**Интернет-Университет Информационных Технологий**

http://www.INTUIT.ru

Компьютерное моделирование0. Лекция: Введение

Имитационное моделирование как необходимая часть инженерного образования сложилось в середине прошлого, двадцатого века. Воспринятое поначалу как своеобразный численный метод решения сложных задач, как "младший брат" аналитического моделирования, оно постепенно стало основным, подчас единственным методом при анализе и синтезе сложных систем и процессов.

Общеизвестно, что правильно поставленный натурный эксперимент, то есть исследование свойств объекта на самом объекте, максимально информативен. Оказывается, что эксперимент с компьютерной имитационной моделью вполне конкурентоспособен с натурным. Не говоря о том, что натурный эксперимент в ряде случаев вообще невозможен или нецелесообразен, эксперимент с имитационной моделью может быть приемлемо информативен и выполнен значительно быстрее и дешевле натурного. Это и предопределило стремительное и повсеместное внедрение имитационного моделирования в научный и инженерный обиход.

В популяризации имитационного моделирования заметную роль сыграли работы Р. Шеннона [45] и Т. Д. Шрайбера [46]. В свое время эти работы были широко известны в среде научных работников и инженеров. Большую положительную роль в распространении компьютерного имитационного моделирования у нас в стране сыграли работы по моделированию сложных систем на ЭВМ члена-корреспондента АН СССР Н. П. Бусленко и выдающегося математика академика АН СССР А. А. Самарского. Их работы в области математического моделирования и вычислительного эксперимента широко используются на практике.

Огромный мировой опыт применения имитационного моделирования вызвал необходимость теоретического осмысления этого метода познания. Образовались центры в Москве, Санкт-Петербурге, Казани и др., объединяющие инженеров, научных сотрудников и преподавателей высшей школы, применяющих и пропагандирующих как само имитационное моделирование, так те или иные инструментальные средства. Регулярно проводятся общероссийские научно-практические конференции [27, 28]. Все чаще стали появляться публикации, посвященные общей теории имитационного моделирования. В частности, к таким можно отнести работы Окольнишникова В. В. [40] и Н. Б. Кобелева [31].

Курс имитационного моделирования под разными названиями: "Компьютерное моделирование", "Моделирование систем", "Моделирование" и т. п. является обязательным в учебных планах технических ВУЗов, в том числе и военных. Соответствующие знания включены в квалификационные характеристики выпускников.

Настоящий курс представляет собой учебное пособие для изучения материала по этим дисциплинам. Содержание курса определено типовыми программами соответствующих специальностей и изложено в восьми лекциях.

Первая лекция носит вводный характер. Разъясняются понятия моделирования и основных терминов. Классификация моделей и моделирования дается в самом общем виде. Подробная классификация не актуальна для настоящего пособия, главной целью которого является обучение практическим приемам имитационного моделирования и проведению компьютерных экспериментов с моделью. Заметим, что и общепринятой универсальной классификации нет, да и вряд ли она целесообразна. Этапы моделирования также рассматриваются в виде общего представления. Углубленное раскрытие содержания этапов демонстрируется в ходе курсового проектирования, предусмотренного тематическими планами вышеназванных дисциплин.

Во второй лекции рассматриваются подходы к аналитическому моделированию дискретных процессов, обладающих свойством марковости. Как показывает практика, такие процессы присущи многим аспектам функционального и надежностного поведения систем - объектов профессионального предназначения выпускников учебных заведений соответствующих специальностей. Демонстрируемые в лекции аналитические модели противоборства, массового обслуживания и некоторые другие утилитарного значения не имеют; на этих примерах демонстрируются возможные подходы к построению аналитических моделей процессов в объектах разного назначения. Заметим, что для сравнительно несложных процессов, например, для ряда структур систем массового обслуживания, аналитические модели можно обнаружить в соответствующих справочниках.

В основной части курса (лекции 3…8) излагаются обоснования и приемы имитационного моделирования дискретных процессов - моделирования поведения вероятностных систем, т. е. таких, на которые воздействуют различного рода случайности. Такие модели называются статистическими, поскольку искомые результаты получают посредством статистической обработки данных.

В качестве основного инструментального средства в курсе рассматривается система моделирования GPSS World. Эта система распространена в нашей стране и не только; ей посвящены представительные научно-практические конференции и издания. Авторы имеют опыт применения и преподавания всех вариаций семейства GPSS, начиная с самой первой. И если версии GPSS-360, GPSS/PC, GPSS/H можно упрекнуть в некоторой ограниченности средств по сравнению, например, с Simpas, то последнюю на сегодняшний день версию GPSS World можно, по мнению инженерной общественности и авторов, считать вполне удовлетворяющей современным требованиям практиков. В учебном пособии нельзя, да и нецелесообразно отобразить все возможности GPSS World. Для дальнейшего профессионального совершенствования следует обратиться к [5].

При работе над курсом авторы опирались на свой опыт моделирования и преподавания, а также на многие издания по теме. В наибольшей степени были учтены работы, указанные в списке литературы.

Авторы признательны Д. В. Боеву, помощь которого в подготовке и оформлении рукописи была существенна

**Интернет-Университет Информационных Технологий**
http://www.INTUIT.ru
Компьютерное моделирование

1. Лекция: Понятие модели и моделирования: версия для печати и PDA
Первая тема имеет вводный, в основном, терминологический характер. Подробно раскрываются понятия модели и моделирования, их назначение как основного, а подчас, и единственного метода анализа и синтеза сложных систем и процессов. Дается обзор классификации моделей и моделирования, в некоторой мере упрощенный, но достаточный для полного уяснения сущности моделирования как вообще, так и математического в частности.

Сам по себе процесс моделирования в полной мере не формализован, большая роль в этом принадлежит опыту инженера. Но, тем не менее, рассматриваемый в теме процесс создания модели в виде шести этапов может стать основой для начинающих и с накоплением опыта может быть индивидуализирован.

Математическая модель, являясь абстрактным образом моделируемого объекта или процесса, не может быть его полным аналогом. Достаточно сходства в тех элементах, которые определяют цель исследования. Для качественной оценки сходства вводится понятие адекватности модели объекту и, в связи с этим, раскрываются понятия изоморфизма и изофункционализма. Формальных приемов, позволяющих автоматически, "бездумно", создавать адекватные математические модели, нет. Окончательное суждение об адекватности модели дает практика, то есть сопоставление модели с действующим объектом. И, тем не менее, усвоение всех последующих тем пособия позволит инженеру справляться с проблемой обеспечения адекватности моделей.

Завершается тема изложением требований к моделям, которые были сформулированы Р. Шенноном на заре компьютерного моделирования тридцать лет назад в книге "Имитационное моделирование систем - искусство и наука". Актуальность этих требований сохраняется и в настоящее время.

## 1.1. Общее определение модели

Практика свидетельствует: самое лучшее средство для определения свойств объекта - натурный эксперимент, т. е. исследование свойств и поведения самого объекта в нужных условиях. Дело в том, что при проектировании невозможно учесть многие факторы, расчет ведется по усредненным справочным данным, используются новые, недостаточно проверенные элементы (прогресс нетерпелив!), меняются условия внешней среды и многое другое. Поэтому натурный эксперимент - необходимое звено исследования. Неточность расчетов компенсируется увеличением объема натурных экспериментов, созданием ряда опытных образцов и "доводкой" изделия до нужного состояния. Так поступали и поступают при создании, например, телевизора или радиостанции нового образца.

Однако во многих случаях натурный эксперимент невозможен.

Например, наиболее полную оценку новому виду вооружения и способам его применения может дать война. Но не будет ли это слишком поздно?

Натурный эксперимент с новой конструкцией самолета может вызвать гибель экипажа.

Натурное исследование нового лекарства опасно для жизни человека.

Натурный эксперимент с элементами космических станций также может вызвать гибель людей.

Время подготовки натурного эксперимента и проведение мероприятий по обеспечению безопасности часто значительно превосходят время самого эксперимента. Многие испытания, близкие к граничным условиям, могут протекать настолько бурно, что возможны аварии и разрушения части или всего объекта.

Из сказанного следует, что натурный эксперимент необходим, но в то же время невозможен либо нецелесообразен.

Выход из этого противоречия есть и называется он "моделирование".

**Моделирование** - это замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала.

Отсюда следует.

**Моделирование -** это, во-первых, процесс создания или отыскания в природе объекта, который в некотором смысле может заменить исследуемый объект. Этот промежуточный объект называется **моделью**. Модель может быть материальным объектом той же или иной природы по отношению к изучаемому объекту (оригиналу). Модель может быть мысленным объектом, воспроизводящим оригинал логическими построениями или математическими формулами и компьютерными программами.

**Моделирование**, во-вторых, это испытание, исследование модели. То есть, моделирование связано с экспериментом, отличающимся от натурного тем, что в процесс познания включается "промежуточное звено" - модель. Следовательно, **модель** является одновременно средством эксперимента и объектом эксперимента, заменяющим изучаемый объект.

**Моделирование**, в-третьих, это перенос полученных на модели сведений на оригинал или, иначе, приписывание свойств модели оригиналу. Чтобы такой перенос был оправдан, между моделью и оригиналом должно быть сходство, подобие.

Подобие может быть физическим, геометрическим, структурным, функциональным и т. д. **Степень подобия** может быть разной - от тождества во всех аспектах до сходства только в главном. Очевидно, модели не должны воспроизводить полностью все стороны изучаемых объектов. Достижение абсолютной одинаковости сводит моделирование к натурному эксперименту, о возможности или целесообразности которого было уже сказано.

Остановимся на основных **целях моделирования**.

**Прогноз** - оценка поведения системы при некотором сочетании ее управляемых и неуправляемых параметров. Прогноз - главная цель моделирования.

**Объяснение** и **лучшее понимание объектов**. Здесь чаще других встречаются задачи оптимизации и анализа чувствительности. Оптимизация - это точное определение такого сочетания факторов и их величин, при котором обеспечиваются наилучший показатель качества системы, наилучшее по какому-либо критерию достижение цели моделируемой системой. Анализ чувствительности - выявление из большого числа факторов тех, которые в наибольшей степени влияют на функционирование моделируемой системы. Исходными данными при этом являются результаты экспериментов с моделью.

Часто модель создается для применения в качестве средства обучения: модели-тренажеры, стенды, учения, деловые игры и т. п.

Моделирование как метод познания применялось человечеством - осознанно или интуитивно - всегда. На стенах древних храмов предков южно-американских индейцев обнаружены графические модели мироздания. Учение о моделировании возникло в средние века. Выдающаяся роль в этом принадлежит Леонардо да Винчи (1452-1519).

Гениальный полководец А. В. Суворов перед атакой крепости Измаил тренировал солдат на модели измаильской крепостной стены, построенной специально в тылу.

Наш знаменитый механик-самоучка И. П. Кулибин (1735-1818) создал модель одноарочного деревянного моста через р. Неву, а также ряд металлических моделей мостов. Они были полностью технически обоснованы и получили высокую оценку российскими академиками Л. Эйлером и Д. Бернулли. К сожалению, ни один из этих мостов не был построен.

Огромный вклад в укрепление обороноспособности нашей страны внесли работы по моделированию взрыва - генерал-инженер Н. Л. Кирпичев, моделированию в авиастроении - М. В. Келдыш, С. В. Ильюшин, А. Н. Туполев и др., моделированию ядерного взрыва - И. В. Курчатов, А.Д. Сахаров, Ю. Б. Ха-ритон и др.

Широко известны работы Н. Н. Моисеева по моделированию систем управления. В частности, для проверки одного нового метода математического моделирования была создана математическая модель Синопского сражения - последнего сражения эпохи парусного флота. В 1833 году адмирал П. С. Нахимов разгромил главные силы турецкого флота. Моделирование на вычислительной машине показало, что Нахимов действовал практически безошибочно. Он настолько верно расставил свои корабли и нанес первый удар, что единственное спасение турок было отступление. Иного выхода у них не было. Они не отступили и были разгромлены.

Сложность и громоздкость технических объектов, которые могут изучаться методами моделирования, практически неограниченны. В последние годы все крупные сооружения исследовались на моделях - плотины, каналы, Братская и Красноярская ГЭС, системы дальних электропередач, образцы военных систем и др. объекты.

Поучительный пример недооценки моделирования - гибель английского броненосца "Кэптен" в 1870 году. В стремлении еще больше увеличить свое тогдашнее морское могущество и подкрепить империалистические устремления в Англии был разработан суперброненосец "Кэптен". В него было вложено все, что нужно для "верховной власти" на море: тяжелая артиллерия во вращающихся башнях, мощная бортовая броня, усиленное парусное оснащение и очень низкими бортами - для меньшей уязвимости от снарядов противника. Консультант инженер Рид построил математическую модель устойчивости "Кэптена" и показал, что даже при незначительном ветре и волнении ему грозит опрокидывание. Но лорды Адмиралтейства настояли на строительстве корабля. На первом же учении после спуска на воду налетевший шквал перевернул броненосец. Погибли 523 моряка. В Лондоне на стене одного из соборов прикреплена бронзовая плита, напоминающая об этом событии и, добавим мы, о тупоумии самоуверенных лордов Британского Адмирал тейства, пренебрегших результатами моделирования.

## 1.2. Классификация моделей и моделирования

Каждая модель создается для конкретной цели и, следовательно, уникальна. Однако наличие общих черт позволяет сгруппировать все их многообразие в отдельные классы, что облегчает их разработку и изучение. В теории рассматривается много признаков классификации и их количество не установилось. Тем не менее, наиболее актуальны следующие **признаки классификации**:

- характер моделируемой стороны объекта;
- характер процессов, протекающих в объекте;
- способ реализации модели.

### 1.2.1. Классификация моделей и моделирования по признаку "характер моделируемой стороны объекта"

В соответствии с этим признаком модели могут быть:

- функциональными (кибернетическими);
- структурными;
- информационными.

**Функциональные модели** отображают только поведение, функцию моделируемого объекта. В этом случае моделируемый объект рассматривается как "черный ящик", имеющий входы и выходы. Физическая сущность объекта, природа протекающих в нем процессов, структура объекта остаются вне внимания исследователя, хотя бы потому, что неизвестны. При функциональном моделировании эксперимент состоит в наблюдении за выходом моделируемого объекта при искусственном или естественном изменении входных воздействий. По этим данным и строится модель поведения в виде некоторой математической функции.

Компьютерная шахматная программа - функциональная модель работы человеческого мозга при игре в шахматы.

**Структурное моделирование** это создание и исследование модели, структура которой (элементы и связи) подобна структуре моделируемого объекта. Как мы выяснили ранее, подобие устанавливается не вообще, а относительно цели исследования. Поэтому она может быть описана на разных уровнях рассмотрения. Наиболее общее описание структуры - это топологическое описание с помощью теории графов.

Учение войск - структурная модель вида боевых действий.

### 1.2.2. Классификация моделей и моделирования по признаку "характер процессов, протекающих в объекте"

По этому признаку модели могут быть детерминированными или стохастическими, статическими или динамическими, дискретными или непрерывными или дискретно-непрерывными.

**Детерминированные модели** отображают процессы, в которых отсутствуют случайные воздействия.

**Стохастические модели** отображают вероятностные процессы и события.

**Статические модели** служат для описания состояния объекта в какой-либо момент времени.

**Динамические модели** отображают поведение объекта во времени.

**Дискретные модели** отображают поведение систем с дискретными состояниями.

**Непрерывные модели** представляют системы с непрерывными процессами.

**Дискретно-непрерывные** модели строятся тогда, когда исследователя интересуют оба эти типа процессов.

Очевидно, конкретная модель может быть стохастической, статической, дискретной или какой-либо другой, в соответствии со связями, показанными на рис. 1.1.

### 1.2.3. Классификация моделей и моделирования по признаку "способ реализации модели"

Согласно этому признаку модели делятся на два обширных класса:

- абстрактные (мысленные) модели;
- материальные модели.

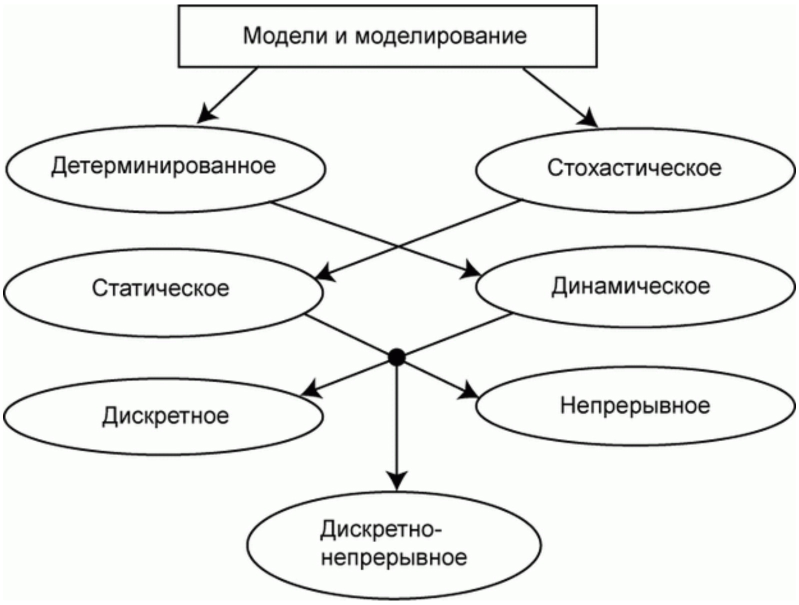



**Рис. 1.1.** Классификация моделей и моделирования

Нередко в практике моделирования присутствуют смешанные, абстрактно-материальные модели.

**Абстрактные модели** представляют собой определенные конструкции из общепринятых знаков на бумаге или другом материальном носителе или в виде компьютерной программы.

Абстрактные модели, не вдаваясь в излишнюю детализацию, можно разделить на:

- символические;
- математические.

**Символическая модель** - это логический объект, замещающий реальный процесс и выражающий основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов. Это либо слова естественного языка, либо слова соответствующего тезауруса, графики, диаграммы и т. п.

Символическая модель может иметь самостоятельное значение, но, как правило, ее построение является начальным этапом любого другого моделирования.

**Математическое моделирование** - это процесс установления соответствия моделируемому объекту некоторой математической конструкции, называемой математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики моделируемого объекта.

Математическое моделирование - главная цель и основное содержание изучаемой дисциплины.

Математические модели могут быть:

- аналитическими;
- имитационными;
- смешанными (аналитико-имитационными).

**Аналитические модели** - это функциональные соотношения: системы алгебраических, дифференциальных, интегро - дифференциальных уравнений, логических условий. Уравнения Максвелла - аналитическая модель электромагнитного поля. Закон Ома - модель электрической цепи.

Преобразование математических моделей по известным законам и правилам можно рассматривать как эксперименты. Решение на основе аналитических моделей может быть получено в результате однократного просчета безотносительно к конкретным значениям характеристик ("в общем виде"). Это наглядно и удобно для выявления закономерностей. Однако для сложных систем построить аналитическую модель, достаточно полно отражающую реальный процесс, удается не всегда. Тем не менее, есть процессы, например, марковские, актуальность моделирования которых аналитическими моделями доказана практикой.

**Имитационное моделирование** .Создание вычислительных машин обусловило развитие нового подкласса математических моделей - имитационных.

Имитационное моделирование предполагает представление модели в виде некоторого алгоритма - компьютерной программы, - выполнение которого имитирует последовательность смены состояний в системе и таким образом представляет собой поведение моделируемой системы.

Процесс создания и испытания таких моделей называется имитационным моделированием, а сам алгоритм - имитационной моделью.

В чем заключается отличие имитационных и аналитических моделей?

В случае аналитического моделирования ЭВМ является мощным калькулятором, арифмометром. Аналитическая модель решается на ЭВМ.

В случае же имитационного моделирования имитационная модель - программа - реализуется на ЭВМ.

Имитационные модели достаточно просто учитывают влияние случайных факторов. Для аналитических моделей это серьезная проблема. При наличии случайных факторов необходимые характеристики моделируемых процессов получаются многократными прогонами (реализациями) имитационной модели и дальнейшей статистической обработкой накопленной информации. Поэтому часто имитационное моделирование процессов со случайными факторами называют **статистическим моделированием**.

Если исследование объекта затруднено использованием только аналитического или имитационного моделирования, то применяют смешанное (комбинированное), аналитико-имитационное моделирование. При построении таких моделей процессы функционирования объекта декомпозируются на составляющие подпроцессы и для которых возможно используют аналитические модели, а для остальных подпроцессов строят имитационные модели.

**Материальное моделирование** основано на применении моделей, представляющих собой реальные технические конструкции. Это может быть сам объект или его элементы (натурное моделирование). Это может быть специальное устройство - модель, имеющая либо физическое, либо геометрическое подобие оригиналу. Это может быть устройство иной физической природы, чем оригинал, но процессы в котором описываются аналогичными математическими соотношениями. Это так называемое аналоговое моделирование. Такая аналогия наблюдается, например, между колебаниями антенны спутниковой связи под ветровой нагрузкой и колебанием электрического тока в специально подобранной электрической цепи.

Нередко создаются **материально-абстрактные модели**. Та часть операции, которая не поддается математическому описанию, моделируется материально, остальная - абстрактно. Таковы, например, командно-штабные учения, когда работа штабов представляет собой натурный эксперимент, а действия войск отображаются в документах.

Классификация по рассмотренному признаку - способу реализации модели - показана на рис. 1.2.

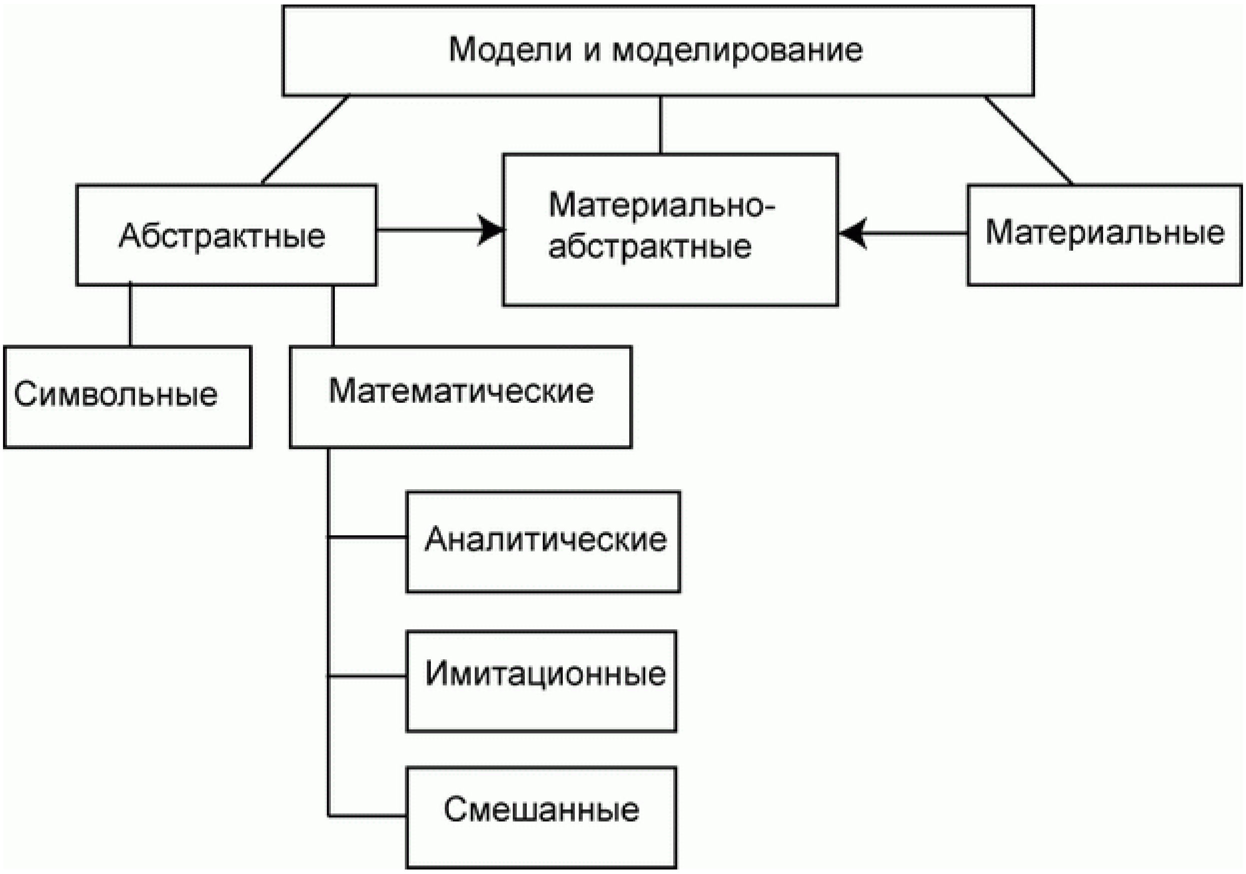



**Рис. 1.2.** Классификация по способу реализации модели

## 1.3. Этапы моделирования

Математическое моделирование как, впрочем, и любое другое, считается искусством и наукой. Известный специалист в области имитационного моделирования Роберт Шеннон так назвал свою широко известную в научном и инженерном мире книгу: "Имитационное моделирование - искусство и наука". Поэтому в инженерной практике нет формализованной инструкции, как создавать модели. И, тем не менее, анализ приемов, которые используют разработчики моделей, позволяет усмотреть достаточно прозрачную этапность моделирования.

**Первый этап**: уяснение целей моделирования. Вообще-то это главный этап любой деятельности. Цель существенным образом определяет содержание остальных этапов моделирования. Заметим, что различие между простой системой и сложной порождается не столько их сущностью, но и целями, которые ставит исследователь.

Обычно целями моделирования являются:

- прогноз поведения объекта при новых режимах, сочетаниях факторов и т. п.;
- подбор сочетания и значений факторов, обеспечивающих оптимальное значение показателей эффективности процесса;
- анализ чувствительности системы на изменение тех или иных факторов;
- проверка различного рода гипотез о характеристиках случайных параметров исследуемого процесса;
- определение функциональных связей между поведением ("реакцией") системы и влияющими факторами, что может способствовать прогнозу поведения или анализу чувствительности;

- уяснение сущности, лучшее понимание объекта исследования, а также формирование первых навыков для эксплуатации моделируемой или действующей системы.

**Второй этап**: построение концептуальной модели. Концептуальная модель (от лат. conception) - модель на уровне определяющего замысла, который формируется при изучении моделируемого объекта. На этом этапе исследуется объект, устанавливаются необходимые упрощения и аппроксимации. Выявляются существенные аспекты, исключаются второстепенные. Устанавливаются единицы измерения и диапазоны изменения переменных модели. Если возможно, то концептуальная модель представляется в виде известных и хорошо разработанных систем: массового обслуживания, управления, авторегулирования, разного рода автоматов и т. д. Концептуальная модель полностью подводит итог изучению проектной документации или экспериментальному обследованию моделируемого объекта.

Результатом второго этапа является обобщенная схема модели, полностью подготовленная для математического описания - построения математической модели.

**Третий этап**: выбор языка программирования или моделирования, разработка алгоритма и программы модели. Модель может быть аналитической или имитационной, или их сочетанием. В случае аналитической модели исследователь должен владеть методами решения.

В истории математики (а это, впрочем, и есть история математического моделирования) есть много примеров тому, когда необходимость моделирования разного рода процессов приводила к новым открытиям. Например, необходимость моделирования движения привела к открытию и разработке дифференциального исчисления (Лейбниц и Ньютон) и соответствующих методов решения. Проблемы аналитического моделирования остойчивости кораблей привели академика Крылова А. Н. к созданию теории приближенных вычислений и аналоговой вычислительной машины.

Результатом третьего этапа моделирования является программа, составленная на наиболее удобном для моделирования и исследования языке - универсальном или специальном.

**Четвертый этап**: планирование эксперимента. Математическая модель является объектом эксперимента. Эксперимент должен быть в максимально возможной степени информативным, удовлетворять ограничениям, обеспечивать получение данных с необходимой точностью и достоверностью. Существует теория планирования эксперимента, нужные нам элементы этой теории мы изучим в соответствующем месте дисциплины.

Результат четвертого этапа - план эксперимента.

**Пятый этап**: выполнение эксперимента с моделью. Если модель аналитическая, то эксперимент сводится к выполнению расчетов при варьируемых исходных данных. При имитационном моделировании модель реализуется на ЭВМ с фиксацией и последующей обработкой получаемых данных. Эксперименты проводятся в соответствии с планом, который может быть включен в алгоритм модели. В современных системах моделирования такая возможность есть.

**Шестой этап**: обработка, анализ и интерпретация данных эксперимента. В соответствии с целью моделирования применяются разнообразные методы обработки: определение разного рода характеристик случайных величин и процессов, выполнение анализов - дисперсионного, регрессионного, факторного и др. Многие из этих методов входят в системы моделирования (GPSS World, AnyLogic и др.) и могут применяться автоматически. Не исключено, что в ходе анализа полученных результатов модель может быть уточнена, дополнена или даже полностью пересмотрена.

После анализа результатов моделирования осуществляется их интерпретация, то есть перевод результатов в термины предметной области. Это необходимо, так как обычно специалист предметной области (тот, кому нужны результаты исследований) не обладает терминологией математики и моделирования и может выполнять свои задачи, оперируя лишь хорошо знакомыми ему понятиями.

На этом рассмотрение последовательности моделирования закончим, сделав весьма важный вывод о необходимости документирования результатов каждого этапа. Это необходимо в силу следующих причин.

Во-первых, моделирование процесс итеративный, то есть с каждого этапа может осуществляться возврат на любой из предыдущих этапов для уточнения информации, необходимой на этом этапе, а документация может сохранить результаты, полученные на предыдущей итерации.

Во-вторых, в случае исследования сложной системы в нем участвуют большие коллективы разработчиков, причем различные этапы выполняются различными коллективами. Поэтому результаты, полученные на каждом этапе, должны быть переносимы на последующие этапы, то есть иметь унифицированную форму представления и понятное другим заинтересованным специалистам содержание.

В-третьих, результат каждого из этапов должен являться самоценным продуктом. Например, концептуальная модель может и не использоваться для дальнейшего преобразования в математическую модель, а являться описанием, хранящим информацию о системе, которое может использоваться как архив, в качестве средства обучения и т. д.

## 1.4. Адекватность модели

Итак, мы установили: модель предназначена для замены оригинала при исследованиях, которым подвергать оригинал нельзя или нецелесообразно. Но замена оригинала моделью возможна, если они в достаточной степени похожи или адекватны.

**Адекватность** означает, достаточно ли хорошо с точки зрения целей исследования результаты, полученные в ходе моделирования, отражают истинное положение дел. Термин происходит от латинского adaequatus - приравненный.

Говорят, что модель адекватна оригиналу, если при ее интерпретации возникает "портрет", в высокой степени сходный с оригиналом.

До тех пор, пока не решен вопрос, правильно ли отображает модель исследуемую систему (то есть адекватна ли она), ценность модели нулевая!

Термин "адекватность" как видно носит весьма расплывчатый смысл. Понятно, что результативность моделирования значительно возрастет, если при построении модели и переносе результатов с модели на систему - оригинал может воспользоваться некоторой теорией, уточняющей идею подобия, связанную с используемой процедурой моделирования.

К сожалению теории, позволяющей оценить, адекватность математической модели и моделируемой системы нет, в отличие от хорошо разработанной теории подобия явлений одной и той же физической природы.

Проверку адекватности проводят на всех этапах построения модели, начиная с самого первого этапа - концептуального анализа. Если описание системы будет составлено не адекватно реальной системе, то и модель, как бы точно она не отображала описание системы, не будет адекватной оригиналу. Здесь сказано "как бы точно", так как имеется в виду, что вообще не существуют математические модели, абсолютно точно отображающие процессы, существующие в реальности.

Если изучение системы проведено качественно и концептуальная модель достаточно точно отражает реальное положение дел, то далее перед разработчиками стоит лишь проблема эквивалентного преобразования одного описания в другое.

Итак, можно говорить об адекватности модели в любой ее форме и оригинала, если:

- описание поведения, созданное на каком-либо этапе, достаточно точно совпадает с поведением моделируемой системы в одинаковых ситуациях;
- описание убедительно представительно относительно свойств системы, которые должны прогнозироваться с помощью модели.

Предварительно исходный вариант математической модели подвергается следующим проверкам:

- все ли существенные параметры включены в модель;
- нет ли в модели несущественных параметров;
- правильно ли отражены функциональные связи между параметрами;
- правильно ли определены ограничения на значения параметров;
- не дает ли модель абсурдные ответы, если ее параметры принимают предельные значения;

Такая предварительная оценка адекватности модели позволяет выявить в ней наиболее грубые ошибки.

Но все эти рекомендации носят неформальный, рекомендательный характер. Формальных методов оценки адекватности не существует! Поэтому, в основном, качество модели (и в первую очередь степень ее адекватности системе) зависит от опыта, интуиции, эрудиции разработчика модели и других субъективных факторов.

Окончательное суждение об адекватности модели может дать лишь практика, то есть сравнение модели с оригиналом на основе экспериментов с объектом и моделью. Модель и объект подвергаются одинаковым воздействиям и сравниваются их реакции. Если реакции одинаковы (в пределах допустимой точности), то делается вывод, что модель адекватна оригиналу. Однако надо иметь в виду следующее:

- воздействия на объект носят ограниченный характер из-за возможного разрушения объекта, недоступности к элементам системы и т. д.;

- воздействия на объект имеют физическую природу (изменение питающих токов и напряжений, температуры, скорости вращения валов и т. д.), а на математическую модель - это числовые аналоги физических воздействий.

Для оценки степени подобия структур объектов (физических или математических) существует понятие изоморфизма (изо - одинаковый, равный, морфе - форма, греч.).

Две системы изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие между элементами и отношениями (связями) этих систем.

Изоморфны, например, множество действительных положительных чисел и множество их логарифмов. Каждому элементу одного множества - числу соответствует значение его логарифма в другом, умножению двух чисел в первом множестве - сложение их логарифмов в другом. С точки зрения пассажира план метрополитена, находящийся в каждом вагоне поезда метро, изоморфен реальному географическому расположению рельсовых путей и станций, хотя для рабочего, ремонтирующего рельсовые пути, этот план естественно не является изоморфным. Фотография является изоморфным отображением реального лица для милиционера, но не является таковым для художника.

При моделировании сложных систем достигнуть такое полное соответствие трудно, да и нецелесообразно. При моделировании абсолютное подобие не имеет места. Стремятся лишь к тому. чтобы модель достаточно хорошо отражала исследуемую сторону функционирования объекта. Модель по сложности может стать аналогичной исследуемой системе и никакого упрощения исследования не будет.

Для оценки подобия в поведении (функционировании) систем существует понятие изофункционализма.

Две системы произвольной, а подчас неизвестной структуры изофункциональны, если при одинаковых воздействиях они проявляют одинаковые реакции. Такое моделирование называется функциональным или кибернетическим и в последние годы получает все большее распространение, например, при моделировании человеческого интеллекта (игра в шахматы, доказательство теорем, распознавание образов и т. д.). Функциональные модели не копируют структуры. Но копируя поведение, исследователи последовательно "подбираются" к познанию структур объектов (человеческого мозга, Солнца, и др.).

## 1.5. Требования, предъявляемые к моделям

Итак, общие требования к моделям.

1. Модель должна быть актуальной. Это значит, что модель должна быть нацелена на важные для лиц, принимающих решения, проблемы.
2. Модель должна быть результативной. Это значит, что полученные результаты моделирования могут найти успешное применение. Данное требование может быть реализовано только в случае правильной формулировки требуемого результата.
3. Модель должна быть достоверной. Это значит, что результаты моделирования не вызовут сомнения. Данное требование тесно связано с понятием адекватности, то есть, если модель неадекватна, то она не может давать достоверных результатов.
4. Модель должна быть экономичной. Это значит, что эффект от использования результатов моделирования превышает расходы ресурсов на ее создание и исследование.

Эти требования (обычно их называют внешними) выполнимы при условии обладания моделью внутренними свойствами.

Модель должна быть:

1. Существенной,т. е. позволяющей вскрыть сущность поведения системы, вскрыть неочевидные, нетривиальные детали.
2. Мощной, т. е. позволяющей получить широкий набор существенных сведений.
3. Простой в изучении и использовании, легко просчитываемой на компьютере.
4. Открытой, т.е. позволяющей ее модификацию. В заключение темы сделаем несколько замечаний.

Трудно ограничить область применения математического моделирования. При изучении и создании промышленных и военных систем практически всегда можно определить цели, ограничения и предусмотреть, чтобы конструкция или процесс подчинялись естественным, техническим и (или) экономическим законам.

Круг аналогий, которые можно использовать в качестве моделей, также практически неограничен. Следовательно, надо постоянно расширять свое образование в конкретной области, но, в первую очередь, в математике.

В последние десятилетия появились проблемы с неясными и противоречивыми целями, диктуемыми политическими и социальными факторами. Математическое моделирование в этой области пока еще проблематично. Что это за проблемы? Защита от загрязнения окружающей среды; предсказаний извержений вулканов, землетрясений, цунами; рост городов; руководство боевыми действиями и ряд других. Но, тем не менее, "процесс пошел", прогресс не остановим, и проблемы моделирования таких сверхсложных систем постоянно находят свое разрешение. Здесь следует отметить лидирующую роль отечественных ученых и, в первую очередь, академика Н. Н. Моисеева, его учеников и последователей.

## Вопросы для самоконтроля

1. Что такое модель? Раскройте смысл фразы: "модель есть объект и средство эксперимента".
2. Обоснуйте необходимость моделирования.
3. На основе какой теории основано моделирование.
4. Назовите общие классификационные признаки моделей.
5. Нужно ли стремиться к абсолютному подобию модели и оригинала?
6. Назовите и поясните три аспекта процесса моделирования.
7. Что значит структурная модель?
8. Что такое функциональная модель?
9. Классификация моделей по характеру процессов, протекающих в моделируемых объектах.
10. Сущность математического моделирования и его основных классов: аналитического и имитационного.
11. Назовите этапы моделирования и дайте им краткую характеристику.
12. Что такое адекватность модели? Дайте понятия изоморфизма и изофункционализма.
13. Общие требования (внешние) к моделям.
14. Внутренние свойства модели.

Приведите примеры объектов и возможных их моделей в своей предметной области.

2. Лекция: Типовые математические модели: версия для печати и PDA
В лекции рассматриваются элементы теории марковских процессов и ряд аналитических моделей, в основе которых лежит допущение о марковости протекающих в моделируемых объектах процессов.

Во многих случаях модель может быть представлена в виде конструкций из математических символов. В первой теме такие модели мы назвали аналитическими, чтобы отделить от других математических моделей - имитационных. С развитием последних область применения аналитических моделей сократилась. Однако актуальность такого моделирования сохраняется для систем, особенно тех, в которых протекают так называемые процессы без последействия. Процессы без последействия находят место при функционировании многих технических систем. Впервые один из типов такого процесса ввел в научный обиход и исследовал отечественный математик А. А. Марков, поэтому процессы без последействия и системы, в которых они протекают, названы марковскими, а один из типов такого процесса назван цепью Маркова. В настоящее время теория марковских процессов разработана широко и детально, в основном, благодаря отечественным ученым А. Я. Хинчину, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогорову и другим. Популярность этой теории состоит еще и в том, что она может быть применена и к системам с последействием, которые с помощью некоторых ухищрений можно трактовать как марковские.

В этой теме рассматриваются элементы теории марковских процессов и ряд аналитических моделей, в основе которых лежит допущение о марковости протекающих в моделируемых объектах процессов. К таковым, в первую очередь, относится широкий класс самых разнообразных объектов, имеющих общее название систем массового обслуживания (СМО). Для ряда стандартных структур СМО аналитические модели, связывающие показатели эффективности СМО с характеристиками элементов СМО, приведены в соответствующих справочниках. Здесь же приводятся классификация СМО и приемы построения графов состояний СМО, позволяющих строить или применять готовые аналитические модели.

Заметим, что для ряда современных сложных СМО аналитическое моделирование неприемлемо в силу недостаточности адекватных математических средств. В этих случаях следует применять имитационное моделирование, которое детально рассматривается в следующих темах.

В многоэлементных системах с большим числом состояний аналитическое моделирование на основе теории марковских процессов становится весьма громоздким. В этом случае используется так называемый метод динамики средних, который в основе имеет также марковость процесса. Этот метод существенно упрощает аналитическое моделирование для случаев определения средних характеристик состояний моделируемой системы. В этой теме дано обоснование метода и приводятся примеры его применения.

## 2.1. Дискретные марковские процессы

Наиболее полное исследование процесса функционирования систем получается, если известны явные математические зависимости, связывающие искомые показатели с начальными условиями, параметрами и переменными исследуемой системы. Для многих современных систем, являющихся объектами моделирования, такие математические зависимости отсутствуют или малопригодны, и следует применять другое моделирование, как правило, имитационное.

Однако есть ряд конкретных математических схем, проверенных практикой и доказавших эффективность моделированием. Целью изучения настоящей темы является освоение таких математических моделей.

В инженерно практике часто возникает задача моделирования процессов случайной смены состояний в исследуемом объекте. В рамках нашей профессии нас интересуют дискретные состояния. Например, техническое состояние объекта может характеризоваться дискретными состояниями: исправен - неисправен, загружен - находится в простое и т. п. Численности боевых средств противоборствующих сторон изменяются дискретно, очереди объектов, ожидающих обслуживания, и многое другое.

Вид очередного состояния может определяться случайным образом, смена состояний может происходить в случайные или не случайные моменты времени.

Большой класс случайных процессов составляют процессы без последействия, которые в математике называют марковскими процессами в честь Андрея Андреевича Маркова - старшего (1856 - 1922), выдающегося русского математика, разработавшего основы теории таких процессов.

Сущность процесса без последействия понятна из определения.

Случайный процесс называется **марковским** , если вероятность перехода системы в новое состояние зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, когда и каким образом система перешла в это состояние.

Практически любой случайный процесс является марковским или может быть сведен к марковскому. В последнем случае достаточно в понятие состояния включить всю предысторию смен состояний системы.

А. А. Марков имеет дополнение к фамилии "старший" потому, что его сын - тоже Андрей Андреевич Марков - выдающийся математик, специалист в области теории алгоритмов и др.

А. А. Марков - старший известен также как давший вероятностное обоснование метода наименьших квадратов, приведший одно из доказательств предельной теоремы теории вероятностей и многое другое.

Дальнейшее развитие теория марковских процессов получила в работах выдающегося отечественного математика Андрея Николаевича Колмогорова.

Марковские процессы делятся на два класса:

- дискретные марковские процессы (марковские цепи);
- непрерывные марковские процессы.

**Дискретной марковской цепью** называется случайный процесс, при котором смена дискретных состояний происходит в определенные моменты времени.

**Непрерывным марковским процессом** называется случайный процесс, при котором смена дискретных состояний происходит в случайные моменты времени.

Итак, моделирование на основе дискретных марковских процессов.

Рассмотрим ситуацию, когда моделируемый процесс обладает следующими особенностями.

Система $S$ имеет $n$ возможных состояний: $S_1$, $S_2$,..., $S_n$. Вообще говоря, число состояний может быть бесконечным. Однако модель, как правило, строится для конечного числа состояний.

Смена состояний происходит, будем считать, мгновенно и в строго определенные моменты времени $t_l, l = 1, 2, ..$. В дальнейшем будем называть временные точки $t_l$ шагами.

Известны вероятности перехода $p_{ij}$ системы за один шаг из состояния $S_i$ в состояние $S_j$.

**Цель моделирования**: определить вероятности состояний системы после $k$ -го шага.

Обозначим эти вероятности $p_j(k), j = \overline{1, n}$ (не путать с вероятностями $p_{ij}$).

Если в системе отсутствует последействие, то есть вероятности $p_{ij}$ не зависят от предыстории нахождения системы в состоянии $S_i$, а определяются только этим состоянием, то описанная ситуация соответствует модели дискретной марковской цепи.

Марковская цепь называется **однородной**, если переходные вероятности $p_{ij}$ от времени не зависят, то есть от шага к шагу не меняются. В противном случае, то есть если переходные вероятности $p_{ij}(t)$ зависят от времени, марковская цепь называется **неоднородной**.

Значения $p_{ij}$ обычно сводятся в матрицу переходных вероятностей:

$$||p_{ij}|| = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Значения $p_{ij}$ могут также указываться на графе состояний системы. На рис. 2.1 показан размеченный граф для четырех состояний системы. Обычно вероятности переходов "в себя" - $p_{11}$, $p_{22}$ и т. д. на графе состояний можно не проставлять, так как их значения дополняют до 1 сумму переходных вероятностей, указанных на ребрах (стрелках), выходящих из данного состояния.

Не указываются также нулевые вероятности переходов. Например, на рис. 2.1 это вероятности $p_{21}$, $p_{43}$ и др.

Математической моделью нахождения вероятностей состояний однородной марковской цепи является рекуррентная зависимость

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)p_{ij}$$

где $p_j(k)$ - вероятность $j$ -го состояния системы после $k$ -го шага, $j=\overline{1,n}$;

$p_i(k-1)$ - вероятность $i$ -го состояния системы после $(k-1)$-го шага, $i=\overline{1,n}$;

$n$ - число состояний системы;

$p_{ij}$ -переходные вероятности.

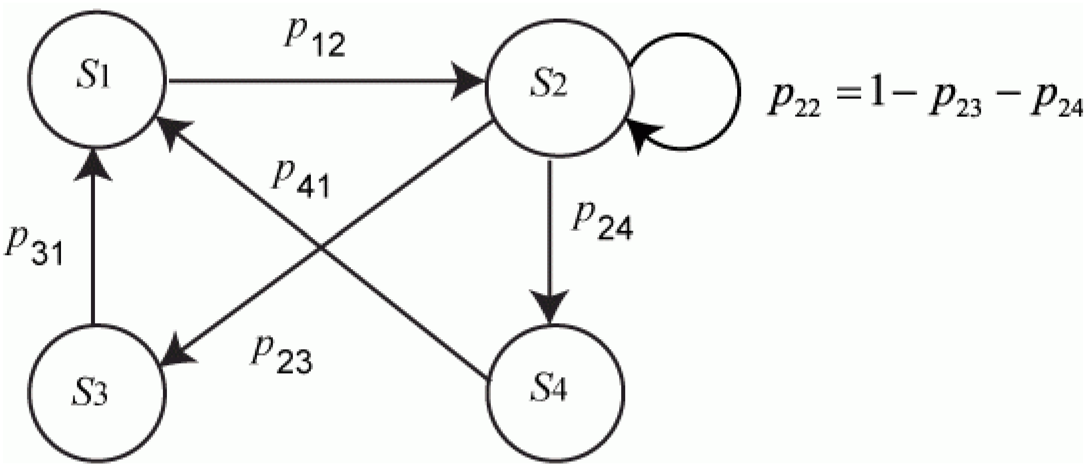



**Рис. 2.1.** Размеченный граф состояний системы

Для неоднородной марковской цепи вероятности состояний системы находятся по формуле:

$$p_j(k)=\sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)p_{ij}^{(k)}$$

где $p_{ij}^{(k)}$ - значения переходных вероятностей для $k$ -го шага.

**Пример 2.1**. По группе из четырех объектов производится три последовательных выстрела. Найти вероятности состояний группы объектов после третьего выстрела.

Матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$||P_{ij}||=\begin{pmatrix} 0,4 & 0.25 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0 & 0.35 & 0.3 & 0.25 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0.4 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Размеченный граф состояний приведен на рис. 2.2.

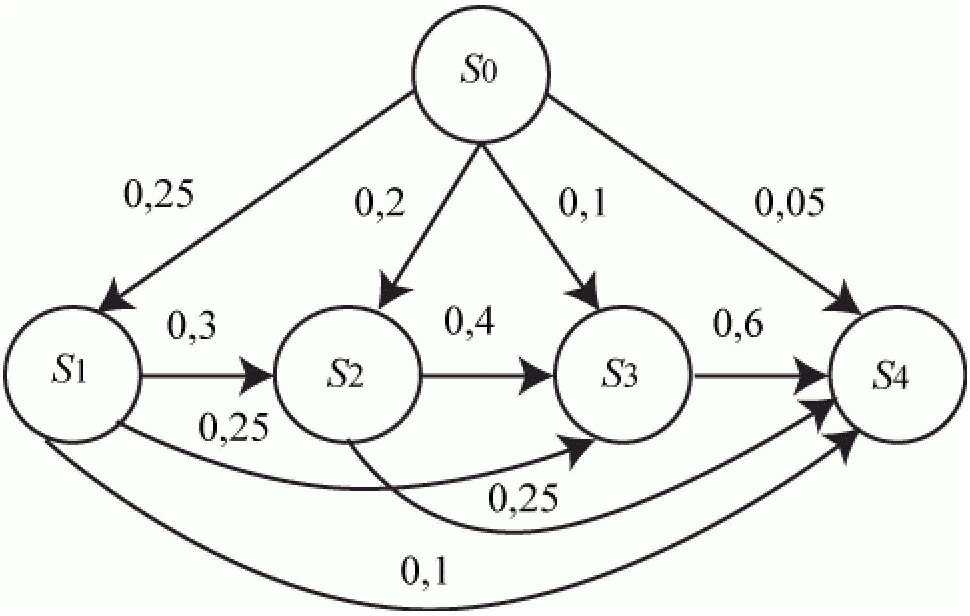



**Рис. 2.2.** Размеченный граф состояний четырех объектов

Прежде чем приступить к вычислениям необходимо, ответить на следующие вопросы.

1. Является ли рассматриваемый процесс поражения целей марковским? Да, так как степень поражения объекта (смена его состояния) не зависит от того - когда и каким образом объект был приведен в настоящее состояние, а зависит только от его текущего состояния.
2. Подходит ли рассматриваемая задача под схему марковской цепи? Да, так как время представляет собой дискретные отрезки - время между выстрелами (шаги).
3. Процесс однородный или неоднородный? Есть основания полагать, что процесс однородный, так как переходные вероятности не зависят от времени. Кроме этого, мы полагаем, что объекты - неподвижные и во времени обстрела менять свое положение не могут (что привело бы к изменениям $p_{ij}$ после каждого выстрела).
4. И, наконец, надо правильно определить начальное состояние системы, так как от этого могут существенно зависеть результаты моделирования. В нашем случае вполне естественно считать начальным состояние $S_0$ - все объекты целы.

Следовательно, есть все основания для применения ранее введенного рекуррентного выражения (2.1).

Решение.Так как до первого выстрела все объекты целы, то $p_1(0) = 1$.

После первого выстрела все значения вероятностей $p_j(1)$ соответствуют первой строке матрицы переходных вероятностей. Рассчитаем вероятности остальных состояний.

$P_1(2) = P_1(1) \cdot p_{11} + P_2(1) \cdot p_{21} + P_3(1) \cdot p_{31} + P_4(1) \cdot p_{41} + P_5(1) \cdot p_{51} = 0,16;$
$P_2(2) = P_1(1) \cdot p_{12} + P_2(1) \cdot p_{22} + P_3(1) \cdot p_{32} + P_4(1) \cdot p_{42} + P_5(1) \cdot p_{52} = 0,19;$
$P_3(2) = P_1(1) \cdot p_{13} + P_2(1) \cdot p_{23} + P_3(1) \cdot p_3 3 + P_4(1) \cdot p_{43} + P_5(1) \cdot p_5 3 = 0,245;$
$P_4(2) = P_1(1) \cdot p_{14} + P_2(1) \cdot p_{24} + P_3(1) \cdot p_{34} + P_4(1) \cdot p_{44} + P_5(1) \cdot p_{54} = 0,22;$
$P_5(2) = P_1(1) \cdot p_{15} + P_2(1) \cdot p_{25} + P_3(1) \cdot p_{35} + P4(1) \cdot p_{45} + P_5(1) \cdot p_{55} = 0,185;$
$P = 0,16 + 0,19 + 0,245 + 0,22 + 0,185 = 1.$
$P_1(3) = P_1(2) \cdot p_{11} = 0,16 \cdot 0,4 = 0,064;$
$P_2(3) = P_1(2) \cdot p_{12} + P_2(2) \cdot p_{22} = 0,16 \cdot 0,25 + 0,19 \cdot 0,35 = 0,11;$
$P_3(3) = P_1(2) \cdot p_{13} + P_2(2) \cdot p_{23} + P_3(2) \cdot p_3 3 == 0,16 \cdot 0,2 + 0,19 \cdot 0,3 + 0,245 \cdot 0,45 = 0,2;$
$P_4(3) = P_1(2) \cdot p_{14} + P_2(2) \cdot p_{24} + P_3(2) \cdot p_{34} + P_4(2) \cdot p_{44} = 0,25;$
$P_5(3) = P_1(2) \cdot p_{15} + P_2(2) \cdot p_{25} + P_3(2) \cdot p_{33} + P_4(2) \cdot p_{45} + P_5(2) \cdot p_{55} = 0,38;$
$P = 0,064 + 0,11 + 0,2 + 0,25 + 0,38 = 1.$

Сформулируем методику моделирования по схеме дискретных марковских процессов (марковских цепей).

1. Зафиксировать исследуемое свойство системы.

   Определение свойства зависит от цели исследования. Например, если исследуется объект с целью получения характеристик надежности, то в качестве свойства следует выбрать исправность. Если исследуется загрузка системы, то - занятость. Если, как в примере 2.1, состояния объектов, то - поражен или непоражен.

2. Определить конечное число возможных состояний системы и убедиться в правомерности моделирования по схеме дискретных марковских процессов.
3. Составить и разметить граф состояний.
4. Определить начальное состояние.
5. По рекуррентной зависимости (2.1) определить искомые вероятности.

В рамках изложенной методики моделирования исчерпывающей характеристикой поведения системы является совокупность вероятностей $p_j(k)$.

При неоднородном марковском процессе переходная вероятность $p_{ij}$ представляет собой условную вероятность перехода

$p_{ij}^{(k)} = p(S_j^{(k)} / S_i^{(k)})$, зависящую от $k$ - очередного временного шага. В этом случае должны быть указаны более одной матрицы значений $p_{ij}$ (для некоторых шагов матрицы могут быть одинаковыми).

Например, при нанесении ударов по объектам, которые могут перемещаться (танковая группировка, корабли и т. п.), последние будут принимать меры по рассредоточению средств или другому защитному маневру, вплоть до активного противодействия атакующей стороне. Очевидно, все эти меры приведут к уменьшению поражающих возможностей стороны, наносящей удары, т. е. к соответствующему изменению переходных вероятностей. Процесс становится неоднородным.

## 2.2. Моделирование по схеме непрерывных марковских процессов

Существует широкий класс систем, которые меняют свои состояния в случайные моменты времени $t$. Как и в предыдущем случае, в этих системах рассматривается процесс с дискретными состояниями $S_1, S_2, ..., S_n$. Например, переход объекта от исправного состояния к неисправному, соотношение сил сторон в ходе боя и т. п. Оценка эффективности таких систем определяется с помощью вероятностей каждого состояния $p_i(t)$ на любой момент времени $t$, $i = \overline{1, n}$.

Чтобы определить вероятности состояния системы $p_i(t)$ для любого момента времени $t$ необходимо воспользоваться математическими моделями марковских процессов с непрерывным временем (непрерывных марковских процессов).

При моделировании состояния систем с непрерывными марковскими процессами мы уже не можем воспользоваться переходными вероятностями $p_i$, так как вероятность "перескока" системы из одного состояния в другое точно в момент времени $t$ равна нулю (как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины).

Поэтому вместо переходных вероятностей вводятся в рассмотрение плотности вероятностей переходов $\lambda_{ij}$:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

где $p_{ij}(\Delta t)$ - вероятность того, что система, находившаяся в момент времени $t$ в состоянии $S_i$ за время $\Delta t$ перейдет в состояние $S_j$.

С точностью до бесконечно малых второго порядка из приведенной формулы можно представить:

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t$$

Непрерывный марковский процесс называется однородным,если плотности вероятностей переходов $\lambda_{ij}$ не зависят от времени $t$ (от момента начала промежутка $\Delta t$). В противном случае непрерывный марковский процесс называется неоднородным.

Целью моделирования,как и в случае дискретных процессов, является определение вероятностей состояний системы $p_i(t)$. Эти вероятности находятся интегрированием системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Сформулируем методику моделирования по схеме непрерывных марковских процессов.

1. Определить состояния системы и плотности вероятностей переходов $\lambda_{ij}$.
2. Составить и разметить граф состояний.
3. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Число уравнений в системе равно числу состояний. Каждое уравнение формируется следующим образом.
4. В левой части уравнения записывается производная вероятности $i$ -го состоянии $\frac{dp_i(t)}{dt}$

5. В правой части записывается алгебраическая сумма произведений $\lambda_{ij} p_j(t)$ и $-\lambda_{ij} p_i(t)$. Число произведений столько, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка графа направлена в данное состояние, то соответствующее произведение имеет знак плюс, если из данного состояния - минус.
6. Определить начальные условия и решить систему дифференциальных уравнений.

**Пример 2.2**. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для нахождения вероятностей состояний системы, размеченный граф состояний которой представлен на рис. 2.3.

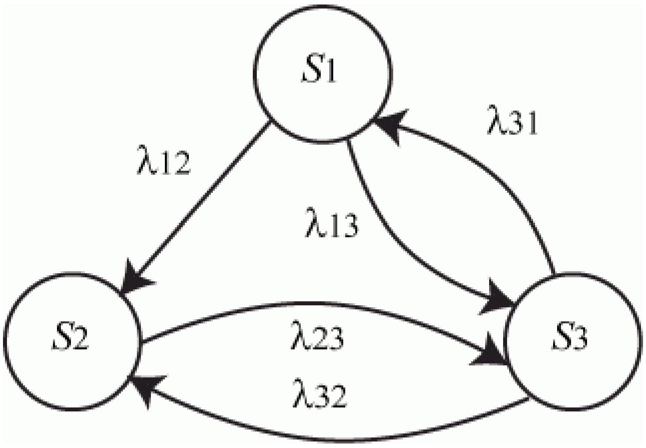



**Рис. 2.3.** Размеченный граф состояний

Решение

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{31} p_3(t) - \lambda_{13} p_1(t) - \lambda_{12} p_1(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{32} p_3(t) - \lambda_{23} p_2(t) \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13} p_1(t) + \lambda_{23} p_2(t) - \lambda_{31} p_3(t) - \lambda_{32} p_3(t) \end{cases}$$

Очевидно, $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$.

Поэтому любое из первых трех уравнений можно исключить, как линейно зависимое.

Для решения уравнений Колмогорова необходимо задать начальные условия. Для рассмотренного примера 2.2, можно задать такие начальные условия: $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = p_3(0) = 0$.

Однородный марковский процесс с непрерывным временем можно трактовать как процесс смены состояний под влиянием некоторого потока событий. То есть плотность вероятности перехода можно трактовать как интенсивность потока событий, переводящих систему из $i$ -го состояния в $j$ -е. Такими потоками событий являются отказы техники, вызовы на телефонной станции, рождение и т. п.

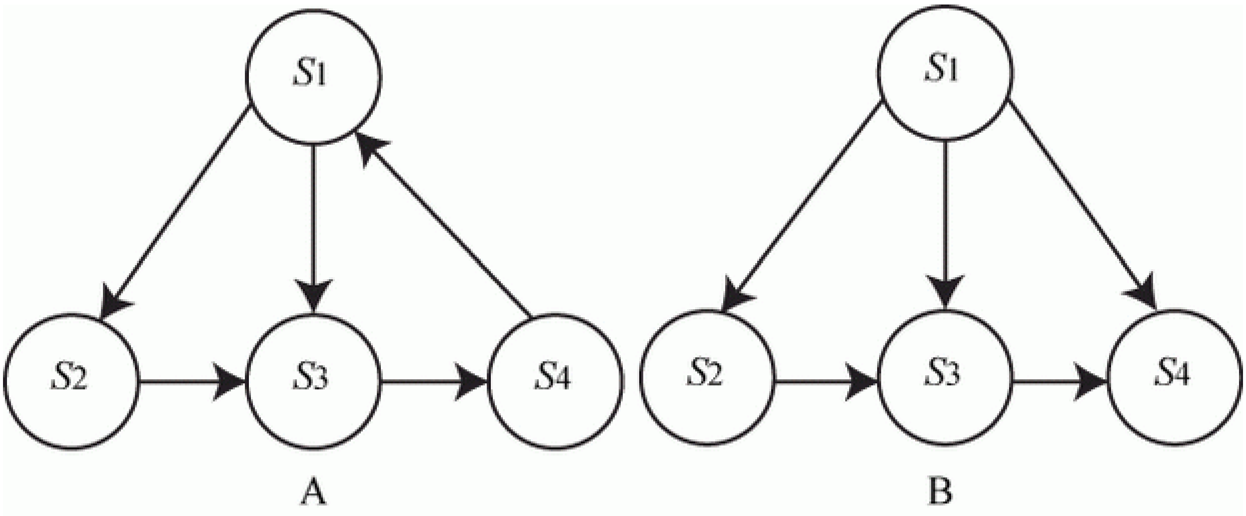
При исследовании сложных объектов всегда интересует: возможен ли в исследуемой системе установившейся (стационарный) режим? То есть, как ведет себя система при $k \to \infty (t \to \infty)$? Существуют ли предельные значения $p_j(k), p_i(t)$? Как правило, именно эти предельные значения интересуют исследователя.

Ответ на данный вопрос дает теорема Маркова.

Если для однородного дискретного марковского процесса с конечным или счетным числом состояний все $p_{ij} \succ 0$, то предельные значения $p_j(k)$ существуют и их значения не зависят от выбранного начального состояния системы.

Применительно к непрерывным марковским процессам теорема Маркова трактуется так: если процесс однородный и из каждого состояния возможен переход за конечное время в любое другое состояние и число состояний счетно или конечно, то предельные значения $p_i(t)$ существуют и их значения не зависят от выбранного начального состояния.

Например (рис. 2.4), в системе A стационарный режим есть, а в системе B стационарного режима нет: если система окажется в состоянии $S_4$ она не сможет перейти ни в какое другое состояние.

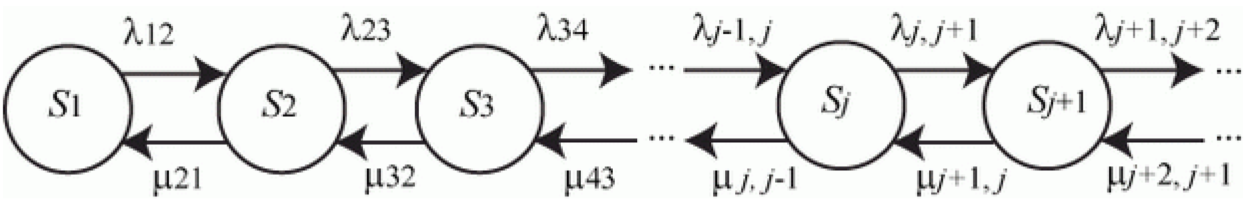



увеличить изображение
**Рис. 2.4.** Примеры графов состояний систем с различными режимами

## 2.3. Схема гибели и размножения

Часто в системах самого различного назначения протекают процессы, которые можно представить в виде модели "гибели и размножения".

Граф состояний такого процесса показан на рис. 2.5.



увеличить изображение
**Рис. 2.5.** Схема "гибели и размножения"

Особенностью модели является наличие прямой и обратной связей с каждым соседним состоянием для всех средних состояний; первое и последнее (крайние) состояния связаны только с одним "соседом" (с последующим и предыдущим состояниями соответственно).

Название модели - "гибель и размножение" - связано с представлением, что стрелки вправо означают переход к состояниям, связанным с ростом номера состояния ("рождение"), а стрелки влево - с убыванием номера состояний ("гибель").

Очевидно, стационарное состояние в этом процессе существует. Составлять уравнения Колмогорова нет необходимости, так как структура регулярна, необходимые формулы приводятся в справочниках, а также в рекомендованной литературе.

Для приведенных на рис. 2.5 обозначений формулы имеют вид:

$$P_1 = \frac{1}{1+\frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{\mu_{21}\mu_{32}\mu_{43}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{\mu_{21}\mu_{32}\mu_{43}}+\dots+\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\mu_{21}\mu_{32}\dots\mu_{n,n-1}}}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}}\cdot P_1;\dots P_n = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\mu_{21}\mu_{32}\dots\mu_{n,n-1}}\cdot P_1.$$

**Пример 2.3**. Имеется система из двух одинаковых и работающих параллельно компьютеров.

Требуется определить надежностные характеристики этой системы.

Решение

В этой системе возможны три состояния:

$S_1$ - оба компьютера исправны;

$S_2$ - один компьютер исправен, другой ремонтируется;

$S_3$ - оба компьютера неисправны и ремонтируются. Будем полагать, что процессы отказов и восстановлений - однородные марковские, одновременный выход из строя обоих компьютеров, как и одновременное восстановление двух отказавших компьютеров практически невозможно.

Поскольку компьютеры одинаковые, то с точки зрения надежности, неважно, какой именно компьютер неисправен в состоянии $S_2$, важно, что один.

С учетом сказанного, ситуация моделируется схемой "гибели и размножения" (рис. 2.6).

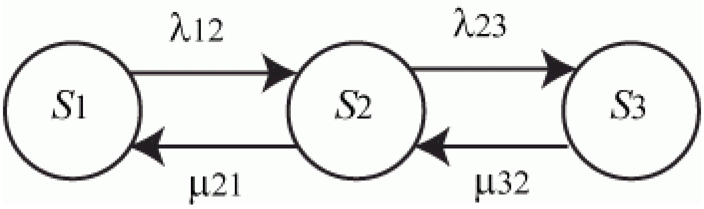



**Рис. 2.6.**

На рис. 2.6:

$\lambda_{12}$, $\lambda_{23}$ - интенсивности потоков отказов;

$\mu_{21}, \mu_{32}$ - интенсивности потоков восстановлений.

Пусть среднее время безотказной работы каждого компьютера

$\bar{t} = 10\text{сут}$. , а среднее время восстановления одного компьютера $\overline{t_{\text{в}}} = 0,1\text{сут}$.

Тогда интенсивность отказов одного компьютера будет равна $\lambda = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{10\text{сут.}} = 0,1\frac{1}{-}$,

а интенсивность восстановления одного компьютера - $\mu = \frac{1}{\overline{t_{\text{в}}}} = \frac{1}{0,1\text{сут.}} = 10\frac{1}{-}$.

В состоянии $S_1$ работают оба компьютера, следовательно:

$$\lambda_{12} = 2\lambda = 2 \cdot 0.1 = 0.2\frac{1}{\text{сут.}}$$

В состоянии $S_2$ работает один компьютер, значит:

$$\lambda_{23} = \lambda = 0.1\frac{1}{\text{сут.}}$$

В состоянии $S_2$ восстанавливается один компьютер, тогда:

$$\mu_{21} = \mu = 10\frac{1}{\text{сут.}}$$

В состоянии $S_3$ восстанавливаются оба компьютера:

$$\mu_{32} = 2 \cdot \mu = 20\frac{1}{\text{сут.}}$$

Используем зависимости (2.2). Вероятность состояния, когда обе машины исправны:

$$P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}}} = \frac{1}{1 + \frac{0.2}{10} + \frac{0.2 \cdot 0.1}{10 \cdot 20}} = \frac{1}{1 + 0.02 + 0.0004} = 0.98$$

Вероятность второго состояния $S_2$ (работает один компьютер):

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} \cdot P_1 = 0.02 \cdot 0.98 = 0.0196$$

Аналогично вычисляется и $P_3$. Хотя найти $P_3$ можно и так:

$$P_3 = 1 - (P_1 + P_2) = 1 - (0.98 + 0.0196) = 1 - 0.9996 = 0.0004$$

**Пример 2.4**. В полосе объединения работают передатчики противника. Подразделение операторов-связистов армейской контрразведки ведет поиск передатчиков по их радиоизлучениям. Каждый оператор, обнаружив передатчик противника, следит за его частотой, при этом новым поиском не занимается. В процессе слежения частота может быть потеряна, после чего оператор снова осуществляет поиск.

Разработать математическую модель для определения эффективности службы подразделения операторов. Под эффективностью понимается среднее число обнаруженных передатчиков за установленный промежуток времени.

Решение

Будем считать, что наши операторы и радисты противника обладают высокой квалификацией, хорошо натренированы. Следовательно, можно принять, что интенсивности обнаружения частот передатчиков противника и потерь слежения - постоянны. Обнаружение частоты и ее потеря зависят только от того, сколько запеленговано передатчиков в настоящий момент и не зависят от того, когда произошло это пеленгование. Следовательно, процесс обнаружения и потерь слежения за частотами можно считать непрерывным однородным марковским процессом.

Исследуемое свойство этой системы пеленгации: загруженность операторов, что, очевидно, совпадает с числом обнаруженных частот.

Введем обозначения:

$M$ - количество операторов;

$N$ - количество передатчиков противника, полагаем $M \geq N$;

$\overline{m}$ - среднее число операторов, ведущих слежение;

$\overline{n}$ - среднее число запеленгованных передатчиков;

$\lambda$ - интенсивность пеленгации передатчика противника одним оператором;

$\mu$ - интенсивность потока потерь слежения оператором;

$n_i$ - текущая численность запеленгованных передатчиков $(0, 1, 2, ..., N)$.

В системе пеленгации возможны следующие состояния:

$S_0$ - запеленгованных передатчиков нет, поиск ведут $M$ операторов, вероятность состояния $P_0$;

$S_1$ - запеленгован 1 передатчик, поиск ведут $(M-1)$ операторов, вероятность состояния $P_1$;

$S_2$ - запеленгованы 2 передатчика, поиск ведут $(M-2)$ операторов, вероятность состояния $P_2$;

…

$S_n$ - запеленгованы $n_i$ передатчиков, вероятность $P_i$;

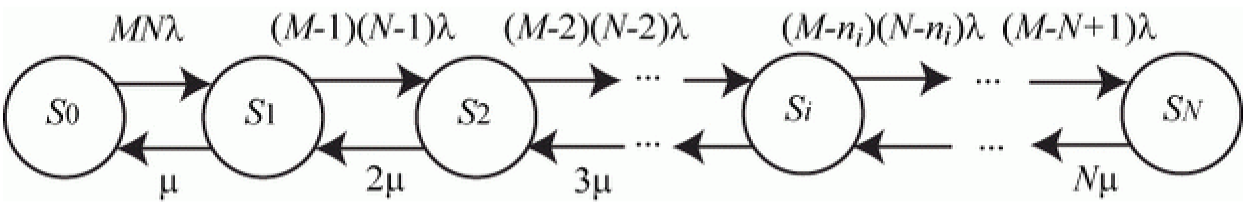
…

$S_N$ - запеленгованы $N$ передатчиков, вероятность $P_N$.

Цель моделирования - $\overline{n}$ - достигается вычислением:

$$\overline{n} = \sum_{i=0}^{N} P_i \cdot n$$

Как и в примере 2.3 полагаем, что одновременное обнаружение или потеря двух и более частот практически невозможно. Граф состояний системы показан на рис. 2.7.




увеличить изображение

**Рис. 2.7.** Граф состояний системы пеленгации

Граф соответствует процессу "гибели и размножения", полносвязный, число состояний системы, конечно, значит, установившийся режим, и предельные значения вероятностей в системе пеленгации существуют.

Пусть, к примеру, количество операторов $M = 4$, а количество передатчиков противника $N = 3$. В этом случае граф состояний имеет вид (рис. 2.8):

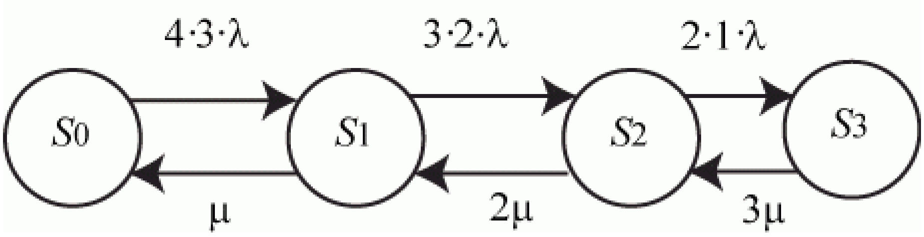



**Рис. 2.8.** Вариант графа состояний системы пеленгации

Для упрощения вычислений примем $\lambda = \mu$. Тогда для этой схемы "гибели и размножения" по зависимостям (2.2) имеем:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{12\lambda}{\mu} + \frac{12\lambda \cdot 6\lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \frac{12\lambda \cdot 6\lambda \cdot 2\lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu}} = \frac{1}{1 + 12 + 36 + 24} = \frac{1}{73} \approx 0.0137$$

$$P_1 \approx 0.168; P_2 \approx 0.5; P_3 \approx 0.33$$

Окончательно:

$$\overline{n} = \sum_{i=0}^{3} P_i n_i = 0 \cdot 0.0137 + 1 \cdot 0.168 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.33 = 2.17$$

Таким образом, в условиях данного примера в среднем будут пеленговаться не менее двух передатчиков противника.

Непрерывный марковский процесс полностью определяется значениями плотностей вероятностей переходов $\lambda_{ij}$, $\mu_{ji}$. Ранее был установлен их физический смысл как интенсивности потоков событий, переводящих систему из одного состояния в другое. Поток событий в однородных непрерывных марковских процессах характеризуется экспоненциальным законом распределения случайных интервалов времени между событиями. Такой поток называют простейшим или стационарным пуассоновским.

Простейший поток обладает свойствами:

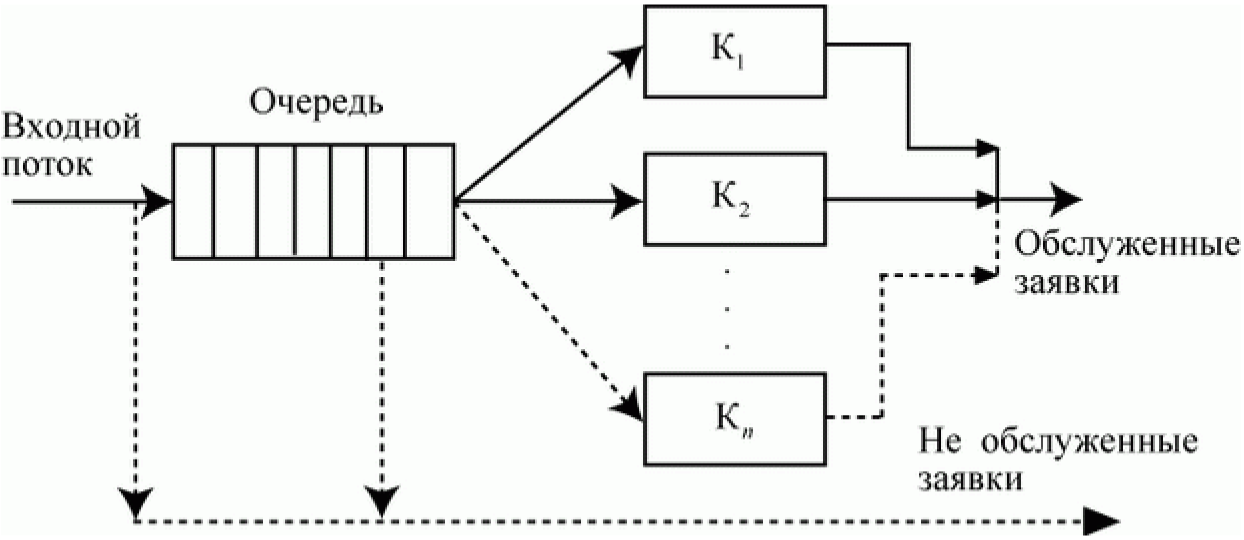
- стационарности,что означает независимость характеристик потока от времени;
- ординарности, что означает практическую невозможность появления двух и более событий одновременно;
- отсутствия последействия, об этом говорилось в начале темы.

## 2.4. Элементы СМО, краткая характеристика

При решении задач управления, в том числе и управления войсками, часто возникает ряд однотипных задач:

- оценка пропускной способности направления связи, железнодорожного узла, госпиталя и т. п.;
- оценка эффективности ремонтной базы;
- определение количества частот для радиосети и др.

Все эти задачи однотипны в том смысле, что в них присутствует массовый спрос на обслуживание. В удовлетворении этого спроса участвует определенная совокупность элементов, образующая систему массового обслуживания (СМО) (рис. 2.9).




увеличить изображение
**Рис. 2.9.** Система массового обслуживания

Элементами СМО являются:

- входной (входящий) поток требований (заявок) на обслуживание;
- приборы (каналы) обслуживания;
- очередь заявок, ожидающих обслуживания;
- выходной (выходящий) поток обслуженных заявок;
- поток не обслуженных заявок;
- очередь свободных каналов (для многоканальных СМО).

**Входящий поток** - это совокупность заявок на обслуживание. Часто заявка отождествляется с ее носителем. Например, поток неисправной радиоаппаратуры, поступающий в мастерскую объединения, и представляет собой поток заявок - требований на обслуживание в данной СМО.

Как правило, на практике имеют дело с так называемыми рекуррентными потоками, потоками, обладающими свойствами:

- стационарности;
- ординарности;
- ограниченного последействия.

Первые два свойства мы определили ранее. Что касается ограниченного последействия, то оно заключается в том, что интервалы между поступающими заявками являются независимыми случайными величинами.

Рекуррентных потоков много. Каждый закон распределения интервалов порождает свой рекуррентный поток. Рекуррентные потоки иначе называют потоками Пальма.

Поток с полным отсутствием последействия, как уже отмечалось, называется стационарным пуассоновским. У него случайные интервалы между заявками имеют экспоненциальное распределение:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

здесь $\lambda$ - интенсивность потока.

Название потока - пуассоновский - происходит от того, что для этого потока вероятность $P_k(\Delta t)$ появления $k$ заявок за интервал $\Delta t$ определяется законом Пуассона:

$$P_k(\Delta t) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

Поток такого типа, как отмечалось ранее, называют также простейшим. Именно такой поток предполагают проектировщики при разработке СМО. Вызвано это тремя причинами.

Во-первых,поток этого типа в теории массового обслуживания аналогичен нормальному закону распределения в теории вероятностей в том смысле, что к простейшему потоку приводит предельный переход для потока, являющегося суммой потоков с произвольными характеристиками при бесконечном увеличении слагаемых и уменьшении их интенсивности. То есть сумма произвольных независимых (без преобладания) потоков с интенсивностями $\lambda_i$ является простейшим потоком с интенсивностью

$$\lambda = \sum_i \lambda_i$$

Во-вторых,если обслуживающие каналы (приборы) рассчитаны на простейший поток заявок, то обслуживание других типов потоков (с той же интенсивностью) будет обеспечено с не меньшей эффективностью.

В-третьих,именно такой поток определяет марковский процесс в системе и, следовательно, простоту аналитического анализа системы. При других потоках анализ функционирования СМО сложен.

Часто встречаются системы, у которых поток входных заявок зависит от количества заявок, находящихся в обслуживании. Такие СМО называют **замкнутыми** (иначе - **разомкнутыми** ). Например, работа мастерской связи объединения может быть представлена моделью замкнутой СМО. Пусть эта мастерская предназначена для обслуживания радиостанций, которых в объединении $m$ . Каждая из них имеет интенсивность отказов $\lambda$ . Входной поток отказавшей аппаратуры будет иметь интенсивность $\lambda_{\text{р}}$:

$$\lambda_p = \lambda(m - n),$$

где $n$ - количество радиостанций, уже находящихся в мастерской на ремонте.

Заявки могут иметь разные права на начало обслуживания. В этом случае говорят, что заявки **неоднородные**. Преимущества одних потоков заявок перед другими задаются шкалой приоритетов.

Важной характеристикой входного потока является **коэффициент вариации**:

$$\nu = \frac{\sigma}{\overline{\tau}_{\text{инт}}},$$

где $\overline{\tau}_{\text{инт}}$- математическое ожидание длины интервала;

$\sigma$ - среднеквадратическое отклонение случайной величины (длины интервала) $\tau_{\text{инт}}$.

Для простейшего потока $\left(\sigma = \frac{1}{\lambda}, \tau_{\text{инт}} = \frac{1}{\lambda}\right) : \nu = 1$

Для большинства реальных потоков $0 \le \nu \le 1$.

При $\nu = 0$ поток регулярный, детерминированный.

Коэффициент вариации - характеристика, отражающая степень неравномерности поступления заявок.

**Каналы (приборы) обслуживания**. В СМО могут быть один или несколько обслуживающих приборов (каналов). Согласно с этим СМО называют одноканальными или многоканальными.

**Многоканальные** СМО могут состоять из однотипных или разнотипных приборов. Обслуживающими приборами могут быть:

- линии связи;
- мастера ремонтных органов;
- взлетно-посадочные полосы;
- транспортные средства;
- причалы;
- парикмахеры, продавцы и др.

Основная характеристика канала - время обслуживания. Как правило, время обслуживания - величина случайная.

Обычно практики полагают, что время обслуживания имеет экспоненциальный закон распределения:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, f(t) = e^{-\mu t},$$

где $\mu$ - интенсивность обслуживания, $\mu = \frac{1}{\overline{\tau}_{\text{обсл}}}$;

$\overline{\tau}_{\text{обсл}}$- математическое ожидание времени обслуживания.

То есть процесс обслуживания - марковский, а это, как теперь нам известно, дает существенные удобства в аналитическом математическом моделировании.

Кроме экспоненциального встречаются $k$ -распределение Эрланга, гиперэкспоненциальное, треугольное и некоторые другие. Это нас не должно смущать, так как показано, что значение критериев эффективности СМО мало зависят от вида закона распределения вероятностей времени обслуживания.

При исследовании СМО выпадает из рассмотрения сущность обслуживания, качество обслуживания.

Каналы могут быть **абсолютно надежными**, то есть не выходить из строя. Вернее, так может быть принято при исследовании. Каналы могут обладать **конечной надежностью**. В этом случае модель СМО значительно сложнее.

**Очередь заявок**. В силу случайного характера потоков заявок и обслуживания пришедшая заявка может застать канал (каналы) занятым обслуживанием предыдущей заявки. В этом случае она либо покинет СМО не обслуженной, либо останется в системе, ожидая начало своего обслуживания. В соответствии с этим различают:

- СМО с отказами;
- СМО с ожиданием.

**СМО с ожиданием** характеризуются наличием очередей. Очередь может иметь ограниченную или неограниченную емкость: $1 \leq L \prec \infty.$

Исследователя обычно интересуют такие статистические характеристики, связанные с пребыванием заявок в очереди:

- среднее количество заявок в очереди за интервал исследования;
- среднее время пребывания (ожидания) заявки в очереди. **СМО с ограниченной емкостью очереди** относят к СМО смешанного типа.

Нередко встречаются СМО, в которых заявки имеют **ограниченное время пребывания в очереди** независимо от ее емкости. Такие СМО также относят к СМО смешанного типа.

**Выходящий поток** - это поток обслуженных заявок, покидающих СМО.

Встречаются случаи, когда заявки проходят через несколько СМО: транзитная связь, производственный конвейер и т. п. В этом случае выходящий поток является входящим для следующей СМО. Совокупность последовательно связанных между собой СМО называют **многофазными СМО** или **сетями СМО** .

Входящий поток первой СМО, пройдя через последующие СМО, искажается и это затрудняет моделирование. Однако, следует иметь в виду, что при простейшем входном потоке и экспоненциальном обслуживании (то есть в марковских системах) выходной поток тоже простейший.Если время обслуживания имеет не экспоненциальное распределение, то выходящий поток не только не простейший, но и не рекуррентный.

Заметим, что интервалы между заявками выходящего потока, это не то же самое, что интервалы обслуживания. Ведь может оказаться, что после окончания очередного обслуживания СМО какое-то время простаивает из-за отсутствия заявок. В этом случае интервал выходящего потока состоит из времени незанятости СМО и интервала обслуживания первой, пришедшей после простоя, заявки.

В системах с отказами есть **поток необслуженных заявок**. Если в СМО с отказами поступает рекуррентный поток, а обслуживание - экспоненциальное, то и поток необслуженных заявок - рекуррентный.

**Очереди свободных каналов**. В многоканальных СМО могут образовываться очереди свободных каналов. Количество свободных каналов - величина случайная. Исследователя могут интересовать различные характеристики этой случайной величины. Обычно это среднее число каналов, занятых обслуживанием за интервал исследования.

Таким образом, по признакам, влияющим на функционирование, СМО может принадлежать к одному из типов в соответствии с приводимой классификацией (рис. 2.10).

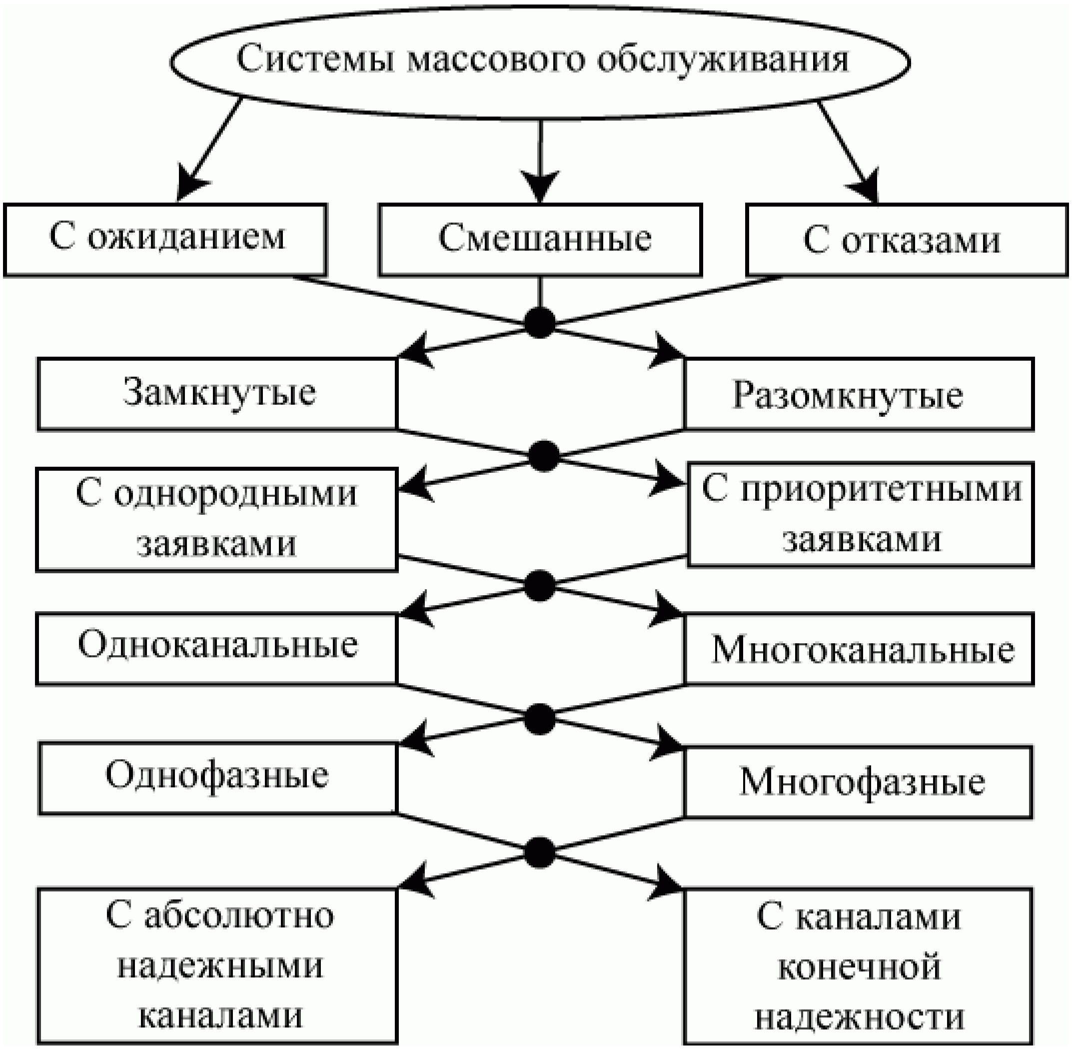



**Рис. 2.10.** Классификация СМО

Для обозначения простых (однофазных) СМО используется символика, предложенная Кендаллом:

$$A/B/n/m.$$

$A$ - входящий поток заявок: $A = GI$ - рекуррентный поток; $A = \mathrm{M}$ - простейший поток с показательным законом распределения вероятностей; $A = D$ - регулярный или детерминированный поток (с постоянными интервалами между моментами поступления заявок).

$B$ - случайная длительность обслуживания: $B = G$ или $B = GI$ - рекуррентное обслуживание с одной и той же функцией распределения $B(t)$ для разных каналов; $B = \mathrm{M}$ - показательное обслуживание; $B = D$ - регулярное обслуживание.

$n$ - количество обслуживающих каналов. Если $n \prec 1$, то система называется многоканальной.

$m$ - количество мест для ожидания заявок в очереди. Если $m = 0$, то СМО с потерями (без ожидания); $m = \infty$ - система с неограниченным ожиданием; $0 < m < \infty$ - система с ограниченным числом мест для ожидания.

## 2.5. Моделирование СМО в классе непрерывных марковских процессов

Под операцией в СМО понимают комплекс мероприятий по обслуживанию входящего потока заявок на интервале времени $\mathrm{T}$.

В зависимости от типа системы показателями исхода операции или эффективности системы массового обслуживания являются следующие.

Для СМО с отказами:

- абсолютная пропускная способность ( $Q$ )- среднее число заявок, обслуживаемое системой за время $\mathrm{T}$;
- относительная пропускная способность ( $q$ )- средняя доля поступивших заявок, обслуживаемая системой (отношение среднего числа обслуженных заявок к среднему числу поступивших за время $\mathrm{T}$);
- среднее число занятых каналов ( $\overline{n}_з$);
- коэффициент занятости (использования) каналов ( $\mathrm{K}_и = \overline{n}_з / n$ , где $n$ - число каналов в системе);
- коэффициент простоя каналов, $\mathrm{K}_п = 1 - \mathrm{K}_и$.

Для **СМО с неограниченным ожиданием** как абсолютная, так и относительная пропускная способности теряют смысл, так как каждая поступившая заявка рано или поздно будет обслужена. Для такой СМО важными показателями являются:

- среднее число заявок в очереди ( $\overline{l}_{оч}$);
- среднее число заявок в системе (в очереди и на обслуживании, $\overline{l}_c$);
- среднее время ожидания заявки в очереди ( $\overline{t}_{ож}$);
- среднее время пребывания заявки в системе (в очереди и на обслуживании, $\overline{t}_c$ );
- коэффициенты использования и простоя каналов ( $K_п, K_и$);
- среднее число свободных и занятых каналов ( $\overline{n}_c$, $\overline{n}_з$).

Для **СМО смешанного типа** используются обе группы показателей: как относительная и абсолютная пропускная способности, так и характеристики ожидания.

В зависимости от цели операции массового обслуживания любой из приведенных показателей (или совокупность показателей) может быть выбран в качестве критерия эффективности.

Аналитической моделью СМО является совокупность уравнений или формул, позволяющих определять вероятности состояний системы в процессе ее функционирования и рассчитывать показатели эффективности по известным характеристикам входящего потока и каналов обслуживания.

Всеобщей аналитической модели для произвольной СМО не существует. Аналитические модели разработаны для ограниченного числа частных случаев СМО. Аналитические модели более или менее точно отображающие реальные системы, как правило, сложны и труднообозримы.

Аналитическое моделирование СМО существенно облегчается, если процессы, протекающие в СМО, марковские (потоки заявок простейшие, времена обслуживания распределены экспоненциально). В этом случае все процессы в СМО можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями, а в предельном случае, для стационарных состояний - линейными алгебраическими уравнениями и, решив их, определить выбранные показатели эффективности.

Рассмотрим примеры некоторых СМО.

### 2.5.1. Многоканальная СМО с отказами

**Пример 2.5**. Три автоинспектора проверяют путевые листы у водителей грузовых автомобилей. Если хотя бы один инспектор свободен, проезжающий грузовик останавливают. Если все инспекторы заняты, грузовик, не задерживаясь, проезжает мимо. Поток грузовиков простейший, время проверки случайное с экспоненциальным распределением.

Такую ситуацию можно моделировать трехканальной СМО с отказами (без очереди). Система разомкнутая, с однородными заявками, однофазная, с абсолютно надежными каналами.

Описание состояний:

$S_0$ - все инспекторы свободны;

$S_1$ - занят один инспектор;

$S_2$ - заняты два инспектора;

$S_3$ - заняты три инспектора.

Граф состояний системы приведен на рис. 2.11.

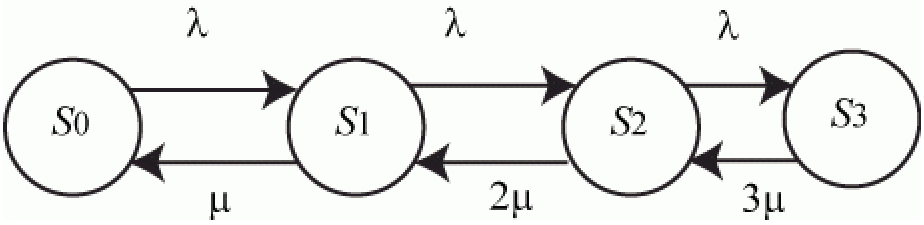



**Рис. 2.11.** Граф состояний трехканальной СМО с отказами

На графе: $\lambda$ - интенсивность потока грузовых автомобилей; $\mu$ - интенсивность проверок документов одним автоинспектором.

Моделирование проводится с целью определения части автомобилей, которые не будут проверены.

Решение.

Искомая часть вероятности $P_3$- вероятности занятости всех трех инспекторов. Поскольку граф состояний представляет типовую схему "гибели и размножения", то найдем $P_3$, используя зависимости (2.2).

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{\lambda^3}{3!\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu}}, P_3 = \frac{\lambda^3}{3!\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu} \cdot P_0$$

Пропускную способность этого поста автоинспекторов можно характеризовать относительной пропускной способностью:

$$q = 1 - P_3.$$

**Пример 2.6**. Для приема и обработки донесений от разведгруппы в разведотделе объединения назначена группа в составе трех офицеров. Ожидаемая интенсивность потока донесений - 15 донесений в час. Среднее время обработки одного донесения одним офицером - $t_{обс} = 12\text{мин}.$Каждый офицер может принимать донесения от любой разведгруппы. Освободившийся офицер обрабатывает последнее из поступивших донесений. Поступающие донесения должны обрабатываться с вероятностью не менее 95 %.

Определить, достаточно ли назначенной группы из трех офицеров для выполнения поставленной задачи.

Решение

Группа офицеров работает как СМО с отказами, состоящая из

трех каналов. Поток донесений с интенсивностью $\lambda = 15\frac{1}{\text{час}}$можно считать простейшим, так как он суммарный от нескольких разведгрупп. Интенсивность обслуживания $\mu = \frac{1}{t_{обс}} = \frac{60}{12час} = 5\frac{1}{час}$. Закон распределения неизвестен, но это несущественно, так как показано, что для систем с отказами он может быть произвольным.

Описание состояний и граф состояний СМО будут аналогичны приведенным в примере 2.5.

Поскольку граф состояний - это схема "гибели и размножения", то для нее имеются готовые выражения для предельных вероятностей состояния:

$$P_1 = \frac{\rho}{1!}P_0, P_2 = \frac{\rho^2}{2!}P_0, \dots P_n = \frac{\rho^n}{n!}P_0, P_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!}P_0, \dots P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0,$$
$$P_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{nn!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}\right)$$

Отношение $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ называют приведенной интенсивностью потока заявок.Физический смысл ее следующий: величина $\rho$ представляет собой среднее число заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания одной заявки.

В примере $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{5} = 3$.

В рассматриваемой СМО отказ наступает при занятости всех трех каналов, то есть $P_{отк} = P_3$. Тогда:

$$P_0 = \left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right) = 0.077, P_3 = \frac{3}{3!}P_0 = 4.5 \cdot 0.077 = 0.346.$$

Так как вероятность отказа в обработке донесений составляет более 34 % ( $0.346$), то необходимо увеличить личный состав группы. Увеличим состав группы в два раза, то есть СМО будет иметь теперь шесть каналов, и рассчитаем $P_{отк}$ :

$$P_0 = \left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!}\right) = 0.051,$$
$$P_6 = \frac{3^6}{6!}P_0 = \frac{729}{720} \cdot \frac{1}{19.412} = 1.012 \cdot 0.051 = 0.052.$$

Теперь $P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - 0,052 \approx 0,95$.

Таким образом, только группа из шести офицеров сможет обрабатывать поступающие донесения с вероятностью 95 %.

**2.5.2. Многоканальная СМО с ожиданием**

**Пример 2.7**. На участке форсирования реки имеются 15 однотипных переправочных средств. Поток поступления техники на переправу в среднем составляет 1 ед./мин, среднее время переправы одной единицы техники - 10 мин (с учетом возвращения назад переправочного средства).

Оценить основные характеристики переправы, в том числе вероятность в немедленной переправе сразу по прибытии единицы техники.

Решение

$$\lambda = 1\text{ед./мин}, \mu = 1\text{ед./мин}, n = 15$$
$$P_{\text{отк}} = \left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^{15}}{15!}\right)^{-1} = 4.77 \cdot 10^{-5}, P_0 = P_{15} = \frac{3^{15}}{15!}P = 0.0365,$$
$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0.0365 \approx 0.9635$$

Абсолютная пропускная способность $A = 1 - 0.9635 \approx 1$, т. е. все, что подходит к переправе, тут же практически переправляется.

Среднее число работающих переправочных средств:

$$\overline{n}_{\text{з}} = \frac{A}{\mu} = \frac{1}{1/10} = 10$$

Коэффициенты использования и простоя переправы:

$$K_{\text{и}} = \frac{\overline{n}_{\text{з}}}{n} = \frac{10}{15} = 0.666, K_{\text{п}} = 1 - K_{\text{и}} = 1 - 0,666 = 0.334$$

Для решения примера была также разработана программа. Интервалы времени поступления техники на переправу, время переправы приняты распределенными по экспоненциальному закону.

Коэффициенты использования переправы после 50 прогонов практически совпадают: $K_{\text{и}} = 0,665$.

Максимальная длина очереди 15 ед., среднее время пребывания в очереди около 10 мин.

Если взять число переправочных средств 10, то коэффициент использования близок к 1 ($K_{\text{и}} = 0,997$), максимальная длина очереди - 43 единицы техники.

### 2.5.3. Одноканальная СМО с ограниченной очередью

Если в очереди $n$ мест для ожидания, то система может находиться в одном из следующих $n + 2$ состояний:

$S_0$ - в системе нет заявок (ни в очереди, ни на обслуживании);

$S_1$ - в системе обслуживается одна заявка, очередь пуста;

$S_2$ - в системе обслуживается одна заявка, и одна заявка находится в очереди, ожидает обслуживания;

…

$S_{n+1}$ - в системе обслуживается одна заявка и $n$ заявок находятся в очереди, ожидают обслуживания.

Граф состояний такой системы представляет схему "гибели и размножения" (рис. 2.12).

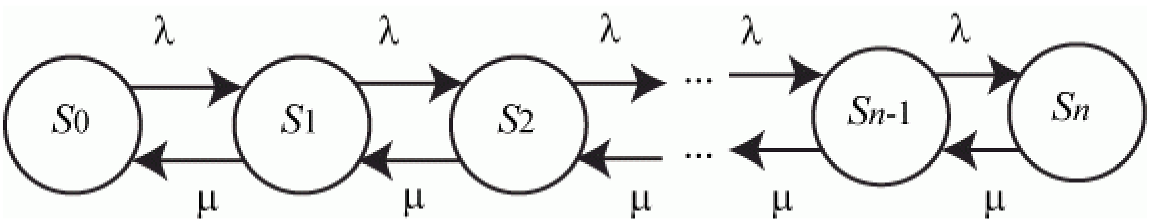



**Рис. 2.12.** Граф состояний одноканальной СМО с ограниченной очередью

**2.5.4. Одноканальная замкнутая СМО**

Опишем состояния одноканальной замкнутой СМО.

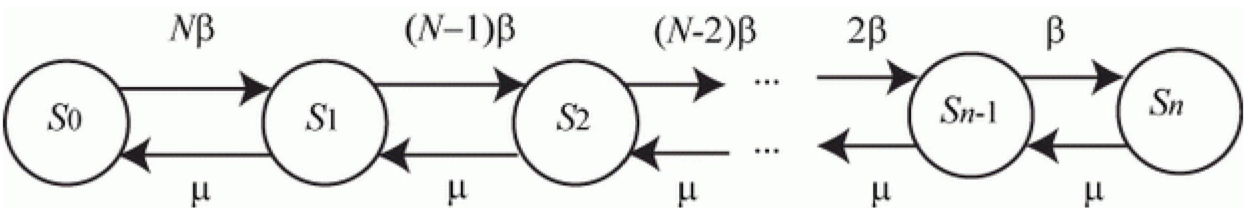
$S_0$ - заявок на обслуживание нет.

$S_k, k = \overline{1, N}$ - на обслуживании находится $k$ заявок;

$N$ - общее число заявок, циркулирующих в системе;

$\beta$ - интенсивность требований на обслуживание от одной заявки.

Граф состояний одноканальной замкнутой СМО приведен на рис. 2.13. Модель данной СМО также представляет "схему гибели и размножения".




увеличить изображение
**Рис. 2.13.** Граф состояний одноканальной замкнутой СМО

Однако не менее часто модель СМО не сводится к схеме "гибели и размножения". Например, в СМО с конечной надежностью каналов обслуживания.

**2.5.5. Одноканальная СМО с конечной надежностью**

Построить граф состояний одноканальной СМО с очередью на три заявки и с конечной надежностью каналов обслуживания. При отказе канала обслуживания заявка, находившаяся на обслуживании, теряется. Процессы в системе - марковские.

Описание состояний СМО:

$S_0 \dots S_4$ - состояния исправной СМО;

$S'_0 \dots S'_4$ - состояния неисправной СМО.

Обозначения:

$\lambda$ - интенсивность поступления заявок;

$\mu$ - интенсивность обработки заявки каналом;

$\nu$ - интенсивность поломок канала;

$\eta$ - интенсивность ремонта неисправного канала.

Граф состояний СМО с конечной надежностью каналов обслуживания приведен на рис. 2.14.

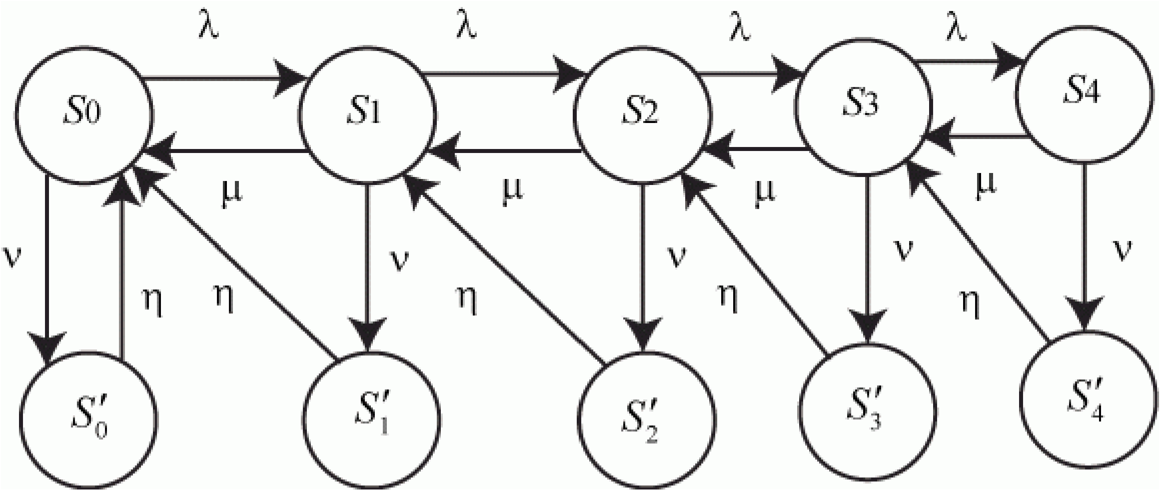



**Рис. 2.14.** Граф состояний СМО с конечной надежностью

Если в состоянии $S_0$ (канал свободен, в очереди заявок нет) система выйти из строя не может, то состояния $S'_0$ нет. Так как при отказе заявка, находившаяся на обслуживании, теряется, то после восстановления переход осуществляется к предыдущему состоянию, например, из состояния $S'_3$ в состояние $S_2$.

Эта модель не является моделью "гибели и размножения". Поэтому соответствующие вероятности находятся решением системы линейных алгебраических уравнений, полученных из уравнений Колмогорова для стационарного режима.

## 2.6. Метод динамики средних. Сущность и содержание метода

В многоэлементных системах часто целью моделирования является определение средних количеств элементов, находящихся в одинаковых состояниях.

Например, в задаче о пеленгации передатчиков противника командира интересует число запеленгированных передатчиков, а не вероятности пеленгации одного передатчика, двух, трех и т. д. Но чтобы определить среднее число их, надо знать вероятности всех возможных состояний $p_i$, так как

$$\overline{n} = \sum_{i=0}^{n} p_i \cdot n_i$$

Но число состояний и, следовательно, число уравнений Колмогорова может оказаться настолько большим, что вызовет непреодолимые трудности при моделировании по схеме марковских процессов.

Например, в соединении имеется 100 радиостанций. Каждая из них может находиться в боевых условиях в пяти состояниях:

$S_1$ - исправна, работает, не обнаружена;

$S_2$ - исправна, работает, обнаружена;

$S_3$ - работоспособна, но подавлена помехами;

$S_4$ - обнаружена, поражена;

$S_5$ - находится в ремонте;

Для определения средних численностей каждого из этих состояний пришлось бы составить $5^{100}$ уравнений Колмогорова. Очевидно, такое моделирование не годится.

В исследовании операций есть метод, позволяющий успешно решать такие и аналогичные задачи. Этот метод называется **метод динамики средних**.

Метод динамики средних позволяет непосредственно определять математическое ожидание числа элементов сложной системы, находящихся в одинаковых состояниях.

Метод дает приближенные результаты. Но обладает замечательным свойством: чем больше система имеет элементов и состояний, тем точнее результат математического моделирования.

Для получения расчетных формул метода предположим, что имеем дело с системой, обладающей следующими признаками:

- в системе протекает случайный марковский процесс;
- элементы системы однородны в том смысле, что состояния, их число и их вероятности - одинаковые;
- элементы меняют состояния независимо друг от друга.

Цель моделирования: определить средние количества элементов (математические ожидания) $m_i(t)$, находящихся в одинаковых состояниях $S_i$, и дисперсию $D_i(t)$.

Схематично такая система может быть представлена так, как показано на рис. 2.15.

Система имеет $N$ элементов, а каждый элемент имеет $n$ состояний. Численность $i$ -го состояния на любой момент времени - величина случайная. Обозначим ее $x_i(t)$. Матожидание и дисперсия этой случайной величины:

$$m_i(t) = M[x_i(t)], D_i(t) = D[x_i(t)].$$

В дальнейшем для лучшей обозримости формул аргумент $t$ писать не будем:

$$m_i = M[x_i], D_i = D[x_i].$$

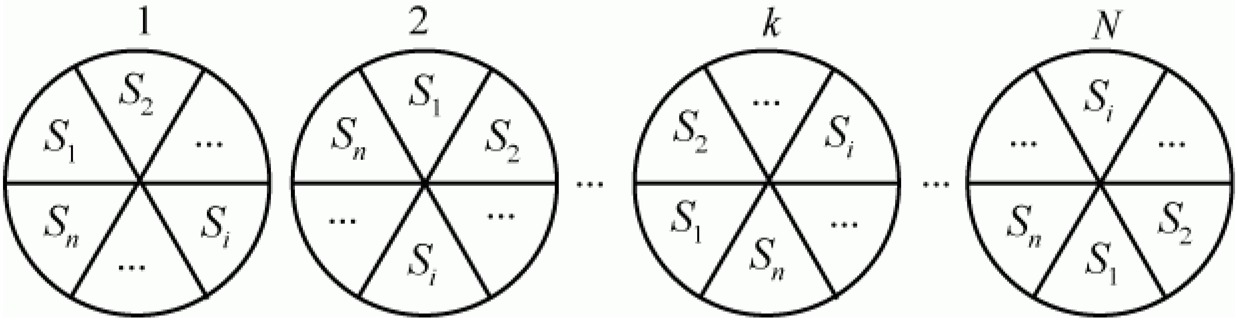



**Рис. 2.15.** Схематичное представление системы

Введем переменную $x^k$ так что:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-й элемент находится в состоянии } i, \text{вероятность } p_i; \\ 0, & \text{если } k\text{-й элемент не находится в состоянии } i (1-p_i); \end{cases}$$

Отсюда следует, что случайная величина $x_i$ равна:

$$x_i = \sum_{k=1}^{N} x_i^k$$

В силу однородности элементов и независимости состояний случайная величина $x_i$ имеет биномиальное распределение (распределение Бернулли) с матожиданием и дисперсией соответственно:

$$M[x_i] = Np_i, D[x_i] = Np_i(1-p_i)$$

или окончательно

$$m_i = Np_i, D_i = Np_i(1-p_i) = m_i\left(1 - \frac{m_i}{N}\right)$$

Равенство $m_i = Np_i$ связывает вероятность $i$ -го состояния элемента в произвольный момент времени с матожиданием численности этих состояний по всем элементам.

Определять значения $p_i$ для одного элемента мы умеем. Для этого достаточно составить систему уравнений Колмогорова и решить ее.

Вспомним, что система уравнений Колмогорова для одного элемента содержит $n$ уравнений, а для всех $N$ элементов - $n^N$, то есть в $n^{N-1}$раз меньше. В этом и состоит выигрыш, который дает применение метода динамики средних.

Порядок моделирования с использованием метода динамики средних заключается в следующем.

1. Описать состояния одного элемента системы.
2. Составить размеченный граф состояний для одного элемента, указав рядом с каждым состоянием $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_n$ средние численности состояний $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$, полученные умножением $Np_i$ .
3. Составить дифференциальные уравнения (ДУ) по следующим правилам:
   - производная средней численности состояния равна сумме стольких членов, сколько стрелок связано с данным состоянием;
   - если стрелка направлена из состояния, член имеет знак минус, если в состояние - знак плюс;
   - каждый член равен произведению интенсивности потока событий, переводящего элемент по данной стрелке, на среднюю численность того состояния, из которого исходит стрелка.
4. Решить систему дифференциальных уравнений относительно $m_i$ .
5. Вычислить значения дисперсий $D_i$ и средних квадратических отклонений $\sigma_i = \sqrt{D_i}$.

Поскольку процессы в элементах - марковские, то справедливы все рассуждения об установившихся значениях $m_i$ , об условиях существования установившихся значений $m_i(t) = m_i$.

Полученные уравнения для $m_i$ называют уже не уравнениями Колмогорова, а уравнениями динамики средних.Поскольку они получаются из уравнений Колмогорова путем умножения всех членов на постоянное число $N$ , то их можно писать сразу для средних численностей состояний $m_i$ по образцу уравнений для вероятностей $p_i$ .

Рассмотрим на примере методику моделирования с использованием метода динамики средних.

**Пример 2.8** .В части имеются 100 средств связи (СС). СС выходят из строя с интенсивностью $\lambda_{12}$. При нахождении СС в неисправном состоянии проводится его диагностика, в результате чего оно может быть отправлено в ремонтное подразделение части (интенсивность отправки $\lambda_{23}$), либо во внешнее ремонтное подразделение (интенсивность отправки $\lambda_{24}$), либо списано (интенсивность списания $\lambda_c$ ). В ремонтном подразделении части СС ремонтируются с интенсивностью $\lambda_{31}$, а во внешнем ремонтном подразделении - с интенсивностью $\lambda_{41}$. СС части пополняются с интенсивностью $\lambda_п$, в среднем равной интенсивности списания.

Требуется провести моделирование с целью определения средних численностей каждого состояния СС.

Решение

1. Описание состояний одного средства связи

Система может иметь следующие четыре состояния:

$S_1$ - СС исправно;

$S_2$ - СС неисправно, производится диагностика;

$S_3$ - СС находится на ремонте в ремонтном подразделении части;

$S_4$ - СС находится на ремонте во внешнем ремонтном подразделении.

2. Построение размеченного графа состояний

Размеченный граф состояний представлен на рис. 2.16.

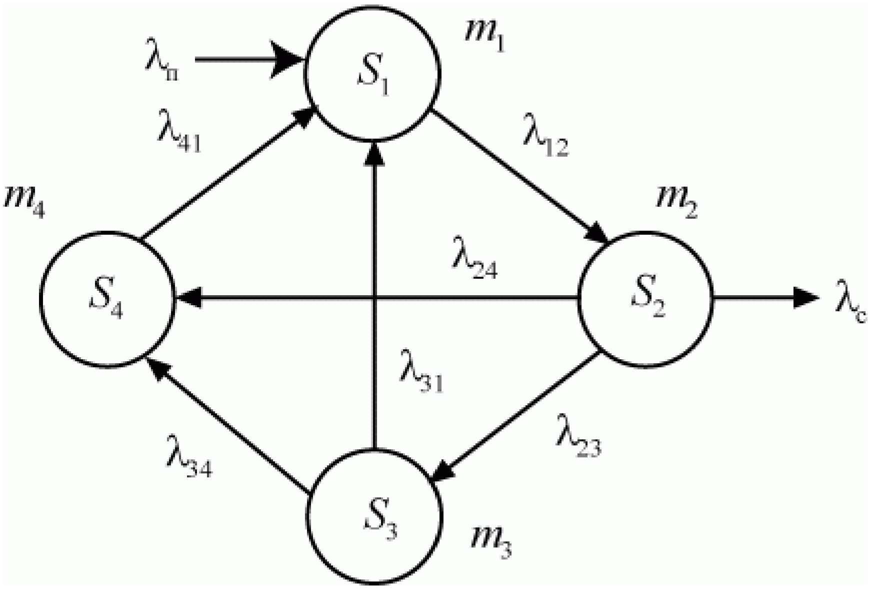



**Рис. 2.16.** Размеченный граф состояний системы ремонта

3. Составление системы дифференциальных уравнений

Каждое уравнение системы составляется по тому же правилу, что и система дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = -\lambda_{12}m_1 + \lambda_{31}m_3 + \lambda_{41}m_2 + \lambda_{11}m_2 \\ \dfrac{dm_2}{dt} = -\lambda_{23}m_2 - \lambda_{24}m_2 - \lambda_c m_2 + \lambda_{12}m_1 \\ \dfrac{dm_3}{dt} = -\lambda_{31}m_3 + \lambda_{23}m_2 \\ \dfrac{dm_4}{dt} = -\lambda_{41}m_4 + \lambda_{24}m_2 \end{cases}$$

Численности состояний являются функциями времени, т. е. $m_i = m_i(t)$. В системе дифференциальных уравнений запись упрощена. Выражение для пополняющего члена написано из условия равенства в среднем пополнения и убыли $\lambda_c m_п = \lambda_2 m_2$. Также мы не можем воспользоваться нормировочным условием $\sum_{i=1}^{4} m_i(t) = 100$, так как в силу случайного характера списания и пополнения в некоторые моменты времени оно может не выполняться. Общее число СС в части при этом меняется со временем:

$$N(t) = N + \int_0^t \lambda_п(t)dt - \int_0^t \lambda_c(t)dt$$ (t)dt)

4. Решение системы дифференциальных уравнений относительно m_{i}

   Решить систему ДУ можно методом численного интегрирования, например, Рунге-Кутта, задав начальные значения численно-стей состояний для момента $t = 0$:

   $$m_1(0) = 100, m_2(0) = 0, m_3(0) = 0, m_4(0) = 0,$$

   считая интенсивности $\lambda_{ij}, \lambda_c, \lambda_п$известными.

5. Вычисление дисперсий и среднеквадратических отклонений

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D_i = m_i \left[ 1 - \left( m_i / \sum_{i=1}^{4} m_i \right) \right], i = \overline{1,4}$$

По дисперсии определяется среднеквадратическое отклонение численности состояний $\sigma_i = \sqrt{D_i}$ и находится диапазон возможных значений численности $S_i$ состояния $m_i \pm 3\sigma_i$.

Метод динамики средних справедлив и для предельных значений численностей состояний. В данной задаче уравнения динамики средних - система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{12} m_1 + \lambda_{31} m_3 + \lambda_{41} m_4 + \lambda_{11} m_2; \\ 0 = -\lambda_{23} m_2 - \lambda_{24} m_2 - \lambda_c m_2 + \lambda_{12} m_1; \\ 0 = -\lambda_{31} m_3 + \lambda_{23} m_2; \\ 0 = -\lambda_{41} m_4 + \lambda_{24} m_2. \end{cases}$$

Однако прежде чем переходить к этим уравнениям, нужно сначала убедиться, что стационарные значения $m_i$ существуют. Здесь численности состояний $m_i$ не являются функциями времени. Поэтому можно воспользоваться нормировочным условием.

## 2.7. Принцип квазирегулярности

Как показывает практика, метод динамики средних вполне приемлем и для немарковских процессов, то есть для произвольных распределений времен нахождения элементов в состояниях $S_i$.

Хотя в этих случаях мы формально не имеем право написать уравнения динамики средних, однако массовость явления делает вид распределения не очень существенным. Следовательно, при моделировании не следует тратить время на проверку марковости процесса. Чем больше элементов в системе, чем она сложнее, тем точнее она моделируется методом динамики средних.

При большом числе элементов также становится не очень существенным требование однородности элементов.

Теперь попробуем разобраться с требованием, которое мы также ввели ранее - требование независимости элементов.

Применяя метод динамики средних, мы можем встретиться с очень серьезной трудностью. Дело в том, что интенсивности потоков событий, переводящих элементы из одного состояния в другое, могут зависеть от численности состояний. Например, в примере 2.6 интенсивность $\lambda_{12}$ зависит от того, сколько в данный момент времени находится СС в состоянии $S_2$: СС может либо сразу ремонтироваться, либо ожидать очереди ввиду занятости рабочих мест. Численности состояний случайны, следовательно, интенсивности потоков событий тоже случайны и неизвестны. Точное решение в таких ситуациях невозможно, однако вполне приемлемое

для практики решение находится с помощью допущения, которое называют "принцип квазирегулярности". **Принцип квазирегулярности** состоит в следующем: интенсивности $\lambda_i$ зависят не от мгновенных значений численности состояний $x_i$, а от их средних значений (математических ожиданий) $m_i$.

Погрешность от этого допущения при моделировании тем меньше, чем ближе к линейной зависимости $\lambda_i = f(m_i)$ и чем больше общее количество элементов $N$.

На практике проверено, что при $N = 50 \ldots 100$ точность моделирования приемлема для инженерных "прикидок", если же функции $\lambda_i = f(mi)$ близки к линейным, то приемлемые результаты получаются и при $N = 10$.

**Пример 2.9**. Каждый автомат, находящийся на вооружении в воинской части, может находиться в исправном состоянии или ремонтироваться в мастерской части. Если бы каждый неисправный автомат сразу попадал к свободному мастеру, то никаких очередей из автоматов, ожидающих ремонта, не было, и граф состояний автомата имел бы вид, приведенный на рис. 2.17.

Здесь:

$S_1$ - автомат исправен;

$S_2$ - автомат неисправен, ремонтируется;

$\lambda_1$ - интенсивность выхода автомата из строя;

$\lambda_2$ - интенсивность ремонта автомата одним мастером.

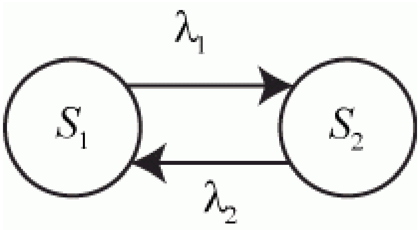



**Рис. 2.17.** Граф состояний автомата

В этом случае $\lambda_1$ и $\lambda_2$ были бы постоянными величинами и, естественно, не зависели от численности состояний. Уравнения динамики средних имели бы вид:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2, \\ m_1 + m_2 = N; \end{cases}$$

так как мы полагаем, что процессы наработки на отказ и ремонта - марковские и стационарный режим существует. $N$ - общее число автоматов в части.

Уравнение для состояния $S_2$ не пишем, так как оно линейно зависит от первого.

А теперь предположим, что в мастерской части два мастера и неисправные автоматы могут ожидать ремонта. В этом случае интенсивность переходов из неисправного состояние в исправное зависит от числа автоматов, находящихся в мастерской. Обозначим эту интенсивность $\tilde{\lambda}_2$. Граф состояний имеет вид (рис. 2.18).

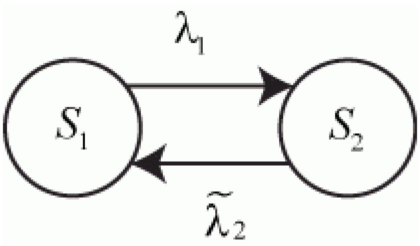



**Рис. 2.18.** Граф состояний автомата

Общую интенсивность ремонта мастерской обозначим $\psi(x_2$). График ее показан на рис. 2.19а.

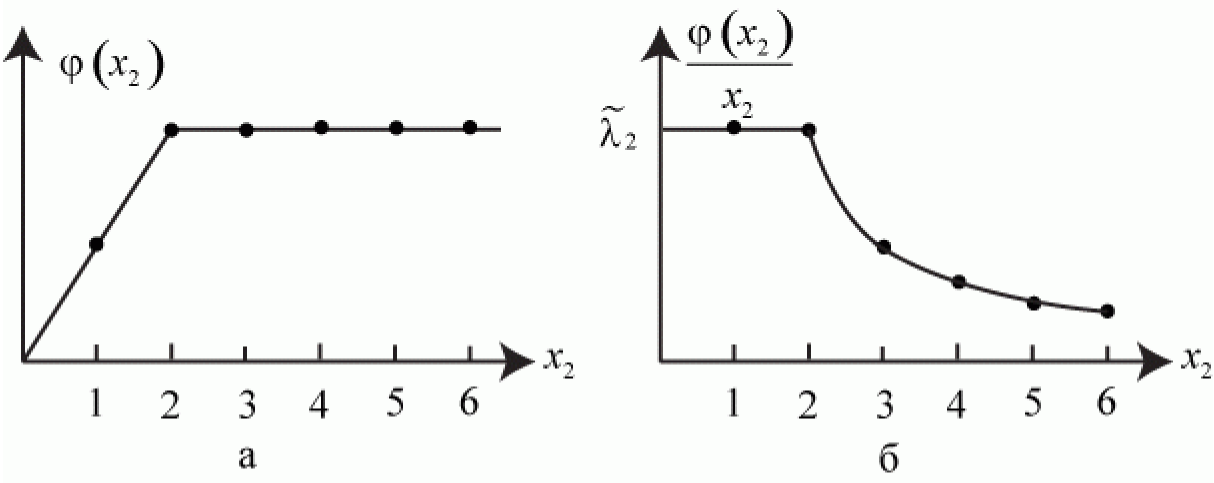



**Рис. 2.19.** Графики \phi(x2) и \lambda 2

При $x_2 = 2$интенсивность $\phi(2)$ максимальна, так как работают оба мастера. При дальнейшем увеличении $x_2$} интенсивность $\phi(2)$

возрастать не может. Очевидно, интенсивность ремонта, приходящаяся на один автомат, находящийся в мастерской:

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\phi(x_2)}{x_2}$$

График зависимости $\tilde{\lambda}_2$от $\mathrm{x}_2$показан на рис. 2.19б.

Применим принцип квазирегулярности, то есть будем считать, что $\tilde{\lambda}_2$зависит не от случайных численностей $\mathrm{X}_2$, а от среднего значения (матожидания) $m_2$. Тогда:

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\phi(m_2)}{m_2}$$

и уравнения динамики средних примут вид:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 m_1 + \dfrac{\phi(m_2)}{m_2} m_2, \\ m_1 + m_2 = N; \end{cases}$$

Зависимость $\phi(m_2)$задана рис. 2.19б.

**Пример 2.10**. Вернемся к задаче о пеленгации передатчиков противника. Поскольку целью ее решения являлось определение среднего числа запеленгованных передатчиков, то возможно применение метода динамики средних. Обозначим:

$S_1$- состояние "передатчик запеленгован";

$\mathrm{X}$- случайная численность состояния $S_1$;

$S_2$ - состояние "передатчик потерян";

$\lambda$ - интенсивность обнаружения частоты передатчика противника одним оператором;

$\mu$ - интенсивность потерь слежения запеленгованного передатчика противника;

$(\mathrm{M} - \mathrm{x})$ - текущее число операторов, ведущих поиск;

$(\mathrm{M} - \mathrm{x})\lambda$ - интенсивность обнаружения всеми операторами одного передатчика;

$(N - \mathrm{x})$ - число не захваченных частот передатчиков, находящихся в состоянии $S_2$.

Граф состояний одного передатчика приведен на рис. 2.20. Заменим, в соответствии с принципом квазирегулярности, случайную численность обнаруженных передатчиков $\mathrm{x}$ на среднее значение $\overline{n}$ и, учитывая наличие стационарности, запишем уравнение динамики средних:

$$0 = -\mu\overline{n} + (M - \overline{n})(N - \overline{n})\lambda$$

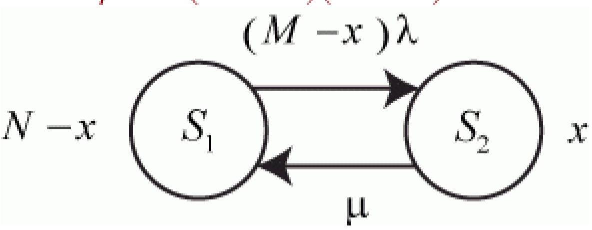



**Рис. 2.20.** Граф состояний передатчика

Уравнения динамики средних могут быть нелинейными и, следовательно, решение будет не единственным. В таких случаях берется то решение, которое не противоречит смыслу задачи.

Для упрощения расчетов положим $M = N = 10, \lambda = \mu$. В этом случае уравнение принимает вид:

$$\overline{n}^2 - 21\overline{n} + 100 = 0$$

Его решение $\overline{n} = 10.5 - \sqrt{\frac{21^2}{4} - 100} = 7.3$ передатчика (знак плюс перед корнем отбрасываем, так как в этом случае корень будет равен 13,7, что бессмысленно). Решение этого примера с помощью уравнений Колмогорова дает ответ $\overline{n} = 7,43$. Расхождение в 2,5 % объясняется малочисленностью группировок $M$ и $N$. Впрочем, полученный результат может быть вполне приемлемым.

## 2.8. Элементарные модели боя

Приемлемая по точности математическая модель такой сложной системы как бой невозможна из-за наличия неопределенных и неформализуемых факторов и уникальных ситуаций. Однако, приблизительные частные модели возможны и целесообразны для количественного обоснования некоторых решений, оценки обстановки, прогнозирования результатов решений и др.

Рассмотрим некоторые элементарные модели боя.

### 2.8.1. Модель высокоорганизованного боя

**Постановка задачи**

Две группировки А и Б ведут бой. В составе группировок А и Б $N_1$ и $N_2$ боевых единиц со скорострельностями $\lambda_1$ и $\lambda_2$ и вероятностями поражения цели при одном выстреле $P_1$ и $P_2$ соответственно. Каждая группировка однородна, но не обязательно группировки однородны между собой. Например, бой танков с танками, танков с противотанковыми средствами, истребителей с бомбардировщиками и т.п.

Высокоорганизованным боем называют бой с полной информацией, а именно:

- любая боевая единица одной стороны, пока она не поражена, может вести огонь по любой непораженной боевой единице другой стороны;
- разведка, связь и управление идеальны, то есть перенос огня каждого средства на новую цель происходит мгновенно после поражения предыдущей цели;
- пораженная боевая единица в дальнейших действиях не участвует, то есть за время боя не восстанавливается, пополнения сторон нет;
- временем полета носителя заряда пренебрегаем;
- перенос огня не влияет на скорострельность и вероятность поражения;
- количество боеприпасов неограниченно;
- противоборствующие группировки достаточно многочисленны (это необходимое допущение будет обосновано при моделировании).

При этих допущениях процесс динамики боя двух группировок может рассматриваться как случайный марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, для которого могут быть получены уравнения динамики средних, позволяющие определить для любого момента времени средние численности сторон.

**Цель моделирования** .Прогнозирование средних количеств пораженных и непораженных боевых единиц каждой группировки на любой момент времени.

**Моделирование**

**Описание состояний одной боевой единицы**

Каждое средство противоборствующих сторон А и Б может находиться в одном из двух состояний соответственно:

$S_1(S_2)$ - не поражено;

$S_1'(S_2')$ - поражено.

**Построение размеченных графов состояний**

Графы состояний для каждой группировки элементарны (рис. 2.21).

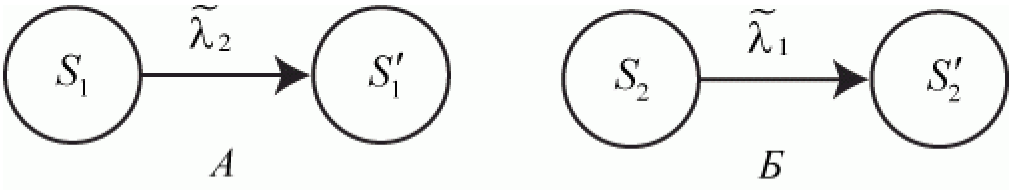



**Рис. 2.21.** Граф состояний противоборствующих сторон

Интенсивность $\tilde{\lambda}_2$ - интенсивность потока поражающих выстрелов стороны Б,приходящихся на одну боевую единицу стороны А,то есть переводящих ее из состояния $S_1$ в состояние $S_1^{'}$.

Аналогичные рассуждения объясняют $\tilde{\lambda}_1$. Очевидно, для начального состояния ( $t=0$):

$$\tilde{\lambda}_2=\frac{\lambda_2 N_2 P_2}{N_1}, \tilde{\lambda}_1=\frac{\lambda_1 N_1 P_1}{N_2}$$

**Составление уравнений динамики средних**

В ходе боя численности боеспособных единиц сторон будут случайным образом изменяться (уменьшаться, так как пополнение средств поражения сторон мы пока не рассматриваем). Обозначим эти случайные численности каждой стороны $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно. Тогда:

$$\tilde{\lambda}_2=\frac{\lambda_2 P_2 x_2(t)}{x_1(t)}, \tilde{\lambda}_1=\frac{\lambda_1 P_1 x_1(t)}{x_2(t)}$$

Зависимость $\lambda_2(t)$ и $\lambda_1(t)$ от случайных значений $x_2(t)$ и $x_1(t)$ делает аналитическое решение задачи практически невозможным. Поэтому, используя принцип квазирегулярности, заменим $x_2(t)$ и $x_1(t)$ их матожиданиями $m_2(t)$ и $m_1(t)$.

Заметим, что $m_1(t)$ и $m_2(t)$ являются целью моделирования.

После замены выражения для $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_1$ принимают вид:

$$\tilde{\lambda}_2=\frac{\lambda_2 P_2 m_2(t)}{m_1(t)}, \tilde{\lambda}_1=\frac{\lambda_1 P_1 m_1(t)}{m_2(t)}$$

Запишем уравнения динамики средних для состояний $S_1$ и $S_2$:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1(t)}{dt}=-\dfrac{\lambda_2 P_2 m_2(t)}{m_1(t)}\cdot m_1(t), \\ \dfrac{dm_2(t)}{dt}=-\dfrac{\lambda_1 P_1 m_1(t)}{m_2(t)}\cdot m_2(t), \end{cases}$$

Для состояний $S_1'$ и $S_2'$ уравнения не нужны, так как средние численности этих состояний $m_1'(t)$ и $m_2'(t)$ однозначно связаны с $m_1(t)$ и $m_2(t)$ :

$$m_1(t) + m_1'(t) = N_1, m_2(t) + m_2'(t) = N_2.$$

После очевидного упрощения уравнения динамики средних принимают вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1(t)}{dt} = -\lambda_2 P_2 m_2(t), \\ \dfrac{dm_2(t)}{dt} = -\lambda_1 P_1 m_1(t). \end{cases}$$

Здесь и далее для лучшей обозримости аргумент $t$ в $m_1(t)$ и $m_2(t)$ опустим.

Систему уравнений (2.3) обычно называют уравнениями динамики боя, иногда - уравнениями Ланчестера. Ланчестер - полковник английской армии времен первой мировой войны. Именно он предложил излагаемые подходы формализации боевых действий.

**Решение уравнений динамики средних**

Искомые численности сторон $m_1$ и $m_2$ находятся интегрированием системы (2.3) при начальных условиях:

$$t = 0, m_1 = N_1, m_2 = N_2.$$

Решение имеет вид:

$$m_1 = N_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 P_1 \lambda_2 P_2} \cdot t) - N_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 P_2}{\lambda_1 P_1}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 P_1 \lambda_2 P_2} \cdot t)$$
$$m_2 = N_2 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 P_1 \lambda_2 P_2} \cdot t) - N_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 P_1}{\lambda_2 P_2}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 P_1 \lambda_2 P_2} \cdot t)$$

Для лучшей обозримости введем обозначения:

$\Lambda_1 = \lambda_1 P_1$ - эффективная скорострельность стороны А ;

$\Lambda_2 = \lambda_2 P_2$ - эффективная скорострельность стороны Б.

Эффективные скорострельности характеризуют плотности потоков успешных выстрелов соответствующей стороны.

$\mu_1 = \dfrac{m_1}{N_1}$ - доля боеспособных единиц стороны А ;

$\mu_2 = \dfrac{m_2}{N_2}$ - доля боеспособных единиц стороны Б ;

\chi =\cfrac{N_1\sqrt{\Lambda_1}}{ N_2\sqrt{\Lambda_2}}- коэффициент преимущества стороны А над стороной Б;

$\tilde{t} = \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \cdot t$ - приведенное время.

С учетом этих обозначений решение модели высокоорганизованного боя выглядит так:

$$\begin{cases} \mu_1 = \operatorname{ch}\tilde{t} - \dfrac{1}{\chi}\operatorname{sh}\tilde{t}, \\ \mu_2 = \operatorname{ch}\tilde{t} - \chi \operatorname{sh}\tilde{t}. \end{cases}$$

Графически варианты решений модели в зависимости от коэффициента превосходства представлены на рис. 2.22.

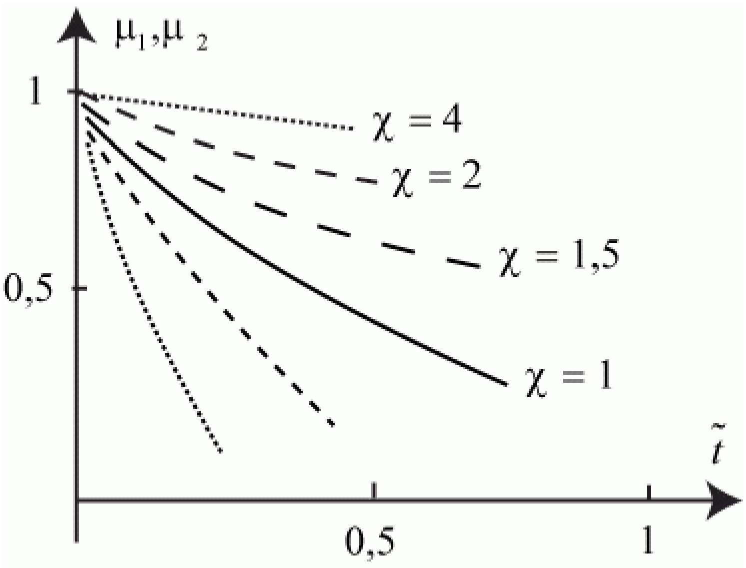



**Рис. 2.22.** Графики решений уравнений динамики средних

Из формул видно, что убывание численности группировок в большей мере зависит от соотношения сил $N_2/N_1$, чем от соотношения эффективных скорострельностей $\Lambda_2/\Lambda_1$: первое отношение входит в формулы непосредственно, а второе - под знаком корня. Увеличение начальной численности $N_1$ в два раза удваивает параметр $\chi$, тогда как удвоение $\Lambda_1$ увеличивает $\chi$ только в $\sqrt{2} = 1,4$ раза. Поэтому повышение скорострельности менее выгодно.

В рамках данной модели при $\chi \succ 1$ выигрывает бой сторона А, при $\chi \prec 1$ - сторона Б.

Кривые $\mu = f(\tilde{t})$ на рис. 2.22 оборваны до достижения нуля, так как при малочисленных группировках метод динамики средних дает большие ошибки.

Если силы сторон равны ( $\chi = 1$), то динамика сохранения сил сторон одинакова; $\mu_1 = \mu_2$ в любой момент боя. Бой будет продолжаться до определенного уровня истощения сил, после чего неизбежны попытки политического решения конфликта.

В рамках этой модели бой заканчивается разгромом слабой стороны тем быстрее, чем больше превосходство другой. Победа в этой модели достигается числом, не уменьем. Не учитывается опыт, способности командиров, обученность личного состава. Впрочем, параметр $P$ косвенно учитывает обученность экипажей средств поражения.

**Пример 2.11**. Группировка, в составе которой 270 противотанковых средств (ПТС), находится в обороне. Скорострельность каждого ПТС 6 выстр./мин, вероятность поражения одним ПТС одного танка равна 0,3. Скорострельность танка 4 выстр./мин, вероятность поражения одним танком одного ПТС 0,25 при коэффициенте превосходства 1,2.

Спрогнозировать, сколько нужно танков, чтобы прорвать оборону при полном уничтожении ПТС группировки.

Решение

Известно, что

$$\chi = \frac{N_1\sqrt{\Lambda_1}}{N_2\sqrt{\Lambda_2}}$$

откуда

$$N_1 = \frac{N_2\chi}{\frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_2}}} = \frac{270 \cdot 1.2}{\frac{\sqrt{4 \cdot 0.25}}{\sqrt{6 \cdot 0.3}}} = 440$$

Заметим, коэффициент преимущества $\chi$ не имеет иного смысла, кроме упрощения формул для вычисления $\mu_1$ и $\mu_2$. Поэтому результаты расчетов не имеют оперативно-тактического обоснования.

**Задача 2.12**.Сторона А имеет 30 огневых средств со скорострельностью каждого 5 выстр./мин и вероятностью поражения 0,2. Сторона Б имеет 40 огневых средств со скорострельностью каждого 4 выстр./мин и вероятностью поражения 0,3.

Провести расчеты для прогноза исхода боя, времени его окончания и количества сохранившихся огневых средств у победившей стороны.

Решение

**Исходные данные**

$$N_1 = 30\text{выстр./мин}, \lambda_1 = 5, P_1 = 0.2;$$
$$N_2 = 40\text{выстр./мин}, \lambda_1 = 4, P_1 = 0.3.$$

**Прогнозирование исхода боя**

Составим соотношения превосходства сторон:

$$\chi_{12} = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{\lambda_1 P_1}{\lambda_2 P_2}} = \frac{30}{40}\sqrt{\frac{5 \cdot 0.2}{4 \cdot 0.3}} = 0.68; \chi_{21} = \frac{1}{\chi_{12}} = \frac{1}{0.68} = 1.46.$$

Так как $\chi_{21} \succ \chi_{12}$, то преимущество будет у стороны Б,то есть победить должна сторона Б.

**Прогнозирование времени окончания боя**

Бой продолжается до полной победы, то есть $\mu_1 = 0$ или из (2.4)

$$\mu_1 = \operatorname{ch}\tilde{t} - \chi_{12}\operatorname{sh}\tilde{t} = 0$$

Учтем, что $ch^2\tilde{t} - sh^2\tilde{t} = 1$, откуда $ch^2\tilde{t} = 1 + sh^2\tilde{t}$

С другой стороны, из (2.5) $ch\tilde{t} = \chi_{21} sh\tilde{t}$ .

Из выражений (2.5) и (2.6) имеем:

$$1 + \operatorname{sh}^2\tilde{t} = \chi_{21}^2 \operatorname{sh}^2\tilde{t},\ 1 = \operatorname{sh}^2\tilde{t}(\chi_{21}^2 - 1),\ \operatorname{sh}^2\tilde{t} = \frac{1}{\chi_{21}^2 - 1},$$

$$\operatorname{sh}\tilde{t} = \sqrt{\frac{1}{\chi_{21}^2 - 1}},\ \tilde{t} = arcsh\sqrt{\frac{1}{\chi_{21}^2 - 1}}$$

Так как $\tilde{t} = \sqrt{P_1\lambda_1 P_2\lambda_2}t$ , то $t = \dfrac{arcsh\sqrt{\dfrac{1}{\chi_{21}^2 - 1}}}{\sqrt{P_1\lambda_1 P_2\lambda_2}}$ .

$$t = \frac{arcsh\sqrt{\dfrac{1}{1.46^2 - 1}}}{\sqrt{5 \cdot 0.2 \cdot 4 \cdot 0.3}} = \frac{arcsh0.94}{\sqrt{1.2}} = \frac{0.84}{1.095} = 0.767$$

**Определение количества огневых средств, сохранившихся у стороны Б**

$$\mu_2 = \operatorname{ch}\tilde{t} - \frac{1}{\chi_{21}}\operatorname{sh}\tilde{t}$$

Так как из выражения (2.5) , то $\operatorname{ch}\tilde{t} = \chi_{21}\operatorname{sh}\tilde{t}$ , то

$$\mu_2 = \left(\chi_{21} - \frac{1}{\chi_{21}}\right)\operatorname{sh}\tilde{t} = (\chi_{21} - \chi_{12})\operatorname{sh}\tilde{t} =$$
$$= (1.46 - 0.68)\operatorname{sh}\tilde{t} = 0.78 \cdot 0.94 = 0.73$$

Теперь $m_2 = \mu_2 N_2 = 0,73 \cdot 40 = 29,2$.

К концу боя у стороны Б останется от 29 до 30 огневых средств, тогда как огневые средства стороны А будут полностью уничтожены.

Приведенные результаты прогноза исхода боя двух группировок являются приблизительными, оценочными, так как при малых количествах огневых средств ( $\mu_1 \to 0$) метод динамики средних,

лежащий в основе уравнений динамики боя, может давать существенные ошибки.

### 2.8.2. Высокоорганизованный бой с пополнением группировок

В ходе боя противоборствующие стороны могут вводить резервы. Пусть сторона А вводит резерв $R_1$в момент времени $t_1$, сторона Б - резерв $R_2$в момент времени $t_2$. Такую ситуацию можно наглядно представить диаграммой (рис. 2.23).

Весь интервал исследования содержит три подинтервала, так в сумме резервы обеими сторонами вводятся три раза.

1. $0 \leq t \prec t_1$. Значения $m_1$и $m_2$находятся интегрированием уравнения динамики боя (2.3) при начальных условиях $N_1$и $N_2$.
2. $t_1 \leq t < t_2$. Значения $m_1$и $m_2$на этом временном участке находятся интегрированием тех же уравнений динамики боя (2.3), но при начальных условиях $m_1(t_2) + R_1$и $m_2(t_2)$.
3. $t_2 \leq t < \infty$. Значения $m_1$и $m_2$на этом временном участке находятся интегрированием тех же уравнений динамики боя (2.3), но при начальных условиях $m_1(t_2)$и $m_2(t_2) + R_2$.

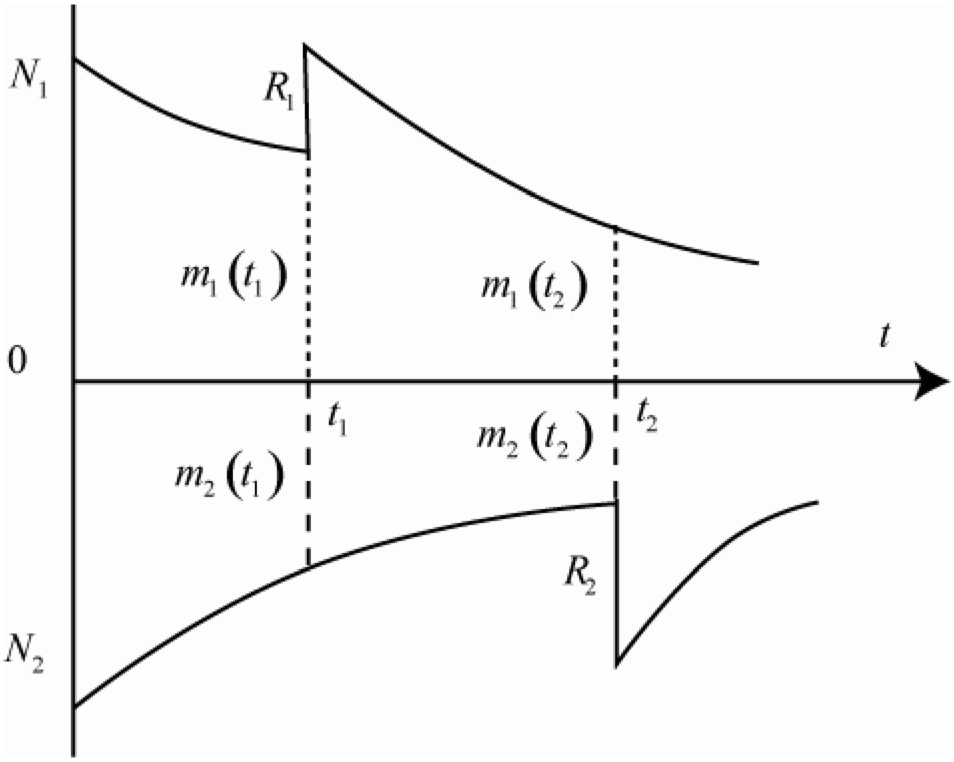


**Рис. 2.23.** Иллюстрация к пополнению группировок

### 2.8.3. Высокоорганизованный бой с упреждением ударов

Предположим, что одна из сторон, например, сторона А,ведет огонь в то время, когда сторона Б еще не в состоянии ответить. Представим эту ситуацию диаграммой (рис. 2.24).

Цель моделирования также состоит в определении $m_1$ и $m_2$ на любой момент противоборства сторон. Как и в предыдущем случае, решение находится по частям для каждого характерного временного промежутка. Здесь их два.

1. $0 \leq < t_y$. На этом временном промежутке огонь ведет только сторона А ( $t$ - время упреждения). Уравнения динамики боя здесь выглядят так:

   $$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = 0, \\ \dfrac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 N_1, \Lambda_1 = \lambda_1 P_1. \end{cases}$$

   Значения $m_2$ находят интегрированием при начальном условии $m_1 = N_1$.

2. $t \leq t < \infty$. Значения $m_1$ и $m_2$ на этом участке также находятся интегрированием уравнений динамики средних, но при начальных условиях $N_1$ и $m_2(t_y)$. Величина $N_1$ известна, а величину $m_2(t)$ найдем из уравнения $\dfrac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 N_1$ :

   $$dm_2 = -\Lambda_1 N_1 dt,$$
   $$\int\limits_{m_2(0)}^{m_2(t_y)} dm_2 = -\int\limits_0^{t_y} \Lambda_1 N_1 dt, \;\; m_2(0) = N_2,$$
   $$m_2(t_y) - m_2(0) = -\Lambda_1 N_1 t_y, \;\; m_2(t_y) - N_2 = -\Lambda_1 N_1 t_y,$$
   $$m_2(t_y) = N_2 - \Lambda_1 N_1 t_y$$

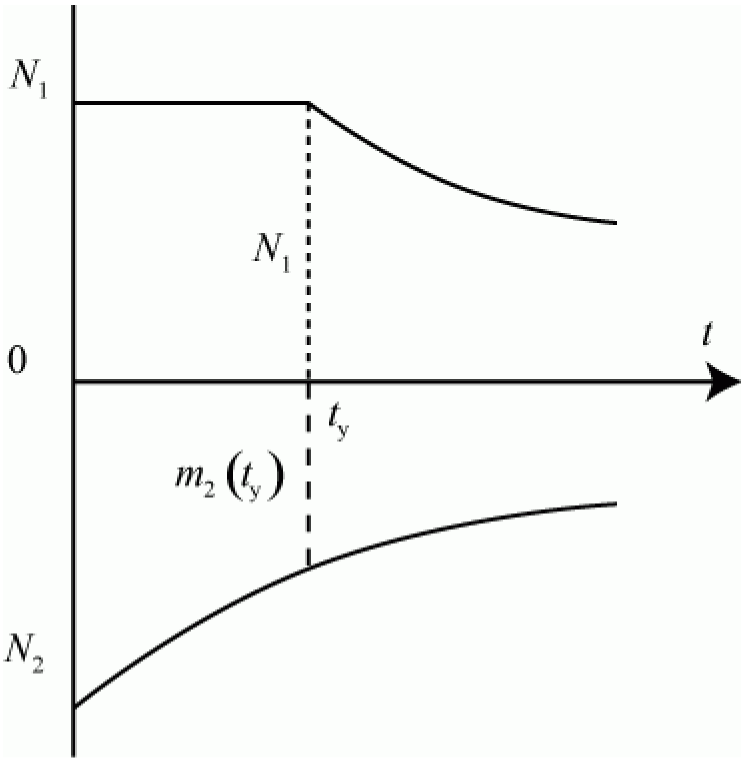



**Рис. 2.24.** Иллюстрация к упреждению удара

**2.8.4. Модель боя с неполной информацией**

Боевые единицы двух противоборствующих сторон распределены случайно (для противоположной стороны) на площадях $S_1$ и $S_2$. Каждая боевая единица занимает некоторую площадь - позицию, величина которой $\sigma_1$ и $\sigma_2$ у сторон А и Б соответственно. Цель уничтожается при попадании заряда в площадь цели.

Схематично такое противоборство показано на рис. 2.25.

Как и в предыдущих случаях, $N_1$ и $N_2$ - первоначальные численности боевых единиц, скорострельности боевых единиц $\lambda_1$ и $\lambda_2$, вероятности поражения одним выстрелом - $P_1$ и $P_2$ сторон А и Б соответственно.

Огонь по площадям $S_1$ и $S_2$ ведется неприцельно.

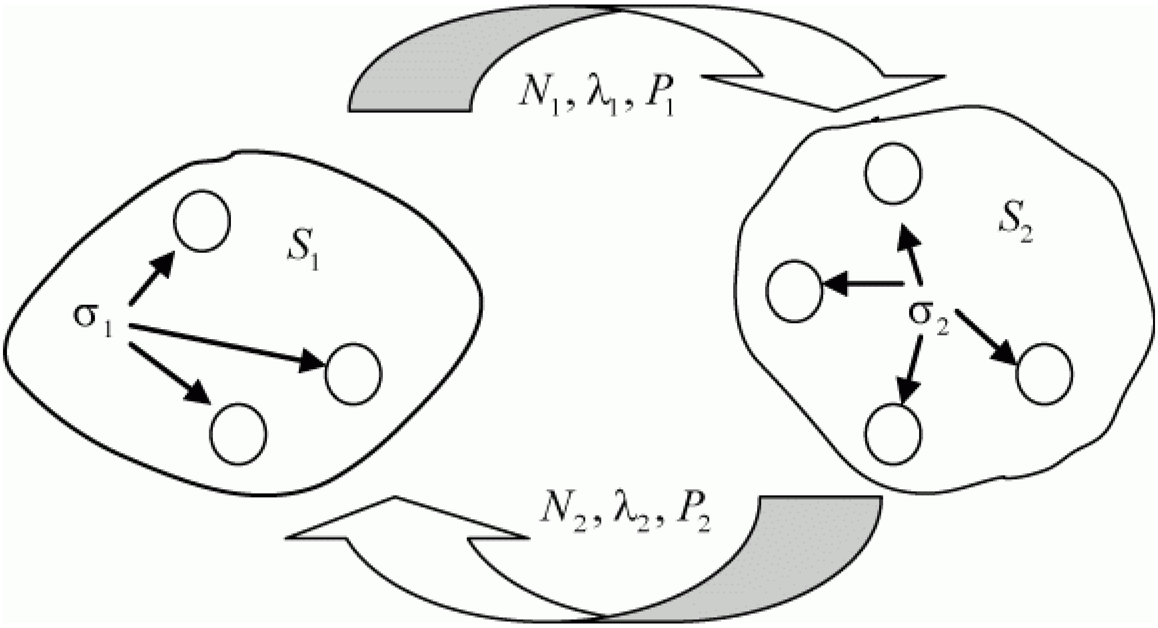



**Рис. 2.25.** Иллюстрация к модели боя с неполной информацией

Цель моделирования - определение среднего числа непораженных целей $m_1$ и $m_2$ на каждый момент времени ведения огня.

Уравнения динамики боя соответствуют уравнениям динамики средних (2.3). Однако, в отличие от высокоорганизованного боя, вероятности $P_1$ и $P_2$ зависят от числа непораженных целей $m_1$ и $m_2$:

$$P_1 = \frac{\sigma_2 m_2}{S_2}, \quad P_2 = \frac{\sigma_1 m_1}{S_1}.$$

Следовательно, уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = -\lambda_2 \dfrac{\sigma_1 m_1}{S_1} m_2, \\ \dfrac{dm_2}{dt} = -\lambda_1 \dfrac{\sigma_2 m_2}{S_2} m_1 \end{cases}$$

Начальные условия для интегрирования: $m_1 = N_1$ и $m_2 = N_2$.

Если площади целей различны $(\sigma_{1i}, \sigma_{2j})$, то в уравнениях очевидны замены:

$$\sigma_1 \cdot m_1 \to \sum_{i=1}^{m_1} \sigma_{1i}, \sigma_2 \cdot m_2 \to \sum_{j=1}^{m_2} \sigma_{2j}$$

.

### 2.8.5. Учет запаздывания в переносе и открытии огня

Такая ситуация возможна при плохой разведке, связи, управлении огнем.

Пусть $m_1$ - время запаздывания открытия огня стороной А, $m_2$ - стороной Б. Тогда интенсивности потоков поражающих выстрелов сторон, приходящихся на одну цель, равны:

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 P_1 m_1(t)}{m_2(t-\tau_1)}, \ \tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2 P_2 m_2(t)}{m_1(t-\tau_2)}$$

Уравнения динамики боя принимают вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = \dfrac{\lambda_1 P_1 m_1(t)}{m_2(t-\tau_1)} m_1(t), \ m_1(0) = N_1, \\ \dfrac{dm_2}{dt} = \dfrac{\lambda_2 P_2 m_2(t)}{m_1(t-\tau_2)} m_2(t), \ m_2(0) = N_2. \end{cases}$$

На рис. 2.26 в момент времени $t$ действительные значения боеспособных средств сторон равны $m_1(t)$ и $m_2(t)$. Но в это время сторона А ведет огонь по целям, разведанным ранее, в момент времени $t-\tau_1$; сторона Б - по целям, разведанным в момент времени $t-\tau_2$.

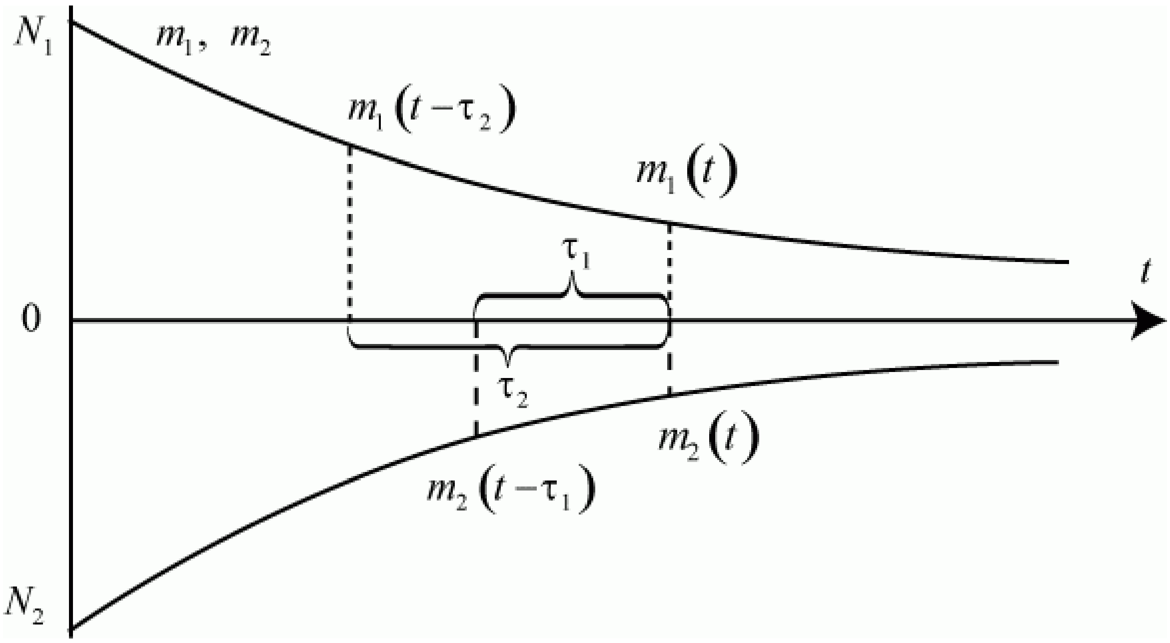



**Рис. 2.26.** Иллюстрация к учету запаздывания в переносе и открытии огня

Ценность рассмотренных моделей противоборства сторон в функциональном плане всегда ограничена - об этом было сказано в начале п. 2.8. Но они, бесспорно, расширяют наши представления о приемах и подходах к аналитическому моделированию сложных процессов.

## Вопросы для самоконтроля

1. Что такое аналитическая модель? Ее отличия от других моделей.
2. Определение марковского случайного процесса. Причина "популярности" моделирования по схеме марковских процессов.
3. Что такое однородный и неоднородный марковские процессы?
4. Правило составления уравнений Колмогорова.
5. Эргодическая теорема Маркова.
6. Схема "гибели и размножения".
7. Характеристика элементов СМО.

8. Показатели СМО с отказами.
9. Показатели СМО с ожиданием.
10. Одноканальная СМО с очередью на 4 заявки и конечной надежностью канала. В момент отказа заявка, которая обслуживалась в канале, возвращается в очередь, если там есть место, иначе теряется. Во время ремонта заявки в СМО не поступают. Интенсивности поступления и обслуживания заявок $\lambda$ и $\mu$, соответственно. Интенсивности выхода из строя и ремонта канала $\eta$ и $\nu$ соответственно.Описать состояния системы, составить размеченный граф состояний, уравнения Колмогорова и систему алгебраических уравнений для вычисления предельных вероятностей состояний системы. Привести пример количественного решения полученных уравнений в математической программе.
11. Двухканальная СМО с очередью на 4 заявки и конечной надежностью канала. В момент отказа заявки (заявка), которые обслуживались в канале, возвращаются в очередь, если там есть место, иначе теряются. Во время ремонта заявки в СМО не поступают. Интенсивности поступления и обслуживания заявок $\lambda$ и $\nu$, соответственно. Интенсивности выхода из строя и ремонта канала $\eta$ и $\nu$ соответственно.Описать состояния системы, составить размеченный граф состояний, уравнения Колмогорова и систему алгебраических уравнений для вычисления предельных вероятностей состояний системы. Привести пример количественного решения полученных уравнений в математической программе.
12. Зачем нужно знать метод динамики средних?
13. Допущения при выводе моделей динамики средних.
14. В организации 2000 однотипных приборов, каждый из которых может быть в одном из трех состояний: исправен, находиться в ремонте в мастерской организации (МО), на ремонтном предприятии. Интенсивность выхода из строя $\lambda$. В МО прибор может быть отремонтирован и возвращен в организацию, либо отправлен на ремонтное предприятие. Средняя длительность ремонта в МО $\tau_1$, а интенсивность отправки на предприятие $\eta$. Средняя длительность ремонта на предприятии $\tau_2$. После ремонта на предприятии прибор возвращается в организацию.Составить аналитическую модель с целью определения средних численностей приборов в каждом состоянии. Привести пример количественного решения полученных уравнений в математической программе.
15. Сформулируйте принцип квазирегулярности. Когда возникает необходимость его применения?
16. Применение метода динамики средних при выводе модели противоборства двух сторон.
17. Как учесть в модели противоборства ввод резервов?
18. Как учесть в модели противоборства упреждающие удары одной из сторон?
19. Как учесть в модели противоборства отсутствие разведки в ходе обмена ударами?

Как учесть в модели противоборства запаздывание в переносе огня?