## Тестовые функции

Эффективность ГА зависит от выбора способов кроссинговера, мутации, выбора родительской пары, формирования новой популяции, а также от таких параметров как размер популяции, длина хромосомы. Оценить ГА можно с помощью разнообразных тестовых функций, например, функций Де Ионга. Все тестовые функции могут иметь различное число параметров ($n$). Поэтому имеет смысл запустить алгоритм для оптимизации некоторой функции сначала с небольшим $n$ (например, 10 или 20), а затем с $n = 50,100,200,\ldots$ Это даст возможность проверить «масштабируемость» алгоритма. Так как генетические алгоритмы используют стохастичность, то для того, чтобы определить, насколько эффективен ГА, нужно запустить его на одной и той же тестовой функции несколько раз, а потом взять средний результат. Ниже приводятся наиболее распространенные *тестовые функции* ($x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$) [**?**].

1. Сферическая функция, или функция Де Ионга 1 (*Sphere model, De Jong's function 1*):

$$f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad x \in (-5{,}12; 5{,}12)$$
.

Глобальный минимум:

$f(x) = 0; \qquad x_i = 0; \qquad i = 1 : n.$

Локальных минимумов нет.

2. Гиперэллипсоидная функция с параллельными осями (*Axis parallel hyper-ellipsoid function*) похожа на функцию Де Ионга 1. По другому ее называют отягощенной сферической функцией. Следовательно, она выпукла и унимодальна:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} i x_i^2$$
, $-5{,}12$ 6 $x_i$ 6 $5{,}12.$

Глобальный минимум:

$f(x) = 0; \qquad x_i = 0; \qquad i = 1 : n.$

3. Повернутая гиперэллипсоидная функция (*Rotated hyper-ellipsoid function*). Данная функция получена поворотом гиперэллипсоидной функции, поэтому она выпукла и унимодальна.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} x_j^2$$
, $-65{,}536$ 6 $x_i$ 6 $65{,}536$

Глобальный минимум:

$f(x) = 0; \qquad x_i = 0; \qquad i = 1 : n$

4. Ступенчатая функция Де Ионга (*Step function (De Jong)*):

$$f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} |[x_i]|, \; x \in (-5{,}12; 5{,}12)$$
,

где $|[x_i]|$ — модуль целой части.

5. Седло Розенброка, или функция Де Ионга 2 (*Rosenbrock's saddle (valley), De Jong's function 2*) представляет собой классическую оптимизационную функцию (она еще известна как «банановая функция»). Глобальный оптимум находится внутри параболической сильно вытянутой поверхности. Определение формы поверхности тривиально, однако сходимость к локальному минимуму становится трудной задачей и следовательно для данной функции приходится повторно проводить оценку с помощью других оптимизационных алгоритмов:

$$f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\Bigl(100\left(x_{i+1}-x_i^2\right)^2+\left(x_i-1\right)^2\Bigr),\qquad x\in(-2{,}048;2{,}048)$$.

Глобальный минимум:

$f(x) = 0$; $x_i = 1$, $i = 1 : n$.

6. Функция Де Ионга с гауссовым распределением случайных величин (*Gaussian quartic, De Jong*):

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^4+gauss(0,1)\right),\qquad x\in(-1{,}28;1{,}28)$$,

где $gauss(0,1)$ — функция, возвращающая случайную величину с нормальным распределением, с математическим ожиданием в 0 и дисперсией равной 1.

7. Функция Растригина (*Rastrigin's function*) является функцией одной переменной. Наличие косинуса влечет существование множества локальных минимумов:

$$f(x)=10n+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-10\cos(2\pi x_i)\right),\qquad x\in(-5{,}12;5{,}12)$$.

Глобальный минимум:

$f(x) = 0$; $x_i = 0$; $i = 1 : n$.

8. Функция Швефеля (*Schwefel's (Sine root) function*) имеет ложный глобальный минимум. Поэтому поисковые алгоритмы потенциально склоняются к сходимости в неверном направлении:

$$f(x)=418{,}9829n+\sum_{i=1}^{n}\left(-x_i\sin\sqrt{|x_i|}\right),\qquad x\in(-500;50)$$.

Глобальный минимум:

$f(x) = 0$; $x_i = 420{,}9829$, $i = 1 : n$.

9. Функция Грайвенка (*Griewangk's function*) похожа на функцию Растригина. Она также имеет множество распространенных минимумов. Однако эти локальные минимумы регулярно распределены:

$$f\left(x\right)=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{4000}-\prod_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right),x\in(-600;600)$$.

Глобальный минимум:

$f(x) = 0$; $x_i = 0$; $i = 1 : n$.

10. Функция Эккли (*Ackley's function*):

$$f(x)=20+e-20\exp\left(-0{,}2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)-\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\pi x_i\right)\right)$$

$$x\in(-30;30).$$,

Глобальный минимум:

$f(x) = 0$; $x_i = 0$; $i = 1 : n$.

11. Сумма различных степеней (*Sum of differentpower*) — часто используемая тестовая функция:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{i+1}, \qquad -1 \leqslant x_i \leqslant 1.$$

Глобальный минимум:

$$f(x) = 0; \qquad x_i = 0; \qquad i = 1 : n.$$

12. Функция Михалевича (*Michalewicz's function*) — это мультимодальная тестовая функция с $n$! локальными экстремумами. Параметр $m$ определяет «крутизну» (steepness) оврагов или хребтов. Большое $m$ делает поиск труднее. Для очень больших $m$ поведение функции функции в данной точке дает ничтожную информацию о локальных и глобальных экстремумах), так как рельеф функции представляет собой обширные плоские участки (овраги и плато):

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} \left( \sin(x_i) \cdot \sin^{20}\left(\frac{i}{\pi} x_i^2\right) \right), 0 \leqslant x_i \leqslant \pi.$$

Глобальный минимум:

$$f(x) = -4{,}687 \quad (n = 5); f(x) = -9{,}66 \quad (n = 10).$$

13. Функция Бранинса (*Branins's rcos function*). Данная функция двух переменных имеет глобальный минимум в трех точках:

$$f(x_1, x_2) = \left( x_2 - \frac{5{,}1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5}{\pi} x_1 - 6 \right)^2 + 10 \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos(x_1) + 10$$
$$-5 \leqslant x_1 \leqslant 10, \qquad 0 \leqslant x_2 \leqslant 15.,$$

Глобальный минимум:

$$f(x_1,x_1) = 0{,}397887,$$
$$(x_1,x_1) = \{(-\pi,12{,}275);(\pi,2{,}275);(9{,}42478;2{,}475)\}.$$

14. Функция Изома (*Easom's function*). У данной унимодальной тестовой функции глобальный минимум находится в маленькой области относительно всего поискового пространства. Функция была инвертирована для минимизации:

$$f(x_1, x_2) = -\cos(x_1)\cos(x_2)\exp\left(-(x_1 - \pi)^2 + (x_2 - \pi)^2\right)$$
$$-100 \leqslant x_i \leqslant 100, \qquad i = 1 : 2.,$$

Глобальный минимум:

$$f(x_1,x_2) = -1; \qquad (x_1,x_2) = (-\pi,\pi).$$

15. Функция Голдстейна (*Goldstein–Price function*):

$$f(x_1, x_2) = [1 + (1 + x_1 + x_2)^2 \cdot (19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] \times$$
$$\times [30 + (2x_1 - 3x_2)^2 (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)];$$
$$-2 \leqslant x_i \leqslant 2, \qquad i = 1 : 2.$$

Глобальный минимум:

$$f(x_1,x_2) = 3; \qquad (x_1,x_2) = (0,-1).$$

16. Шестигорбая функция (*Six–hump camel back function*) имеет глобальный минимум в двух точках. По границе области содержащей глобальные минимумы находится шесть локальных минимумов:

$$f(x_1, x_2) = \left(4 - 2{,}1x_1^2 + \frac{x_1^4}{3}\right) x_1^2 + x_1 x_2 + \left(-4 - 4x_2^2\right)$$

;

$$-3 \leqslant x_1 \leqslant 3,$$

$-2\ 6\ x_2\ 6\ 2.$

Глобальный минимум:

$f(x_1,x_2) = -1{,}0316;$

$(x_1,x_2) = \{(-0{,}0898;0{,}7126);(0{,}0898,-0{,}7126)\}.$