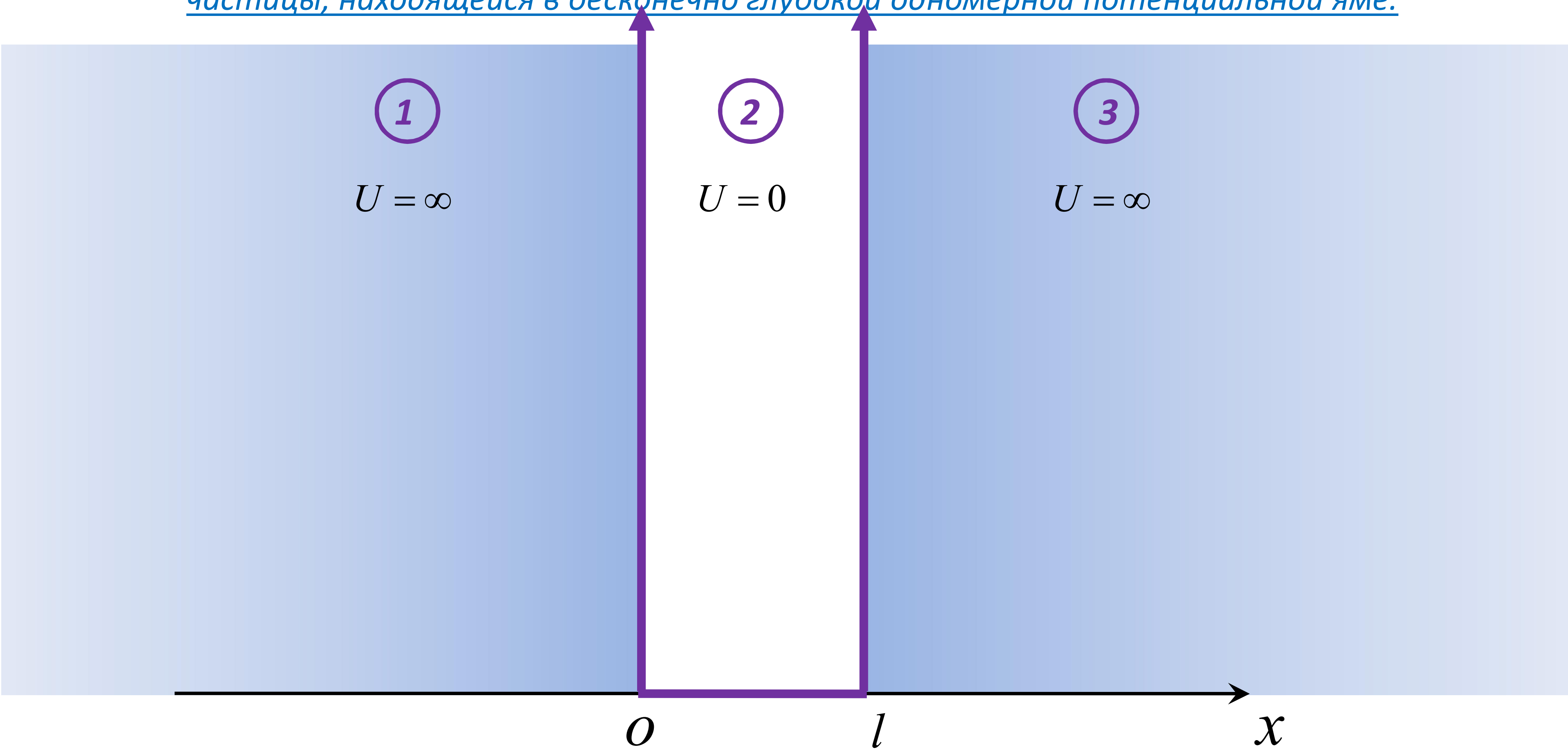
6.Частица в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме.

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,y,z)+(E-U)\psi(x,y,z)=0$$

Найдем собственные значения энергии и соответствующие им собственные функции для частицы, находящейся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме.



U – потенц.энергия частицы

$0 \le x \le l \quad \Rightarrow \quad U = 0$

$x < 0$ и $x > l \Rightarrow U = \infty$

m – масса частицы

E – полная энергия частицы

l - ширина одномерной потенциальной ямы

X – координата частицы

В 1-ой и 3-ей областях:

$$|\psi|^2 = 0 \Rightarrow \psi = 0$$

Во 2-ой области:

$$\psi \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + (E-U)\psi(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) = 0}$$

$$\Downarrow$$

Обозначим: $\frac{2m}{\hbar^2}E = \omega^2$

$$\Downarrow$$

Уравнение гармонического осциллятора → $\psi''(x) + \omega^2\psi(x) = 0$

$$\Downarrow$$

Вид решения → $\psi(x) = a\sin(\omega x + \alpha)$

$$a - ?\ \omega - ?\ \alpha - ?$$

$$\Downarrow$$

Из **непрерывности** волновой функции следуют **граничные условия :**

$$\psi\big|_{x=0} = \psi\big|_{x=l} = 0$$

+

Условие нормировки :

$$\int_0^l \psi\psi^* dx = 1$$

⇒ **Стандартные условия**

1). $\psi\big|_{x=0} = 0 \Rightarrow a\sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

2). $\psi\big|_{x=l} = 0 \Rightarrow a\sin\omega l = 0 \Rightarrow \boxed{\omega l = \pm n\pi \quad n = 1, 2\ldots}$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\omega^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\cdot n^2$$

Собственнные значения энергии

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1)$$

$$\psi(x) = \psi_n(x) = a\sin\frac{n\pi}{l}x$$

3). $\int_0^l \psi\psi^* dx = 1 \Rightarrow a^2\int_0^l (\sin^2\frac{n\pi}{l}x)dx = a^2 l\left\langle \sin^2\frac{n\pi}{l}x \right\rangle = a^2 l\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{l}}$

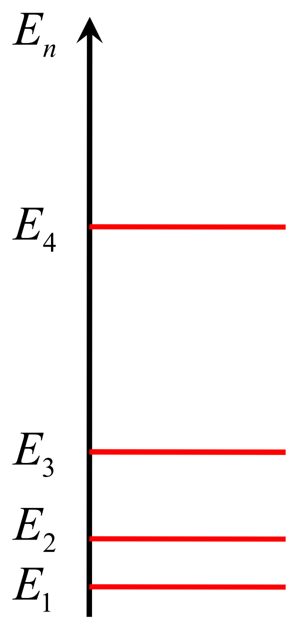
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

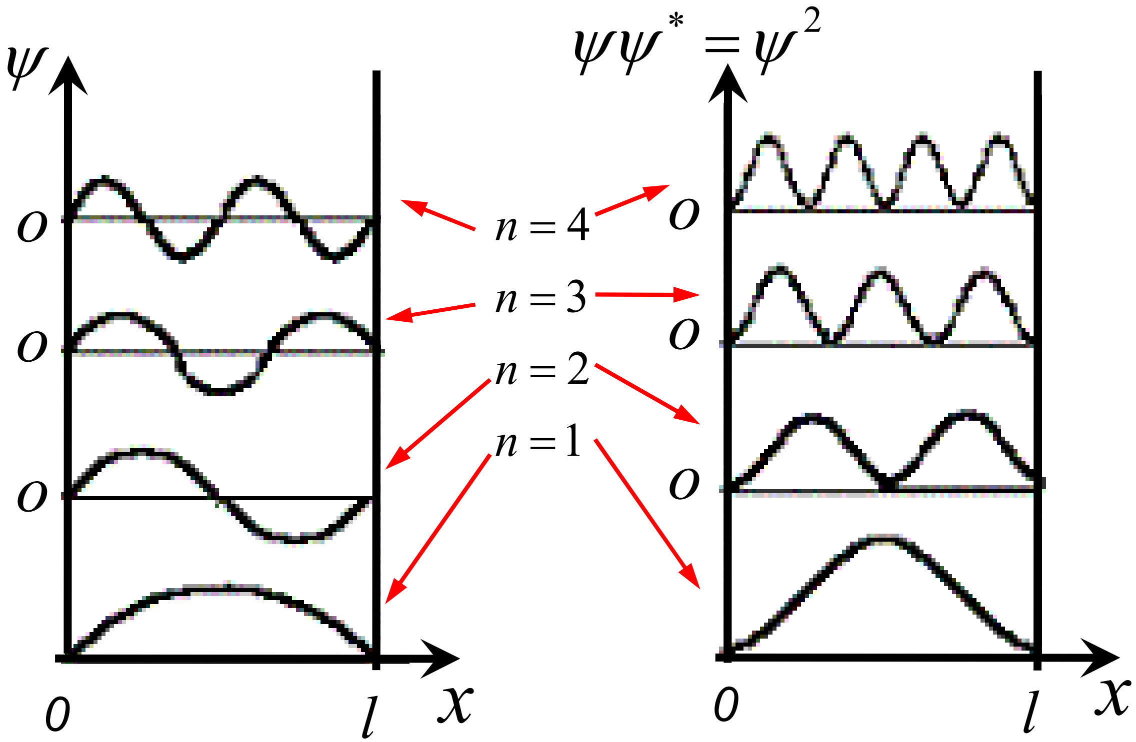
Собственнные функции

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\cdot n^2$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\psi^2(x) = \frac{2}{l}\sin^2\frac{n\pi}{l}x$$



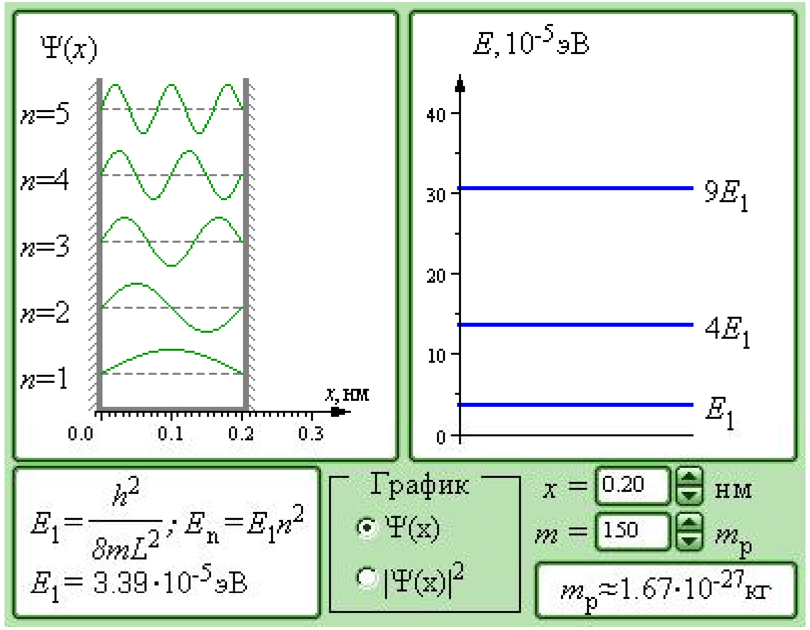


$$\Delta E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} m \to \infty \ldots \\ l \to \infty \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Классическая физика

ВЫВОДЫ:

Квантование энергии – следствие «волновых» свойств частиц – получается из основных положений квантовой механики без каких-либо дополнительных предположений (постулатов).
Результат решения: информация о распределении вероятности нахождения частицы с определенным (дискретным) значением энергии в соответствующем квантовом состоянии с номером n.
Увеличение массы частицы, или увеличение линейных размеров пространства приводит к переходу от дискретного спектра энергии к непрерывному, т.е. *квантовая механика не противоречит классической физике,* а является более общей теорией.


Ψ(x)
n=5
n=4
n=3
n=2
n=1
x, нм
0.0
0.1
0.2
0.3
E, 10^-5 эВ
40
30
20
10
0
9E1
4E1
E1
E1 = h^2/(8mL^2); En = E1n^2
E1 = 3.39·10^-5 эВ
График
Ψ(x)
|Ψ(x)|^2
x = 0.20 нм
m = 150 mp
mp≈1.67·10^-27 кг