Типы квантовых статистик. Критерий вырождения.

1. Функция распределения.

Рассмотрим систему, состоящую из большого числа (N_0) одинаковых частиц.

$\langle \Delta n(\varepsilon) \rangle$ - среднее число частиц, энергия (импульс или к.л.др.параметр) которых лежит в интервале $[\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon]$

Функция распределения - физическая величина, численно равная относительному числу частиц, энергия которых лежит в единичном интервале, взятом около некоторой энергии

$$f(\varepsilon) = \frac{\langle \Delta n(\varepsilon) \rangle}{N_0 \Delta\varepsilon}$$

$$f(\varepsilon) = \frac{dn(\varepsilon)}{N_0 d\varepsilon}$$

Физически малая величина

$\langle dn(\varepsilon) \rangle \to dn(\varepsilon)$

$$dn(\varepsilon) = f(\varepsilon) N_0 d\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty dn(\varepsilon) = \int_0^\infty f(\varepsilon) N_0 d\varepsilon = N_0 \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon = 1}$$

Условие нормировки

$$\Rightarrow \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} dn(\varepsilon) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) N_0 d\varepsilon = \dots$$

2. Плотность состояний

$dn(\varepsilon)$ - Среднее **число частиц**, энергия которых…

$dN(\varepsilon)$ - **Число квантовых состояний**, лежащих в интервале энергий… $\Big\} \; [\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$

$\overline{n}(\varepsilon)$ -Среднее **число частиц** в квантовом состоянии с энергией… $\longrightarrow \varepsilon$

(СТАТИСТИКА)

$$dn(\varepsilon) = \overline{n}(\varepsilon) \cdot dN(\varepsilon)$$

$$dN(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} \cdot d\varepsilon = g(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$$

Плотность состояний

$$\boxed{g(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}}$$

$$f(\varepsilon) = \frac{dn(\varepsilon)}{N_0 d\varepsilon} = \frac{\overline{n}(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon}{N_0 d\varepsilon} = \frac{\overline{n}(\varepsilon)}{N_0} g(\varepsilon)$$

Для конкретной системы необходимо знать.

3. Типы квантовых статистик

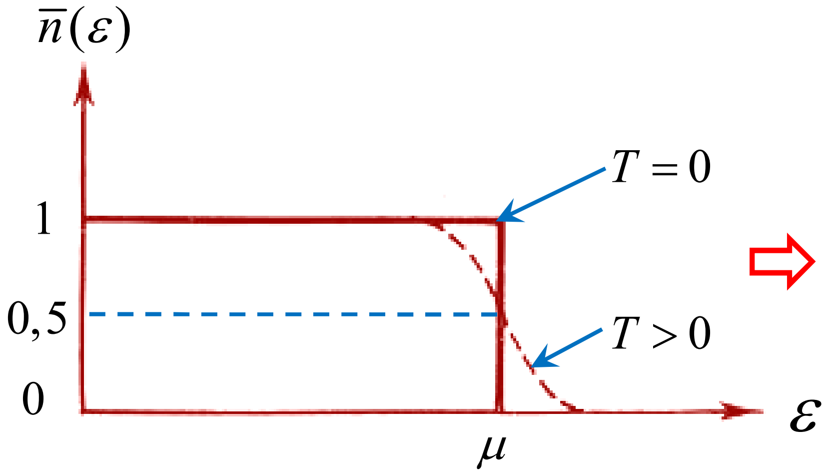
Фермионы подчиняются статистике **Ферми-Дирака**

$$\overline{n}(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}=\frac{1}{\exp\dfrac{\varepsilon-\mu}{kT}+1}$$

Вероятность обнаружить частицу в данном квантовом состоянии с энергией ε

$$w(\varepsilon)=\frac{\overline{n}(\varepsilon)}{N}=\frac{\overline{n}(\varepsilon)}{1}=\overline{n}(\varepsilon)$$

Т.о., функция Ферми-Дирака численно равна вероятности обнаружить частицу в квантовом состоянии с энергией ε



μ **- Энергия Ферми или химический потенциал:**

максимальная энергия фермиона при T=0;

или

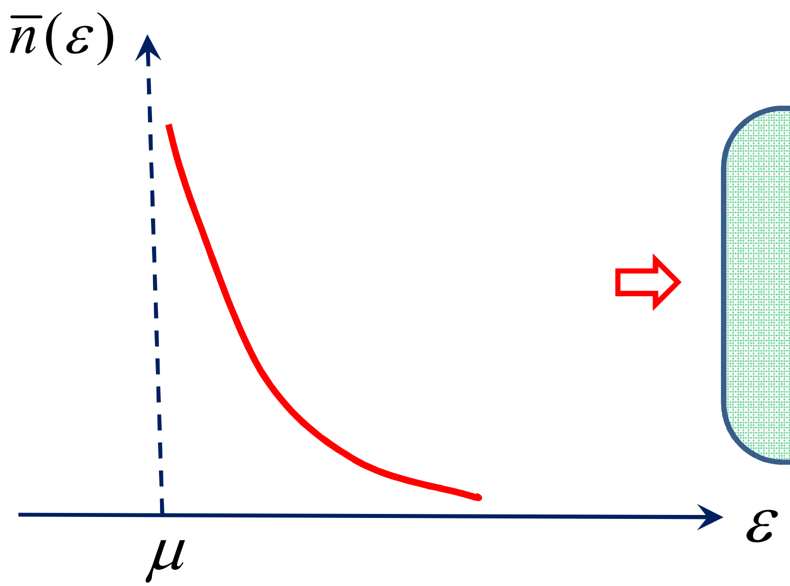
энергия фермиона с вероятностью 0,5 при T>0

Бозоны подчиняются статистике **Бозе-Эйнштейна**

$$\bar{n}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} = \frac{1}{\exp\dfrac{\varepsilon-\mu}{kT} - 1}$$

Энергию ε может иметь любое число бозонов.

$$\bar{n}(\varepsilon) > 0 \Rightarrow \exp\frac{\varepsilon-\mu}{kT} > 1 \Rightarrow \varepsilon > \mu$$



μ **- Энергия Ферми или химический потенциал:**

минимальная энергия бозона.

($\mu = 0$ для фотонов)

4. Критерий вырождения и классическая статистика Максвелла-Больцмана.

Квантовые статистики Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна

Классическая статистика Максвелла-Больцмана

Когда $\varepsilon >> kT$

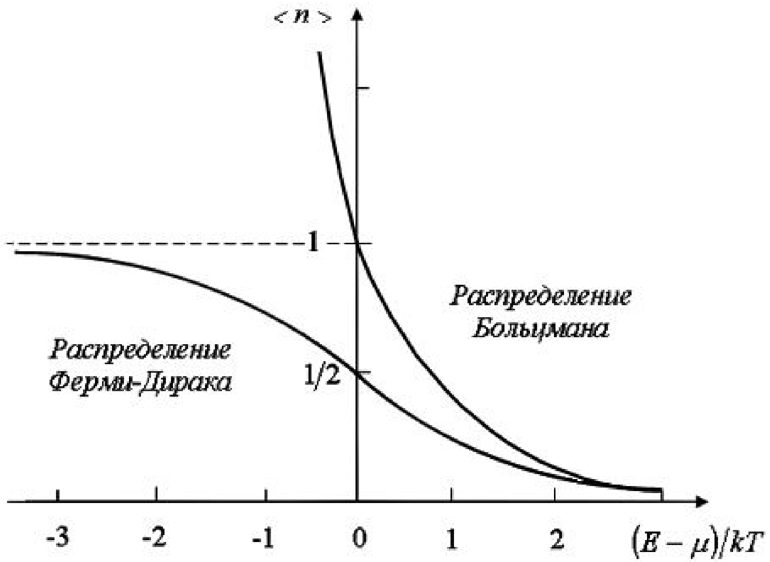
$e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} >> 1$

$$\overline{n}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} \pm 1} \approx e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} = Ae^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

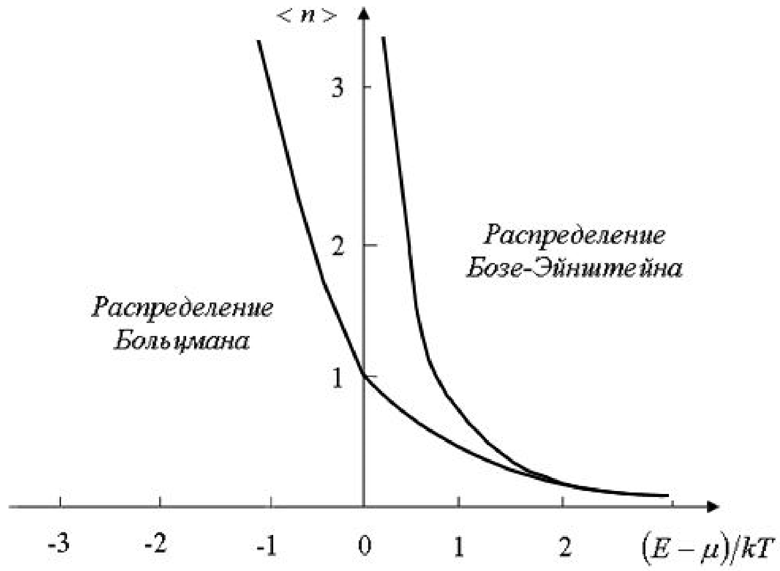
$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} >> \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

Среднее расстояние между частицами $>> \lambda_Б$ ⇒ **Частицы – различимы!** (волновые функции не перекрываются)

Если выполняется критерий вырождения, то возможен переход от квантовой статистики к более простой классической статистике Максвелла-Больцмана.



< n >
1
1/2
Распределение Ферми-Дирака
Распределение Больцмана
-3
-2
-1
0
1
2
$(E-\mu)/kT$



< n >
3
2
1
Распределение Больцмана
Распределение Бозе-Эйнштейна
-3
-2
-1
0
1
2
$(E-\mu)/kT$

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$ ⇒ Среднее расстояние между частицами $\gg \lambda_Б$ ⇒ **Частицы – различимы!** (волновые функции не перекрываются)

Электроны в МЕТАЛЛАХ

$n = 10^{28}\,м^{-3}$

$T = 300^\circ K$

$\longrightarrow$ $5\,\mathring{A} < 40\,\mathring{A}$ $\longrightarrow$ **КВ.СТ-КА ФЕРМИ-ДИРАКА**

Электроны в ПОЛУПРОВОДНИКАХ

$n = 10^{19}\,м^{-3}$

$T = 300^\circ K$

$\longrightarrow$ $5000\,\mathring{A} \gg 40\,\mathring{A}$ $\longrightarrow$ **КЛАССИЧЕСКАЯ СТ-КА МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА**

Молекулы в ГАЗЕ

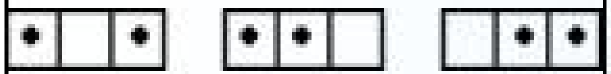
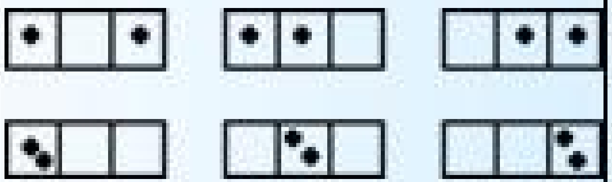
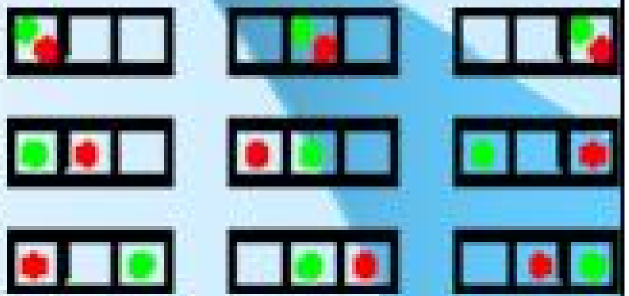
$n = 10^{25}\,м^{-3}$

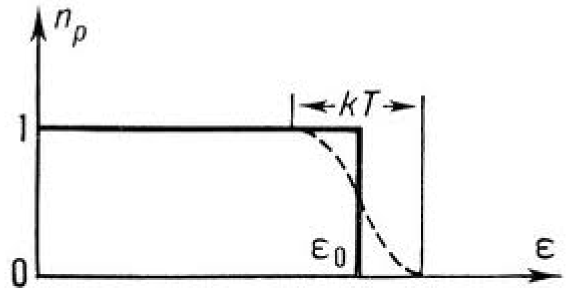
$T = 300^\circ K$

Норм.усл-ия

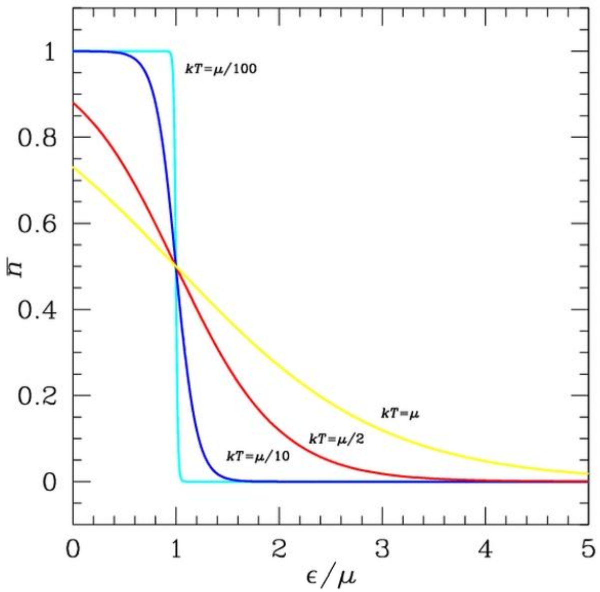
$\longrightarrow$ $50\,\mathring{A} \gg 0{,}1\,\mathring{A}$ $\longrightarrow$ **КЛАССИЧЕСКАЯ СТ-КА МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА**

Различные статистики

<u>Ферми-Дирака</u>	<u>Бозе-Эйнштейна</u>	<u>Максвелла-Больцмана</u>
		



n_p
1
0
kT
ε_0
ε



$\bar{n}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
$kT=\mu/100$
$kT=\mu/10$
$kT=\mu/2$
$kT=\mu$
0
1
2
3
4
5
ϵ/μ