*Лабораторная работа №*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

по дисциплинам
«Перспективные методы обработки сигналов радиотехнических систем»
«Моделирование и оптимизация радиотехнических систем»

*Цель работы*: Изучение методов представления и характеристик случайных величин, описывающих параметры случайных сигналов.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

### *1.1 Основные характеристики распределений вероятности случайных величин*

Обозначим через $f(x)$ плотность вероятности случайной величины $x$, которая имеет область значений $X$. Если $x$ имеет размерность, (например, вольты), то $f(x)$ имеет обратную размерность (1/В). Это вытекает из условия нормировки плотности вероятности.

Основными характеристиками одномерных распределений являются статистические моменты (начальные, центральные, абсолютные и др.), кумулянты и квантили.

*Начальные* моменты $k$-го порядка $(k=1,2,...)$ равны $m_k = M\{x^k\} = \int_X x^k f(x)\mathrm{d}x$, где $M\{\cdot\}$ есть оператор математического ожидания. В частности, $m_1 = M\{x\} = m$ является математическим ожиданием случайной величины $x$. Второй начальный момент $m_2 = M\{x^2\}$ имеет размерность $B^2$ и называется мощностью $P$ случайной величины. В общем случае полное описание одномерной плотности вероятности возможно лишь бесконечной последовательностью начальных моментов.

*Центральные* моменты $k$-го порядка $(k=1,2,...)$ равны $\mu_k = M\{(x-m)^k\} = \int_X (x-m)^k f(x)\mathrm{d}x$. Очевидно, $\mu_1 = 0$, а второй центральный момент $\mu_2$ есть дисперсия $\sigma^2 = m_2 - m^2$. Последнее выражение означает, что мощность флуктуаций (случайных изменений) есть полная мощность минус мощность постоянной составляющей.

Для характеристики рассеяния случайной величины относительно ее математического ожидания применяется *среднеквадратическое отклонение* (СКО) $\sigma$, которое определяется как корень квадратный из дисперсии. Иногда оно называется *стандартным отклонением*. Отношение $k_v = \sigma / m$ известно как *коэффициент вариации*.

Последовательность центральных моментов уже не дает полного описания плотности вероятности, поскольку отсутствует информация о математическом ожидании. Однако эта последовательность полно описывает флуктуации (случайные изменения) величины относительно ее математического ожидания.

*Кумулянты* $k$ - го порядка $\kappa_k$ определяются как производные $k$ - го порядка логарифма *характеристической функции* $\Theta_x(u) = M\{\exp(jux)\}$ в точке $u = 0$, т. е. $\kappa_k = (1/j^k)\cdot[d^k \ln\Theta_x(u)/du^k]_{u=0}$.

Характеристическая функция $\Theta_x(u)$ однозначно связана с плотностью вероятностей $f(x)$ преобразованием Фурье, поэтому начальные моменты и кумулянты однозначно связаны, так что знание всех кумулянтов позволяет определить любой начальный момент и наоборот.

Имеют место следующие соотношения между кумулянтами и моментами:

$\kappa_1 = m_1 = m$, $\kappa_2 = m_2 - m^2 = \sigma^2$, $\kappa_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = \mu_3$,

$\kappa_4 = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4 = \mu^4 - 3\mu_2^2$, и так далее.

Цепочка кумулянтов бесконечна, также как и цепочка моментов. Единственным исключением является цепочка кумулянтов гауссовской плотности, в которой все кумулянты, кроме первых двух, равны нулю. Заметим, что цепочка моментов в этом случае все равно остается бесконечной. Таким образом, *негауссовость* распределения проявляется в наличии хотя бы одного ненулевого кумулянта порядка выше второго.

Отметим, что моменты и кумулянты являются размерными величинами. Для описания формы кривой распределения $f(x)$ удобно ввести (безразмерные) *кумулянтные коэффициенты* $\gamma_k = \kappa_k/\kappa_2^{k/2} = \kappa_k/\sigma^k$, $(k = 1,2,...)$. Очевидно, $\gamma_1 = m/\sigma = 1/k_v$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = \kappa_3/\sigma^3 = \mu_3/\sigma^3$, $\gamma_4 = \kappa_4/\sigma^4 = \mu_4/\sigma^4 - 3$, и так далее. Обычно рассматриваются лишь два старших кумулянтных коэффициента: $\gamma_3$ – коэффициент *асимметрии*, $\gamma_4$ – коэффициент *эксцесса*.

Для гауссовского распределения остается единственный ненулевой кумулянтный коэффициент $\gamma_1 = m/\sigma = 1/k_v$. Знак этого коэффициента определяется знаком математического ожидания. Его обратной величиной является *коэффициент вариации*. Любое негауссовское распределение характеризуется бесконечной последовательностью кумулянтных коэффициентов, поэтому совокупность $(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4)$ дает лишь частичную характеристику формы распределения.

При $\gamma_3 > 0$ плотность вероятности имеет более «тяжелый» правый хвост, а при $\gamma_3 < 0$ – более «тяжелый» левый хвост. Положительные значения коэффициента эксцесса отражают более острую вершину плотности в окрестности максимального значения (моды) по сравнению с гауссовской, а отрицательные – более плоскую.

Моменты и кумулянты распределений не могут принимать произвольные значения. Математическое ожидание имеет область допустимых значений, которая совпадает с областью возможных значений самой случайной величины, а дисперсия всегда положительна: $\sigma^2 > 0$.

Существуют известные соотношения между $\gamma_1$, $\gamma_3$ и $\gamma_4$: $\gamma_4 > \gamma_3^2 - 2$, $\gamma_3 \geq (1-\gamma_1^2)/\gamma_1$, которые обеспечивают неотрицательность плотности вероятности. Для случайных величин, принимающих неотрицательные значения, таких как амплитуда, мощность, выполняется неравенство $m_3 \geq m_1 \cdot m_2$, отсюда следует $\gamma_3 \geq -2\gamma_1$.

Иногда применяются *абсолютные* моменты $k$ - го порядка $(k = 1,2,...)$, *начальные* $M\{|x|^k\}$ и *центральные* $M\{|(x-m|^k\}$. Абсолютный центральный момент первого порядка $\delta = M\{|(x-m|\}$ используется для характеристики рассеяния и называется *средним отклонением*. Отметим, что цепочка абсолютных начальных моментов уже не является полной характеристикой плотности ввиду потери информации о знаках в четных степенях. Это тем более относится к цепочке абсолютных центральных моментов.

В связи с «проблемой моментов» возникают следующие два вопроса:

1. При каких условиях произвольная последовательность чисел представляет моменты (кумулянты) некоторой случайной величины?

2. При каких условиях последовательность моментов (кумулянтов) единственным образом определяют распределение случайной величины?

Эти условия связаны с областью значений и типом случайной величины (дискретная, непрерывная) и здесь не рассматриваются.

*Квантилем*, соответствующим вероятности $p$, т. е. $p$ - квантилем, называется значение $x_p$, для которого вероятность $P\{x \le x_p\} = p$. *Процентной точкой* $c_p$ будем называть квантиль $x_{1-p}$. В этом случае вероятность равна $P\{x > c_p\} = p$ или $100 \cdot p$ процентов. *Медиана* распределения $x_{\text{med}}$ есть 0,5-квантиль, которая совпадает с 50-процентной точкой. Она является характеристикой положения наряду с математическим ожиданием. *Мода* распределения $x_{\text{mod}}$ есть аргумент максимального значения плотности вероятности и также характеризует положение плотности. Если мода единственна, то распределение называют *унимодальным*.

Существуют и другие характеристики одномерного распределения, например, факториальные моменты. Следует подчеркнуть, что в общем случае никакая конечная совокупность числовых характеристик не дает полного описания плотности вероятности. Однако имеются модельные распределения, для характеристики которых достаточно знать конечное число параметров.

### *1.2 Основные модельные распределения вероятности*

*Равномерное распределение* $U(a,b)$ задается на отрезке $[a,b]$, где $a < b$ и имеет на этом отрезке постоянное значение плотности вероятности, равное $1/(b-a)$. Статистические моменты даются формулой $m_k = (b^{k+1} - a^{k+1})/[(b-a)(k+1)]$, $k = 1,2,\ldots$. Если $a = 0$, $b > 0$, то $m_k = b^k/(k+1)$. В частности, $m_1 = b/2$, $m_2 = b^2/3$, а дисперсия $\sigma^2 = b^2/12$. Кумулянтные коэффициенты $\gamma_1 = \sqrt{3}$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_4 = -1{,}2$ отражают симметрию и плосковершинность кривой плотности вероятности (по отношению к гауссовской плотности). Коэффициент вариации равен $k_v = 0{,}577$.

*Нормальное* или *гауссовское* распределение $N(m,\sigma^2)$ имеет плотность вероятности $f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp(-(x-m)^2/2\sigma^2)$, где математическое ожидание $m$ и дисперсия $\sigma^2$ являются параметрами распределения. Все кумулянтные коэффициенты, начиная с третьего, равны нулю. Среднее отклонение равно $\delta = \sigma(2/\pi)^{1/2}$. Помимо отмеченного выше свойства кумулянтов, нормальное распределение играет фундаментальную роль в теории распределений. Это объясняется тем, что распределение суммы случайных величин при широких предположениях относительно свойств каждой из величин с ростом числа слагаемых стремится к гауссовскому распределению (соответствующие условия являются содержанием *центральной предельной теоремы*).

Отметим, что коэффициент вариации обращается в бесконечность в случае $m = 0$. Часто удобной величиной является кумулянтный коэффициент $\gamma_1 = 1/k_v$, который может принимать положительные и отрицательные значения.

Пара независимых гауссовских случайных величин $(x_1, x_2)$ может быть получена из пары независимых СВ $(\xi_1, \xi_2)$, имеющих равномерные распределения $U(0,1)$ после преобразований: $A = (-2\ln(\xi_1))^{1/2}$, $x_1 = A\cos(2\pi\xi_2)$, $x_2 = A\sin(2\pi\xi_2)$.

Для симметричных унимодальных распределений математическое ожидание совпадает с медианой и с модой. Следующие распределения описывают неотрицательные случайные величины.

*Экспоненциальное (показательное) распределение* $E(\beta)$ описывает непрерывную случайную величину (СВ) и имеет плотность $f(x) = (1/\beta)\exp(-x/\beta)$ для неотрицательных значений $x \ge 0$, где параметр масштаба $\beta > 0$. Начальные моменты вычисляются по формуле: $m_k = \beta^k k!$, а кумулянты $\kappa_k = (k-1)!\beta^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Кумулянтные коэффициенты определяются следующим образом $\gamma_k = \kappa_k / \sigma^k$. У этого распределения математическое ожидание и дисперсия равны соответственно $m = \beta$ и $\sigma^2 = \beta^2$. Коэффициент вариации равен единице, коэффициенты асимметрии и эксцесса равны $\gamma_3 = 2$, $\gamma_4 = 6$.

Такое распределение имеет сумма квадратов двух независимых гауссовских СВ с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями $\beta^2/2$, поэтому распределение используется для описания свойств шума после квадратичного детектирования.

Иногда при сравнении распределений удобно пользоваться отношением $\gamma_4/\gamma_3^2$, которое в данном случае равно 1,5.

*Распределение Релея* $R(\beta)$ описывает непрерывную СВ с плотностью $f(x) = (2x/\beta^2)\exp(-x^2/\beta^2)$ для $x \ge 0$. Математическое ожидание (МО) и второй момент распределения равны $m = \beta\sqrt{\pi}/2 \approx 0{,}886\beta$, $m_2 = \beta^2$. Дисперсия распределения $\sigma^2 = (4-\pi)\beta^2/4 \approx 0{,}215\beta^2$, т. е. $\sigma = 0{,}463\beta$, а значение коэффициента вариации $k_v \approx 0{,}523$.

Медиана релеевского распределения $x_{\text{med}} \approx 0{,}832\beta$, а отношение математического ожидания к медиане $\rho \approx 1{,}064$. Теоретические коэффициенты асимметрии и эксцесса в первом приближении равны $\gamma_3 \approx 0{,}63$, $\gamma_4 \approx 0{,}232$, т. е. кривая плотности релеевского распределения более высокая и острая по сравнению с плотностью гауссовского распределения $N(m, \sigma^2)$.

Квадрат релеевской СВ имеет экспоненциальное распределение. Распределение используется для описания свойств шума после линейного детектирования.

*Распределение Релея-Райса* $RR(\beta, \delta)$ имеет плотность для $x \ge 0$ $f(x) = (2x/\beta^2)\exp(-x^2/\beta^2 - \delta^2) \cdot \mathrm{I}_0(2x\delta/\beta^2)$ и описывает распределение на выходе линейного детектора, если на входе действует гауссовский шум с дисперсией $\beta^2/2$ и постоянным ненулевым математическим ожиданием $a$. При этом параметр $\delta^2 = a^2/\beta^2$ представляет отношение сигнал/шум по мощности на входе детектора. Это распределение называют также *обобщенным распределением Релея*. Математическое ожидание и дисперсия выражаются приближенными формулами (при $a >> \beta$):

$$m_1 = a + \beta^2/4a, \qquad \sigma^2 = (\beta^2/2)(1 - \beta^2/8a^2).$$

Распределение *Вейбулла* $WB(\beta, \gamma)$ с параметром масштаба $\beta > 0$ и параметром формы $\gamma > 0$ имеет плотность вероятности $f(x) = (\gamma/\beta)(x/\beta)^{\gamma-1}\exp(-(x/\beta)^\gamma)$, $x \ge 0$. Начальные моменты распределения определяются выражением $m_k = \beta^k \cdot \Gamma(1 + k/\gamma)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $\mathbf{\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)}$, $\Gamma(1) = 1$. Для целых аргументов $\Gamma(n+1) = n!$.

При $\gamma = 1$ распределение Вейбулла переходит в *экспоненциальное* распределение $E(\beta)$ с плотностью вероятности $f(x) = (1/\beta)\exp(-(x/\beta))$.

Плотности вероятности для распределений Вейбулла являются несимметричными, поэтому математическое ожидание отличается от моды и от медианы. Характерным является отношение математического ожидания к медиане $\rho = m / x_{\text{med}}$. Для экспоненциального распределения $x_{\text{med}} = \beta \cdot \ln 2 \approx 0{,}693\beta$, а отношение $\rho \approx 1{,}443$.

Для распределений Вейбулла с $\gamma > 1$ при увеличении значения $\gamma$ асимметрия и эксцесс уменьшаются, математическое ожидание $m = \beta \cdot \Gamma(1 + 1/\gamma)$ и медиана $x_{\text{med}}$ сближаются и стремятся к $\beta$.

При $\gamma = 2$ распределение переходит в распределение *Релея* $R(\beta)$ $f(x) = (2x/\beta^2)\exp(-(x/\beta)^2)$. В первом приближении для всех распределений Вейбулла с $\gamma > 1$ можно считать $\gamma_4 / \gamma_3^2 \approx 1{,}7$.

Распределение Вейбулла появляется как предельное при $N \to \infty$ распределение максимума некоторого набора СВ $x = \max(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$, где $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ – взаимно независимы и одинаково распределены. Оно широко используется в теории надежности.

Распределение Вейбулла можно получить нелинейным преобразованием равномерного распределения: если $z \sim U(0,1)$, то $x = \beta(-2\ln z)^{1/\gamma}$ имеет распределение $WB(\beta,\gamma)$.

*Логарифмическое нормальное* распределение $LN(x_{\text{med}}, \sigma_l^2)$ имеет плотность (для неотрицательных значений случайной величины) $f(x) = (2\pi)^{-1/2}(\sigma_l x)^{-1}\exp(-(\ln(x/x_{\text{med}}))^2 / 2\sigma_l^2)$, $x \ge 0$, где $\sigma_l^2$ есть дисперсия величины $\ln x$. Математическое ожидание и дисперсия равны $m = x_{\text{med}}\rho$, $\sigma^2 = m^2(\rho^2 - 1)$, где отношение математического ожидания к медиане $\rho = \exp(\sigma_l^2 / 2)$. Начальные моменты логарифмического нормального распределения равны $m_k = m^k \cdot \rho^{k(k-1)}$. Распределение является двухпараметрическим. Медиана является параметром масштаба, а в качестве параметра формы можно выбрать $\sigma_l^2 = 2\ln\rho$, отношение математического ожидания к медиане $\rho$, или квадрат коэффициента вариации $k_v^2 = \rho^2 - 1$. Если вместо параметров $(x_{\text{med}}, \sigma_l^2)$ использовать $(m, \sigma_l^2)$, то плотность записывается в виде $f(x) = (2\pi)^{-1/2}(\sigma_l x)^{-1}\exp(-(\ln(x/m) + \sigma_l^2/2)^2 / 2\sigma_l^2)$.

Любой кумулянтный коэффициент логарифмического нормального распределения выражается через отношение $\rho$, либо через коэффициент вариации $k_v = \sigma / m$: $\gamma_3 = 3k_v + k_v^3$, $\gamma_4 = 16k_v^2 + 15k_v^4 + 6k_v^6 + k_v^8$. Кумулянтные коэффициенты всегда положительны, поскольку $k_v > 0$. Часто вместо величины $\sigma_l^2$ используется $\sigma_c^2 = 4\sigma_l^2$, которая выражается в децибелах, т. е. $\sigma_c^2[\partial Б] = 10\lg\sigma_c^2$. В частности, $\sigma_c^2[\partial Б] = 4{,}5\ \partial Б$, соответствует $\sigma_l^2 = 0{,}7046$, $\rho = 1{,}422$, $\sigma_c^2[\partial Б] = 6\ \partial Б$ соответствует $\sigma_l^2 = 0{,}9953$, $\rho = 1{,}645$. В первом приближении для плотностей логарифмического нормального распределения справедливо соотношение $\gamma_4 \approx 2\gamma_3^2$.

Случайную величину с логнормальным распределением можно получить из гауссовской: если $z \sim N(\mu, \sigma_l^2)$, то $x = \exp(z)$ имеет распределение $LN(x_{\text{med}}, \sigma_l^2)$, где медиана равна $x_{\text{med}} = \exp(\mu)$.

*Гамма-распределение* $\Gamma(\alpha, \beta)$ описывается плотностью вероятности (для неотрицательной случайной величины) $f(x) = (x/\beta)^{\alpha-1}\exp(-x/\beta)/\beta \cdot \Gamma(\alpha)$, $x \ge 0$, где параметр формы $\alpha > -1$, а $\beta > 0$ – параметр масштаба. Кумулянты распределения $\kappa_k = (k-1)!\cdot\alpha\beta^k$, откуда математическое ожидание и дисперсия равны $m = \alpha\beta$, $\sigma^2 = \alpha\beta^2$. Кумулянтные коэффициенты равны $\gamma_k = (k-1)!\cdot\alpha^{1-k/2}$. При $\alpha = 1$ распределение сводится к экспоненциальному, которое является общим для семейств гамма-распределения и распределения Вейбулла. С увеличением значений параметра формы высшие кумулянтные коэффициенты убывают, т. е. форма плотности вероятности стремится к гауссовской.

Квадрат коэффициента вариации $k_v^2 = \sigma^2 / m^2 = 1/\alpha$. Для моментов и кумулянтов справедливы следующие рекуррентные соотношения: $m_{k+1}/m_k = (\alpha+k)\beta$, $m_{k+1}/m_k = m_k/m_{k-1} + \beta$, $\kappa_{k+1}/\kappa_k = k\beta$, $\kappa_{k+1}/\kappa_k = \kappa_k/\kappa_{k-1} + \beta$. Кумулянтные коэффициенты равны $\gamma_k = \kappa_k/\sigma^k = (k-1)!\cdot\alpha^{1-k/2}$. Коэффициенты асимметрии и эксцесса $\gamma_3 = 2/\sqrt{\alpha}$, $\gamma_4 = 6/\alpha$, так что отношение $\gamma_4/\gamma_3^2 = 1{,}5$.

При $\alpha = K+1$ и $\beta = 1/\nu$ гамма-распределение $f(\tau) = \nu(\nu\tau)^K \exp(-\nu\tau)/K!$ называется *распределением Эрланга* $Erl(K,\nu)$ и описывает распределение длительности интервала времени до появления подряд ровно $K+1$ событий пуассоновского потока с интенсивностью $\nu$.

*Распределение хи-квадрат* $\chi_N^2$ *с* $N$ *степенями свободы* имеет плотность вероятности $f(x) = \dfrac{x^{N/2-1}\exp(-x/2)}{2^{N/2}\Gamma(N/2)}$ при $x \ge 0$. Впервые распределение было рассмотрено Ф. Хельмертом (1876) и исследовано К. Пирсоном (1900). Это распределение имеет сумма квадратов $N$ независимых стандартных нормальных СВ $x = \sum_{k=1}^N \xi_k^2$, где $\xi_k \sim N(0,1)$. Распределение является частным случаем гамма-распределения $\Gamma(\alpha,\beta)$ с параметрами $\alpha = N/2$ и $\beta = 2$. Начальные моменты вычисляются по формуле $m_k = N(N+2)...(N+2k-2)$, а кумулянты $\kappa_k = 2^{k-1}(k-1)!N$. МО и дисперсия равны $m = N$, $\sigma^2 = 2N$.

$m$*-распределение Накагами* $mN(\alpha,\beta)$ имеет плотность вероятности $f(x) = (2/\beta\,\Gamma(\alpha))(x/\beta)^{2\alpha-1}\exp(-(x/\beta))^2$ для $x \ge 0$. Распределение хорошо моделирует амплитудные флуктуации и замирания сигналов в различных средах. Параметр формы $\alpha$ иногда обозначается буквой $m$, что и определяет связь с названием распределения. При $\alpha = 1$ получается распределение Релея, случай $0{,}5 < \alpha < 1$ описывает сильные (глубокие) замирания, а $\alpha > 1$ характерен для слабых замираний.

Моменты определяются по формуле $m_k = \beta^k\Gamma(\alpha + k/2)/\Gamma(\alpha)$. В ряде случаев в качестве параметра масштаба используется второй момент $m_2 = \Omega = \beta^2\alpha$, отсюда $\beta^2 = \Omega/\alpha$. Случайная величина с $m$- распределением $mN(\alpha,\beta)$ после возведения в квадрат приобретает гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \beta = \sqrt{\Omega/\alpha})$.

$K$- *распределение* $K(\alpha,\beta)$ имеет плотность вероятности $f(x) = (2/\beta\,\Gamma(\alpha))(x/\beta)^{(\alpha-1)/2}K_{\alpha-1}(2\sqrt{x/\beta})$ при $x \ge 0$ и $\alpha > 0$. Здесь $K_{\alpha-1}(\cdot)$ – представляет модифицированную функцию Бесселя второго рода (см. Справочник по специальным функциям: Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979). Иногда в качестве параметра формы вводится величина $\nu = \alpha - 1$.

Начальные моменты вычисляются по формуле $m_k = k!\beta^k\Gamma(k+\alpha)/\Gamma(\alpha)$. Распределение можно получить путем умножения двух случайных величин с распределениями $E(1)$ и $\Gamma(\alpha,\beta)$. Квадрат коэффициента вариации распределения $k_v^2 = \sigma^2/m^2 = 1 + 2/\alpha$ всегда больше единицы.

Распределение хорошо моделирует флуктуации интенсивности и эффекты затенения лучей при распространении вдоль неровной земной или морской поверхности.

При $\alpha = 0{,}5$ распределение совпадает с распределением Вейбулла с параметром формы $\gamma = 0{,}5$, вчетверо меньшим параметром масштаба $WB(0{,}5, \beta/4)$, а при $\alpha \to \infty$ распределение стремится к экспоненциальному распределению $E(\beta)$.

Другая форма $K$ - распределения описывает амплитудные флуктуации. Величина $y = \sqrt{x}$ имеет плотность вероятности $f(x) = (4/b\Gamma(\alpha))(y/b)^{\alpha} K_{\alpha-1}(2y/b)$, где $b = \sqrt{\beta}$. Теперь четные начальные моменты $m_{2k} = k!\beta^k \Gamma(k+\alpha)/\Gamma(\alpha)$. При $\alpha \to \infty$ это распределение стремится к релеевскому распределению $R(\beta)$.

Рассмотренные одномерные распределения, конечно, не исчерпывают все применяемые модельные распределения. Можно указать более общие классы многопараметрических распределений, однако увеличение числа параметров резко усложняет теоретический анализ и практическое моделирование соответствующих полей. Другое направление развития моделей представляют случайные поля с зависимыми значениями, в частности, гауссовские коррелированные поля.

*Обобщенное экспоненциальное* распределение $GE(\gamma,\beta)$ имеет плотность вероятности $f(x) = (\gamma/\beta\Gamma(1/\gamma))\exp(-(x/\beta)^{\gamma})$ при $x \ge 0$ и $\gamma \ge 0{,}5$. Начальные моменты вычисляются по формуле $m_k = \beta^k \Gamma((k+1)/\gamma)/\Gamma(1/\gamma)$. При $\gamma = 1$ получаем экспоненциальное (показательное) распределение $E(\beta)$. При $\gamma = 2$ *одностороннее нормальное распределение* имеет математическое ожидание $m = \beta/\sqrt{\pi}$ и дисперсию $\sigma^2 = (1 - 2/\pi)\beta^2/2$. СВ с распределением $GE(\gamma, \beta = 1)$ получается в результате возведения в степень $\alpha$ случайной величины с гамма-распределением $\Gamma(\alpha, \beta = 1)$, при этом $\gamma = 1/\alpha$.

## 2. ЗАДАНИЯ ПО РАБОТЕ

1. Моделировать *типовые* распределения:
*-равномерное, - гауссовское, -m-распределение,- Вейбулла, -логарифмически-нормальное, гамма – распределение.*
Выбрать **параметры** распределений так, чтобы равномерное и гауссовское распределение располагались в области положительных значений. Все распределения должны иметь примерно одинаковую мощность и желательно близкие математические ожидания. Получить частные распределения из семейства гамма-распределения и распределения Вейбулла
2. Получить гистограммы распределений и изучить их, сравнить с теоретическими плотностями. Рассмотреть профили выборок в строках.
3. Исследовать зависимости выборочных характеристики от объема выборки (числа строк). Построить графики, где отложены теоретические значения.
4. Оформить эту часть работы и написать **выводы**, сравнивая разные распределения.

## 3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

3.1. Изучить теоретические сведения и ответить на контрольные вопросы.

3.2. Провести экспериментальное исследование в соответствии с разделом 2, подписать протокол исследований (черновик).

3.3. Оформить и представить отчет по лабораторной работе согласно приведенным ниже требованиям.

## 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1. Отчет по лабораторной работе оформляется индивидуально каждым студентом.

4.2. Титульный лист должен содержать название лабораторной работы, Фамилию, имя, отчество (полностью) и номер группы студента, дату выполнения работы и дату представления к защите.

4.3. Отчет должен содержать следующие обязательные части:

1. Цель работы.
2. Постановку задачи.
3. Теоретические исследования.
4. Результаты моделирования.
5. Выводы.

## 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выделить из текста и дать определения всем терминам: случайная величина, вероятность, независимость, функция распределения, плотность вероятности, характеристическая функция, начальные и центральные моменты, кумулянты, свойства математического ожидания и дисперсии, описание многомерных случайных величин и т.д.

2. Указать основные свойства функции распределения и плотности вероятности одномерной и многомерной случайной величины.

3. Является ли полным описание случайной величины: а) функцией распределения, б) плотностью вероятности, в) характеристической функцией, г) бесконечной последовательностью начальных моментов, кумулянтов или других числовых величин, д) некоторым конечным набором чисел, е) ограниченным числом моментов

4. Определение медианы и моды.

5. Написать выражения для плотностей вероятности основных модельных распределений.

6. Какие частные распределения получаются из семейства гамма-распределения, распределения Вейбулла?