер его реализации, зависящий от t . Точка $\bar{\xi}^{(k)}$ принимается в качестве реализации случайного процесса $\xi(t)$ с n -мерной плотностью вероятности $f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$, если $f(\bar{\xi}^{(k)}) \geq \xi_{n+1}^{(k)}$, и отбраковывается, если $f(\bar{\xi}^{(k)}) < \xi_{n+1}^{(k)}$. При браковке точки $\bar{\xi}^{(k)}$ происходит переход к новому шагу и индекс k увеличивается на единицу. Таким образом, здесь моделируются случайные точки $n+1$ -мерного пространства, равномерно распределённые в объёме под гиперповерхностью $z = f(\bar{\xi}^{(k)})$.

Как и все без исключения методы моделирования случайных процессов, метод отбора обладает достоинствами и недостатками. Достоинствами являются простота реализации и программирования, а также отсутствие всяких предварительных расчётов в противоположность, например, методу условных распределений. Основной недостаток метода – работа «вхолостую» в том случае, когда нарушается условие $f(\bar{\xi}^{(k)}) \geq \xi_{n+1}^{(k)}$. Это приводит к избыточному обращению к датчикам случайных чисел и увеличивает время работы программы.

4.4. Моделирование случайных процессов с заданными корреляционными свойствами

С практической точки зрения получение возможных значений случайного процесса $\xi(t)$ в рамках заданной корреляционной теории оказывается более простой задачей. Методы этой теории применимы в тех случаях, в которых достаточно обеспечить лишь заданную матрицу корреляционных моментов случайных векторов.

Всё дело в том, что ненормальные случайные процессы часто появляются в результате некоторых преобразований нормальных. Кроме того, законы распределения ненормальных случайных процессов очень трудно получить и теоретически и экспериментально. На практике при моделировании негауссовского случайного процесса может быть известна лишь его корреляционная функция, так как при моделировании по экспериментальным данным корреляционные моменты определяются значительно проще и надёжнее. Так как в данных условиях многомерные законы распределения неизвестны, моделирование случайных процессов имеет смысл лишь в рамках корреляционной теории.

4.4.1. Метод формирующего фильтра. Формирующим фильтром называется динамическая система, преобразующая абсолютно случайный процесс $\eta(t)$ (белый шум) в случайный процесс $\xi(t)$ с заданными статистическими характеристиками. На рис. 4.2 представлена схема аналогового формирующего фильтра, когда из белого шума $\eta(t)$ на входе получают случайный процесс $\xi(t)$ с заданной ковариационной матрицей $K_\xi(\tau)$ и спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$. Характеристикой формирующего фильтра является передаточная функция $K(p)$, которая может быть найдена по ковариационной функции $K_\xi(\tau)$ и (или) по спектральной плотности $S_\xi(\omega)$ нужного случайного процесса $\xi(t)$.

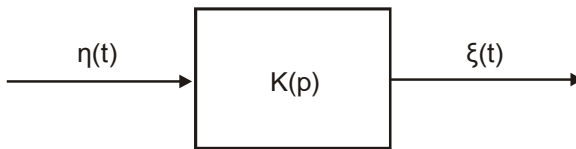


Рис. 4.2. Схема формирующего фильтра

Например, так как характеристики белого шума (см. подразд. 2.4) $K_\xi(t) = c\delta(\tau)$, $S_\xi(\omega) = \frac{c}{2\pi} = S_0$, то, предполагая процесс $\eta(t)$ гауссовским с $M[\eta(t)] = 0$, получим [22] $K(p) = \frac{S(p)}{\sqrt{S_0}}$.

В современной литературе известно несколько разных методов вычисления передаточной функции. В соответствии со способом вычисления $K(p)$ метод моделирования случайного процесса $\xi(t)$ имеет то или иное название (см., например, п. 4.4.2).

В общем случае методы вычисления передаточной функции довольно сложны, некоторые из них приводят к решению систем дифференциальных уравнений, другие – нелинейных алгебраических уравнений, третьи используют разложение спектральной функции в ряд Фурье, в четвёртых применяется метод *факторизации*, т.е. метод разложения спектральной функции на множители, один из которых равен передаточной функции формирующего фильтра.

Рассмотрим теперь несколько случаев общей идеи формирующего фильтра, наиболее употребительных и простых с вычислительной точки зрения.

4.4.2. Метод скользящего суммирования. Задачу цифрового моделирования случайных процессов с помощью скользящего суммирования можно рассматривать как задачу синтеза линейного дискретного формирующего фильтра, преобразующего дискретный белый шум в коррелированный дискретный случайный процесс с заданными статистическими характеристиками.

Пусть $\xi(n)$ – последовательность значений случайного процесса $\xi(t)$ в точках $t_n = n\Delta t$. Оператор скользящего суммирования есть линейный оператор преобразования:

$$\xi(n) = \sum_{k=0}^N c_k x(n-k), \quad (4.4)$$

где $x(k) \in N(0,1)$ – отсчёты белого шума, c_k – коэффициенты цифрового фильтра. В силу линейности преобразования (4.4) последовательность $\xi(n)$ будет также нормальным случайным процессом.

Название «метод скользящего суммирования» отражает суть формулы (4.4), так как значения $\xi(n)$ вычисляются как взвешенная сумма входных отсчётов $x(k)$ в сдвигающемся окне отсчётов $(n-N), (n-N+1), \dots, n$. Коррелированность случайных величин $\xi(n)$, $\xi(n+k)$ обеспечивается за счёт того, что в их образовании участвуют k общих случайных величин последовательности $x(n)$.

При $k = N$ значения $\xi(n)$ и $\xi(n+k)$ становятся некоррелированными. Характер корреляционной связи зависит только от значений коэффициентов c_k .

Так как ковариационная функция последовательности $x(n)$ имеет вид

$$K_x(n) = M[x(k)x(k+n)] = \delta_n = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 0, n \neq 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

то значения ковариационной функции $K_\xi(t)$ в точках $t_n = n\Delta t$, вычисленные с использованием формулы (4.4), будут равны:

$$\begin{aligned} K_\xi(0) &= M[\xi(k)\xi(k)] = M\left[\sum_{k=0}^N c_k x(k) \sum_{k=0}^N c_k x(k)\right] = \\ &= M\left\{[c_0 x(0) + c_1 x(1) + \dots + c_N x(N)] \cdot [c_0 x(0) + c_1 x(1) + \dots + c_N x(N)]\right\} = \\ &= M\left\{c_0^2 x(0)x(0) + c_0 x(0)c_1 x(1) + \dots + c_0 x(0)c_N x(N) + c_1 x(1)c_0 x(0) + \right. \\ &\quad + c_1^2 x(1)x(1) + \dots + c_1 x(1)c_N x(N) + \dots + c_N x(N)c_0 x(0) + \\ &\quad \left. + c_N x(N)c_1 x(1) + \dots + c_N^2 x(N)x(N)\right\} = c_0^2 M[x(0)x(0)] + \\ &\quad + c_0 c_1 M[x(0)x(1)] + \dots + c_N^2 M[x(N)x(N)] = c_0^2 \cdot 1 + c_0 c_1 \cdot 0 + \\ &\quad + \dots + c_N^2 \cdot 1 = \sum_{k=0}^N c_k^2. \end{aligned}$$

Аналогично другие индексы:

$$K_\xi(1) = c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{N-1} c_N,$$

$$K_\xi(2) = c_0 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{N-3} c_{N-1}, \dots,$$

$$K_\xi(k) = c_0 c_k + c_1 c_{k+1} + \dots + c_{N+1} c_{N-k+1}, \dots,$$

$$K_\xi(N-1) = c_0 c_{N-1} + c_1 c_N, \quad K_\xi(N) = c_0 c_N, \quad K_\xi(N+1) = 0,$$

где $K_\xi(n) = K_\xi(n\Delta t)$.

Итак, между коэффициентами линейного фильтра (4.4) c_k и значениями ковариационной функции $K_\xi(\tau)$ в точках отсчётов $t_n = n\Delta t$ существуют следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\xi}(0) = \sum_{k=0}^N c_k^2 = c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_N^2, \\ K_{\xi}(1) = c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{N-1} c_N, \\ K_{\xi}(2) = c_0 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{N-3} c_{N-1}, \\ \dots\dots\dots \\ K_{\xi}(k) = c_0 c_k + c_1 c_{k+1} + \dots + c_{N-k+1} c_{N+1}, \\ \dots\dots\dots \\ K_{\xi}(N-1) = c_0 c_{N-1} + c_1 c_N, \\ K_{\xi}(N) = c_0 c_N. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Таким образом, очевидным способом синтеза дискретного цифрового фильтра, моделирующего случайный процесс $\xi(t)$ с заданной ковариационной матрицей $K_{\xi}(\tau)$ и математическим ожиданием $M[\xi(t)] = 0$, является получение коэффициентов c_k из решения нелинейной системы алгебраических уравнений (4.6).

После того как коэффициенты c_k вычислены, реализации случайного процесса в моменты $t_n = n\Delta t$ осуществляются по формуле (4.4).

Рассмотренный метод пригоден для моделирования гауссовских процессов с произвольными спектральными плотностями, однако он является приближенным, имеющим методическую погрешность, которая зависит от числа учитываемых коэффициентов c_k в формуле (4.4). Его целесообразно применять при известной ковариационной функции $K_{\xi}(\tau)$ нормального случайного процесса $\xi(t)$.

4.4.3. Метод авторегрессии-скользящего среднего. Для моделирования нормальных случайных процессов можно использовать и рекуррентные алгоритмы. Этот метод основан на уравнении авторегрессии-скользящего среднего:

$$\xi(n) = \sum_{k=0}^l a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^m b_k \xi(n-k). \quad (4.7)$$

В данном случае вид ковариационной функции случайного процесса определяется набором значений параметров a_k и b_k ,

а также их количеством. Параметры a_k и b_k определяются на этапе подготовки к моделированию. Уравнение (4.7), так же как и в предыдущем случае (см. п. 4.4.2), описывает некоторый дискретный линейный фильтр, который из дискретного белого шума на входе формирует на выходе дискретный случайный процесс с заданными статистическими характеристиками.

Коэффициенты a_k и b_k можно определить *методом факторизации*. В этом методе для синтеза формирующих дискретных фильтров используются специальные свойства ковариационных и спектральных функций моделируемых случайных процессов.

Метод факторизации применяют и при определении коэффициентов c_k линейного формирующего фильтра, когда уравнение (4.7) имеет более простую структуру, например:

$$\xi(n) = \sum_{k=0}^l c_k x(n-k), x_k \in N(0,1). \quad (4.8)$$

На практике часто используются случайные процессы, у которых спектральная плотность мощности представляется дробно-рациональной функцией

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)}, \quad (4.9)$$

где $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ – многочлены степеней l и m , ($l < m$) соответственно.

Случайные процессы со спектральной плотностью вида (4.9) имеют также дробно-рациональную передаточную функцию [3]

$$K(i\omega) = \frac{K_1(i\omega)}{K_2(i\omega)}, \quad (4.10)$$

где $K_1(i\omega)$ и $K_2(i\omega)$ – многочлены степени l и m ($l < m$). Спектральная плотность случайного процесса $\xi(t)$, получаемого по формуле (4.7) на выходе системы, будет иметь вид

$$S_\xi(\omega) = |K(i\omega)|^2 = K(i\omega)K(-i\omega) = \frac{K_1(i\omega)K_1(-i\omega)}{K_2(i\omega)K_2(-i\omega)}. \quad (4.11)$$

Множитель $\frac{K_1(i\omega)}{K_2(i\omega)}$ в формуле (4.11) и будет передаточной функцией формирующего фильтра (4.9). Разложение (4.11) возможно, хотя и не является однозначным.

По теории [19], всякая положительная дробно-рациональная функция относительно аргумента может быть представлена своими нулями и полюсами:

$$\frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)} = C_k \left| \frac{\prod_{k=1}^l (i\omega - i\omega_{0k})}{\prod_{k=1}^m (i\omega - i\omega_k)} \right|^2, \quad (4.12)$$

где ω_{0k} – нули передаточной функции (нули многочлена $K_1(i\omega)$), ω_k – полюсы передаточной функции (нули многочлена $K_2(i\omega)$), C_k – константа. В соответствии с этим разложением сама передаточная функция $K(p)$ может быть представлена формулой

$$K(i\omega) = \sqrt{C} \frac{\prod_{k=1}^{l1} (i\omega - i\omega_{1k})}{\prod_{k=1}^{m1} (i\omega - i\omega_{2k})}, \quad (4.13)$$

где ω_{1k} и ω_{2k} – нули и полюсы передаточной функции, лежащие в верхней полуплоскости (имеющие положительную мнимую часть), а множитель C выбирается из условия $|K(i\omega)|^2 = S_\xi(\omega)$.

Для получения формулы скользящего суммирования по теории необходимо получить функцию импульсной переходной характеристики формирующего фильтра [1, 3, 13]:

$$h(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} \frac{t^j}{j!} e^{p_i t}, \quad (4.14)$$

где p_i – полюсы передаточной функции, т.е. корни знаменателя формулы (4.13) кратности r_i каждый ($r_1 + r_2 + \dots + r_k = m$), а

$$C_{ij} = \frac{1}{(r_i - j - 1)!} \cdot \frac{d^{r_i - j - 1}}{dp^{r_i - j - 1}} \left[K(p)(p - p_i)^{k_i} \right]_{p=p_i}. \quad (4.15)$$

Если на вход фильтра с импульсной переходной характеристикой $h(t)$ воздействует белый шум с ковариационной функцией $K_x(\tau) = \delta(\tau)$, то на выходе фильтра случайный процесс $\xi(t)$ выражается интегралом Дюамеля

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x_{\delta}(t - \tau)d\tau. \quad (4.16)$$

Белый шум $x_{\delta}(t)$ с дельтаобразной ковариационной функцией имеет бесконечную дисперсию (см. также формулу (2.24)). Чтобы этого избежать, при вычислении значений случайного процесса уравнение (4.16) заменяется на

$$\xi(t) = \int_0^t h(\tau)x_0(t - \tau)d\tau, \quad (4.17)$$

где $x_0(t)$ – белый шум с ограниченной частотой ω_{Γ} , причём в полосе $(-\omega_{\Gamma}, \omega_{\Gamma})$ должна находиться основная часть мощности процесса $\xi(t)$. $x_0(t)$ имеет дисперсию $D_0 = \frac{\omega_{\Gamma}}{\pi}$ и не коррелированные в точках $t_n = n\Delta t = n \frac{\pi}{\omega_{\Gamma}}$ значения.

Если заменить интеграл (4.17) конечной суммой с шагом Δt , получим алгоритм реализации дискретных значений случайного процесса $\xi(t)$ в виде

$$\xi(n) = \xi(n\Delta t) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x_0(n - k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x(n - k), \quad (4.18)$$

где $c_k = \sqrt{\Delta t}h(k)$, $x(m) \in N(0,1)$.

Применение метода факторизации для получения параметров моделирующих алгоритмов целесообразно в тех случаях, когда моделируемый процесс является процессом с рациональным спектром. При факторизации спектральных функций высокого порядка, у которых имеются корни выше второй степени, вычисление по формулам (4.13)-(4.15), (4.17) становится весьма затруднительным, что ограничивает применение метода факторизации.

Пример 17 [3]. Найдём формулу для моделирования случайного процесса с ковариационной функцией $K_\xi(\tau) = e^{-\omega_k|\tau|}$.

Найдём прежде всего спектральную плотность мощности заданного случайного процесса:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_k|\tau| - i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\omega_k|\tau| - i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\omega_k|\tau| - i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\omega_k - i\omega} e^{-\omega_k|\tau| - i\omega\tau} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-\omega_k - i\omega} e^{-\omega_k|\tau| - i\omega\tau} \Big|_0^{\infty} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\omega_k - i\omega} + \frac{1}{\omega_k + i\omega} \right] = \frac{\omega_k}{\pi(\omega_k^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Здесь разделение интервала интегрирования связано со свойствами функции $|\tau| = \begin{cases} -\tau, \tau < 0, \\ \tau, \tau \geq 0. \end{cases}$

Корни спектральной функции $S(\omega)$ равны $\pm i\omega_k$. Передаточная функция формирующего фильтра, вычисленная по формуле

(4.12), будет равна: $K(p) = \sqrt{C} \frac{\prod_{k=1}^l (p - p_{1k})}{\prod_{k=1}^m (p - p_k)}$, где $p_{1k} = i\omega_{1k}$ – корни

числителя, $p_k = i\omega_{2k}$ – корни знаменателя. Числитель корней не имеет (не зависит от ω), корни знаменателя $\pm i\omega_k$. Согласно теории выберем корень с положительной мнимой частью, это корень

$+i\omega_k$. Тогда $K(p) = \sqrt{C} \frac{1}{p - \omega_k}$ (в выражение для $K(p)$ входит коэффициент при мнимой части).

Найдём теперь константу C . Условие $|K(i\omega)|^2 = S(\omega)$ даёт

$$\frac{\omega_k}{\pi(\omega_k^2 + \omega^2)} = |K(p)|^2 = |K(i\omega)|^2 = C \left| \frac{1}{i\omega - i\omega_k} \right|^2 = \frac{C}{\omega^2 + \omega_k^2}.$$

Здесь использовано свойство модуля комплексного выражения, именно, если $z = a + ib$, то $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отсюда $C = \frac{\omega_k}{\pi}$.

Вычислим теперь импульсную переходную характеристику формирующего фильтра по формулам (4.14) и (4.15).

Так как $k = 1, r_1 = 1, p_1 = -\omega_k$, то $h(t) = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=0}^0 C_{ij} \frac{t^j}{j!} e^{p_i t} = C_{10} e^{p_1 t}$,

$$C_{10} = \frac{1}{(1-0-1)!} \frac{d^{1-0-1}}{dp^{1-0-1}} [K(p)(p-p_1)^1]_{p=p_1} = [K(p)(p-p_1)]_{p=p_1} = \\ = \sqrt{C} \frac{1}{p + \omega_k} (p + \omega_k) \Big|_{p=-\omega_k} = \sqrt{C}. \text{ Тогда } h(t) = \sqrt{C} e^{-\omega_k t} = \sqrt{\frac{\omega_k}{\pi}} e^{-\omega_k t}.$$

Наконец, получим формулы, моделирующие случайный процесс с данной ковариационной функцией (см. формулы (4.18)):

$$c_k = \sqrt{\Delta t} \frac{\omega_k}{\pi} e^{-\omega_k \Delta t k} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ak}, a = \omega_k \Delta t \text{ и } \xi(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x(n-k), x_k \in N(0,1).$$

Пример 18. Осуществим моделирование случайного процесса $\xi(t)$ с ковариационной функцией $K_\xi(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} [2\delta(\tau - \alpha(\text{sign}(\tau))^2)]$.

Найдём вначале спектральную плотность. Так как $K_\xi(\tau)$ – действительная чётная функция, применим формулу (2.14).

При этом используем свойства функций $\delta(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$

$$\text{и } \text{sign}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau = 0, \\ -1, & \tau < 0. \end{cases} \text{ В этом случае } S_\xi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_\xi(\tau) \cos \omega \tau d\tau =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D e^{-\alpha|\tau|} [2\delta(\tau) - \alpha(\text{sign}(\tau))^2] \cos \omega \tau d\tau =$$

$$= \frac{2D}{\pi} \int_0^{\infty} [2e^{-\alpha|\tau|} \delta(\tau) - \alpha e^{-\alpha|\tau|} (\text{sign}(\tau))^2] \cos \omega \tau d\tau =$$

$$= \frac{4D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \delta(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \frac{2\alpha D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} (\text{sign}(\tau))^2 \cos \omega \tau d\tau =$$

$= \frac{2D}{\pi} e^{-\alpha \cdot 0} \cos \omega \cdot 0 - \frac{2\alpha D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \tau} \cos \omega \tau d\tau$, так как по свойству дельта-функции $\int_0^{0+\varepsilon} f(\tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} f(0)$. Последний интеграл в выражении для $S_{\xi}(\omega)$ легко берётся по частям, именно $\int e^{-\alpha \tau} \cos \omega \tau d\tau = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha \tau} \left[-\frac{1}{\alpha} \cos \omega \tau + \frac{\omega}{\alpha^2} \sin \omega \tau \right]$. Тогда $S_{\xi}(\omega) = \frac{2D}{\pi} - \frac{2\alpha D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2D\omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$. Графики функций $K_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$ приведены на рис. 4.3.

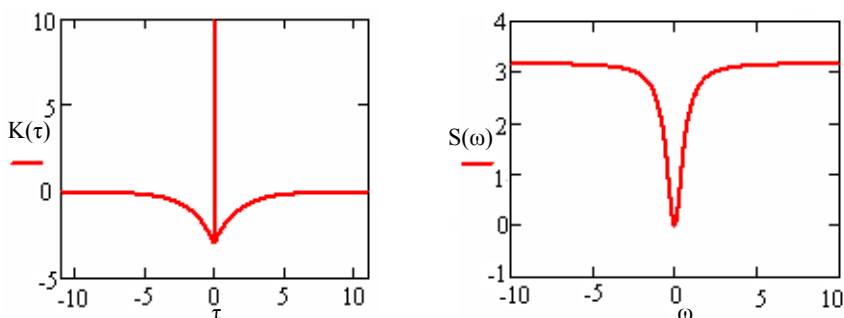


Рис. 4.3. Графики ковариационной функции и функции спектральной плотности мощности примера 18

Корень числителя спектральной функции равен нулю, корни знаменателя $\pm i\alpha$. Передаточная функция формирующего фильтра равна (формула (4.13)): $K(p) = \sqrt{C} \frac{p}{p - i\alpha}$, так как для знаменателя выбирается один корень с положительной мнимой частью.

Определим значение константы C . По условию $S_{\xi}(\omega) = |K(i\omega)|^2$, т.е. $\frac{2D}{\pi} \cdot \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} = C \left| \frac{i\omega}{i\omega - i\alpha} \right|^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}$.

Отсюда $C = \frac{2D}{\pi}$. Импульсная переходная характеристика формирующего фильтра аналогична таковой же в примере 17. Именно, $k=1, r_1=1, p_1=-\alpha$, $h(t) = C_{10}e^{p_1 t}$, $C_{10} = [K(p)(p-p_1)]_{p=p_1} =$
 $= \left[\sqrt{C} \frac{p}{p-\alpha} (p-\alpha) \right]_{p=\alpha} = \sqrt{C}\alpha = \sqrt{\frac{2D}{\pi}}\alpha$, $h(t) = \sqrt{\frac{2D}{\pi}}\alpha e^{-\alpha t}$.

Таким образом, формулы, моделирующие случайный процесс $\xi(t)$ с заданной ковариационной функцией, имеют вид $\xi(n) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x_0(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0(n-k)$, где $c_k = \sqrt{\Delta t}h(k) =$
 $= \sqrt{\Delta t} \sqrt{\frac{2D}{\pi}}\alpha e^{-\alpha \Delta t k} = \sqrt{\frac{2D\Delta t}{\pi}}\alpha^2 e^{-\alpha \Delta t k} = \sqrt{\frac{2D\alpha a}{\pi}}e^{-ak}$, $a = \alpha \Delta t, x_0 \in N(0,1)$.

4.4.4. Метод канонических разложений. Каноническое представление случайного процесса основано на выражении модели случайного процесса $\xi(t)$ в виде детерминированной функции случайных величин, т.е. в виде

$$\xi(t) = m_{\xi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k(t), \quad (4.19)$$

где u_k – коэффициенты разложения – случайные величины, математические ожидания которых равны нулю, $x_k(t)$ – детерминированные функции, образующие систему функций. Функции $x_k(t)$ называются *координатными функциями* канонического разложения. Коэффициенты разложения u_k изменяются от реализации к реализации; необходимо, чтобы u_k были некоррелированными, т.е. $M[u_i u_j] = 0$ при $i \neq j$.

Согласно теории [18] некоррелированность случайных коэффициентов u_k обеспечивается при выборе в качестве системы $x_k(t), k=1,2,\dots,\infty$ функций, являющихся решениями интегрального уравнения типа Фредгольма относительно функции $x(t)$:

$$\int_0^{T_M} K(t_1, t_2) x_k(t_2) dt_2 = \lambda_k u_k(t_1), \quad (4.20)$$

где $K(t_1, t_2)$ – заданная ковариационная функция – ядро интегрального уравнения, T_M – интервал моделирования случайного процесса, λ_k – собственные числа данного интегрального уравнения.

Основным достоинством представления (4.20) является возможность моделирования случайного процесса $\xi(t)$ для любого момента времени t , так как $\xi(t)$ моделируется как функция непрерывного времени. На практике описанный метод применяется редко из-за следующих трудностей.

1. Решение интегрального уравнения (4.20) аналитически найдено лишь для весьма ограниченного набора ковариационных функций $K(t_1, t_2)$.

2. В соответствии с (4.19) необходимо использовать бесконечное число функций $x_k(t)$. Это не может быть реализовано при практическом моделировании. Если же взять число членов в правой части формулы (4.19) конечным, возникает методическая ошибка.

В работе [18] В.С. Пугачёв предложил метод, в котором случайный процесс $\xi(t)$ моделируется таким образом, что истинная ковариационная функция $K(t_1, t_2)$ совпадает с ковариационной функцией моделируемого случайного процесса $K_D(t_1, t_2)$ лишь для заданных дискретных моментов времени. Таким образом, $K(t_1, t_2) = K_D(t_1, t_2)$ для конечного множества моментов, а само моделирование происходит по формуле

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \sum_{k=1}^N u_k x_k(t), \quad (4.21)$$

где N – число точек, в которых $K(t_1, t_2) = K_D(t_1, t_2)$. Для вычисления по формуле (4.20) необходимо определить ортонормированную систему функций $x_k(t), k = \overline{1, N}$ и некоррелированные случайные величины $u_k, k = \overline{1, N}$. При этом накладываются условия лишь на первый и второй моменты случайных величин u_k [18]:

$$M[u_k] = 0, k = \overline{1, N}, D_1 = K(t_{11}, t_{21}), x_1(t) = \frac{1}{D_1} K(t, t_{21}),$$

$$D_k = K(t_{1,k}, t_{2,k}) - \sum_{i=1}^{k-1} D_i x_i(t_k), k = 2, 3, \dots, N, \quad (4.22)$$

$$x_k(t) = \frac{1}{D_k} \left[K(t, t_{2,k}) - \sum_{i=1}^{k-1} D_i x_i(t_k) \right], k = 2, 3, \dots, N.$$

При таком подходе не нужно решать интегральное уравнение (4.20), а функции $x_k(t)$ определяются простыми алгебраическими уравнениями (4.22).

4.4.5. Метод канонических разложений для стационарных случайных процессов. У стационарных случайных процессов ковариационная функция, зависящая от разности аргументов $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t_2 - t_1) = K_\xi(\tau)$, связана со спектральной плотностью мощности парой преобразования Фурье (2.18)-(2.19), поэтому при моделировании стационарных случайных процессов можно использовать функцию $S_\xi(\omega)$.

При условии $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(\tau)$ собственными функциями $x_k(t)$ интегрального уравнения (4.20) (координатными функциями уравнения (4.19)) являются гармонические функции, т.е. ряд (4.19) превращается в ряд Фурье:

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (v_k \cos k\omega t + u_k \sin k\omega t), 0 \leq t \leq T_M, \quad (4.23)$$

где T_M – интервал моделирования, $\omega = \frac{2\pi}{T_{II}}$, $T_{II} \geq T_M$,

$M[v_k] = M[u_k] = 0$, $M[v_i u_j] = M[u_i u_j] = M[v_i v_j] = 0$ при $i \neq j$, $M[v_i u_i] = 0$, T_{II} – интервал, равный периоду формулы (4.23), выбранный так, чтобы ковариационная функция процесса (4.23) значимо не отличалась от заданной $K_\xi(\tau)$.

Определим ковариационную функцию процесса (4.23).

$$K_\xi(t_1, t_2) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)] =$$

$$= M \left[\sum_{k=0}^{\infty} (v_k \cos k\omega t_1 + u_k \sin k\omega t_1) \cdot (v_k \cos k\omega t_2 + u_k \sin k\omega t_2) \right] =$$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (D_{v_k} \cos k\omega t_1 \cos k\omega t_2 + D_{u_k} \sin k\omega t_1 \sin k\omega t_2)$. Для того чтобы случайный процесс $\xi(t)$ был стационарным в широком смысле, необходимо, чтобы $D_{v_k} = D_{u_k} = D_k$. Тогда

$$\begin{aligned} K_{\xi}(t_1, t_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k (\cos k\omega t_1 \cos k\omega t_2 + \sin k\omega t_1 \sin k\omega t_2) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos k\omega(t_2 - t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos k\omega\tau. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Выражение (4.24) есть разложение ковариационной функции в ряд Фурье с периодом $T_{\Pi} = \frac{2\pi}{\omega}$, коэффициентами которого являются дисперсии D_k . В этом случае, так как $K_{\xi}(\tau)$ – чётная функция, то на интервале $[-T_{\Pi}, T_{\Pi}]$ коэффициенты ряда Фурье равны:

$$D_0 = \frac{1}{T_{\Pi}} \int_0^{T_{\Pi}} K_{\xi}(\tau) d\tau, \quad D_k = \frac{2}{T_{\Pi}} \int_0^{T_{\Pi}} K_{\xi}(\tau) \cos k\omega\tau d\tau, \quad (4.25)$$

где $T_{\Pi} \gg \tau_k$, τ_k – интервал корреляции случайного процесса $\xi(t)$. Если $T_{\Pi} \gg \tau_k$, то с небольшой методической погрешностью уравнения (4.25) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{T_{\Pi}} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2T_{\Pi}} S_{\xi}(0), \\ D_k &= \frac{2}{T_{\Pi}} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) \cos k\omega\tau d\tau = \frac{\pi}{T_{\Pi}} S(k\omega). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Таким образом, дисперсия гармоник формул (4.23) и (4.24) определяется по заданной спектральной плотности мощности $S(\omega)$ с точностью до постоянных множителей.

Обычно функция $S(\omega)$ резко убывает и становится малой по достижении некоторой верхней частоты ω_B , поэтому число членов усечённого ряда в (4.23) может быть приближённо оценено как $M = \frac{\omega_B}{\omega} = \frac{\omega_B}{2\pi} T_{\Pi}$. С другой стороны, поскольку общая дис-

персия моделируемого случайного процесса равна $D_\xi = K_\xi(0)$, дисперсия же при усечении формулы (4.23) определяется соотношением $D_M = \sum_{k=0}^M D_k$, то критерием выбора M может быть выражение

$$1 - \frac{D_M}{D_\xi} = \frac{1}{K_\xi(0)} \sum_{k=M+1}^{\infty} D_k < \varepsilon, \quad (4.27)$$

где ε – заданная погрешность при моделировании.

При таких условиях и ограничениях моделирование случайного процесса $\xi(t)$ происходит по формуле

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \sum_{k=0}^M (v_k \cos k\omega t + u_k \sin k\omega t), \quad (4.28)$$

где v_k и u_k – некоррелированные случайные величины с $M[v_k] = M[u_k] = 0$, $D[v_k] = D[u_k] = D_k$. Распределение случайных величин v_k и u_k может быть произвольным, если процесс $\xi(t)$ нормальный, то v_k и u_k – также нормально распределённые случайные величины с определёнными первыми и вторыми моментами.

Так как каждое слагаемое в правой части (4.28) представляет собой простую гармонику с частотой $k\omega$, то при условии нормальности случайного процесса $\xi(t)$ эта гармоника имеет фазу, равномерно распределённую на интервале $[-\pi, \pi]$, и амплитуду, распределённую по закону Рэлея с параметром $D_R = 2D_k$, т.е.

$f(A) = \frac{A}{2D_k} e^{-\frac{A^2}{4D_k}}$. В этом случае моделирование по формуле (4.28) может быть заменено моделированием по формуле

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \sum_{k=0}^M A_k \cos(k\omega t + \varphi_k), \quad (4.29)$$

где вместо двух случайных величин v_k и u_k с одинаковым (нормальным) распределением используются две случайные величины с разными законами распределения: амплитуда A_k распределена

по закону Рэлея с параметром $2D_k$, фаза φ_k распределена равномерно на $R[-\pi, \pi]$.

Формулу (4.29) можно ещё упростить, исключив случайные амплитуды гармоник A_k . Так как мощность амплитуды каждой гармоники в (4.28) равна: $M[v_k^2] + M[u_k^2] = D[v_k] + D[u_k] = 2D_k$, то формулу (4.29) можно переписать в виде

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \sum_{k=0}^M C_k \cos(k\omega t + \varphi_k), \quad (4.30)$$

где C_k – неслучайный параметр и $C_k = \sqrt{2D_k}$.

Формулу (4.30) используют при большом значении M , так как в силу центральной предельной теоремы процесс $\xi(t)$, получаемый по формуле (4.30), сходится к нормальному.

4.4.6. Моделирование марковских случайных процессов (дискретных марковских цепей). Моделирование марковских случайных процессов осуществляется на основе метода условных распределений (см. подразд. 4.2). Сам процесс моделирования зависит от порядка марковского процесса. Рассмотрим вначале процесс первого порядка. По определению марковской цепи, $P\{\xi(t_n) = i_n / \xi(t_1) = i_1, \xi(t_2) = i_2, \dots, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\} = P\{\xi(t_n) = i_n / \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\}$. Кроме того, вероятность перехода из состояния i в состояние j определяется переходной вероятностью p_{ij} , которая должна быть вычислена или задана. Для дискретных однородных марковских цепей с дискретным временем справедлива формула (2.45).

Опишем более подробно процесс получения разных отсчётов нескольких реализаций марковского процесса в общем случае методом условных распределений. Для моделирования марковского случайного процесса достаточно знать условные плотности вероятностей перехода из состояния в состояние и плотность вероятности $f_0(t_0)$ начального значения $\xi(t_0)$ в начальный момент времени t_0 .

Пусть задана начальная плотность $f_0(t_0) = f_0(\xi(t_0), t_0)$. По этой плотности соответствующим датчиком случайных чисел реализуется значение первого отсчёта $\xi_1(t_0)$ первой реализа-

ции случайного процесса $\xi(t)$. Для следующего, второго, отсчёта определяется условная одномерная плотность вероятности

$$f_1(\xi_1/\xi_0) = f_1(\xi(t_1), t_1/\xi(t_0), t_0) = \frac{f_{01}(\xi(t_0), \xi(t_1))}{f_0(\xi(t_0), t_0)} = \frac{f_{01}(\xi(t_0), t_0, \xi(t_1), t_1)}{f_0(\xi(t_0), t_0)}$$

и по этой плотности – значение второго отсчёта $\xi_1(t_1)$ первой реализации. Третий отсчёт будет иметь условную одномерную плотность вероятности $f_1(\xi_2/\xi_0, \xi_1) = f_2(\xi(t_2), t_2/\xi(t_1), t_1) = \frac{f_{012}(\xi(t_0), \xi(t_1), \xi(t_2))}{f_{01}(\xi(t_0), \xi(t_1))} = \frac{f_{012}(\xi(t_0), t_0, \xi(t_1), t_1, \xi(t_2), t_2)}{f_{01}(\xi(t_0), \xi(t_1))}$, по которой реализуется значение третьего отсчёта $\xi_1(t_2)$.

Величины $f_{01}, f_{012}, \dots, f_{01\dots k}$ в общем случае рассчитываются по формулам (1.11). В результате получается последовательность чисел $\xi_1(t_0), \xi_1(t_1), \xi_1(t_2), \dots, \xi_1(t_k)$, изображающих первую реализацию марковского случайного процесса $\xi(t)$. Для получения второй и последующих реализаций повторяются те же операции.

Простая дискретная цепь Маркова представляет собой последовательность случайных величин $\xi(\omega_i), i = 1, 2, \dots$ с возможными значениями i_0, i_1, \dots, i_k . Условные вероятности $p(\xi_k/\xi_{k-1})$ для каждого значения процесса $\xi(t_k)$ в момент t_k , т.е. вероятности перехода, обычно задаются при моделировании. Таким образом, в этом случае расчёт условных вероятностей не требуется. В общем же случае переходные вероятности зависят от номера шага, т.е. от времени, и на каждом шаге должны пересчитываться.

Само моделирование дискретных марковских однородных цепей происходит по формуле (2.45): $p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1)p_{ij}$, $k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n$, где n – число состояний цепи. Для запуска процесса моделирования необходимо задать начальное распределение вероятностей $p_i(0), i = 1, 2, \dots, n$ и матрицу переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$.

Тогда вероятности всех состояний $p_1(1), p_2(1), \dots, p_n(1)$ на первом и последующих шагах могут быть легко получены. Номер шага процесса – это очередной отсчёт конкретной реализации,

т.е. шаг цепи, а номер реализации – нижний индекс вероятностей состояний $p_j(k)$. Выбрав, например, числа $p_1(1), p_1(2), \dots, p_1(k), \dots$, получим вероятности всех состояний (отсчётов) марковской цепи первой реализации. Сами значения марковского случайного процесса можно получить моделированием дискретной случайной величины с заданным рядом распределения, например таким, как в табл. 4 [23].

Т а б л и ц а 4

$\xi(\omega)$	$\xi_1(0)$	$\xi_1(1)$	$\xi_1(2)$...	$\xi_1(k)$...
p	$p_1(0)$	$p_1(1)$	$p_1(2)$...	$p_1(k)$...

4.5. Параметры некоторых алгоритмов моделирования стационарных процессов с типовыми ковариационными функциями

На основании рассмотренных ранее методов и многих других, не приведённых в данном учебнике, получены алгоритмы моделирования случайных процессов с некоторыми типами ковариационных функций. Приведём вначале таблицу соответствия ковариационных функций $K_\xi(\tau)$ и им сопутствующих функций спектральной плотности мощности $S_\xi^*(\omega)$. Эти данные содержатся в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

$K_\xi(\tau)$	$S_\xi^*(\omega)$
1. $D\delta(\tau), \delta(\tau)$ – дельта-функция	$\frac{D}{2\pi}$
2. D	$D\delta(\omega)$
3. $D \cos \beta \tau$	$D \frac{[\delta(\omega + \beta) + \delta(\omega - \beta)]}{2}$
4. $\sum_{i=1}^n D_i \cos \beta_i \tau$	$\sum_{i=1}^n D_i \frac{[\delta(\omega + \beta_i) + \delta(\omega - \beta_i)]}{2}$
5. $D e^{-\alpha \tau }, \alpha > 0$	$\frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

$K_{\xi}(\tau)$	$S_{\xi}^*(\omega)$
6. $\sum_{i=1}^n D_i e^{-\alpha_i \tau }$	$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{D_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}$
7. $D e^{-\alpha \tau } \cos \beta \tau, \alpha, \beta > 0$	$\frac{D \alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\beta - \omega)^2][\alpha^2 + (\beta + \omega)^2]}$
8. $D e^{-\alpha \tau } \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right)$	$\frac{D \alpha}{\pi} \cdot \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2 \beta^2}$
9. $D e^{-\alpha \tau } \left(\cos \beta \tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right)$	$\frac{D \alpha}{\pi} \cdot \frac{2\omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) - 4\alpha^2 \beta^2}$
10. $D e^{-\alpha \tau } \left(\operatorname{ch} \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta \tau \right),$ $\alpha \geq \beta$	$\frac{D \alpha}{\pi} \cdot \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{[(\alpha - \beta)^2 + \omega^2][(\alpha + \beta)^2 + \omega^2]}$
11. $D(1 - \tau)l(1 - \tau), 1(x)$ – еди- ничная функция	$\frac{D}{2\pi} \cdot \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2$
12. $D e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\frac{D}{\pi} \cdot \frac{2\alpha^4}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
13. $D e^{-\alpha \tau } \left(1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3} \right)$	$\frac{D \alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^4}{3(\alpha^2 + \omega^2)^4}$
14. $D e^{-\alpha \tau } \left(1 + \alpha \tau - 2\alpha \tau^2 + \frac{\alpha^3 \tau ^3}{3} \right)$	$\frac{D \alpha}{\pi} \cdot \frac{16\alpha^3 \omega^4}{(\alpha^2 + \omega^2)^4}$
15. $2\alpha \frac{\sin \beta \tau}{\tau}, \alpha, \beta > 0$	$\alpha \cdot 1 \left(1 - \frac{ \omega }{\beta} \right)$
16. $2\alpha^2 (2 \cos \beta \tau - 1) \frac{\sin \beta \tau}{\tau}$	$\begin{cases} 0, 0 \leq \omega \leq \beta, \\ \alpha^2, \beta < \omega \leq 2\beta, \\ 0, 2\beta < \omega \end{cases}$

$K_{\xi}(\tau)$	$S_{\xi}^*(\omega)$
17. $De^{-(\alpha\tau)^3}$	$\frac{D}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}$
18. $De^{-\alpha \tau } [2\delta(\tau) - \alpha(\operatorname{sgn} \tau)^2]$	$\frac{D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}$
19. $D \frac{\sin \alpha\tau}{\alpha\tau}$	$\begin{cases} \frac{D}{2\alpha}, & \omega \leq \alpha, \\ 0, & \omega > \alpha \end{cases}$
20. $De^{-\alpha^2\tau^2}$	$\frac{D}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$
21. $\frac{D}{1 + \alpha^2\tau^2}$	$\frac{D}{2\alpha} e^{- \omega/\alpha }$
22. $\begin{cases} D(1 + \alpha \tau), & \tau \leq \frac{1}{\alpha}, \\ 0, & \tau > \frac{1}{\alpha} \end{cases}$	$\frac{2D}{\alpha\pi} \cdot \frac{\sin^2 \omega/\alpha}{(\omega/\alpha)^2}$

Для вычисления $S_{\xi}^*(\omega)$ по $K_{\xi}(\tau)$ необходимо помнить свойства нескольких специальных функций математического анализа и их соотношения друг с другом (табл. 6).

Т а б л и ц а 6

Функция	Свойства функции
1. $1(\tau)$ – единичная функция. $1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 1/2, & \tau = 0, \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$	$1(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\tau} d(\operatorname{sign} \tau),$ $\operatorname{sign} \tau = 2 \cdot 1(\tau) - 1, \quad 1(\tau) = \frac{\operatorname{sign} \tau}{2} + 1,$ $ \tau = \tau \cdot (2 \cdot 1(\tau) - 1)$

Функция	Свойства функции
2. $\delta(\tau)$ – дельта-функция $\delta(\tau) = \begin{cases} \infty, \tau = 0, \\ 0, \tau \neq 0 \end{cases}$	$\delta(\tau) = \frac{d}{d\tau} 1(\tau), \quad \varphi(\tau)\delta(\tau) = 0, \text{ если } \varphi(\tau) - \text{ не-}$ $\text{чётная функция, непрерывная при } \tau = 0,$ $\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \psi(\tau)\delta(\tau)d\tau = \psi(0), \text{ если } \psi(\tau) - \text{ непрерывна}$ $\text{при } \tau = 0,$ $\int_{0-\varepsilon}^0 (\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_0^{0+\varepsilon} \psi(\tau)\delta(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\psi(0)$
3. $\text{sign}(\tau) = \begin{cases} 1, \tau > 0, \\ 0, \tau = 0, \\ -1, \tau < 0 \end{cases}$	$ \tau = \tau \text{sign} \tau, \quad \tau = \tau \text{sign} \tau,$ $\frac{d \tau }{d\tau} = \text{sign} \tau,$ $\frac{d^2 \tau }{d\tau^2} = \frac{d \text{sign} \tau}{d\tau} = 2\delta(\tau)$

Наконец, приведём моделирующие алгоритмы для некоторых типов стационарных случайных процессов с известными и часто употребляемыми ковариационными функциями $K_\xi(\tau)$ – табл. 7.

Т а б л и ц а 7

$K_\xi(\tau)$	Моделирующий алгоритм и его параметры
1. $De^{-\alpha \tau }$	$\xi_n = a_0 x_n + b_1 \xi_{n-1},$ $a_0 = \sqrt{D(1 - e^{-2\gamma})}, b_1 = e^{-\gamma}, \gamma = \alpha\Delta t, x_n \in N(0,1)$
2. $De^{-\alpha \tau } \cos \beta\tau$	$\xi_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 \xi_{n-1} + b_2 \xi_{n-2},$ $a_0 = \sqrt{D}\alpha = \sqrt{D(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})}/2, a_1 = \sqrt{D} \frac{\alpha_0}{\alpha},$ $b_1 = 2e^{-\gamma} \cos \gamma_0, b_2 = -e^{-2\gamma},$ $\alpha_0 = e^{-\gamma}(e^{-2\gamma} - 1)\cos \gamma_0,$ $\alpha_1 = 1 - e^{-4\gamma}, \gamma = \alpha\Delta t, \gamma_0 = \beta\Delta t, x_n \in N(0,1)$

$K_\xi(\tau)$	Моделирующий алгоритм и его параметры
3. $De^{-\alpha \tau } \left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta \tau \right)$	$\xi_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + b_1\xi_{n-1} + b_2\xi_{n-2},$ $a_0 = \sqrt{D}\alpha = \sqrt{D \left(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2} \right)} / 2, a_1 = \sqrt{D} \frac{\alpha_0}{\alpha},$ $b_1 = 2e^{-\gamma} \cos\gamma_0, b_2 = -e^{-2\gamma},$ $\alpha_0 = e^{-\gamma} (e^{-2\gamma} - 1) \cos\gamma_0 + \frac{\alpha}{\beta} (1 + e^{-2\gamma}) e^{-r} \sin\gamma_0,$ $\alpha_1 = 1 - e^{-4\gamma} - 4e^{-2\gamma} \frac{\alpha}{\beta} \sin\gamma_0 \cos\gamma_0,$ $\gamma = \alpha\Delta t, \gamma_0 = \beta\Delta t, x_n \in N(0,1)$
4. $De^{-\alpha \tau } \left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta \tau \right)$	$\xi_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + b_1\xi_{n-1} + b_2\xi_{n-2},$ $a_0, a_1, b_1, b_2,$ как в п.3, $\alpha_0 = e^{-\gamma} (e^{-2\gamma} - 1) \cos\gamma_0 - \frac{\alpha}{\beta} (1 + e^{-2\gamma}) e^{-\gamma} \sin\gamma_0$ $\alpha_1 = 1 - e^{-4\gamma} + 4e^{-2\gamma} \frac{\alpha}{\beta} \sin\gamma_0 \cos\gamma_0,$ $\gamma = \alpha\Delta t, \gamma_0 = \beta\Delta t, x_n \in N(0,1)$
5. $De^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\xi_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + b_1\xi_{n-1} + b_2\xi_{n-2},$ $a_0, a_1,$ как в п.3, $b_1 = 2e^{-\gamma}, b_2 = -e^{-2\gamma},$ $\alpha_0 = e^{-2\gamma} (1 + \alpha) - e^{-\gamma} (1 + \alpha),$ $\alpha_1 = 1 - 4e^{-2\gamma} \alpha - e^{-4\gamma}, \gamma = \alpha\Delta t, x_n \in N(0,1)$
6. $D \frac{\sin \alpha \tau}{\alpha \tau}$	$\xi_n = \sum_{k=0}^p c_k x_{n-k}, c_k = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\pi\alpha}} \cdot \frac{\sin \gamma k}{k}, \gamma = \alpha\Delta t \leq \pi$
7. $De^{-\alpha^2\tau^2}$	$\xi_n = \sum_{k=0}^p c_k x_{n-k}, c_k = \frac{\sqrt{2D\gamma}}{\sqrt[4]{\pi}} \cdot e^{-2\gamma^2k^2}, \gamma = \alpha\Delta t \leq \frac{1}{2}$
8. $\frac{D}{1 + \alpha^2\tau^2}$	$\xi_n = \sum_{k=0}^p c_k x_{n-k}, c_k = 2\sqrt{\frac{D\gamma}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + 4\gamma^2k^2}, \gamma = \alpha\Delta t \leq \frac{1}{2}$
9. $\begin{cases} D(1 - \alpha \tau), & \tau \leq 1/\alpha, \\ 0, & \tau > 1/\alpha \end{cases}$	$\xi_n = c_0 \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k}, c_0 = \sqrt{\frac{D}{N}}, N = \left[\frac{1}{\alpha} \right] + 1, \gamma = \alpha\Delta t,$ $[]$ – целая часть числа

Лабораторная работа № 3. Моделирование гауссовских случайных процессов с известными корреляционными характеристиками методом скользящего среднего в пакете Mathcad

Пусть задана ковариационная функция случайного процесса $\xi(t)$ $K_\xi(\tau) = \begin{cases} 2D(1 - \alpha|\tau|), & \alpha|\tau| < 1, \\ 0, & \alpha|\tau| > 1 \end{cases}$ и его математическое ожидание

$$M[\xi(t)] = 0.$$

Построим на интервале $T = [-10, 10]$ с шагом $\Delta t = 1$ двадцать один отсчёт случайного процесса $\xi(t)$ методом скользящего среднего. Смоделируем также десять реализаций этого случайного процесса по формуле (4.4) на интервале T . Определим необходимые константы: $D = 5$, $\alpha = 0,1$. В соответствии с теорией (см. п. 4.4.2) необходимо прежде всего по значениям ковариационной функции $K_\xi(\tau)$ в моменты $t_n = n\Delta t$ найти вектор коэффициентов линейного фильтра по формулам (4.6). В нашем случае $T_{\min} = -10$ и моменты t_n образуют следующую последовательность: $-10, -9, \dots, 0, \dots, 9, 10$. График ковариационной функции приведён на рис. 4.4, её значения в моменты t_n составляют аналогичную по длине последовательность $0, 1, 2, \dots, 10, \dots, 2, 1, 0$. Для функционирования линейного формирующего фильтра находим

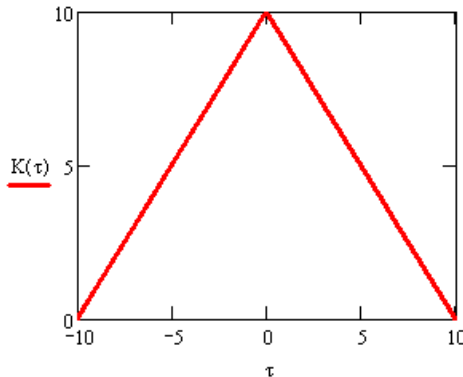


Рис. 4.4. График ковариационной функции

коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_k из решения нелинейной системы алгебраических уравнений вида (4.6). В данном конкретном случае эта система будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N c_i^2 &= K_\xi(T_{\min}), \\ \sum_{i=1}^{N-1} c_i \cdot c_{i+1} &= K_\xi(T_{\min} + 2 \cdot \Delta t), \\ \sum_{i=1}^{N-2} c_i \cdot c_{i+2} &= K_\xi(T_{\min} + 4 \cdot \Delta t), \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^2 c_i \cdot c_{i+8} &= K_\xi(T_{\min} + 16 \cdot \Delta t), \\ c_1 \cdot c_{10} &= K_\xi(T_{\max} - 2\Delta t). \end{aligned}$$

Решать эту систему уравнений в пакете Mathcad следует специальным вычислительным блоком (системой функций) типа Given-Find или Given-Minerr, причём последний блок использует метод наименьших квадратов и минимизирует невязки уравнений системы. Перед обращением к вычислительному блоку следует присвоить начальное значение определяемому вектору \bar{c} .

Для функционирования самого формирующего фильтра по формуле (4.4) необходимо получить массив значений белого шума, который моделируется встроенной программой rndm. Для организации сдвига последовательности $x(n)$ при вычислении очередного отсчёта $\xi(n)$ объём смоделированного массива белого шума должен быть равен: $N + n + 1$, где N – число коэффициентов c_k , n – число отсчётов случайного процесса $\xi(t)$.

Таким образом, программа в пакете Mathcad может выглядеть следующим образом:

```

ORIGIN := 1      N := 10   n := 21
m := N + n + 1   D := 5     α := 0.1    dt := 1
i := 1..n       ti := i·dt - 11  Kξi := 2·D·(1 - α·|ti|)   m = 32
i := 1..n       xi := rndm(m, 0, 1)

```


$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & -10 \\ 2 & -9 \\ 3 & -8 \\ 4 & -7 \\ 5 & -6 \\ 6 & -5 \\ 7 & -4 \\ 8 & -3 \\ 9 & -2 \\ 10 & -1 \\ 11 & 0 \\ 12 & 1 \\ 13 & 2 \\ 14 & 3 \\ 15 & 4 \\ 16 & 5 \\ \hline \end{array} \quad K\xi = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \\ 9 & 8 \\ 10 & 9 \\ 11 & 10 \\ 12 & 9 \\ 13 & 8 \\ 14 & 7 \\ 15 & 6 \\ 16 & 5 \\ \hline \end{array} \quad xx^{(1)} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & -0.439 \\ 2 & -0.679 \\ 3 & -0.473 \\ 4 & -0.951 \\ 5 & -1.686 \\ 6 & 0.044 \\ 7 & -0.121 \\ 8 & 0.556 \\ 9 & 2.192 \\ 10 & 0.809 \\ 11 & 0.985 \\ 12 & 0.862 \\ 13 & 0.916 \\ 14 & 0.673 \\ 15 & -1.044 \\ 16 & 0.069 \\ \hline \end{array} \quad xx^{(2)} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & -0.131 \\ 2 & -0.223 \\ 3 & 0.153 \\ 4 & 1.396 \\ 5 & -0.238 \\ 6 & 1.722 \\ 7 & 0.772 \\ 8 & -1.653 \\ 9 & 1.816 \\ 10 & -0.095 \\ 11 & 0.022 \\ 12 & -0.537 \\ 13 & -1.073 \\ 14 & -0.308 \\ 15 & -0.902 \\ 16 & 0.778 \\ \hline \end{array}$$

$$i := 1..N \quad c_i := 0.5 \quad c = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \\ 3 & 0.5 \\ 4 & 0.5 \\ 5 & 0.5 \\ 6 & 0.5 \\ 7 & 0.5 \\ 8 & 0.5 \\ 9 & 0.5 \\ 10 & 0.5 \\ \hline \end{array}$$

Given

$$(c_1)^2 + (c_2)^2 + (c_3)^2 + (c_4)^2 + (c_5)^2 + (c_6)^2 + (c_7)^2 + (c_8)^2 + (c_9)^2 + (c_{10})^2 = K\xi_1$$

$$c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_3 + c_3 \cdot c_4 + c_4 \cdot c_5 + c_5 \cdot c_6 + c_6 \cdot c_7 + c_7 \cdot c_8 + c_8 \cdot c_9 + c_9 \cdot c_{10} = K\xi_3$$

$$c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_4 + c_3 \cdot c_5 + c_4 \cdot c_6 + c_5 \cdot c_7 + c_6 \cdot c_8 + c_7 \cdot c_9 + c_8 \cdot c_{10} = K\xi_5$$

$$c_1 \cdot c_4 + c_2 \cdot c_5 + c_3 \cdot c_6 + c_4 \cdot c_7 + c_5 \cdot c_8 + c_6 \cdot c_9 + c_7 \cdot c_{10} = K\xi_7$$

$$c_1 \cdot c_5 + c_2 \cdot c_6 + c_3 \cdot c_7 + c_4 \cdot c_8 + c_5 \cdot c_9 + c_6 \cdot c_{10} = K\xi_9$$

$$c_1 \cdot c_6 + c_2 \cdot c_7 + c_3 \cdot c_8 + c_4 \cdot c_9 + c_5 \cdot c_{10} = K\xi_{11}$$

$$c_1 \cdot c_7 + c_2 \cdot c_8 + c_3 \cdot c_9 + c_4 \cdot c_{10} = K\xi_{13}$$

$$c_1 \cdot c_8 + c_2 \cdot c_9 + c_3 \cdot c_{10} = K\xi_{15}$$

$$c_1 \cdot c_9 + c_2 \cdot c_{10} = K\xi_{17}$$

$$c_1 \cdot c_{10} = K\xi_{19}$$

	1
1	1.543
2	-0.201
3	0.946
4	0.498
5	0.621
6	0.61
7	0.609
8	0.747
9	0.253
10	1.296

Minerr(c) =

$$c_1 := 1.543 \quad c_2 := -0.201 \quad c_3 := 0.946 \quad c_4 := 0.498 \quad c_5 := 0.621$$

$$c_6 := 0.610 \quad c_7 := 0.609 \quad c_8 := 0.747 \quad c_9 := 0.253 \quad c_{10} := 1.296$$

$$x_1 := \text{xx}^{(1)} \quad x_2 := \text{xx}^{(2)} \quad x_3 := \text{xx}^{(3)} \quad x_4 := \text{xx}^{(4)} \quad x_5 := \text{xx}^{(5)}$$

$$x_6 := \text{xx}^{(6)} \quad x_7 := \text{xx}^{(7)} \quad x_8 := \text{xx}^{(8)} \quad x_9 := \text{xx}^{(9)} \quad x_{10} := \text{xx}^{(10)}$$

$$i := 1..n \quad \xi_{i,1} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x_{1N+i-k})] \quad \xi_{i,2} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x_{2N+i-k})]$$

$$\xi_{i,3} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x_{3N+i-k})] \quad \xi_{i,4} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x_{4N+i-k})]$$

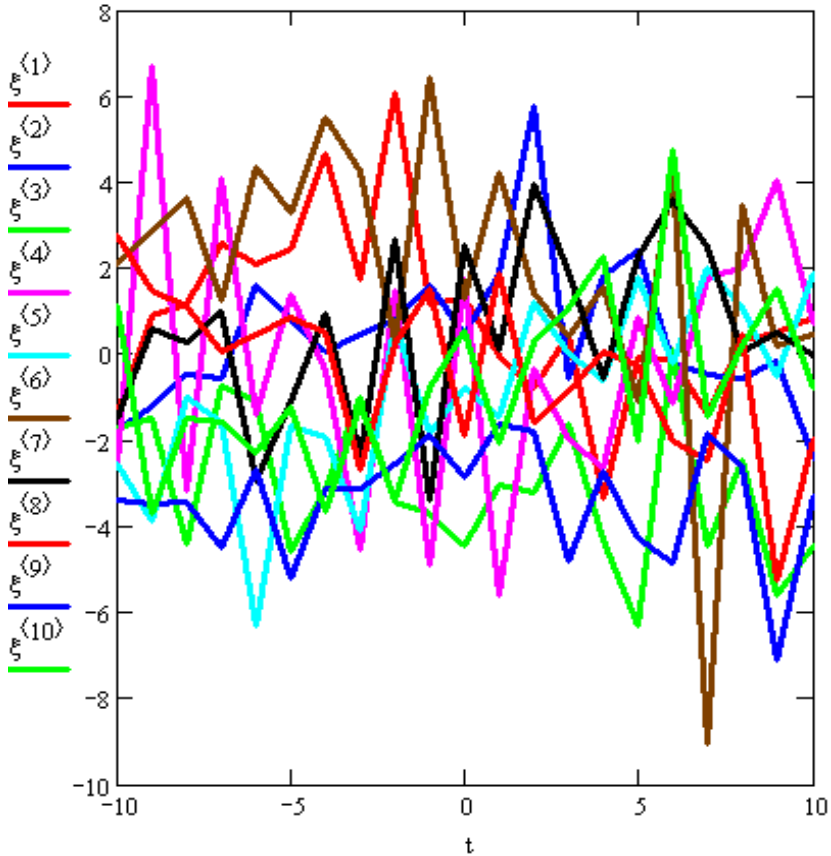
$$\xi_{i,5} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x^5_{N+i-k})] \quad \xi_{i,6} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x^6_{N+i-k})]$$

$$\xi_{i,7} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x^7_{N+i-k})] \quad \xi_{i,8} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x^8_{N+i-k})]$$

$$\xi_{i,9} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x^9_{N+i-k})] \quad \xi_{i,10} := \sum_{k=1}^N [c_k \cdot (x^{10}_{N+i-k})]$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	-1.401	-1.738	-1.729	-2.552	-2.534	2.1	-1.503
2	0.922	-1.2	-1.493	6.683	-3.857	2.849	0.583
3	1.174	-0.477	-4.415	-3.178	-0.988	3.64	0.267
4	2.574	-0.548	-0.743	4.07	-1.596	1.243	0.999
5	2.075	1.604	-1.106	-1.38	-6.308	4.356	-2.943
6	2.43	0.802	-4.585	1.379	-1.667	3.269	-1.088
7	4.66	0.059	-3.134	-0.37	-1.949	5.494	0.951
8	1.742	0.444	-1.022	-4.555	-4.096	4.262	-2.354
9	6.055	0.797	-3.448	1.485	0.766	0.293	2.691
10	1.16	1.62	-3.7	-4.887	-1.82	6.414	-3.401
11	1.32	0.448	-4.471	1.744	-0.765	1.278	2.535
12	-0.023	1.871	-3.013	-5.579	-1.432	4.23	0.117
13	-0.761	5.784	-3.208	-0.341	1.208	1.423	3.949
14	0.471	-0.574	-1.632	-1.968	0.012	0.434	1.897
15	-3.326	1.848	-4.329	-2.632	-0.613	1.563	-0.541
16	-0.076	2.386	-6.327	0.879	1.799	-1.085	2.261

$\xi =$



Задание. По номеру фамилии студента в журнале преподавателя выбрать из табл. 8 вариант с ковариационной функцией $K_\xi(\tau)$. Необходимые числовые параметры функции $K_\xi(\tau)$ также заданы в этой таблице. Все предложенные ковариационные функции чётные, интервал определения $T, (t, \tau \in T)$ нужно выбирать таким образом, чтобы на левом и правом конце выбранного интервала $K_\xi(\tau) \rightarrow 0$. Для этого следует после массивов $t, K_\xi^{\text{xx}(1)}$ построить плоский график функции $K_\xi(\tau)$, определив её как функцию параметра τ (см. рис. 4.4). Число точек массивов t и K_ξ^{xx} лучше оставить прежним, т.е. не менять значение $n = 21$. Чтобы

совместить новую длину области определения T и число используемых точек n , необходимо соответствующим образом изменить длину шага по времени dt , сохранив при этом симметричность расположения точек $t_i \in T$ относительно точки $t = 0$.

Т а б л и ц а 8

№ варианта	$K_{\xi}(\tau)$	Численные значения параметров функции $K_{\xi}(\tau)$
1	$De^{-\alpha^2\tau^2}, \alpha > 0$	$D = 3, \alpha = 0.7$
2	$De^{-\alpha \tau } \left(1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2\tau^2}{3} \right), \alpha > 0$	$D = 4, \alpha = 0.2$
3	$De^{-\alpha \tau } \left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta \tau \right), \alpha, \beta > 0$	$D = 7, \alpha = 0.1,$ $\beta = 0.5$
4	$D \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \tau\right)}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \tau},$ $\omega_1 < \omega < \omega_2, \omega_2 > \omega_1 > 0$	$D = 5, \omega_1 = 25,$ $\omega_2 = 50$
5	$D\beta e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau), \alpha, \beta > 0$	$D = 2, \alpha = 0.6,$ $\beta = 0.4$
6	$\frac{D}{1 + \alpha} e^{-\alpha \tau }, \alpha > 0$	$D = 7, \alpha = 0.8$
7	$\frac{\pi}{2(\alpha^2 - \lambda^2)^2} \left[\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha \tau } - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \tau } + \frac{\alpha^2 - \lambda^2}{2\lambda^3} (1 + \lambda \tau) e^{-\lambda \tau } \right], \alpha, \lambda > 0$	$\alpha = 0.1, \lambda = 0.85$
8	$\frac{D}{1 + \alpha^2\tau^2}, \alpha > 0$	$D = 5, \alpha = 0.1$
9	$De^{-\alpha \tau } \cos\beta\tau, \alpha, \beta > 0$	$D = 5, \alpha = 0.25,$ $\beta = 0.35$

№ вариан-та	$K_{\xi}(\tau)$	Численные значения параметров функции $K_{\xi}(\tau)$
10	$2\alpha \frac{\sin \beta \tau}{\tau}, \alpha, \beta > 0$	$\alpha = 0.5, \beta = 0.15$
11	$2\alpha^2 (2 \cos \beta \tau - 1) \frac{\sin \beta \tau}{\tau}, \alpha, \beta > 0$	$\alpha = 0.75, \beta = 0.45$
12	$D \frac{\sin \alpha \tau}{\alpha \tau}, \alpha > 0$	$D = 1.5, \alpha = 0.95$
13	$D e^{-\alpha \tau } \left(\operatorname{ch} \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta \tau \right), \alpha, \beta > 0$	$D = 2.5, \alpha = 0.25, \beta = 0.75, \tau \in [-5, 5]$
14	$\alpha e^{-\alpha \tau }, \alpha > 0$	$\alpha = 0.45$
15	$\begin{cases} D(1 + \alpha \tau), \tau \leq \frac{1}{\alpha}, \\ 0, \tau > \frac{1}{\alpha}, \alpha > 0 \end{cases}$	$D = 10, \alpha = 0.375$

Для некоторых вариантов стандартное начальное приближение вектора \bar{c} перед вычислительным блоком Given...Minerr может оказаться неудовлетворительным. В этом случае после работы блока Given...Minerr выводимые значения компонент вектора \bar{c} не изменяются и остаются равными: $c_i = 0,5, i = \overline{1,10}$. Тогда, может быть даже несколько раз, следует задать другое начальное приближение, добившись реального переопределения компонент c_i .

Лабораторная работа № 3. Моделирование гауссовских случайных процессов с известными корреляционными характеристиками методом скользящего среднего в пакете Matlab

К сожалению, так как язык программирования Matlab не является элементарным и система содержит множество подстраиваемых модулей и подпрограмм, программирование в ней довольно

сложно. В данном случае для формирования системы (4.6) необходимо предварительно создать М-файл с текстом функции, используемой в подпрограмме, находящей корни системы нелинейных алгебраических уравнений вида (4.6).

В данной работе будут использованы следующие подпрограммы системы Matlab: $\text{abs}(x)$ – вычисляет абсолютное значение переменной x ; $\text{plot}(x,y)$ – строит график одномерной функции $y=f(x)$; $\text{normrnd}(0,1)$ – моделирует очередное случайное число со стандартным нормальным распределением; $\text{optimset}(\text{'параметр1'}, \text{'параметр2'}, \dots)$ – задаёт параметры некоторых подпрограмм системы и аппаратных устройств; $\text{fsolve}(\dots)$ – решает систему нелинейных уравнений.

Рассмотрим более подробно синтаксис последней используемой в лабораторной работе № 3 подпрограммы Matlab'a fsolve :

```
x = fsolve( fun, x0);  
[x, exiflag] = fsolve( fun, x0);  
[x, exiflag] = fsolve( fun, x0, options).
```

В ней численно находятся корни нелинейной системы уравнений $f(x)=0$, где x_0 – вектор начальных значений, fun – функция, формирующая систему $f(x)=0$, x – вектор, содержащий корни исходной системы (выходной параметр), exiflag – параметр (или вектор параметров), описывающий выходные условия, а именно: если $\text{exiflag} > 0$, то функция сходится к решению по x , если $\text{exiflag} = 0$ – максимальное число оценки функции или итераций было превышено, если же $\text{exiflag} < 0$ – функция к отыскиваемому решению не сходится.

Параметр options , определяемый в подпрограмме optimset , задаёт уровень отображения на экране, число итераций, информацию о вычислениях на каждой итерации и другие параметры.

Итак, приступим к написанию вычислительной программы для данной лабораторной работы. Для создания М-файла используется встроенный редактор, вызываемый командами *Файл | Создать | М-файл*. В рабочем поле этого редактора вводим следующий текст:

```

function fun=RNSAY(x)
% Составление системы нелинейных алгебраических уравнений
% для вычисления её корней
n=19;
D=5;
alfa=0.1;
dt=1;
for i=1:n
    t(i)=i*dt-11;
    Kksi(i)=2*D*(1-alfa*abs(t(i)));
end
fun=[x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2+x(4)^2+x(5)^2+x(6)^2+x(7)^2+x(8)^2...
+x(9)^2+x(10)^2-Kksi(1);...
x(1)*x(2)+x(2)*x(3)+x(3)*x(4)+x(4)*x(5)+x(5)*x(6)+x(6)*x(7)+...
x(7)*x(8)+x(8)*x(9)+x(9)*x(10)-Kksi(3);...
x(1)*x(3)+x(2)*x(4)+x(3)*x(5)+x(4)*x(6)+x(5)*x(7)+x(6)*x(8)+...
x(7)*x(9)+x(8)*x(10)-Kksi(5);...
x(1)*x(4)+x(2)*x(5)+x(3)*x(6)+x(4)*x(7)+x(5)*x(8)+x(6)*x(9)+...
x(7)*x(10)-Kksi(7);...
x(1)*x(5)+x(2)*x(6)+x(3)*x(7)+x(4)*x(8)+x(5)*x(9)+x(6)*x(10)...
-Kksi(9);...
x(1)*x(6)+x(2)*x(7)+x(3)*x(8)+x(4)*x(9)+x(5)*x(10)-Kksi(11);...
x(1)*x(7)+x(2)*x(8)+x(3)*x(9)+x(4)*x(10)-Kksi(13);...
x(1)*x(8)+x(2)*x(9)+x(3)*x(10)-Kksi(15);...
x(1)*x(9)+x(2)*x(10)-Kksi(17);...
x(1)*x(10)-Kksi(19)];

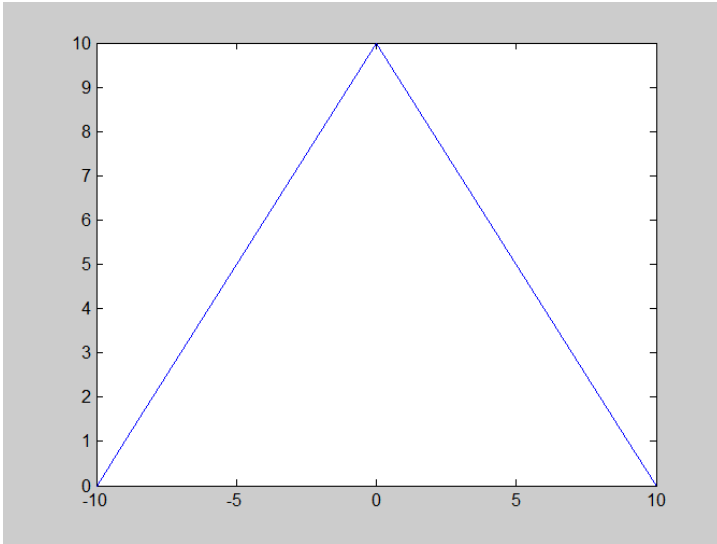
```


M-файл необходимо сохранить командами *Файл | Сохранить как | Имя вспомогательного каталога функций в Matlab | Имя.m*. В нашем случае это команды *Файл | Сохранить как | bin / RNSAY.m*.

Как видно из текста функции RNSAY, она описывает систему (4.6). Эту функцию, сохранённую в виде M-файла, затем можно вызвать из другого M-файла или командной строки головной программы.

Далее вводим текст головной программы:

```
>> N=10;
>> n=21;
>> m=N+n+1;
>> D=5;
>> alfa=0.1;
>> dt=1;
>> for i=1:n
t(i)=i*dt-11;
Kksi(i)=2*D*(1-alfa*abs(t(i)));
end
>> for i=1:n
for j=1:m
xx(j,i)=normrnd(0,1);
end
end
>> x0=[0.5;0.5;0.5;0.5;0.5;0.5;0.5;0.5;0.5;0.5];
>> options=optimset('Display','iter');
>> plot(t,Kksi)
```



Как видно, график ковариационной функции полностью совпадает с графиком на рис. 4.4.

```
>> [x,exiflag]=fsolve(@RNSAY,x0,options)
```

Iteration	Func-count	f(x)	Norm of step	First-order optimality	Trust-region radius
1	11	239.063		16.9	1
2	22	176.416	1	4.78	1
3	23	176.416	2.5	4.78	2.5
4	24	176.416	0.625	4.78	0.625
.....					
65	545	173.018	3.46945e-006	6.87e-005	3.47e-006
66	546	173.018	3.46945e-006	6.87e-005	3.47e-006
67	557	173.018	8.67362e-007	3.76e-005	8.67e-007

Optimizer appears to be converging to a point which is not a root.

Relative function value changing by less than
 $\max(\text{options.TolFun}^2, \text{eps})$ but
sum-of-squares of function values is greater than or equal to
 $\sqrt{\text{options.TolFun}}$

Try again with a new starting guess.

x =

1.0829

0.8075

0.7236

0.7221

0.7632

0.7632

0.7221

0.7236

0.8075

1.0829

exiflag =

6.9046

3.6474

0.9402

-1.5774

-4.0693

-6.6572

-5.2675

-3.7808

-2.2511

-0.8274

Прокомментируем данные полученной таблицы (изображены только её начало и конец). В ней приводятся число итераций, число вычислений функции $f(x)=0$, значения самой функции,

норма шага и т.п. Видно, что решение недостижимо с данными начальными условиями. Это значит, что нужно поменять начальное приближение, т.е. вектор x_0 . Можно, например, задать $x_0 = [0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1]$ или приближение, близкое к решению в пакете Mathcad, т.е. $x_0 = [1.5; -0.2; 0.9; 0.5; 0.6; 0.6; 0.6; 0.7; 0.3; 1.3]$. Обратим внимание на компоненты вектора *exiflag*. Очевидно, что первые три компоненты вектора x определены уверенно, а все остальные нет. Это обстоятельство можно использовать при поиске приемлемого начального приближения. Таким образом, окончательное решение сильно зависит от выбора начального приближения, и решение этой задачи мы полностью оставляем на усмотрение читателя.

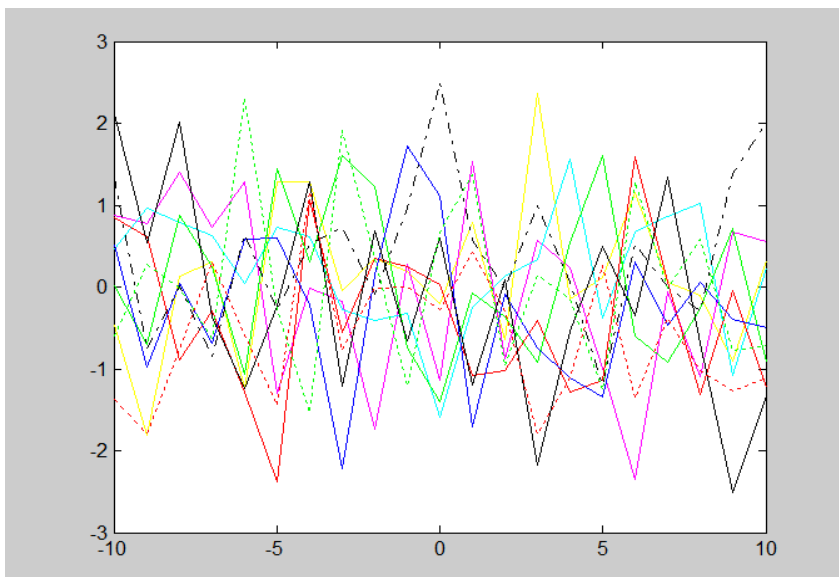
Текст операторов, завершающих головную программу:

```
>> for j=1:m
x1(j)=xx(j,1);
x2(j)=xx(j,2);
x3(j)=xx(j,3);
x4(j)=xx(j,4);
x5(j)=xx(j,5);
x6(j)=xx(j,6);
x7(j)=xx(j,7);
x8(j)=xx(j,8);
x9(j)=xx(j,9);
x10(j)=xx(j,10);
end
>> for i=1:n
for j=1:N
KSI1(i)=x(j)*x1(N+i-j);
KSI2(i)=x(j)*x2(N+i-j);
KSI3(i)=x(j)*x3(N+i-j);
KSI4(i)=x(j)*x4(N+i-j);
```

```

KSI5(i)=x(j)*x5(N+i-j);
KSI6(i)=x(j)*x6(N+i-j);
KSI7(i)=x(j)*x7(N+i-j);
KSI8(i)=x(j)*x8(N+i-j);
KSI9(i)=x(j)*x9(N+i-j);
KSI10(i)=x(j)*x10(N+i-j);
end
end
>> syms s1 s2 s3 s4 s5 s6 s7 s8 s9 s10
>> s1='y';
>> s2='m';
>> s3='c';
>> s4='r';
>> s5='g';
>> s6='b';
>> s7='k';
>> s8='-.k';
>> s9='r';
>> s10='g';
>> plot(t,KSI1,s1),hold on
>> plot(t,KSI2,s2),hold on
>> plot(t,KSI3,s3),hold on
>> plot(t,KSI4,s4),hold on
>> plot(t,KSI5,s5),hold on
>> plot(t,KSI6,s6),hold on
>> plot(t,KSI7,s7),hold on
>> plot(t,KSI8,s8),hold on
>> plot(t,KSI9,s9),hold on
>> plot(t,KSI10,s10)

```



Задание. Выбрать номер варианта из табл. 8 по способу, указанному на с. 148. Далее следовать указаниям к лабораторной работе № 3 на с. 148–150.

Лабораторная работа № 4. Моделирование стационарных гауссовских случайных процессов методом канонических разложений в пакете Mathcad

Рассмотрим случайный процесс с ковариационной функцией $K_{\xi}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos\beta\tau$ и математическим ожиданием $M[\xi(t)] = 0$.

Составим программу моделирования этого стационарного процесса по формулам п. 4.4.5. Сначала определим функцию $S_{\xi}(\omega)$, представив $\cos\beta\tau$ в комплексной форме:

$$\cos\beta\tau = \frac{e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}}{2}, K_{\xi}(\tau) = \frac{D_x}{2} \cdot \left(e^{-\alpha|\tau|+i\beta\tau} + e^{-\alpha|\tau|-i\beta\tau} \right).$$

Тогда $S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$ в силу чётности подынтегральной функции. Далее

$$\begin{aligned}
S_{\xi}(\omega) &= \frac{Dx}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \left(e^{-\alpha|\tau|+i\beta\tau} + e^{-\alpha|\tau|-i\beta\tau} \right) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\
&= \frac{Dx}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau+(\beta-\omega)i\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau-(\beta+\omega)i\tau} d\tau \right] = \\
&= \frac{Dx}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{-\alpha+(\beta-\omega)i} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau+(\beta-\omega)i\tau} d(-\alpha+(\beta-\omega)i)\tau + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{-\alpha-(\beta+\omega)i} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau-(\beta+\omega)i\tau} d(-\alpha-(\beta+\omega)i)\tau \right] = \\
&= \frac{Dx}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-\alpha\tau+(\beta-\omega)i\tau}}{-\alpha+(\beta-\omega)i} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{-\alpha\tau-(\beta+\omega)i\tau}}{-\alpha-(\beta+\omega)i} \Big|_0^{\infty} \right] = \\
&= \frac{Dx}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\alpha-(\beta-\omega)i} + \frac{1}{\alpha+(\beta+\omega)i} \right] = \frac{Dx}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha+(\beta-\omega)i}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha-(\beta+\omega)i}{\alpha^2+(\beta+\omega)^2} \right] = \frac{Dx}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2} + \frac{(\beta-\omega)i}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\beta+\omega)^2} + \frac{(\beta+\omega)i}{\alpha^2+(\beta+\omega)^2} \right] = \\
&= \frac{Dx}{2\pi} \cdot \frac{\alpha^3+\alpha(\beta+\omega)^2+\alpha^3+\alpha(\beta-\omega)^2}{\left[\alpha^2+(\beta-\omega)^2\right]\left[\alpha^2+(\beta+\omega)^2\right]} = \\
&= \frac{Dx \cdot \alpha}{2\pi} \cdot \frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{\left[\alpha^2+(\beta-\omega)^2\right]\left[\alpha^2+(\beta+\omega)^2\right]}.
\end{aligned}$$

По известной функции $S_{\xi}(\omega)$ могут быть вычислены значения дисперсий D_k по формулам (4.26). Однако вначале нужно выбрать значение T_{II} . Так как ковариационная функция процесса (4.23) равна: $K_{\xi}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos k\omega\tau$, то она не должна значимо отличаться от исходной ковариационной функции $K_{\xi}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos\beta\tau$.

Зададим численные значения, определяющие вид $K_\xi(\tau)$. Пусть $Dx=5, \alpha=1.1, \beta=1.5$. Обратим теперь внимание на график ковариационной функции (рис. 4.5). Видно, что при $|\tau|>10$ $K_\xi(\tau)$ стремится к нулю. Выберем поэтому интервал $[-T_{II}, T_{II}] = [-10, 10]$. Так как справедлива формула $\omega = \frac{2\pi}{T_{II}} = \frac{\pi}{5}$, то частоты в формулах (4.26) также определены.

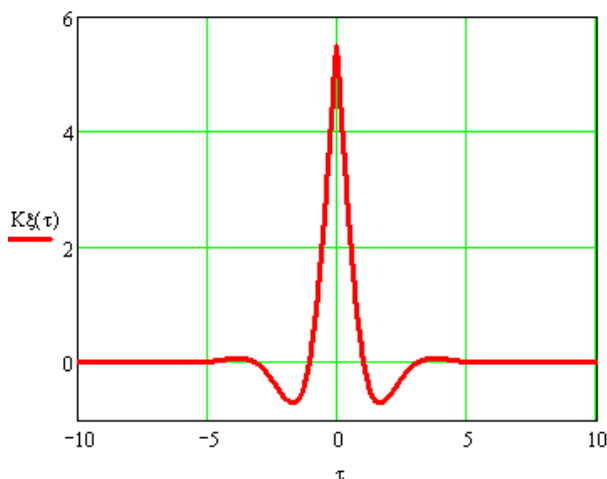


Рис. 4.5. График ковариационной функции

Оценим теперь число членов в формуле (4.23), т.е. величину константы M . По рис. 4.5 примем $\omega_B = 10$, тогда $M = \frac{\omega_B}{2\pi} T_{II} = \frac{10}{2\pi} \cdot 10 = \frac{50}{\pi} \approx 17$ (следует выбрать нечетное число из-за симметричности функций $K_\xi(\tau)$ и $S_\xi(\omega)$). Таким образом, для моделирования стационарного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ по формуле (4.28) необходимо иметь два массива нормальных случай-

ных величин u_k и v_k с параметрами $u_k, v_k \in N(0, D_k)$, где значения

дисперсий определяются по формулам
$$\begin{cases} D_0 = \frac{\pi}{20} S_\xi(0), \\ D_k = \frac{\pi}{10} S_\xi(k\omega), \end{cases} \text{ а } S_\xi(0) \text{ и,}$$

следовательно, D_0 будут соответствовать индексу $k=9$, значения D_k – индексам $k=1 \div 8, k=10 \div 17$ (рис. 4.6).

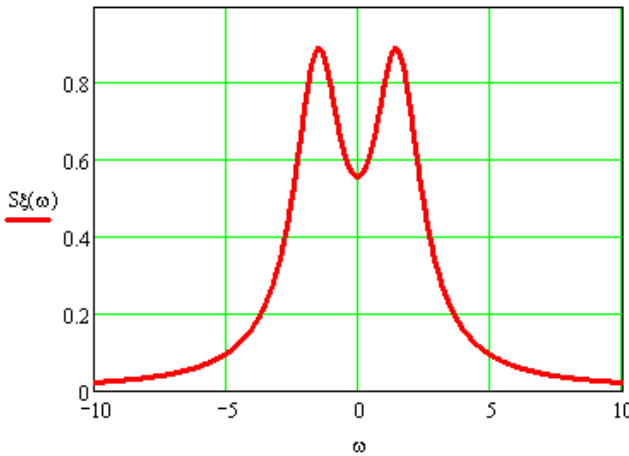


Рис. 4.6. График функции спектральной плотности мощности

Параметр t в формуле (4.28) берётся из интервала $[-T_{II}, T_{II}]$. Разобьем этот отрезок на интервалы длиной $\Delta t = 1$. Получится 21 точка по оси времени, т.е. $t: -10, -9, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9, 10$, так же как и в лабораторной работе № 3. Теперь все параметры и константы моделирования определены, сама же программа в пакете Mathcad может выглядеть следующим образом:

ORIGIN := 1

Dx := 5.5 α := 1.1 β := 1.5 π := 3.1415

$K\xi(\tau) := Dx \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau)$

$$S\xi(\omega) := \frac{Dx}{\pi} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\beta - \omega)^2] \cdot [\alpha^2 + (\beta + \omega)^2]}$$

$$i := 1..21 \quad t_i := i - 11 \quad \omega := \frac{\pi}{5} \quad \omega = 0.628$$

$$d0 := \frac{\pi \cdot S\xi(0)}{20} \quad d0 = 0.087 \quad M := 17$$

$$i := 1..8 \quad dk_i := \frac{\pi}{10} \cdot S\xi[\omega \cdot (i - 9)]$$

$$i := 10..17 \quad dk_i := \frac{\pi}{10} \cdot S\xi[\omega \cdot (i - 9)]$$

$$dk_9 := d0$$

$$i := 1..17 \quad u^{(i)} := \text{rnorm}(17, 0, \sqrt{dk_i}) \quad v^{(i)} := \text{rnorm}(17, 0, \sqrt{dk_i})$$

$$j := 1..10 \quad i := 1..21$$

$$\xi_{i,j} := \sum_{k=1}^M (u_{k,j} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t_i) + v_{k,j} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t_i))$$

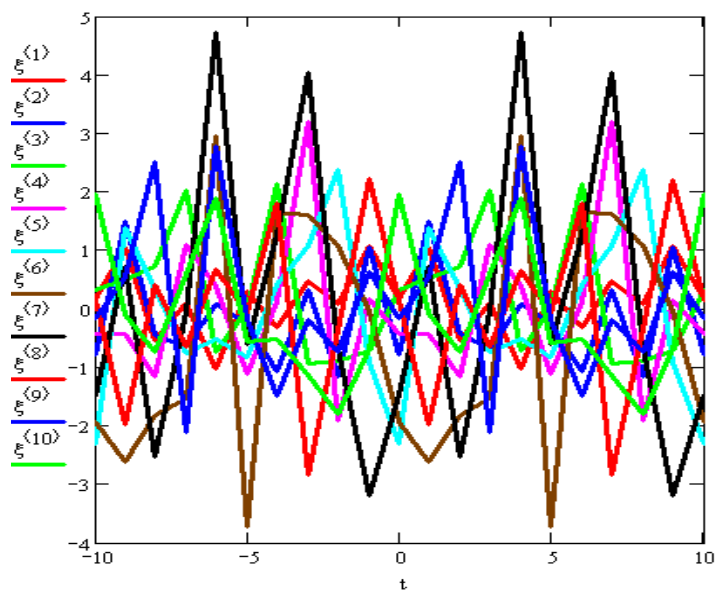
	1
1	0.029
2	0.04
3	0.058
4	0.091
5	0.153
6	0.247
7	0.273
8	0.206
9	0.087
10	0.206
11	0.273
12	0.247
13	0.153
14	0.091
15	0.058
16	0.04

	1
1	-10
2	-9
3	-8
4	-7
5	-6
6	-5
7	-4
8	-3
9	-2
10	-1
11	0
12	1
13	2
14	3
15	4
16	5

	1	2	3	4	5
1	-0.075	0.139	-0.288	-0.143	0.38
2	-0.116	-0.036	0.024	-0.21	-0.452
3	-0.081	-0.129	0.186	0.918	0.056
4	-0.162	-0.144	0.074	-0.086	0.663
5	-0.287	-0.103	2.727·10 ⁻³	-0.386	-0.125
6	7.422·10 ⁻³	0.111	-0.184	0.229	-0.794
7	-0.021	-0.049	-0.099	-0.118	-0.551
u = 8	0.095	0.018	-0.162	-0.363	-0.518
9	0.374	0.252	-0.032	-0.312	-0.202
10	0.138	-0.141	0.245	-5.822·10 ⁻³	0.024
11	0.168	3.723·10 ⁻⁴	0.043	9.632·10 ⁻³	-0.233
12	0.147	0.221	0.124	0.08	-0.129
13	0.156	0.178	0.178	0.148	0.211
14	0.115	-0.579	-3.923·10 ⁻³	0.072	0.085
15	-0.178	-0.431	0.067	-0.206	0.158
16	0.012	0.041	0.039	-0.487	-0.452

	1	2	3	4	5
1	-0.137	3.837·10 ⁻³	0.188	-0.382	-0.11
2	-0.052	0.357	0.389	0.299	0.438
3	-0.022	-0.014	-0.147	-0.353	0.09
4	0.031	-0.094	0.033	-8.533·10 ⁻³	0.013
5	-4.903·10 ⁻³	0.207	-0.287	-0.098	-0.218
6	-0.08	0.278	-0.625	-0.291	0.161
7	-0.042	-0.293	0.364	-0.509	-0.262
v = 8	-0.146	0.257	-0.109	0.105	-0.379
9	0.052	-0.233	-0.434	0.194	0.288
10	-0.145	-0.28	-0.394	-0.065	-0.629
11	-0.085	-0.103	0.055	0.278	-0.177
12	0.01	-0.036	0.124	-0.016	-0.228
13	-0.085	0.128	-0.22	-0.111	-0.111
14	9.589·10 ⁻³	-0.041	0.395	-0.6	0.251
15	-0.14	-0.315	0.143	-0.287	0.261
16	-8.058·10 ⁻³	-4.603·10 ⁻³	0.312	0.326	-0.317

	1	2	3	4	5
1	0.162	-0.775	0.317	-0.437	-2.314
2	1.058	1.488	0.511	-0.421	1.374
3	-0.542	-0.441	0.723	-1.155	0.34
4	0.101	-0.66	2.028	1.09	-0.753
5	-1.024	0.069	-0.728	0.382	-0.524
6	0.308	-0.244	-5.911·10 ⁻³	-1.106	-0.833
7	-0.31	-1.079	2.145	0.128	0.408
8	0.476	0.326	-0.933	3.207	1.078
9	0.074	-1.153	-0.883	-1.909	2.375
10	1.073	1.056	-0.726	0.16	-0.918
11	0.163	-0.774	0.317	-0.435	-2.31
12	1.059	1.489	0.514	-0.422	1.379
13	-0.543	-0.438	0.724	-1.155	0.334
14	0.101	-0.663	2.028	1.092	-0.749
15	-1.023	0.071	-0.727	0.382	-0.522
16	0.308	-0.245	-6.936·10 ⁻³	-1.106	-0.833
17	-0.309	-1.08	2.146	0.131	0.41
18	0.477	0.329	-0.933	3.206	1.079
19	0.075	-1.152	-0.883	-1.909	2.377



Проведём теперь моделирование того же процесса по формуле (4.29). Оно не имеет никаких преимуществ по сравнению с только что проведённым моделированием по формуле (4.28): для запуска обеих формул необходимы массивы двух случайных величин: u_k и $v_k \in N(0, D_k)$ в первом случае (формула (4.28)), A_k , распределённую по закону Рэлея, и $\varphi_k \in R(-\pi, \pi)$ во втором случае (формула (4.29)). Заметим ещё раз, что моделирование по формуле (4.29) возможно лишь при условии нормальности случайного процесса $\xi(t)$.

Непрерывное распределение Рэлея однопараметрическое и имеет следующую функцию плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, x > 0, \text{ где } a - \text{ параметр масштаба и мода распре-$$

деления. Функция распределения $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Выведем формулу моделирования распределения Рэлея методом обратной функции [23]:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \gamma, \gamma \in R(0,1), \quad e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \gamma_1, \gamma_1 = 1 - \gamma, \gamma_1 \in R(0,1),$$

$$-\frac{x^2}{2a^2} = \ln \gamma_1, \quad x^2 = -2a^2 \ln \gamma_1,$$

$$x = a\sqrt{-2\ln \gamma_1}. \quad (4.31)$$

В нашем случае параметр $a^2 = 2D_k$, т.е. $a = \sqrt{2D_k}$ (см. формулу (4.29)). Таким образом, параметр A_k будет определяться формулой (4.31), а параметры φ_k и γ_1 можно смоделировать стандартными программами Mathcada – runif или rnd.

Продолжение программы Mathcada :

$$i := 1..17 \quad j := 1..10 \quad A_{i,j} := \sqrt{-4 \cdot dk_i \cdot \ln(\text{rnd}(1))} \quad \varphi_{i,j} := \text{rnd}(2\pi) - \pi$$

В массиве A – случайные величины A_k , распределённые по Рэлею, в массиве φ – равномерно распределённые случайные величины $\varphi_k \in R(-\pi, \pi)$.

$j := 1..10 \quad i := 1..21$

$$\xi_{1,i,j} := \sum_{k=1}^M (A_{k,j} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t_i + \phi_{k,j}))$$

$A =$

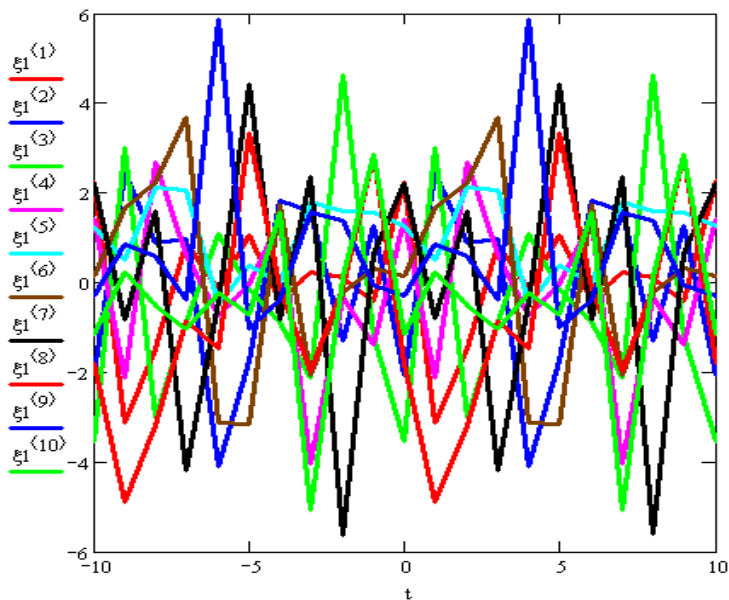
	1	2	3	4	5	6	7
1	0.281	0.727	0.264	0.103	0.388	0.337	0.266
2	0.136	0.141	0.477	0.36	0.811	0.234	0.253
3	0.653	0.131	0.189	0.551	0.304	0.024	0.329
4	0.238	0.514	0.399	0.402	0.216	0.229	0.167
5	0.594	0.519	0.934	0.154	0.654	0.365	0.278
6	0.537	1.389	0.572	0.811	1.144	0.971	0.475
7	0.621	0.07	0.531	1.256	1.52	1.108	0.463
8	0.52	0.909	0.595	0.767	0.98	0.404	1.226

$\phi =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	-0.667	1.573	1.189	2.568	1.073	-0.735	-0.602
2	-0.498	-1.721	1.068	-0.321	1.158	-0.56	1.05
3	1.343	-0.621	-1.199	1.95	1.701	2.18	3.088
4	-1.521	-1.562	-0.745	2.537	0.441	-0.198	0.144
5	1.071	-2.635	-0.757	3.09	2.586	2.468	-1.677
6	1.824	-2.61	2.142	2.396	1.772	0.324	2.747
7	-3.053	0.71	2.826	0.578	0.646	-0.473	-2.196
8	-2.953	-2.934	0.449	2.583	-0.2	-0.375	2.753

$\xi_1 =$

	1	2	3	4	5
1	-1.815	-4.897	2.034	1.437	2.042
2	-1.851	1.129	0.345	4.763	3.281
3	2.384	2.087	-2.787	-1.838	-5.295
4	1.982	0.473	-1.044	-0.066	-1.492
5	-1.976	-0.021	-0.163	2.926	-1.008
6	-0.132	-4.043	0.51	-0.257	-1.15
7	1.999	0.388	-1.98	1.719	-1.241
8	1.549	1.723	-2.518	-0.561	-1.922



$$i := 1..17 \quad c_i := \sqrt{2 \cdot dk_i}$$

$$j := 1..10 \quad i := 1..21$$

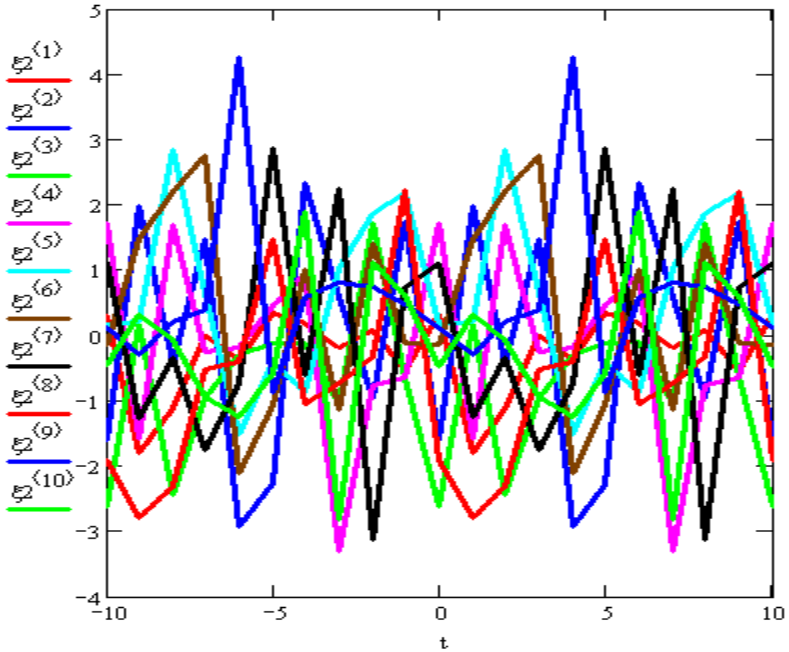
$$\xi_{2i,j} := \sum_{k=1}^M (c_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t_i + \phi_{k,j}))$$

	1	2	3	4
1	0.305	-1.603	-2.616	1.717
2	-1.81	1.972	0.167	-1.579
3	-1.114	-0.437	-2.446	1.692
4	-9.003·10 ⁻³	1.483	-0.962	-0.246
5	-0.355	-2.919	-0.296	-0.189
6	0.351	-2.272	-0.121	0.453
7	0.201	2.345	-0.109	0.947
8	-0.182	0.582	-1.056	-3.296
9	0.087	-0.963	1.708	-0.75
10	-0.543	1.729	-0.641	-0.648
11	0.313	-1.605	-2.613	1.718
12	-1.807	1.972	0.166	-1.582
13	-1.113	-0.436	-2.452	1.69
14	-0.014	1.483	-0.963	-0.25
15	-0.353	-2.921	-0.294	-0.19
16	0.352	-2.277	-0.123	0.456

$\xi_2 =$

	1
1	0.241
2	0.282
3	0.341
4	0.426
5	0.553
6	0.702
7	0.738
8	0.642
9	0.418
10	0.642
11	0.738
12	0.702
13	0.553
14	0.426
15	0.341
16	0.282

$c =$



Наконец оценим величину методической погрешности, допущенной при моделировании о формулам (4.28)-(4.30). Это можно сделать, например, из условия

$$\frac{1}{K_{\xi}(0)} \sum_{k=M+1}^{\infty} D_k^2 < \varepsilon. \quad \text{Заменим } \sum_{k=M+1}^{\infty} D_k^2 \text{ на}$$

$2 \sum_{k=M+1}^{100} D_k^2$, при $t > 0$ в силу чётности функции спектральной плотности мощности и выберем $t \in [0, 20]$. Тогда

$$i := 9..100 \quad D_{\varepsilon_i} := \frac{\pi}{10} \cdot S_{\xi}(\omega \cdot i)$$

$$\varepsilon := \frac{2}{D_x} \cdot \sum_{k=9}^{100} D_{\varepsilon_k} \quad \varepsilon = 0.064$$

	1
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0.022
10	0.017
11	0.014
12	0.012
13	9.819·10 ⁻³
14	8.377·10 ⁻³
15	7.235·10 ⁻³
16	6.314·10 ⁻³

Задание. Выбрать вариант задания из табл. 9 таким же образом, как в лабораторной работе № 3, считая математическое ожидание всех процессов равным нулю. В табл. 9 задана не только ковариационная функция, но и соответствующая ей функция спектральной плотности, поэтому подготовительную работу, связанную с вычислением $S_{\xi}(\omega)$, следует опустить.

Прежде всего нужно построить графики обеих функций $K_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$ и по этим графикам определить пределы изменения τ и ω , при которых $K_{\xi}(\tau) \rightarrow 0$, $S_{\xi}(\omega) \rightarrow 0$, тем самым выбрав величины T_{II, ω_B} и M . Все приведённые в табл. 9 функции $K_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$ чётные, поэтому следует выбрать интервал времени, симметричный относительно точки $t = 0$, оставив при этом 21 отсчёт для каждой реализации моделируемого случайного процесса.

Т а б л и ц а 9

№ варианта	$K_{\xi}(\tau)$	$S_{\xi}(\omega)$	Параметры функций $K_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$
1	$De^{-\alpha \tau }, \alpha > 0$	$\frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	$D = 7,$ $\alpha = 0.325$
2	$De^{-\alpha \tau } \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right),$ $\alpha, \beta > 0$	$\frac{D\alpha}{\pi} \times$ $\times \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\beta^2}$	$D = 1.5,$ $\alpha = 0.75,$ $\beta = 0.55$
3	$De^{-\alpha \tau } \left(\cos \beta \tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right),$ $\alpha, \beta > 0, \alpha \geq \beta$	$\frac{D\alpha}{\pi} \times$ $\times \frac{2\omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) - 4\alpha^2\beta^2}$	$D = 8,$ $\alpha = 0.625,$ $\beta = 0.385,$ $T_{II} = 10,$ $\omega_B = 10$

Продолжение табл. 9

№ варианта	$K_{\xi}(\tau)$	$S_{\xi}(\omega)$	Параметры функций $K_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$
4	$De^{-\alpha \tau }(\text{ch}\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\text{sh}\beta \tau),$ $\alpha, \beta > 0$	$\frac{D\alpha}{\pi} \times \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{[(\alpha - \beta)^2 + \omega^2][(\alpha + \beta)^2 + \omega^2]}$	$D = 3,$ $\alpha = 0.65,$ $\beta = 0.25$
5	$D(1 - \tau)\mathbb{1}(1 - \tau),$ $\mathbb{1}(x)$ – единичная функция	$\frac{D}{2\pi} \cdot \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2$	$D = 5$
6	$De^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau),$ $\alpha > 0$	$\frac{D}{\pi} \cdot \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$	$D = 2,$ $\alpha = 0.5$
7	$De^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2\tau^2}{3}), \alpha > 0$	$\frac{D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^4}{3(\alpha^2 + \omega^2)^4}$	$D = 9,$ $\alpha = 0.65$
8	$De^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + 2\alpha\tau^2 + \frac{\alpha^3 \tau ^3}{3}),$ $\alpha > 0$	$\frac{D\alpha}{\pi} \cdot \frac{16\alpha^3\omega^4}{(\alpha^2 + \omega^2)^4}$	$D = 4,$ $\alpha = 0.725$
9	$De^{-(\alpha\tau)^3}, \alpha > 0$	$\frac{D}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}$	$D = 2.5,$ $\alpha = 0.285$
10	$D\frac{\sin\alpha\tau}{\alpha\tau}, \alpha > 0$	$\begin{cases} \frac{D}{2\alpha}, \omega \leq \alpha, \\ 0, \omega > \alpha \end{cases}$	$D = 9,$ $\alpha = 0.995$
11	$De^{-\alpha^2\tau^2}, \alpha > 0$	$\frac{D}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$	$D = 2.5,$ $\alpha = 0.725$

№ варианта	$K_{\xi}(\tau)$	$S_{\xi}(\omega)$	Параметры функций $K_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$
12	$\frac{D}{1 + \alpha^2 \tau^2}, \alpha > 0$	$\frac{D}{2\alpha} e^{-\frac{ \omega }{\alpha}}$	$D = 9,$ $\alpha = 0.275$
13	$\begin{cases} D(1 + \alpha \tau), \tau \leq \frac{1}{\alpha}, \\ 0, \tau > \frac{1}{\alpha}, \alpha > 0 \end{cases}$	$\frac{2D}{\alpha\pi} \cdot \frac{\sin^2 \omega/\alpha}{(\omega/\alpha)^2}$	$D = 3.75,$ $\alpha = 0.375$
14	$D \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau\right)}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau},$ $\omega_1 < \omega < \omega_2,$ $\omega_2 > \omega_1 > 0$	$\begin{cases} \frac{D}{\omega_2 - \omega_1}, \omega_1 < \omega < \omega_2, \\ \omega_2 > \omega_1 > 0, \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$	$D = 10,$ $\omega_1 = 25,$ $\omega_2 = 75$
15	$\frac{D}{1 + \alpha} e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2\alpha D}{\pi} \cdot \frac{1}{(\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + 1)}$	$D = 4.75,$ $\alpha = 0.385$

Лабораторная работа № 4. Моделирование стационарных гауссовских случайных процессов методом канонических разложений в пакете Matlab

Так как в этой лабораторной работе функция спектральной плотности мощности $S_{\xi}(\omega)$ может быть выбрана по ковариационной функции $K_{\xi}(t)$ из табл. 9, то вычислять её не требуется.

Опишем последовательность действий для моделирования реализаций случайного процесса $\xi(t)$ только по формуле (4.28),

оставив программирование по формулам (4.29) и (4.30) на усмотрение читателя. По смыслу лабораторной работы необходимо иметь определение функций $K_{\xi}(t)$ и $S_{\xi}(\omega)$ как функций одного переменного. В головной программе пакета Matlab это можно сделать лишь для дискретных значений аргумента, определив аргумент и саму функцию как вектор. Поэтому, как и в предыдущей лабораторной работе, создадим и сохраним два М-файла, определяющих функции $K_{\xi}(t)$ и $S_{\xi}(\omega)$. Ниже приводится текст этих функций.

```
function f1=Kksi(t,D,alfa,beta)
f1=D*exp(-alfa*abs(t))*cos(beta*t);
function f2=Sksi(om,D,alfa,beta)
a2=alfa^2;
b2=beta^2;
o2=om^2;
f2=D/pi*alfa*(a2+b2+o2)/((a2+(beta-
om)^2)*(a2+(beta+om)^2));
```

Операторы головной программы в пакете Matlab имеют следующий вид:

```
» Dx=5.5;
» alfa=1.1;
» beta=1.5;
» n=21;
» omega=pi/5;
» for i=1:n
t(i)=i-11;
end
» for i=1:101
arg(i)=i-51;
```

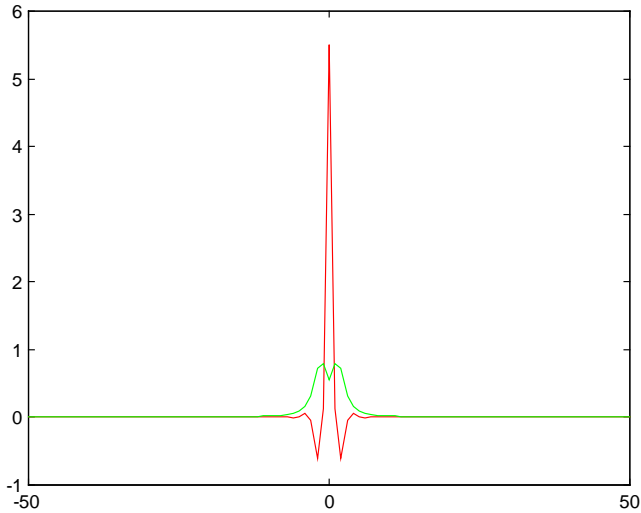
```
K1(i)=Kksi(arg(i),Dx,alfa,beta);
```

```
S1(i)=Sksi(arg(i),Dx,alfa,beta);
```

```
end
```

```
» plot(arg,K1,'r'),hold on
```

```
» plot(arg,S1,'g')
```



```
» d0=pi*Sksi(0,Dx,alfa,beta)/20;
```

```
d0 =
```

```
0.0874
```

```
» M=17;
```

```
» for i=1:8
```

```
dk(i)=pi/10*Sksi(omega*(i-9),Dx,alfa,beta);
```

```
end
```

```
» for i=10:17
```

```
dk(i)=pi/10*Sksi(omega*(i-9),Dx,alfa,beta);
```

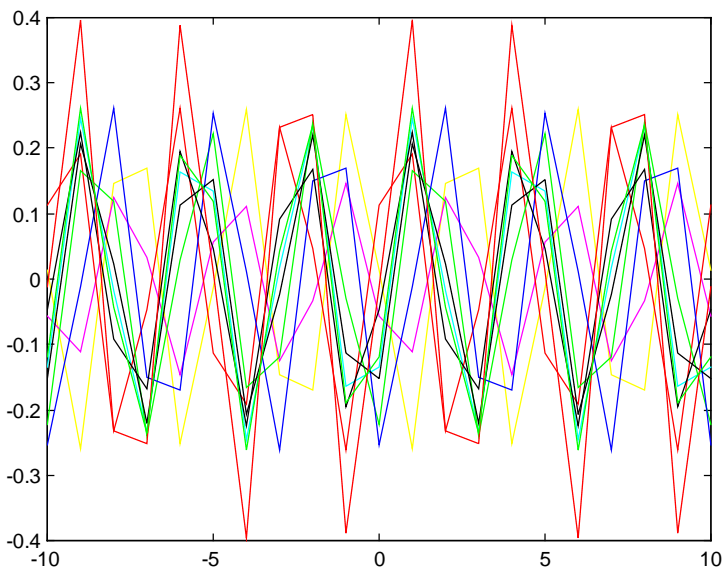
```

end
» dk(9)=d0;
» for i=1:17
a=sqrt(dk(i));
for j=1:17
u(i,j)=a*normrnd(0,1);
v(i,j)=a*normrnd(0,1);
end
end
» for j=1:10
for i=1:21
for k=1:M
KSI(i,j)=u(k,j)*cos(k*omega*t(i))+v(k,j)*sin(k*omega*t(i));
end
end
end
» for i=1:21
KSI1(i)=KSI(i,1);
KSI2(i)=KSI(i,2);
KSI3(i)=KSI(i,3);
KSI4(i)=KSI(i,4);
KSI5(i)=KSI(i,5);
KSI6(i)=KSI(i,6);
KSI7(i)=KSI(i,7);
KSI8(i)=KSI(i,8);
KSI9(i)=KSI(i,9);

```

```
KSI10(i)=KSI(i,10);  
end  
» syms s1 s2 s3 s4 s5 s6 s7 s8 s9 s10  
» s1='y';  
» s2='m';  
» s3='c';  
» s4='r';  
» s5='g';  
» s6='b';  
» s7='k';  
» s8='-.k';  
» s9='r';  
» s10='g';  
» plot(t,KSI1,s1),hold on  
» plot(t,KSI2,s2),hold on  
» plot(t,KSI3,s3),hold on  
» plot(t,KSI4,s4),hold on  
» plot(t,KSI5,s5),hold on  
» plot(t,KSI6,s6),hold on  
» plot(t,KSI7,s7),hold on  
» plot(t,KSI8,s8),hold on  
» plot(t,KSI9,s9),hold on  
» plot(t,KSI10,s10)
```

Задание. Инструкцию по выбору и выполнению задания см. на с. 169–171.



Лабораторная работа № 5. Моделирование дискретных однородных марковских цепей в пакете Mathcad

Согласно теории, изложенной в п. 4.3.6, моделирование дискретных однородных марковских цепей осуществляется сравнительно легко и сводится, по сути, к моделированию дискретной случайной величины по её ряду распределения. Для осуществления самого процесса моделирования необходимо задать целый комплекс начальных условий.

Во-первых, следует сразу определить верхнюю строку табл. 4 (см. п. 4.4.6), т.е. значения всех возможных состояний марковской цепи, расположив их в таблице по возрастанию соответствующих им вероятностей. При моделировании значений дискретной марковской цепи по вычисленным по формуле (2.45) вероятностям $p_j(k)$ можно применить метод обратной функции [23] для дискретных случайных величин. Основные идеи этого метода заключаются в следующем.

Пусть имеется дискретная случайная величина $\xi(\omega)$, принимающая значения $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq \dots$ с вероятностями

$p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$. Её ряд распределения, очевидно, будет иметь вид , приведенный в табл. 10.

Т а б л и ц а 10

$\xi(\omega)$	x_1	x_2	\dots	x_k	\dots
P	p_1	p_2	\dots	p_k	\dots

При этом интегральная функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$ равна:

$$\begin{cases} F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = \sum_{i=1}^n p_i, x_n \leq x < x_{n+1}, n = 1, 2, \dots, \\ F_\xi(x) = 0, x < x_1. \end{cases}$$

Если γ – равномерно распределённая на $(0,1)$ случайная величина, то случайная величина $\xi(\omega)$ получается с помощью преобразования $\xi = F_\xi^{-1}(\gamma)$, где F_ξ^{-1} – функция, обратная функции распределения $F_\xi(x)$ случайной величины $\xi(\omega)$. В таком случае самый простой алгоритм моделирования случайной величины $\xi(\omega)$ по заданному в табл. 10 ряду распределения может быть таким:

$$\begin{aligned} &\text{если } \gamma < p_1, \text{ то } \xi = x_1, \text{ иначе,} \\ &\text{если } \gamma < p_1 + p_2, \text{ то } \xi = x_2, \text{ иначе,} \\ &\dots\dots\dots \\ &\text{если } \gamma < \sum_{i=1}^k p_i, \text{ то } \xi = x_k, \text{ иначе,} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{4.32}$$

Выберем, как в двух предыдущих лабораторных работах, число различных реализаций случайного процесса $n = 10$, а число шагов $k = 21$. В этом случае вектор возможных состояний марковской цепи может быть, например, таким $\xi(\omega)$: -7, -5.5, -3.25, -2, -1.1, 1, 2.5, 3.7, 5, 6.4. При этом выбранные значения могут располагаться в любом порядке, т.е. могут быть выстроены произвольно по возрастанию вероятностей, например так: 2.5, -7, 5, 1, -3.25, 6.4, -2, -5.5, -1.1, 3.7. Этим расположением фактически задаётся однамерная функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$.

Во-вторых, для однородной марковской цепи нужно задать матрицу переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$, $p_{ij} = \text{const}$. Это квадратная матрица $P_{n \times n}$, где n – число возможных состояний марковской цепи. Матрица P имеет в соответствии с выбранными константами размерность 10×10 . Зададим переходные вероятности постоянными, т.е. марковская цепь будет однородной. Тогда, например,

$$P = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.12 & 0.07 & 0.05 & 0.19 & 0.11 & 0.06 & 0.18 & 0.04 & 0.08 \\ - & 0.05 & 0.15 & 0.25 & 0.31 & 0.04 & 0.03 & 0.06 & 0.09 & 0.02 \\ - & - & 0.20 & 0.21 & 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.04 & 0.25 & 0.24 \\ - & - & - & 0.15 & 0.16 & 0.17 & 0.18 & 0.19 & 0.07 & 0.08 \\ - & - & - & - & 0.07 & 0.12 & 0.31 & 0.21 & 0.25 & 0.04 \\ - & - & - & - & - & 0.35 & 0.15 & 0.40 & 0.05 & 0.05 \\ - & - & - & - & - & - & 0.41 & 0.27 & 0.16 & 0.16 \\ - & - & - & - & - & - & - & 0.54 & 0.21 & 0.25 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0.65 & 0.35 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & 1.00 \end{pmatrix}$$

В-третьих, зададим вектор начального распределения вероятностей: $p_1(0), p_2(0), \dots, p_{10}(0)$. Пусть начальные вероятности распределены по усечённому геометрическому распределению

$$p(x) = pq^x, x = 0, 1, \dots, 9, p(10) = 1 - \sum_{i=1}^9 p(i). \quad \text{Тогда} \quad p_1(0) = 0.3,$$

$p_2(0) = 0.21$, $p_3(0) = 0.15$, $p_4(0) = 0.10$, $p_5(0) = 0.07$, $p_6(0) = 0.05$,
 $p_7(0) = 0.04$, $p_8(0) = 0.02$, $p_9(0) = 0.02$, $p_{10}(0) = 0.04$. Теперь есть все данные для программы в пакете Mathcad.

ORIGIN := 1

$$n := 10 \quad k := 21 \quad \xi_1 := 2.5 \quad \xi_2 := -7 \quad \xi_3 := 5 \quad \xi_4 := 1$$

$$\xi_5 := -3.25 \quad \xi_6 := 6.4 \quad \xi_7 := -2 \quad \xi_8 := -5.5$$

$$\xi_9 := -1.1 \quad \xi_{10} := 3.7$$

$$P := \begin{pmatrix} 0.10 & 0.12 & 0.07 & 0.05 & 0.19 & 0.11 & 0.06 & 0.18 & 0.04 & 0.08 \\ 0 & 0.05 & 0.15 & 0.25 & 0.31 & 0.04 & 0.03 & 0.06 & 0.09 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.21 & 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.04 & 0.25 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.16 & 0.17 & 0.18 & 0.19 & 0.07 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 & 0.12 & 0.31 & 0.21 & 0.25 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0.15 & 0.40 & 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.41 & 0.27 & 0.16 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.54 & 0.21 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$$P_{1,1} = 0.1 \quad P_{8,6} = 0 \quad P_{9,10} = 0.35$$

$$\begin{aligned} pp_{1,1} &:= 0.3 & pp_{2,1} &:= 0.21 & pp_{3,1} &:= 0.15 \\ pp_{4,1} &:= 0.10 & pp_{5,1} &:= 0.07 & pp_{6,1} &:= 0.05 \\ pp_{7,1} &:= 0.04 & pp_{8,1} &:= 0.02 & pp_{9,1} &:= 0.02 \\ pp_{10,1} &:= 0.04 \end{aligned}$$

$$\xi =$$

	1
1	2.5
2	-7
3	5
4	1
5	-3.25
6	6.4
7	-2
8	-5.5
9	-1.1
10	3.7

$$i := 1 \dots n \quad j := 2 \dots k+1 \quad pp_{i,j} := \sum_{m=1}^n (pp_{m,j-1} \cdot P_{m,i})$$

	1	2	3	4
1	0.3	0.03	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
2	0.21	0.047	$5.925 \cdot 10^{-3}$	$6.562 \cdot 10^{-4}$
3	0.15	0.083	0.026	$6.214 \cdot 10^{-3}$
4	0.1	0.114	0.048	0.014
pp = 5	0.07	0.144	0.049	0.014
6	0.05	0.087	0.074	0.041
7	0.04	0.092	0.122	0.086
8	0.02	0.148	0.203	0.194
9	0.02	0.119	0.198	0.217
10	0.04	0.136	0.272	0.427

Теперь займёмся моделированием реализаций по отсчётам заданной марковской цепи. Первый столбец матрицы pp содержит начальное распределение вероятностей, второй – вероятности состояний первого шага, т.е. первого отсчёта, третий – вероятности состояний второго отсчёта и т.д. Следует вероятности, содержащиеся в i -м столбце матрицы pp , упорядочить по возрастанию и сопоставить с вектором ξ , содержащим по условию все возможные состояния марковской цепи на данном шаге (в данный момент). Два этих вектора образуют ряд распределения случайной величины $\xi(\omega)$ на данном шаге (в данный момент). По полученному ряду распределения нужно смоделировать значения состояний заданной марковской цепи на данном шаге (в данный момент или на данный отсчёт). Это можно сделать следующими подпрограммами на встроенном языке программирования пакета Mathcad:

```

uporjad(x) :=
| n ← rows(x)
| for i ∈ 1..n-1
|   for j ∈ i+1..n
|     a ← xi
|     if xj < xi
|       | xi ← xj
|       | xj ← a
| x

```

$x := \text{uporjad}(pp^{(2)})$

```

rjadraspred(p, x) := | n ← rows(p)
                    | for i ∈ 1..n      y := rjadraspred(x, ξ)
                    |   | y ← rnd(1)
                    |   | a ← 0
                    |   | for j ∈ 1..n
                    |   |   | a ← a + pj
                    |   |   | if y < a
                    |   |   |   | yi ← xj
                    |   |   |   | break
                    | y

```

	1
1	0.03
2	0.047
3	0.083
4	0.087
5	0.092
6	0.114
7	0.119
8	0.136
9	0.144
10	0.148

 $x =$

	1
1	2.5
2	1
3	-5.5
4	6.4
5	-1.1
6	1
7	-1.1
8	-3.25
9	5
10	5

 $y =$

```

tcshepmarkova(k, pp, ξ) := | for i ∈ 1..k
                          |   | x ← pp<i+1>
                          |   | y ← uporjad(x)
                          |   | z ← rjadraspred(y, ξ)
                          |   | xx<i> ← z
                          | xx

```

zz := tcshpmarkova(k, pp, ξ)

zz =		1	2	3	4	5	6	7	$\xi =$		1
	1	3.7	3.7	-1.1	3.7	-1.1	3.7	3.7		1	2.5
	2	5	3.7	3.7	3.7	-1.1	3.7	3.7		2	-7
	3	2.5	-1.1	1	3.7	3.7	3.7	3.7		3	5
	4	-2	-5.5	-5.5	-5.5	3.7	3.7	3.7		4	1
	5	-5.5	3.7	3.7	-1.1	3.7	-1.1	3.7		5	-3.25
	6	1	3.7	3.7	3.7	-1.1	3.7	3.7		6	6.4
	7	6.4	3.7	-1.1	3.7	3.7	3.7	3.7		7	-2
	8	-7	-1.1	3.7	-5.5	-1.1	3.7	3.7		8	-5.5
	9	-1.1	-2	-1.1	3.7	3.7	3.7	-5.5		9	-1.1
10	-2	3.7	3.7	3.7	-1.1	3.7	3.7	10	3.7		

i := 1..k t_i := i z := zz^T

z =		1	2	3	4	5	6	7	t =		1
	1	3.7	5	2.5	-2	-5.5	1	6.4		1	1
	2	3.7	3.7	-1.1	-5.5	3.7	3.7	3.7		2	2
	3	-1.1	3.7	1	-5.5	3.7	3.7	-1.1		3	3
	4	3.7	3.7	3.7	-5.5	-1.1	3.7	3.7		4	4
	5	-1.1	-1.1	3.7	3.7	3.7	-1.1	3.7		5	5
	6	3.7	3.7	3.7	3.7	-1.1	3.7	3.7		6	6
	7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		7	7
	8	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		8	8
	9	3.7	-5.5	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		9	9
	10	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		10	10
	11	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		11	11
	12	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		12	12
	13	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		13	13
	14	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		14	14
	15	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7		15	15
16	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	16	16		

Прокомментируем назначение подпрограмм на встроенном языке программирования пакета Mathcad. Подпрограмма `uporjad(x)` упорядочивает массив x (в данном случае это массив вероятностей) по возрастанию. Следующая подпрограмма – `gjadraspred` – моделирует значения случайной величины $\xi(\omega)$ по её заданному ряду распределения по формулам (4.32). Параметр p – это вектор вероятностей, параметр x – соответствующий ему вектор возможных значений случайной величины $\xi(\omega)$. Подпрограмма `tcshepmarkova` моделирует значения марковской цепи по шагам (времени) для различных реализаций. В результате её работы в столбцах массива `xx` будут содержаться все возможные значения цепи Маркова для данного отсчёта для всех вычисляемых реализаций, т.е. все значения случайной величины $\xi(\omega, t)$ для конкретного t .

```

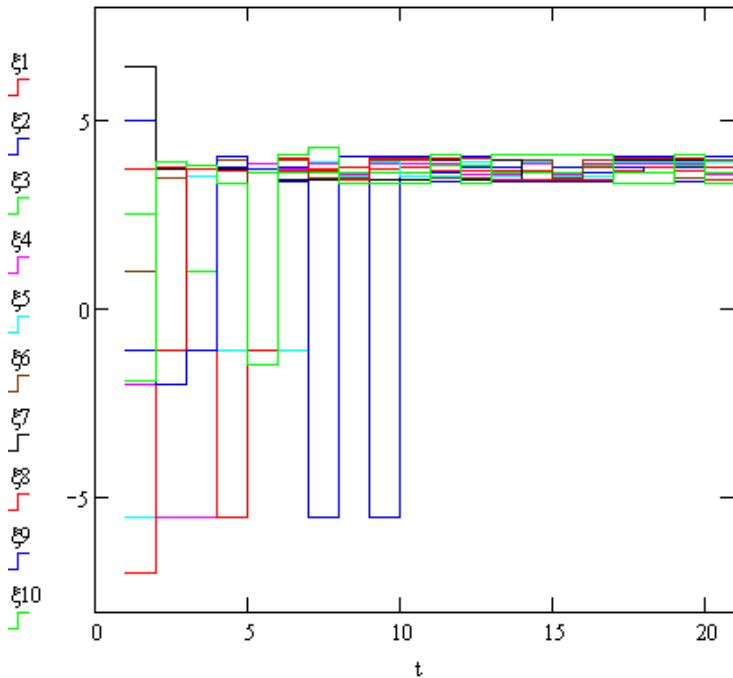
table(z, ε) :=
  k ← rows(z)
  n ← cols(z)
  for i ∈ 1..k
    m ← 0
    for j ∈ 2..n
      m ← m + 1
      a ← zi,j-1
      if |a - zi,j| < 10-3
        γ ← rnd(1)
        a ← -a if γ < 0.5
        zi,j-1 ← zi,j-1 + a·m·ε
      if j = n
        m ← m + 1
        zi,j ← zi,j - a·m·ε
  z
z := table(z, 0.01)

```

Подпрограмма `table` имеет вспомогательное значение. К сожалению, во многих случаях при неудачном задании матрицы переходных вероятностей P вероятности большинства возможных состояний $p_j(k)$ стремятся к нулю на шагах больших значений. Таким образом, начиная с некоторого шага (обычно $k \approx 5 \div 7$), все возможные состояния марковской цепи совпадают с наиболее вероятным значением. Это означает, что на графике реализации марковской цепи, начиная с некоторого шага k , сливаются в одну линию. Чтобы избежать этого, подпрограмма `table` вносит изменения в значения переменных столбцов матрицы z в размере $a \cdot \varepsilon \cdot t$ раз, где a – исходное значение переменной, ε – процент возможных изменений, t – число совпадений данного значения переменной в предыдущих столбцах матрицы z . Это делается лишь для того, чтобы на графике реализаций моделируемой марковской цепи значения реализаций для больших значений шагов k не сливались в одну линию (при неудачном задании матрицы переходных вероятностей P).

	1	2	3	4	5	6
1	3.7	5	2.5	-2	-5.5	1
2	3.737	3.7	-1.1	-5.5	3.885	3.478
3	-1.1	3.7	1	-5.5	3.515	3.7
4	3.663	3.774	3.7	-5.5	-1.1	3.922
5	-1.111	-1.1	3.589	3.848	3.7	-1.1
6	3.663	3.774	3.589	3.7	-1.1	3.922
7	3.663	3.626	3.589	3.848	3.885	3.478
8	3.737	3.626	3.589	3.552	3.515	3.478
9	3.7	-5.5	3.589	3.848	3.885	3.922
10	3.737	3.626	3.589	3.848	3.515	3.922
11	3.663	3.626	3.811	3.848	3.515	3.478
12	3.663	3.774	3.811	3.552	3.885	3.478
13	3.663	3.774	3.589	3.552	3.515	3.922
14	3.663	3.626	3.589	3.848	3.885	3.922
15	3.737	3.774	3.589	3.552	3.515	3.478
16	3.737	3.626	3.811	3.848	3.515	3.922

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= z^{(1)} & \xi_2 &:= z^{(2)} & \xi_3 &:= z^{(3)} & \xi_4 &:= z^{(4)} \\ \xi_5 &:= z^{(5)} & \xi_6 &:= z^{(6)} & \xi_7 &:= z^{(7)} & \xi_8 &:= z^{(8)} \\ \xi_9 &:= z^{(9)} & \xi_{10} &:= z^{(10)} \end{aligned}$$



Задание. Выбрав из приведённого задания номер варианта по номеру своей фамилии в журнале преподавателя, обратите внимание на следующее. В каждом варианте в пункте а) задаются вектор возможных состояний марковской цепи ξ_0 и отрезок $X = [a, b]$ – область определения всех компонент вектора возможных состояний. В эталонной программе метода (см. лаб. раб. №5) используется подпрограмма `gjadraspred`, моделирующая значения случайной величины $\xi(\omega)$ по её заданному ряду распределения.

Однако эквивалентные значения можно смоделировать по заданной области определения методом кусочной аппроксимации (см. лаб. раб. №7) с помощью подпрограммы kusapp. Какой из этих двух методов выбрать для моделирования значений случайной величины $\xi(\omega)$, определяет для каждого студента преподаватель, проводящий лабораторные занятия.

В пункте б) задана матрица переходных вероятностей однородной марковской цепи $P_{10 \times 10}$, в пункте в) – вектор начального распределения вероятностей $pp_{10 \times 1}$ или условия, по которым он может быть вычислен.

Вариант 1

$$\text{а) } X = [-10,5], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} -0.215 \\ 4.99 \\ -8.07 \\ 0.795 \\ -3.51 \\ -9.49 \\ 2.64 \\ 1.55 \\ -5.13 \\ -1.04 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.22 & 0.20 & 0.15 & 0.13 & 0.06 & 0.05 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0 & 0.12 & 0.18 & 0.12 & 0.05 & 0.31 & 0.06 & 0.07 & 0.05 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0.14 & 0.26 & 0.25 & 0.13 & 0.09 & 0.05 & 0.04 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0.16 & 0.30 & 0.24 & 0.20 & 0.04 & 0.04 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.18 & 0.18 & 0.27 & 0.17 & 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.35 & 0.21 & 0.14 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.41 & 0.25 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.55 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется биномиальному закону $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ с параметрами $p = 0.8, n = 9$.

Вариант 2

$$a) X = [-6, 6], \xi_0 = \begin{pmatrix} -4.02 \\ 5.34 \\ -0.87 \\ 3.12 \\ -1.91 \\ -3.15 \\ 0.25 \\ 1.67 \\ -2.50 \\ 4.35 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.22 & 0.20 & 0.15 & 0.13 & 0.06 & 0.05 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0 & 0.12 & 0.18 & 0.12 & 0.05 & 0.31 & 0.06 & 0.07 & 0.05 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0.14 & 0.26 & 0.25 & 0.13 & 0.09 & 0.05 & 0.04 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0.16 & 0.30 & 0.24 & 0.20 & 0.04 & 0.04 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.18 & 0.18 & 0.27 & 0.17 & 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.35 & 0.21 & 0.14 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.41 & 0.25 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.55 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется нормальному закону с параметрами $m_x = -0.5, \sigma_x = 2.5$. Вероятности состояний компонент вектора ξ_0 можно вычислить с помощью встроенной подпрограммы пакета Mathcad: `dnorm`. Затем непременно следует проверить выполнение условия нормировки массива pp .

Вариант 3

$$a) X = [-10,10], \xi_0 = \begin{pmatrix} -6.18 \\ -9.37 \\ 0.15 \\ 2.97 \\ 4.02 \\ -0.06 \\ 8.50 \\ -2.50 \\ -3.87 \\ 9.95 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.09 & 0.13 & 0.13 & 0.12 & 0.12 & 0.10 & 0.10 & 0.08 & 0.07 \\ 0 & 0.08 & 0.12 & 0.16 & 0.15 & 0.13 & 0.08 & 0.08 & 0.10 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.08 & 0.14 & 0.16 & 0.14 & 0.14 & 0.12 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.18 & 0.18 & 0.16 & 0.14 & 0.12 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0.19 & 0.20 & 0.17 & 0.15 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.16 & 0.24 & 0.25 & 0.20 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.18 & 0.32 & 0.30 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.30 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется распределению Стьюдента с двумя степенями свободы. Вероятности состояний компонент вектора ξ_0 можно вычислить с помощью встроенной подпрограммы пакета Mathcad: dt. Затем непременно следует проверить выполнение условия нормировки массива pp .

Вариант 4

$$а) X = [0,7], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} 6.99 \\ 2.15 \\ 0.07 \\ 1.32 \\ 3.33 \\ 2.05 \\ 1.07 \\ 0.69 \\ 2.75 \\ 4.95 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.10 & 0.11 & 0.10 & 0.11 & 0.10 & 0.11 & 0.10 & 0.11 & 0.10 \\ 0 & 0.07 & 0.12 & 0.12 & 0.11 & 0.11 & 0.13 & 0.11 & 0.12 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.12 & 0.14 & 0.10 & 0.16 & 0.15 & 0.11 & 0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.20 & 0.15 & 0.13 & 0.12 & 0.13 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.15 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.18 & 0.12 & 0.25 & 0.20 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.20 & 0.27 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.29 & 0.31 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется распределению хи-квадрат с двумя степенями свободы. Вероятности состояний компонент вектора ξ_0 можно вычислить с помощью встроенной подпрограммы пакета Mathcad: dchisq. Затем непременно следует проверить выполнение условия нормировки массива pp .

Вариант 5

$$a) X = [-4,5], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} 4.99 \\ 0.0 \\ -2.52 \\ -3.12 \\ 3.35 \\ 1.15 \\ -1.09 \\ 2.79 \\ -0.71 \\ -3.81 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.08 & 0.07 & 0.09 & 0.06 & 0.10 & 0.06 & 0.04 & 0.10 & 0.10 \\ 0 & 0.25 & 0.10 & 0.08 & 0.10 & 0.10 & 0.08 & 0.07 & 0.11 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0.13 & 0.11 & 0.12 & 0.12 & 0.10 & 0.10 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0.11 & 0.10 & 0.13 & 0.20 & 0.18 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.25 & 0.15 & 0.15 & 0.20 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.30 & 0.20 & 0.25 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.21 & 0.34 & 0.30 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0.38 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется равномерному распределению, т.е. $pp_{1,1} := pp_{2,1} := \dots := pp_{10,1} := 0.1$.

Вариант 6

$$a) X = [0,5], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.75 \\ 1.39 \\ 2.11 \\ 2.95 \\ 3.48 \\ 3.96 \\ 4.31 \\ 4.50 \\ 4.89 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.04 & 0.05 & 0.07 & 0.08 & 0.11 & 0.10 & 0.15 & 0.18 & 0.20 \\ 0 & 0.02 & 0.03 & 0.08 & 0.10 & 0.11 & 0.13 & 0.15 & 0.20 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.08 & 0.10 & 0.11 & 0.11 & 0.13 & 0.15 & 0.20 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0.18 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.15 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.17 & 0.17 & 0.15 & 0.15 & 0.18 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.17 & 0.18 & 0.20 & 0.25 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.25 & 0.30 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.40 & 0.30 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется распределению Фишера с тремя и четырьмя степенями свободы. Вероятности состояний компонент вектора ξ_0 можно вычислить с помощью встроенной подпрограммы пакета Mathcad: dF. Затем непременно следует проверить выполнение условия нормировки массива pp .

Вариант 7

$$a) X = [-20,15], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} -19.5 \\ 3.75 \\ -15.29 \\ -2.11 \\ -10.45 \\ 9.08 \\ 0.25 \\ 6.13 \\ -5.0 \\ 14.86 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.09 & 0.10 & 0.10 & 0.12 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.15 \\ 0 & 0.06 & 0.09 & 0.12 & 0.11 & 0.11 & 0.12 & 0.12 & 0.13 & 0.14 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.11 & 0.12 & 0.13 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0.14 & 0.13 & 0.14 & 0.15 & 0.15 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0.15 & 0.15 & 0.18 & 0.18 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.18 & 0.23 & 0.23 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.25 & 0.30 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.45 & 0.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется нормальному закону с параметрами $m_x = -4, \sigma_x = 2.45$. Вероятности состояний компонент вектора ξ_0 можно вычислить с помощью встроенной подпрограммы пакета Mathcad: `dnorm`. Затем непременно следует проверить выполнение условия нормировки массива pp .

Вариант 8

$$а) X = [-30, 20], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} -29.0 \\ 0.50 \\ 2.75 \\ -7.12 \\ -19.64 \\ 14.22 \\ 6.02 \\ -3.14 \\ -0.91 \\ 19.50 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.05 & 0.05 & 0.10 & 0.11 & 0.13 & 0.15 & 0.16 & 0.17 \\ 0 & 0.03 & 0.04 & 0.06 & 0.09 & 0.11 & 0.13 & 0.17 & 0.19 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0.06 & 0.10 & 0.12 & 0.14 & 0.16 & 0.18 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.10 & 0.11 & 0.12 & 0.15 & 0.19 & 0.23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 & 0.14 & 0.16 & 0.18 & 0.20 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.18 & 0.20 & 0.20 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.20 & 0.25 & 0.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.45 & 0.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется распределению Стьюдента с тремя степенями свободы. Вероятности состояний компонент вектора ξ_0 можно вычислить с помощью встроенной подпрограммы пакета Mathcad: dt. Затем непременно следует проверить выполнение условия нормировки массива pp .

Вариант 9

$$a) X = [-50, 50], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} -48.50 \\ 31.30 \\ 19.16 \\ -10.05 \\ 2.16 \\ -1.83 \\ 11.34 \\ -22.47 \\ -30.70 \\ 49.10 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.14 & 0.13 & 0.12 & 0.11 & 0.10 & 0.08 & 0.07 & 0.06 & 0.04 \\ 0 & 0.05 & 0.06 & 0.07 & 0.09 & 0.11 & 0.13 & 0.15 & 0.16 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0.18 & 0.16 & 0.14 & 0.12 & 0.10 & 0.07 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.08 & 0.10 & 0.15 & 0.18 & 0.20 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.25 & 0.20 & 0.15 & 0.07 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.15 & 0.20 & 0.25 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.40 & 0.30 & 0.20 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.35 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

$$в) pp_{1,1} := 0.2, \quad pp_{2,1} := 0, \quad pp_{3,1} := 0.2, \quad pp_{4,1} := 0, \quad pp_{5,1} := 0.2, \\ pp_{6,1} := 0, \quad pp_{7,1} := 0.2, \quad pp_{8,1} := 0, \quad pp_{9,1} := 0.2, \quad pp_{10,1} := 0.$$

Вариант 10

$$a) X = [-3,5], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} 4.90 \\ -2.08 \\ -1.95 \\ -0.85 \\ 0.63 \\ -0.18 \\ 1.87 \\ 3.11 \\ 4.01 \\ -2.99 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.07 & 0.08 & 0.09 & 0.10 & 0.11 & 0.12 & 0.12 & 0.13 & 0.13 \\ 0 & 0.19 & 0.18 & 0.15 & 0.12 & 0.10 & 0.08 & 0.07 & 0.06 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.07 & 0.08 & 0.09 & 0.11 & 0.13 & 0.15 & 0.17 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.18 & 0.15 & 0.13 & 0.12 & 0.12 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.09 & 0.18 & 0.20 & 0.23 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.25 & 0.20 & 0.15 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.15 & 0.35 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0.35 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix};$$

$$в) pp_{1,1} := 0.5, \quad pp_{2,1} := 0.5, \quad pp_{3,1} := 0, \quad pp_{4,1} := 0, \quad pp_{5,1} := 0, \\ pp_{6,1} := 0, \quad pp_{7,1} := 0, \quad pp_{8,1} := 0, \quad pp_{9,1} := 0, \quad pp_{10,1} := 0.$$

Вариант 11

$$\text{a) } X = [-10, 0], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} -9.89 \\ -7.12 \\ -5.21 \\ -3.35 \\ -1.07 \\ -0.08 \\ -2.11 \\ -4.08 \\ -6.34 \\ -8.42 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.15 & 0.13 & 0.12 & 0.11 & 0.11 & 0.10 & 0.08 & 0.05 & 0.05 \\ 0.30 & 0.10 & 0.15 & 0 & 0.12 & 0 & 0.15 & 0 & 0.08 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.05 & 0.10 & 0.15 & 0.20 & 0.25 & 0.10 & 0.05 \\ 0.10 & 0.07 & 0 & 0.10 & 0.25 & 0 & 0.20 & 0 & 0.15 & 0.13 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.10 & 0.15 & 0.25 & 0.15 & 0 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.10 & 0.10 & 0.15 & 0.10 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.30 & 0.30 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0 & 0.10 & 0.20 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0.20 & 0.10 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0.30 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0.50 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } pp_{1,1} := 1.0, \quad pp_{2,1} := 0, \quad pp_{3,1} := 0, \quad pp_{4,1} := 0, \quad pp_{5,1} := 0, \\ pp_{6,1} := 0, \quad pp_{7,1} := 0, \quad pp_{8,1} := 0, \quad pp_{9,1} := 0, \quad pp_{10,1} := 0.$$

Вариант 12

$$a) X = [0,15], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} 0.09 \\ 2.96 \\ 6.45 \\ 9.78 \\ 13.51 \\ 14.85 \\ 11.06 \\ 8.02 \\ 4.21 \\ 1.57 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.25 & 0.23 & 0.20 & 0.10 & 0.05 & 0.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.05 & 0.06 & 0.07 & 0.08 & 0.10 & 0.15 & 0.16 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.15 & 0.16 & 0.17 & 0.05 & 0.18 & 0.14 & 0 \\ 0.10 & 0.10 & 0.05 & 0.15 & 0.05 & 0.15 & 0.10 & 0.10 & 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0.04 & 0.11 & 0.10 & 0.15 & 0.10 & 0.11 & 0.12 & 0.13 & 0.14 \\ 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.15 & 0.10 \\ 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0.15 & 0.25 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0.15 & 0 & 0.15 & 0.25 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.15 & 0 & 0.15 & 0 & 0.15 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 \end{pmatrix};$$

$$в) pp_{1,1} := 0.33, \quad pp_{2,1} := 0, \quad pp_{3,1} := 0, \quad pp_{4,1} := 0, \quad pp_{5,1} := 0.33, \\ pp_{6,1} := 0, \quad pp_{7,1} := 0, \quad pp_{8,1} := 0, \quad pp_{9,1} := 0, \quad pp_{10,1} := 0.34.$$

Вариант 13

$$а) X = [-100,10], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} -99.0 \\ -87.0 \\ -75.0 \\ -61.0 \\ -45.0 \\ -34.5 \\ -25.0 \\ -12.0 \\ 0.1 \\ 8.5 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.40 & 0 \\ 0.40 & 0.30 & 0 & 0 & 0.30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.30 & 0.15 & 0.20 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 \\ 0.28 & 0.20 & 0.19 & 0.18 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0.18 & 0.17 & 0.16 & 0.10 & 0.14 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.14 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0.17 & 0.15 & 0.13 & 0.05 & 0.09 & 0.03 & 0.12 & 0 & 0.06 \\ 0.07 & 0.08 & 0.13 & 0.11 & 0.10 & 0.09 & 0.07 & 0.05 & 0.10 & 0.20 \\ 0.06 & 0.07 & 0.08 & 0.09 & 0.10 & 0.11 & 0.12 & 0.13 & 0.19 & 0.05 \end{pmatrix};$$

в) Начальное распределение вероятностей подчиняется нормальному закону с параметрами $m_x = -45, \sigma_x = 15$. Вероятности состояний компонент вектора ξ_0 можно вычислить с помощью встроенной подпрограммы пакета Mathcad: `dnorm`. Затем непременно следует проверить выполнение условия нормировки массива pp .

Вариант 14

$$a) X = [-10, 10], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} -9.85 \\ 8.03 \\ -6.97 \\ 5.48 \\ -3.12 \\ 2.46 \\ -5.85 \\ 7.02 \\ -8.15 \\ 9.99 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.40 & 0.30 & 0.30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.30 & 0.25 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.20 & 0.25 & 0.35 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.20 & 0.15 & 0.15 & 0.20 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0.11 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.15 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.13 & 0.11 & 0.09 & 0.07 & 0.05 & 0.25 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0.13 & 0.13 & 0.12 & 0.12 & 0.11 & 0.11 & 0.07 & 0.06 & 0.15 & 0 \\ 0.02 & 0.06 & 0.08 & 0.09 & 0.10 & 0.11 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.15 \end{pmatrix};$$

$$в) pp_{1,1} := 0.25, \quad pp_{2,1} := 0, \quad pp_{3,1} := 0, \quad pp_{4,1} := 0, \quad pp_{5,1} := 0, \\ pp_{6,1} := 0, \quad pp_{7,1} := 0, \quad pp_{8,1} := 0, \quad pp_{9,1} := 0.35, \quad pp_{10,1} := 0.4.$$

Вариант 15

$$\text{a) } X = [-5,5], \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} -4.82 \\ 3.99 \\ 2.87 \\ -1.95 \\ -0.69 \\ 0.53 \\ 2.03 \\ -3.07 \\ -4.01 \\ 4.91 \end{pmatrix};$$

б)

$$P = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.18 & 0.16 & 0.17 & 0.16 & 0.17 & 0.16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0.14 & 0.15 & 0.14 & 0.14 & 0.15 & 0.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.12 & 0.11 & 0.11 & 0 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } pp_{1,1} := 0.5, \quad pp_{2,1} := 0, \quad pp_{3,1} := 0, \quad pp_{4,1} := 0, \quad pp_{5,1} := 0.25, \\ pp_{6,1} := 0, \quad pp_{7,1} := 0, \quad pp_{8,1} := 0, \quad pp_{9,1} := 0, \quad pp_{10,1} := 0.25.$$

Лабораторная работа № 6. Моделирование случайных процессов методом отбора в пакете Mathcad

Как уже отмечалось в подразд. 4.3, метод отбора отличается простотой программирования. Фактически в этом методе на заданные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n моделируются значения n -мерного случайного вектора $\bar{\xi}^{(k)} = (\xi_1^{(k)}(t_i), \xi_2^{(k)}(t_i), \dots, \xi_n^{(k)}(t_i))^T$ с заданной (или выбранной) n -мерной функцией плотности вероятности $f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$.

Алгоритм метода требует вычисления значения n -мерной функции плотности в проверяемой случайной n -мерной точке из области определения. Кроме того, необходимо знать численное значение максимума функции плотности. Все эти задачи успешно и довольно просто решаются в рамках пакета Mathcad.

Прежде всего определим значения констант, задающих объём необходимых вычислений. Пусть n – размерность функции плотности вероятности, а следовательно, и функции распределения случайного процесса $\xi(t)$; l – число различных реализаций случайного процесса; m – максимальное число обращений к датчикам базовых случайных чисел (датчикам стандартного равномерного распределения).

Функцию плотности вероятности следует задать в явном виде $f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$, области определения всех её аргументов – в виде конечных отрезков $x_i \in [a_i, b_i], i = \overline{1, n}$, так как в методе отбора используются усечённые распределения. Наконец, следует найти максимум функции плотности. Это можно сделать встроенной функцией Maximize. Данная функция использует градиентный метод для поиска локального экстремума заданной функции нескольких переменных. Её можно использовать как автономно, так и в пределах вычислительного блока Given...Maximize, что предпочтительнее.

Всем аргументам заданной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ следует присвоить некоторые начальные значения, помня при этом общий недостаток всех градиентных методов: если начальное приближение выбрано плохо, локальный экстремум может быть не найден.

Сам алгоритм моделирования хорошо виден из текста программы `metodotbora`. Константа k – это число отсчётов в различных реализациях случайного процесса $\xi(t)$. Её значение выбрано равным 21, как в предыдущих трёх лабораторных работах. Само значение случайного процесса $\xi(t)$ для данного момента времени t_i (отсчёта) находится как евклидова норма n -мерного случайного вектора $\bar{\xi}^{(k)}$.

С учётом всех этих замечаний текст программы лабораторной работы может быть таким:

ORIGIN := 1 n := 5 l := 10 m := 1000

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := \ln(3)^5 \cdot 3^{-x_1-x_2-x_3-x_4-x_5}$$

$$f(0, 0, 0, 0, 0) = 1.6 \quad ab := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := \frac{ab_{2,1} - ab_{1,1}}{2} \quad x_2 := \frac{ab_{2,2} - ab_{1,2}}{2}$$

$$x_3 := \frac{ab_{2,3} - ab_{1,3}}{2} \quad x_4 := \frac{ab_{2,4} - ab_{1,4}}{2}$$

$$x_5 := \frac{ab_{2,5} - ab_{1,5}}{2}$$

Given

$$ab_{1,1} \leq x_1 \leq ab_{2,1} \quad ab_{1,2} \leq x_2 \leq ab_{2,2}$$

$$ab_{1,3} \leq x_3 \leq ab_{2,3} \quad ab_{1,4} \leq x_4 \leq ab_{2,4}$$

$$ab_{1,5} \leq x_5 \leq ab_{2,5}$$

$$\text{Maximize}(f, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_{\max} := f(0, 0, 0, 0, 0) \\ f_{\max} = 1.6 \end{matrix}$$

```

metodotbora(1,n,m,ab,f,f_max) :=
  for i ∈ 1..n
    a_i ← |ab_{2,i} - ab_{1,i}|
    for nm ∈ 1..1
      for i ∈ 1..m
        x1_i ← md(f_max)
        for j ∈ 1..n
          x_{j,i} ← md(a_j) - |ab_{1,j}|
        k ← 0
        for i ∈ 1..m
          break on error |f(x_{1,i},x_{2,i},x_{3,i},x_{4,i},x_{5,i})|
          z_i ← |f(x_{1,i},x_{2,i},x_{3,i},x_{4,i},x_{5,i})|
          if x1_i ≤ z_i
            k ← k + 1
            break if k > 21
            for j ∈ 1..n
              ξ_{j,k} ← x_{j,i}
          for i ∈ 1..k - 1
            z_{i,nm} ← √(∑_{j=1}^n (|ξ_{j,i}|)^2)
        (k)
        (z)

```

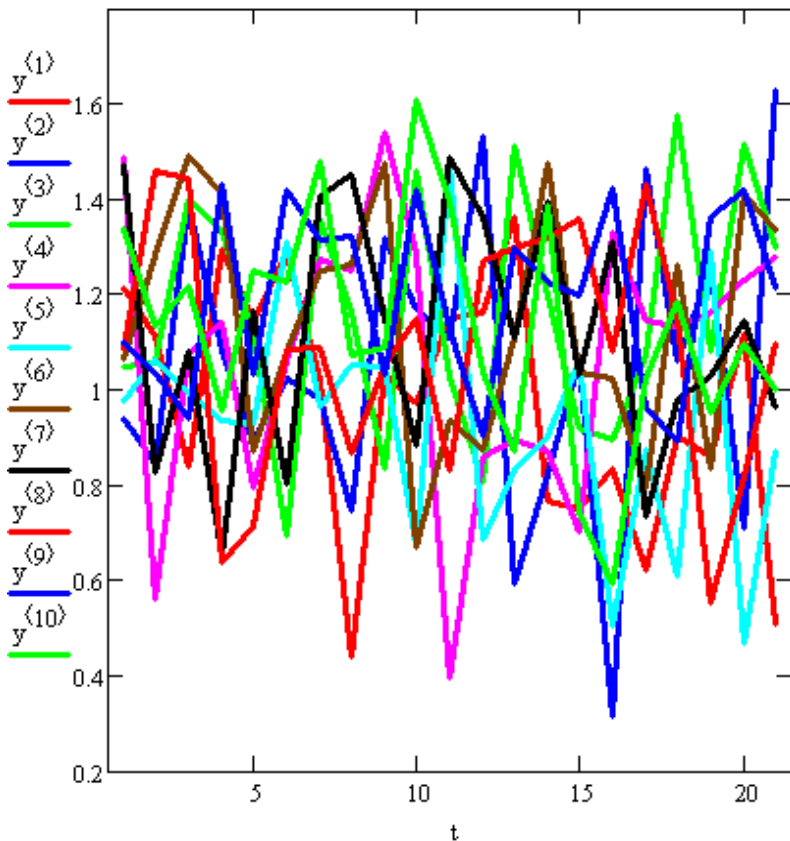
L := metodotbora(1,n,m,ab,f,f_max)1 L = 22

y := metodotbora(1,n,m,ab,f,f_max)2

	1	2	3	4	5	6	7
1	1.212	0.939	1.05	1.486	0.974	1.064	1.472
2	1.113	0.846	1.055	0.559	1.064	1.282	0.825
3	0.837	1.386	1.4	1.074	0.994	1.493	1.08
4	1.293	1.084	1.335	1.142	0.937	1.411	0.654
5	1.144	0.891	1.113	0.796	0.929	0.869	1.167
6	1.286	1.025	0.695	1.06	1.31	1.079	0.802
7	1.021	0.978	1.36	1.274	0.965	1.25	1.407
y = 8	0.44	0.744	1.161	1.252	1.051	1.262	1.45
9	1.036	1.319	0.836	1.538	1.048	1.477	1.15
10	0.972	1.169	1.458	1.288	0.674	0.67	0.884
11	1.147	1.108	1.027	0.396	1.476	0.934	1.486
12	1.16	1.534	0.807	0.857	0.685	0.873	1.363
13	1.362	0.593	1.514	0.894	0.83	1.109	1.108
14	0.767	0.821	1.199	0.871	0.902	1.475	1.394
15	0.75	1.06	0.92	0.703	1.062	1.036	1.033
16	0.834	0.317	0.893	1.331	0.503	1.023	1.312

	1	2	3	4	5	6
17	0.621	1.463	1.074	1.146	0.876	0.793
18	0.905	1.061	1.574	1.132	0.611	1.264
19	0.859	1.249	1.08	1.162	1.292	0.835
20	1.119	0.709	1.518	1.23	0.469	1.412
21	0.509	1.628	1.3	1.276	0.87	1.334

$i := 1..L - 1 \quad t_i := i$



Задание. Выберите вариант задания из табл. 11 по номеру Вашей фамилии в журнале преподавателя. Если размерность функции плотности равна двум, то необходимо в тексте программы построить график поверхности $z = f(x, y)$, вычислив для этого необходимую матрицу значений массива $f_{n \times n}$. Число точек графика (размерность массива) следует выбирать в пределах $n \sim 20 \div 30$.

Т а б л и ц а 11

№ варианта	Функция плотности вероятности	Пределы изменения аргументов функции плотности (по столбцам матрицы) или условия для нахождения этих пределов
1	$f(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x + y)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi/2 & \pi/2 \end{pmatrix}$
2	$f(x, y, z) = 2.1 \cdot \exp(2x + 1.5y + 0.7z)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
3	$f(x, y) = 8xy(\ln 2)^2 2^{-x^2-2y^2}, x \geq 0, y \geq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$
4	$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{\pi R^3} (R - \sqrt{x^2 + y^2}), x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$	$R = 3$
5	$f(x, y) = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^3}$	$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
6	$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi/2 & \pi/2 \end{pmatrix}$
7	$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2} \exp\left\{-\frac{1}{8}\left[2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2\right]\right\}$	$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
8	$f(x, y) = \frac{1}{(16 + x^2)(25 + y^2)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$
9	$f(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{397}} \exp\left\{-\frac{1}{794}\left[28 \cdot (x-10)^2 - 26(x-10)y + 32(x-10) \cdot (z+10) - 28(x-10)(t-1) + 162y^2 - 582y(z+10) + 410y(t-1) + 633 \cdot (z+10)^2 - 810(z+10)(t-1) + 404(t-1)^2\right]\right\}$	$\begin{pmatrix} 0 & -10 & -20 & -9 \\ 20 & 10 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

№ варианта	Функция плотности вероятности	Пределы изменения аргументов функции плотности (по столбцам матрицы) или условия для нахождения этих пределов
10	$f(x, y) = (\ln 2)^2 \cdot 2^{-x-y},$ $x \geq 0, y \geq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$
11	$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi R^3} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \\ x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$	$R = 5$
12	$f(x, y) = (\ln 3)^2 \cdot 3^{-x-y}, x \geq 0, y \geq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$
13	$f(x, y) = \frac{1}{182\pi\sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{2}{3} \left[\frac{(x-26)^2}{196} + \frac{(x-26)(y+12)}{182} + \frac{(y+12)^2}{169} \right] \right\}$	$\begin{pmatrix} 21 & -17 \\ 31 & -7 \end{pmatrix}$
14	$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}} \exp \left[-\frac{1}{230} \times \right.$ $\times (39x^2 + 36y^2 + 26z^2 - 44xy +$ $\left. + 36xz - 38yz) \right]$	$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
15	$f(x, y, z, t) = \frac{1}{384\pi^2} \exp \left[-\frac{5}{96} \times \right.$ $\times (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) +$ $\left. + \frac{1}{48} (xz + yt) \right]$	$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 & -5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Для некоторых вариантов условие $\xi_{n+1}^{(k)} \leq f(\bar{\xi}^{(k)})$ выполняется очень редко, т.е. часто бракуется формируемый случайный вектор $\bar{\xi}^{(k)}$. При этом число L (число отсчётов случайного процесса $\xi(t)$) может быть много меньше 21, в самом неблагоприятном случае L равно единице или нулю. В такой ситуации случайный отсчёт $\xi(t_i)$ не может быть вычислен, и подпрограмма `metodotbora` не работает. Нужно увеличить константу m – максимальное число обращений к датчикам базовых случайных чисел. В эталонной программе $m := 1000$, следует задавать значения $m := 2000, 3000, 5000, \dots$. Это заметно увеличивает время работы головной программы, но иного выхода нет, так как данный эффект является основным недостатком метода отбора.

Кроме того, в тексте подпрограммы `metodotbora` для каждого варианта необходимо привести в соответствие размерность функции f в двух операторах внутри подпрограммы.

Лабораторная работа № 6. Моделирование случайных процессов методом отбора в пакете Matlab

В пакете Mathcad головная программа очень короткая, поскольку основные формулы метода отбора содержатся в подпрограмме `metodotbora`. Для нахождения максимума функции плотности использовался вычислительный блок `Given – Maximize`. В пакете Matlab аналога этих операторных скобок не существует. Авторы использовали несколько подпрограмм оптимизации, например `fmins`, `minimax`, `fminssearch`. Все они дают неудовлетворительное решение и не находят нужный локальный максимум целевой функции при заданных ограничениях из-за “игольчатого” характера поверхности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в n -мерном пространстве.

Поэтому было принято наиболее простое и очевидное решение. Вся область изменения аргументов покрывается сеткой с малым шагом, в узлах которой вычисляются значения исходной функции плотности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а затем из всех этих значений выбирается максимальное.

Для данной лабораторной работы нужно создать четыре М-файла в виде функций. Первая из них – `dens(x)` – вычисляет зна-

чение исходной многомерной функции плотности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вторая – `setkamax(A,B,h,n)` – находит максимум первой функции на сетке в области изменения её аргументов с заданным шагом h . Третья функция – `metodotbora(n,L,m,A,B,fmax)` реализует основные вычислительные формулы метода и полностью соответствует аналогичной подпрограмме в пакете Mathcad. Четвёртая функция – `retchgraf(kk1,z1)` строит графики полученных реализаций случайного процесса. Смысл входных параметров этих функций ясен из контекста задачи.

Приведём сначала текст этих четырёх М-файлов.

```
function f1=dens(x)
a=log(3);
f1=a^5*exp(-a*(x(1)+x(2)+x(3)+x(4)+x(5)));
function f2=setkamax(A,B,h,n)
% A и B - матрицы с предельными значениями аргумента
% h - шаг сетки, n - размерность исходной функции
for i=1:n
    a=B(i)-A(i);
    nn(i)=a/h;
end
for i1=1:nn(1)
    for i2=1:nn(2)
        for i3=1:nn(3)
            for i4=1:nn(4)
                for i5=1:nn(5)
                    x0(1)=A(1)+(i1-1)*h;
                    x0(2)=A(2)+(i2-1)*h;
                    x0(3)=A(3)+(i3-1)*h;
                    x0(4)=A(4)+(i4-1)*h;
                    x0(5)=A(5)+(i5-1)*h;
                    xx(i1,i2,i3,i4,i5)=dens(x0);
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
% вычислены значения функции в узлах сетки
```

```

fmax=1e-9;
for i1=1:nn(1)
    for i2=1:nn(2)
        for i3=1:nn(3)
            for i4=1:nn(4)
                for i5=1:nn(5)
                    if fmax<=xx(i1,i2,i3,i4,i5)
                        fmax=xx(i1,i2,i3,i4,i5);
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
end
end
end
% найден максимальный элемент массиве xx
f2=fmax;

```

При выполнении конкретных вариантов лабораторной работы (см. табл. 11) функцию setkamax следует необходимым образом изменить, так как она вычисляет максимум функции на пятимерной сетке, а все заданные варианты имеют меньшую размерность функции плотности. Следует заметить, что в системе Mathcad непосредственно доступны лишь одно- и двумерные матрицы, в то время как в системе Matlab их размерность может доходить до восьми, что, безусловно, значительно удобнее с практической точки зрения.

```

function [kk,Z]=metodotbora(n,L,m,A,B,fmax)
% M-файл, реализующий формулы метода отбора
for i=1:n
    a(i)=abs(B(i)+A(i));
end
KSI=zeros(n,21);
ZZ=zeros(21,10);
ab=zeros(L);
for nm=1:L
    for i=1:m
        x1(i)=fmax*rand;
        for j=1:n

```

```

        x(j,i)=a(j)*rand-A(j);
    end
end
k=0;
for i=1:m
    for k1=1:n
        xh(k1)=x(k1,i);
    end
    z(i)=abs(dens(xh));
    if x1(i)<=z(i)
        k=k+1;
        ab(nm)=k;
        for j=1:n
            KSI(j,k)=x(j,i);
        end
    end
    if k>21
        break
    end
end
for i=1:k
    b=0;
    for j=1:n
        b=b+abs(KSI(j,i))^2;
    end
    ZZ(i,nm)=sqrt(b);
end
end
kk=ab;
Z=ZZ;
function f3=petchgraf(kk1,z1)
syms s1 s2 s3 s4 s5 s6 s7 s8 s9 s10
s1='y';
s2='m';
s3='c';
s4='r';
s5='g';
s6='b';
s7='k';

```

```

s8='-.k';
s9=':r';
s10=':g';
for i=1:21
    t(i)=i;
end
for i=1:21
    KSI1(i)=z1(i,1);
    KSI2(i)=z1(i,2);
    KSI3(i)=z1(i,3);
    KSI4(i)=z1(i,4);
    KSI5(i)=z1(i,5);
    KSI6(i)=z1(i,6);
    KSI7(i)=z1(i,7);
    KSI8(i)=z1(i,8);
    KSI9(i)=z1(i,9);
    KSI10(i)=z1(i,10);
end
plot(t,KSI1,s1),hold on
plot(t,KSI2,s2),hold on
plot(t,KSI3,s3),hold on
plot(t,KSI4,s4),hold on
plot(t,KSI5,s5),hold on
plot(t,KSI6,s6),hold on
plot(t,KSI7,s7),hold on
plot(t,KSI8,s8),hold on
plot(t,KSI9,s9),hold on
plot(t,KSI10,s10);
f3=kk1;

```

Все четыре приведённые функции необходимо набрать во строенном редакторе пакета Matlab и сохранить перед выполнением основной программы, так же как в двух предыдущих лабораторных работах.

Кроме этих подпрограмм, используются следующие, до сих пор не встречавшиеся встроенные функции системы: $\log(x)$ – вычисление натурального логарифма и rand – вычисление одного случайного числа, распределённого по стандартному равномерному закону. Это число изменяется при каждом последующем вызове.

Головная программа метода состоит из следующих команд:

```
» n=5;
» L=10;
» m=50000;
» A=[0 0 0 0 0];
» B=[5 5 5 5 5];
» h=1;
» fmax=setkamax(A,B,h,n)
fmax =
    1.6004
>> [c,z]=metodotbora(n,L,m,A,B,fmax);
>> c
```

```
c =
    12     0     0     0     0     0     0     0     0     0
    14     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     8     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     8     0     0     0     0     0     0     0     0     0
    12     0     0     0     0     0     0     0     0     0
    11     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     6     0     0     0     0     0     0     0     0     0
    11     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     8     0     0     0     0     0     0     0     0     0
    11     0     0     0     0     0     0     0     0     0
>> z
```

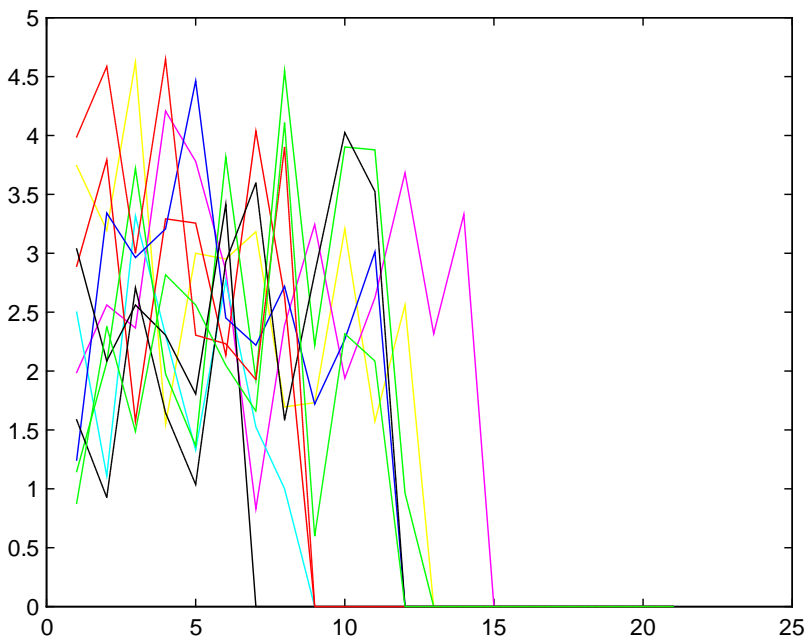
```
z =
Columns 1 through 8
    3.7403    1.9921    2.5033    2.8953    1.1520    1.2426    3.0403    1.5880
    3.1907    2.5552    1.1113    3.7971    2.0731    3.3460    2.0905    0.9264
    4.6175    2.3658    3.3179    1.5787    3.7221    2.9668    2.5664    2.7097
    1.5534    4.2110    2.3006    3.2875    1.9764    3.2033    2.3093    1.6486
    3.0056    3.7790    1.3309    3.2560    1.3680    4.4599    1.8065    1.0396
    2.9497    2.8581    2.7678    2.1386    3.8213    2.4523    3.4177    2.9229
    3.1883    0.8258    1.5198    4.0424    1.9236    2.2176     0     3.5933
    1.6966    2.3908    0.9973    2.6395    4.5490    2.7241     0     1.5819
    1.7276    3.2394     0     0     2.2251    1.7190     0     2.8247
    3.2080    1.9336     0     0     3.8984    2.2712     0     4.0259
    1.5693    2.6247     0     0     3.8784    3.0137     0     3.5254
```

2.5559	3.6852	0	0	0.9640	0	0	0
0	2.3128	0	0	0	0	0	0
0	3.3259	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 9 through 10

3.9819	0.8771
4.5907	2.3829
3.0015	1.4848
4.6403	2.8180
2.3016	2.5590
2.2363	2.0465
1.9311	1.6604
3.9038	4.1150
0	0.5997
0	2.3191
0	2.0875
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0

>> c1=petchgraf(c,z)



Прокомментируем полученный результат. В векторе \bar{c} находится число отсчётов в каждой из десяти моделируемых реализаций случайного процесса. Видно, что это число всегда меньше 21. Это значит, что метод отбора, реализованный в пакете Matlab, часто бракует формируемый случайный вектор $\bar{\xi}^{(k)}$, т.е. не выполняется условие $\xi_{n+1}^{(k)} \leq f\left(\bar{\xi}^{(k)}\right)$. По нашему мнению, это связано с неудовлетворительной работой встроенной подпрограммы `rand` – моделирования стандартных равномерно распределённых чисел. Аналогичная подпрограмма в пакете Mathcad работает более эффективно. Для преодоления этого эффекта следует ещё более увеличить константу m до величин 70000-100000, что соответственно увеличит время работы головной программы.

Задание. Следовать указаниям на с. 205–208.

Лабораторная работа № 7 (факультатив). Моделирование случайных процессов методом условных распределений в пакете Mathcad

Моделирование случайных процессов методом условных распределений весьма сложно, громоздко и трудоёмко. Метод требует реализации n датчиков случайных чисел с несовпадающими функциями плотности f_1, f_2, \dots, f_n . Эти условные плотности в общем случае зависят от параметров, причём вид функций $f_i, i = \overline{1, n}$ может меняться в зависимости от набора их аргументов. Интегралы вида (4.2) и (1.11) берутся в конечном виде исключительно редко, поэтому практически всегда их приходится вычислять численно, а следовательно, приближённо.

При больших размерностях функции плотности эти вычисления оказываются очень громоздкими и не пригодными для практического использования. Поэтому метод условных распределений в основном используется при моделировании марковских процессов, что и было продемонстрировано в лабораторной работе № 5.

В рамках математического пакета Mathcad реализация данного метода также порождает значительные трудности. В основном это связано с автоматизацией вычисления условных плотностей по формуле (1.11). Для сокращения объёма общей программы желательно иметь механизм изменения имен идентификаторов и подпрограмм, например в циклах, что невозможно в рамках пакета Mathcad. Вследствие этого, хотя все вычисления по методу условных распределений формально могут быть выполнены, длина общей программы получается очень большой.

Метод кусочной аппроксимации. Этот метод является составной частью данной лабораторной работы. При известных условных плотностях вида (1.11), а следовательно, известных вероятностях в ряду распределения случайной величины X , необходимо на конечном отрезке $X \in [a, b]$ построить реализации X , входящие в её ряд распределения. Идея этого метода заключается в следующем.

Пусть требуется получить реализации случайной величины X с известной функцией плотности $f(x)$, причём $X \in [a, b]$. Множество значений $[a, b]$ случайной величины X всегда можно определить подбором, т.е. неограниченное множество заменить ограниченным. Общий интервал $[a, b]$ разбивается на n элементарных

(малых) интервалов $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, $x_0 = a$, $x_{n-1} = b$. Распределение случайной величины X в пределах каждого такого интервала аппроксимируется каким-нибудь простым распределением, например равномерным (рис. 4.7).

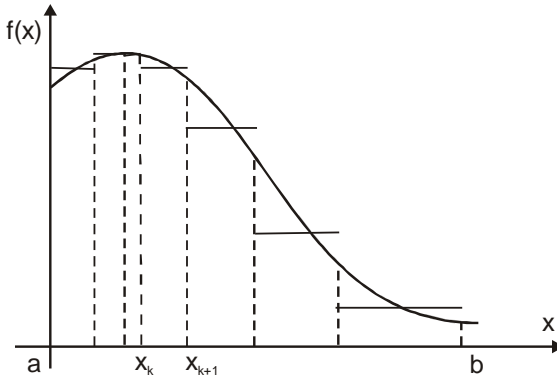


Рис. 4.7. Идея метода кусочной аппроксимации

Пусть p_k – вероятность попадания случайной величины X в интервал $[x_k, x_{k+1}]$. Доля того чтобы смоделировать реализацию X с кусочно-равномерным распределением, необходимо:

1) выбрать интервал $[x_k, x_{k+1}]$ в соответствии с вероятностью p_k . Этот выбор означает моделирование дискретной случайной величины, принимающей значения $x_0 = a, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1} = b$ с вероятностями $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots, p_{n-1}$. Интервал $(0,1)$ разбивается на $n-1$ подынтервалов длиной $x_{k+1} - x_k = p_k$ каждый. При получении очередной стандартной равномерно распределённой случайной величины $\gamma \in R(0,1)$ определяется, к какому интервалу она принадлежит $\gamma \in [x_k, x_{k+1}]$;

2) сформировать $\gamma_1 \in R(x_k, x_{k+1})$. Тогда $X = x_k + \gamma_1$.

Составим в пакете Mathcad подпрограмму, реализующую метод кусочной аппроксимации, и проверим правильность её работы для нормального распределения. Поскольку случайная величина $X \in N(m_x, D_x)$ распределена на $-\infty < X < \infty$, урежем распределение и зададим $X \in [-3,3]$. Тогда программа проверки будет такова:

```

ORIGIN := 1   m := 2   σ := 5   a := -3   b := 3
f(x) := dnorm(x,m,σ)   i := 1..30   xi := -3 + 0.2·(i-1)
yi := dnorm(xi,m,σ)

```

x =

	1
1	-3
2	-2.8
3	-2.6
4	-2.4
5	-2.2
6	-2

y =

	1
1	0.048
2	0.05
3	0.052
4	0.054
5	0.056
6	0.058

m := 30 yy := $\sum_{i=1}^{30} y_i$
yy = 2.088

```

kusapp(m,a,b,f) :=
|
| n ← rows(f)
| d ←  $\sum_{i=1}^n f_i$ 
| for j ∈ 1..m
|   | y ← rnd(d)
|   | c ← 0
|   | for i ∈ 1..n-1
|   |   | c ← c + fi
|   |   | k ← 1
|   |   | if (y > c) ∧ (y < c + fi+1)
|   |   |   | k ← i
|   |   |   | break
|   |   | k ← n-1 if (i = n-1) ∧ (y > c)
|   | c ← |fk+1 - fk|
|   | y1 ← rnd(c)
|   | c ← a +  $\frac{b-a}{n} \cdot k$ 
|   | xj ← c + y1
|   | xj ← a if y < f1
|   | xj ← b if y > d
|
| x

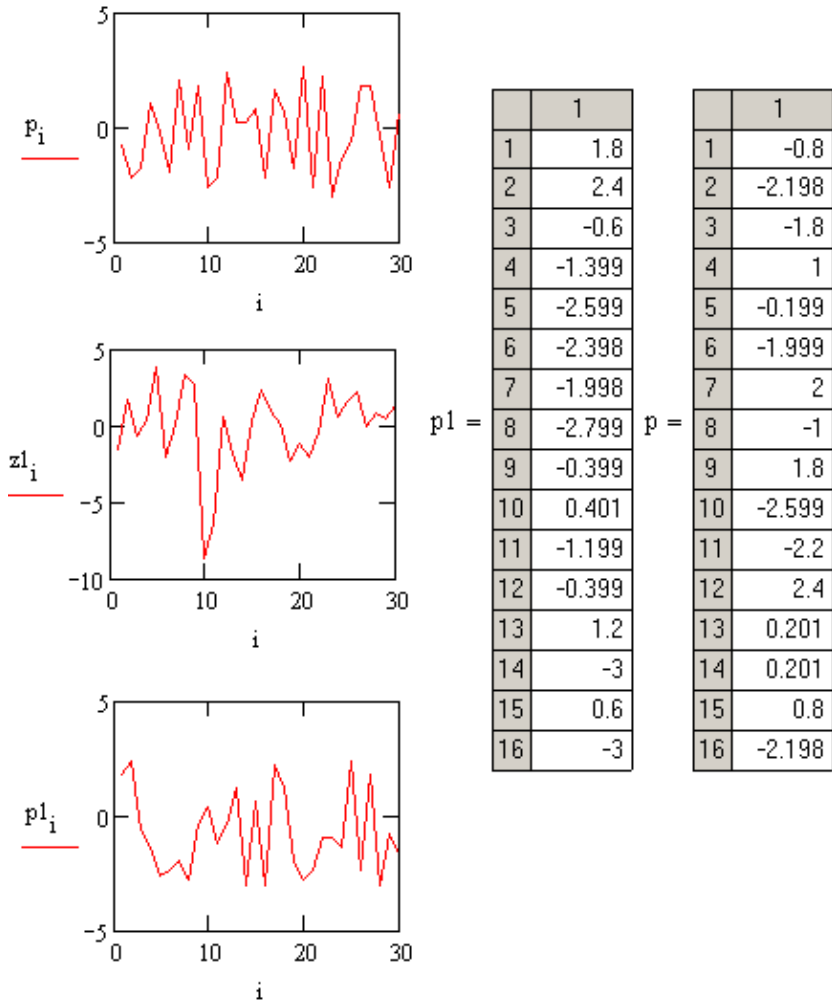
```

`z := kusapp(30, -3, 3, y)` `z1 := rnorm(30, 0, 3)`

		1			1			1
	1	-3		1	-1.55		1	0.048
	2	0.8		2	1.674		2	0.05
	3	2		3	-0.735		3	0.052
	4	1.4		4	0.269		4	0.054
	5	-2.4		5	3.785		5	0.056
	6	2.8		6	-2.117		6	0.058
	7	-3		7	5.593·10 ⁻³		7	0.06
z =	8	0.8	z1 =	8	3.323	y =	8	0.062
	9	7.001·10 ⁻⁵		9	2.678		9	0.063
	10	1.8		10	-8.703		10	0.065
	11	2.2		11	-6.471		11	0.067
	12	0.4		12	0.618		12	0.068
	13	2.2		13	-1.848		13	0.07
	14	2.8		14	-3.593		14	0.071
	15	-1.199		15	0.297		15	0.072
	16	-0.399		16	2.312		16	0.074

`m := 30`

`p := kusapp(m, a, b, y)` `p1 := kusapp(m, a, b, y)`



Таким образом, подпрограмма kusarr решает задачу нахождения реализаций дискретной случайной величины по заданным вероятностям для усечённого распределения.

Головная программа метода условных распределений и демонстрационные примеры. Рассмотрим применение формул подразд. 4.2 для случайного процесса с двумерной функцией плотности вероятности. Это значит, что указанным методом можно смоделировать лишь два отсчёта для всех заданных реализаций.

Пусть $f(x, y) = \ln(3)^2 \cdot 3^{-x-y}$, $x, y \geq 0$. Усечём области определения переменных x и y : $x, y \in [0, 5]$ и построим на плоскости $ХОУ$ сетку с шагом $\Delta x = \Delta y = 1$. Для первого отсчёта по формуле (4.2) безусловная плотность вероятности будет иметь вид

$$f(x) = \int_0^5 f(x, y) dy, \text{ численное значение которой необходимо вы-}$$

числить во всех узлах сетки для переменной x . Таким образом будет получен вектор значений функции плотности первой компоненты x . После нормирования этого вектора придём к вектору вероятностей в ряду распределения. По этим вероятностям необходимо смоделировать реализации первого отсчёта в узлах сетки по переменной x . Для решения подобной задачи применим вышеприведенную подпрограмму kusapp.

Для распределений с быстро убывающими значениями вероятностей (например, для данного случая) следует принять меры, чтобы слишком часто не повторялись реализации с максимальной вероятностью. Это нужно сделать, чтобы отсчёты разных реализаций для одного момента не сливались на графике в одну точку. Для этого служит подпрограмма table1. Её роль та же, что у подпрограммы table в лабораторной работе № 5.

Для второго отсчёта реализацию численных значений компонент вектора функции плотности можно получить из значений функции $f(x, y)$ в узлах прямоугольной сетки по переменным x, y . Просуммируем значения матрицы $f(x_i, y_j)$ по столбцам. Получим вектор значений функции плотности $f(y/x)$. Его нормировка, как и в предыдущем случае, даст вектор условных вероятностей компоненты y в ряду распределения [11]. Значения реализаций случайного процесса для второго отсчёта получим опять после работы подпрограмм kusapp и table1.

Для графической иллюстрации результатов работы построим график значений первого и второго отсчётов численных реализаций данного случайного процесса. При выбранной двумерной функции плотности методом условных распределений значения следующих отсчётов построить нельзя. Таким образом, общая программа в пакете Mathcad для данного метода может выглядеть следующим образом:

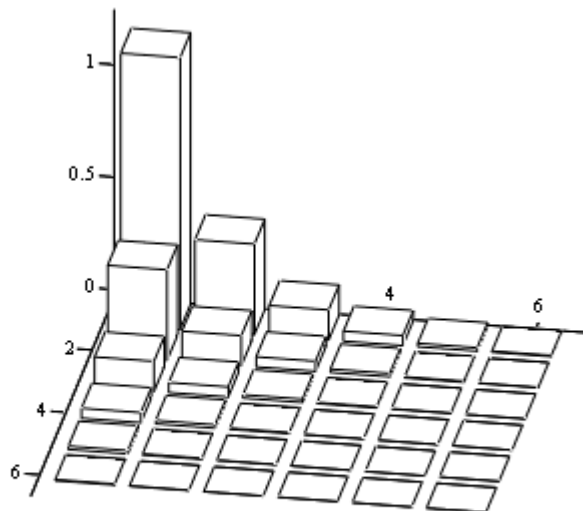
$$f(x, y) := \ln(3)^2 \cdot 3^{-x-y} \quad i := 1..6 \quad x_i := i-1 \quad y_i := i-1$$

$$i := 1..6 \quad j := 1..6 \quad ff_{i,j} := f(x_i, y_j)$$

$$ff = \begin{pmatrix} 1.207 & 0.402 & 0.134 & 0.045 & 0.015 & 4.967 \times 10^{-3} \\ 0.402 & 0.134 & 0.045 & 0.015 & 4.967 \times 10^{-3} & 1.656 \times 10^{-3} \\ 0.134 & 0.045 & 0.015 & 4.967 \times 10^{-3} & 1.656 \times 10^{-3} & 5.519 \times 10^{-4} \\ 0.045 & 0.015 & 4.967 \times 10^{-3} & 1.656 \times 10^{-3} & 5.519 \times 10^{-4} & 1.84 \times 10^{-4} \\ 0.015 & 4.967 \times 10^{-3} & 1.656 \times 10^{-3} & 5.519 \times 10^{-4} & 1.84 \times 10^{-4} & 6.132 \times 10^{-5} \\ 4.967 \times 10^{-3} & 1.656 \times 10^{-3} & 5.519 \times 10^{-4} & 1.84 \times 10^{-4} & 6.132 \times 10^{-5} & 2.044 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$f1(y) := f(x_1, y) \quad f2(y) := f(x_2, y) \quad f3(y) := f(x_3, y)$$

$$f4(y) := f(x_4, y) \quad f5(y) := f(x_5, y) \quad f6(y) := f(x_6, y)$$



ff

$$fx_1 := \int_0^6 f1(y) dy \quad fx_2 := \int_0^6 f2(y) dy \quad fx_3 := \int_0^6 f3(y) dy$$

$$fx_4 := \int_0^6 f4(y) dy \quad fx_5 := \int_0^6 f5(y) dy \quad fx_6 := \int_0^6 f6(y) dy$$

$$fx = \begin{pmatrix} 1.097 \\ 0.366 \\ 0.122 \\ 0.041 \\ 0.014 \\ 4.515 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} ix := x_6 - x_5 \quad dx = 1 \quad c := 0 \\ i := 1..6 \quad fx_i := fx_i \cdot dx \\ c := \sum_{i=1}^6 fx_i \quad c = 1.643 \end{array}$$

Далее должен следовать текст вышеприведенной подпрограммы kusapp .

$$i := 1..6 \quad fx_i := \frac{fx_i}{c}$$

$$fx = \begin{pmatrix} 0.668 \\ 0.223 \\ 0.074 \\ 0.025 \\ 8.242 \times 10^{-3} \\ 2.747 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} d := \sum_{i=1}^6 fx_i \quad d = 1 \\ zx := kusapp(6, 0, 5, fx) \quad zx = \begin{pmatrix} 0.92 \\ 0 \\ 1.689 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

```

table1(fx, ε) :=
  n ← rows(fx)
  m ← 0
  for i ∈ 1..n - 1
    a ← fxi
    for j ∈ i + 1..n
      if |a - fxj| < 10-3
        b ← 1
        m ← m + 1
        γ ← rnd(1)
        b ← -b if γ < 0.5
        fxj ← fxj + b · m · ε
  fx

```

```

zzx := table1(zx, 0.05)
zzx =
  ( 0.92
    0
    1.689
   -0.05
    0.1
   -0.15 )

```

```

i := 1..6
fxyi := ∑j=16 ffi,j
fxyi := fxyi · dx

```

```

fxy =
  ( 1.808
    0.603
    0.201
    0.067
    0.022
    7.44 × 10-3 )
c := ∑i=16 fxyi
c = 2.708
i := 1..6
fxyi :=  $\frac{fxy_i}{c}$ 

```

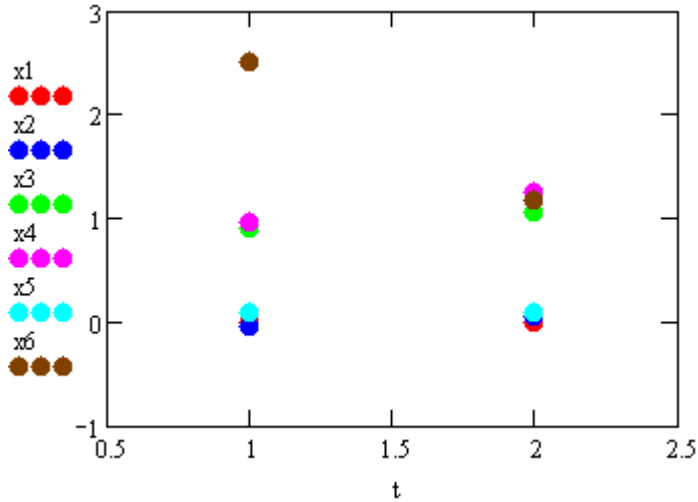

$$\text{zxy} := \text{kusapp}(6, 0, 5, \text{fsy}) \quad \text{zxy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.065 \\ 1.259 \\ 0 \\ 1.18 \end{pmatrix}$$

$$\text{zzxy} := \text{table1}(\text{zxy}, 0.05) \quad \text{zzxy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 1.065 \\ 1.259 \\ 0.1 \\ 1.18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} i &:= 1..2 & t_i &:= i & x_{11} &:= \text{zzx}_1 & x_{12} &:= \text{zzxy}_1 \\ x_{21} &:= \text{zzx}_2 & x_{22} &:= \text{zzxy}_2 & x_{31} &:= \text{zzx}_3 & x_{32} &:= \text{zzxy}_3 \\ x_{41} &:= \text{zzx}_4 & x_{42} &:= \text{zzxy}_4 & x_{51} &:= \text{zzx}_5 & x_{52} &:= \text{zzxy}_5 \\ x_{61} &:= \text{zzx}_6 & x_{62} &:= \text{zzxy}_6 \end{aligned}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0.911 \\ 1.065 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0.969 \\ 1.259 \end{pmatrix} \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad x_6 = \begin{pmatrix} 2.506 \\ 1.18 \end{pmatrix}$$



При изучении результатов этого примера следует обратить внимание на следующие факты.

Во-первых, как уже указывалось ранее, в пакете Mathcad приходится явно выписывать все операторы, выполняющие однотипные операции и различающиеся либо индексом, либо буквой в имени.

Во-вторых, в данном примере исходная функция плотности симметрична относительно своих аргументов, кроме того, x и y независимы. Это означает, что одномерные распределения компонент x и y одинаковы, и подтверждается числовыми данными лабораторной работы.

Представляет интерес рассмотреть пример, где функция плотности вероятности несимметрично зависит от аргументов, а сами аргументы зависят друг от друга [11].

$$\pi := 3.1415 \quad f(x, y) := \frac{1}{\pi} \cdot \exp \left[\frac{-\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2\right)}{2} \right]$$

$$i := 1..10 \quad y_i := i - 5$$

$$x_i := i - 5$$

$x =$

	1
1	-4
2	-3
3	-2
4	-1
5	0
6	1
7	2
8	3
9	4
10	5

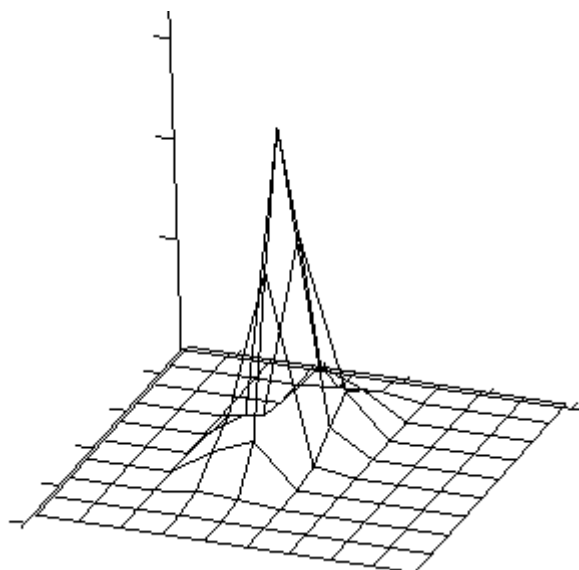
$y =$

	1
1	-4
2	-3
3	-2
4	-1
5	0
6	1
7	2
8	3
9	4
10	5

$$i := 1..10 \quad j := 1..10 \quad ff_{i,j} := f(x_i, y_j)$$

$ff =$

	1	2	3	4
1	0	0	1.626·10 ⁻¹²	1.605·10 ⁻⁷
2	0	0	3.979·10 ⁻¹⁰	1.445·10 ⁻⁵
3	0	1.807·10 ⁻¹⁴	3.582·10 ⁻⁸	4.786·10 ⁻⁴
4	0	1.626·10 ⁻¹²	1.186·10 ⁻⁶	5.83·10 ⁻³
5	0	5.386·10 ⁻¹¹	1.445·10 ⁻⁵	0.026
6	0	6.561·10 ⁻¹⁰	6.477·10 ⁻⁵	0.043
7	0	2.94·10 ⁻⁹	1.068·10 ⁻⁴	0.026
8	2.445·10 ⁻¹⁵	4.848·10 ⁻⁹	6.477·10 ⁻⁵	5.83·10 ⁻³
9	4.031·10 ⁻¹⁵	2.94·10 ⁻⁹	1.445·10 ⁻⁵	4.786·10 ⁻⁴
10	2.445·10 ⁻¹⁵	6.561·10 ⁻¹⁰	1.186·10 ⁻⁶	1.445·10 ⁻⁵



ff

$$d := \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} ff_{i,j} \quad d = 1.014$$

$$f1(y) := f(x_1, y) \quad f2(y) := f(x_2, y) \quad f3(y) := f(x_3, y)$$

$$f4(y) := f(x_4, y) \quad f5(y) := f(x_5, y) \quad f6(y) := f(x_6, y)$$

$$f7(y) := f(x_7, y) \quad f8(y) := f(x_8, y) \quad f9(y) := f(x_9, y)$$

$$f10(y) := f(x_{10}, y)$$

$$fx_1 := \int_1^{10} f1(y) \, dy \quad fx_2 := \int_1^{10} f2(y) \, dy \quad fx_3 := \int_1^{10} f3(y) \, dy$$

$$fx_4 := \int_1^{10} f4(y) \, dy \quad fx_5 := \int_1^{10} f5(y) \, dy \quad fx_6 := \int_1^{10} f6(y) \, dy$$

$$fx_7 := \int_1^{10} f7(y) dy \quad fx_8 := \int_1^{10} f8(y) dy \quad fx_9 := \int_1^{10} f9(y) dy$$

$$fx_{10} := \int_1^{10} f10(y) dy$$

$$dx := x_{10} - x_9 \quad dx = 1 \quad c := 0$$

$$i := 1..6 \quad fx_i := fx_i \cdot dx$$

$$c := \sum_{i=1}^{10} fx_i \quad c = 0.023$$

$$i := 1..6 \quad fx_i := \frac{fx_i}{c}$$

	1
1	1.941·10 ⁻⁴
2	1.809·10 ⁻³
3	6.474·10 ⁻³
4	8.807·10 ⁻³
5	4.522·10 ⁻³
6	8.719·10 ⁻⁴
7	6.286·10 ⁻⁵
8	1.69·10 ⁻⁶
9	1.69·10 ⁻⁸
10	6.273·10 ⁻¹¹

fx =

	1
1	8.534·10 ⁻³
2	0.08
3	0.285
4	0.387
5	0.199
6	0.038
7	6.286·10 ⁻⁵
8	1.69·10 ⁻⁶
9	1.69·10 ⁻⁸
10	6.273·10 ⁻¹¹

fx =

$$d := \sum_{i=1}^6 fx_i \quad d = 0.997$$

zx := kusapp(10, -3, 10, fx)

	1
1	0.975
2	0.938
3	-1.688
4	-0.356
5	0.945
6	0.941
7	2.317
8	-1.639
9	-0.395
10	0.903

 $zzx := \text{table1}(zx, 0.05)$

	1
1	0.975
2	0.938
3	-1.688
4	-0.356
5	0.945
6	0.941
7	2.317
8	-1.639
9	-0.395
10	0.903

$$i := 1..10 \quad f_{xy_i} := \sum_{j=1}^{10} ff_{i,j} \quad f_{xy_i} := f_{xy_i} \cdot dx$$

	1
1	6·10 ⁻⁴
2	9.446·10 ⁻³
3	0.07
4	0.242
5	0.371
6	0.242
7	0.07
8	9.446·10 ⁻³
9	6·10 ⁻⁴
10	1.683·10 ⁻⁵

 $c := \sum_{i=1}^{10} f_{xy_i}$
 $c = 1.014$
 $i := 1..10$
 $f_{xy_i} := \frac{f_{xy_i}}{c}$

	1
1	5.915·10 ⁻⁴
2	9.312·10 ⁻³
3	0.069
4	0.239
5	0.365
6	0.239
7	0.069
8	9.312·10 ⁻³
9	5.915·10 ⁻⁴
10	1.659·10 ⁻⁵

zxy := kusapp(10, -3, 10, fxy) zxy =

	1
1	2.2
2	3.511
3	3.52
4	-0.399
5	2.316
6	2.231
7	2.203
8	0.993
9	2.238
10	2.277

zzxy := table1(zxy, 0.05)

zzxy =

	1
1	2.2
2	3.511
3	3.52
4	-0.399
5	2.316
6	2.231
7	2.203
8	0.993
9	2.238
10	2.277

i := 1..2 t_i := i x1₁ := zxx₁ x1₂ := zxy₁ x2₁ := zxx₂ x2₂ := zxy₂

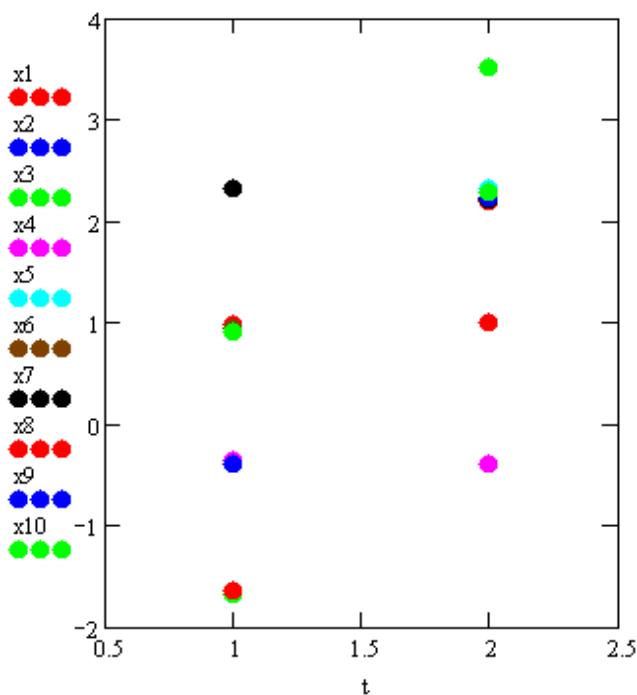
x3₁ := zxx₃ x3₂ := zxy₃ x4₁ := zxx₄ x4₂ := zxy₄

x5₁ := zxx₅ x5₂ := zxy₅ x6₁ := zxx₆ x6₂ := zxy₆

x7₁ := zxx₇ x7₂ := zxy₇ x8₁ := zxx₈ x8₂ := zxy₈

x9₁ := zxx₉ x9₂ := zxy₉ x10₁ := zxx₁₀ x10₂ := zxy₁₀

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \begin{pmatrix} 0.975 \\ 2.2 \end{pmatrix} & x_2 &= \begin{pmatrix} 0.938 \\ 3.511 \end{pmatrix} & x_3 &= \begin{pmatrix} -1.688 \\ 3.52 \end{pmatrix} \\
 x_4 &= \begin{pmatrix} -0.356 \\ -0.399 \end{pmatrix} & x_5 &= \begin{pmatrix} 0.945 \\ 2.316 \end{pmatrix} & x_6 &= \begin{pmatrix} 0.941 \\ 2.231 \end{pmatrix} \\
 x_7 &= \begin{pmatrix} 2.317 \\ 2.203 \end{pmatrix} & x_8 &= \begin{pmatrix} -1.639 \\ 0.993 \end{pmatrix} & x_9 &= \begin{pmatrix} -0.395 \\ 2.238 \end{pmatrix} \\
 x_{10} &= \begin{pmatrix} 0.903 \\ 2.277 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



По аналогии с изложенным могут быть просчитаны примеры с функциями плотностей более высоких порядков. Тем не менее, все недостатки и трудности метода условных распределений никуда не исчезают с изменением размерности задачи и требуют для эффективного решения программирования на языках высокого уровня.

Задание. Из табл. 12 выбрать номер варианта, совпадающий с номером Вашей фамилии в журнале преподавателя, и методами, изложенными в лаб. работе №7, смоделировать два отсчёта для пяти реализаций случайного процесса с заданной двумерной функцией плотности вероятности.

Т а б л и ц а 12

№ варианта	Функция плотности вероятности и пределы изменения аргументов этой функции (пределы интегрирования)
1	$f(x, y) = \frac{3}{28}(xy + y^2), 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$
2	$f(x, y) = \frac{1}{32\pi} \exp\left[-\frac{1}{2^9}(25x^2 - 12xy + 16y^2 + 208x - 120y + 316)\right],$ $-7 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 8$
3	$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)\right], -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$
4	$f(x, y) = 8 \exp(-4x - 2y), 0 < x < 5, 0 < y < 5$
5	$f(x, y) = 4xy \exp(-x^2 - y^2), 0 < x < 3, 0 < y < 3$
6	$f(x, y) = \frac{1}{4} \sin(x) \cdot \sin(y), 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$
7	$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1)}, 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5$
8	$f(x, y) = 8xy(\ln 5)^2 \cdot 5^{-x^2-2y^2}, 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$
9	$f(x, y) = \frac{1}{2\pi a^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right), a = 1.5, 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3$
10	$f(x, y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \exp(-4x^2 - 6xy - 9y^2), -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$
11	$f(x, y) = \frac{1}{1.6\pi} \exp\left\{-\frac{1}{1.28}[(x-2)^2 - 1.2(x-2)(y+3) + (y+3)^2]\right\}, 0 \leq x \leq 4, -5 \leq y \leq -1$

№ варианта	Функция плотности вероятности и пределы изменения аргументов этой функции (пределы интегрирования)
12	$f(x, y) = \frac{1}{2\pi(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$
13	$f(x, y) = ((1+0.3x)(1+0.3y) - 0.3) \times \exp(-x - y - 0.3xy), x > 0, y > 0, \\ 0 < x < 3, 0 < y < 3$
14	$f(x, y) = \frac{3}{28}(xy + x^2), 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$
15	$f(x, y) = \frac{3}{\pi} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right), -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

Библиографический список

1. *Бакалов В.П.* Цифровое моделирование случайных процессов. М.: Сайнс-Пресс, 2002, 88 с.
2. *Бююль А., Цёфель П.* SPSS: искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей. М.-СПб.-Киев: DiaSoft, 2002. 602 с.
3. *Быков В.В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971, 326 с.
4. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 296 с.
5. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Физматгиз, 1996. 400с.
6. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1983. 416 с.
7. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения М.: Academia, 2003. 429 с.
8. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы. М.: Изд-во МГТУ, 2003. 447 с.
9. *Володин Б.Г., Ганин М.П. и др.* Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций /Под ред. А.А. Свешникова. М.: Наука, 1970. 656 с.
10. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 567 с.
11. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике. М.: Высшая школа, 1975. 334 с.

12. *Ермаков С.М.*, Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. 319 с.
13. *Конторович М.И.* Операционное исчисление и нестационарные процессы в электрических цепях. М.: Гостехиздат, 1955. 228 с.
14. *Королюк В.С.*, Портенко Н.И. и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
15. *Миллер Б.М.*, Панков А.Р. Теория случайных процессов. М.: Физматгиз, 2002. 317 с.
16. *Поляк Ю.Г.* Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Сов. радио, 1971. 400 с.
17. *Прохоров А.В.*, Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1986. 325 с.
18. *Пугачёв В.С.* Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 883 с.
19. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1971. 286 с.
20. *Таганов Д.* SPSS. Статистический анализ в маркетинговых исследованиях. СПб.: Питер, 2005. 191 с.
21. *Тихонов В.И.*, Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. М.: Радио и связь, 2003. 399 с.
22. *Шалыгин А.С.*, Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986. 320 с.
23. *Шапоров С.Д.* Прикладная статистика. СПб.: СМИО-Пресс, 2003. 254 с.
24. *Шапоров С.Д.* Методы вычислительной математики и их приложения. СПб.: СМИО-Пресс, 2003. 230 с.
25. *Шапоров С.Д.* Информатика. Теоретический курс и практические занятия. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 469 с.
26. *Шахтарин Б.И.* Случайные процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 2000. 584 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	3
1.1.	Случайные процессы. Основные определения.....	3
1.2.	Элементарная классификация случайных процессов.....	5
1.3.	Конечномерные распределения случайного процесса.....	7
1.4.	Моментные функции случайного процесса.....	12
2.	НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	22
2.1.	Стационарные случайные процессы.....	22
2.2.	Спектральное разложение стационарного случайного процесса и преобразование Фурье. Спектральная плотность.....	26
2.3.	Нормальные случайные процессы.....	35
2.4.	Абсолютно случайный процесс (белый шум).....	40
2.5.	Пуассоновские процессы, потоки событий.....	44
2.6.	Потоки Эрланга и Пальма.....	51
2.7.	Марковские процессы (дискретные состояния, дискретное время).....	54
2.8.	Марковские процессы (дискретные состояния, непрерывное время).....	64
3.	СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС И ЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ.....	71
3.1.	Действительная форма спектрального разложения стационарного случайного процесса.....	71
3.2.	Комплексная форма спектрального разложения стационарного случайного процесса.....	77
3.3.	Векторный стационарный случайный процесс и его характеристики.....	81
3.4.	Линейная стационарная непрерывная система и ее характеристики.....	84
3.5.	Преобразование стационарного случайного сигнала линейной стационарной непрерывной системой.....	89
	<i>Лабораторная работа №1. Анализ линейной стационарной непрерывной системы в пакете Matlab</i>	91
	<i>Лабораторная работа № 1. Анализ линейной стационарной непрерывной системы в пакете Mathcad</i>	98
	<i>Лабораторная работа № 2. Вычисление дисперсии выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы при случайном воздействии в пакете Mathcad</i>	102
	<i>Лабораторная работа № 2. Вычисление дисперсии выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы при случайном воздействии в пакете Matlab</i>	106
4.	МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	109
4.1.	Общая характеристика методов моделирования случайных процессов... ..	109
4.2.	Метод условных распределений.....	110
4.3.	Метод отбора (Неймана).....	118
4.4.	Моделирование случайных процессов с заданными корреляционными свойствами.....	120
4.4.1.	<i>Метод формирующего фильтра</i>	121

4.4.2.	<i>Метод скользящего суммирования</i>	122
4.4.3.	<i>Метод авторегрессии-скользящего среднего</i>	124
4.4.4.	<i>Метод канонических разложений</i>	131
4.4.5.	<i>Метод канонических разложений для стационарных случайных процессов</i>	133
4.4.6.	<i>Моделирование марковских случайных процессов (дискретных марковских цепей)</i>	136
4.5.	Параметры некоторых алгоритмов моделирования стационарных процессов с типовыми ковариационными функциями.....	138
	<i>Лабораторная работа № 3. Моделирование гауссовских случайных процессов с известными корреляционными характеристиками методом скользящего среднего в пакете Mathcad</i>	143
	<i>Лабораторная работа № 3. Моделирование гауссовских случайных процессов с известными корреляционными характеристиками методом скользящего среднего в пакете Matlab</i>	150
	<i>Лабораторная работа № 4. Моделирование стационарных гауссовских случайных процессов методом канонических разложений в пакете Mathcad</i>	158
	<i>Лабораторная работа № 4. Моделирование стационарных гауссовских случайных процессов методом канонических разложений в пакете Matlab</i>	171
	<i>Лабораторная работа № 5. Моделирование дискретных однородных марковских цепей в пакете Mathcad</i>	176
	<i>Лабораторная работа № 6. Моделирование случайных процессов методом отбора в пакете Mathcad</i>	201
	<i>Лабораторная работа № 6. Моделирование случайных процессов методом отбора в пакете Matlab</i>	208
	<i>Лабораторная работа № 7 (факультатив). Моделирование случайных процессов методом условных распределений в пакете Mathcad</i>	216
	<i>Метод кусочной аппроксимации</i>	216
	<i>Головная программа метода условных распределений и демонстрационные примеры</i>	220
	<i>Библиографический список</i>	234

Шапоров Сергей Дмитриевич, Родин Борис Павлович

Случайные процессы

Редактор *Г.М. Звягина*

Корректор *Л.А. Петрова*

Подписано в печать 24.02.2010. Формат бумаги 60x84/16. Бумага документная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 13,8. Тираж 150 экз. Заказ №

Балтийский государственный технический университет

Типография БГТУ

190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1