## 3.15. Электропроводность в магнитном поле.

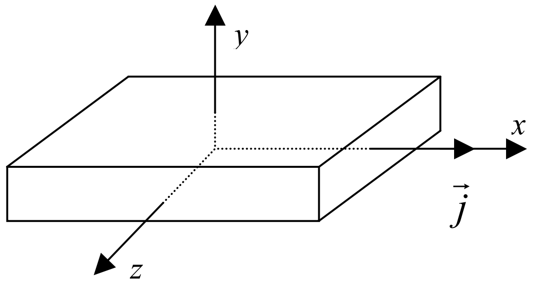
3.15.1. <u>Классический эффект Холла (1879 г.)</u>.

Когда металлическая пластинка, вдоль которой течет постоянный ток, помещена в магнитное поле, направленное перпендикулярно к пластинке, то на боковых гранях (параллельных полю и току) возникает разность потенциалов $U_H = \varphi_1 - \varphi_2$. Это *классический эффект Холла* (Эдвин Герберт Холл, американский физик, 1855–1938). Рассмотрим этот эффект.

Выберем такую систему координат, что компоненты скорости (или вектора плотности тока) и индукции магнитного поля определяются:

$$\vec{v}(v_x, 0, 0) \qquad \vec{B}(0, 0, B_z) \tag{3.15.1}$$

Сила Лоренца, равная: $\vec{F} = \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$, смещает заряды к грани перпендикулярной к оси $y$. Ее действие эквивалентно действию эффективного электрического поля $\vec{E}$:

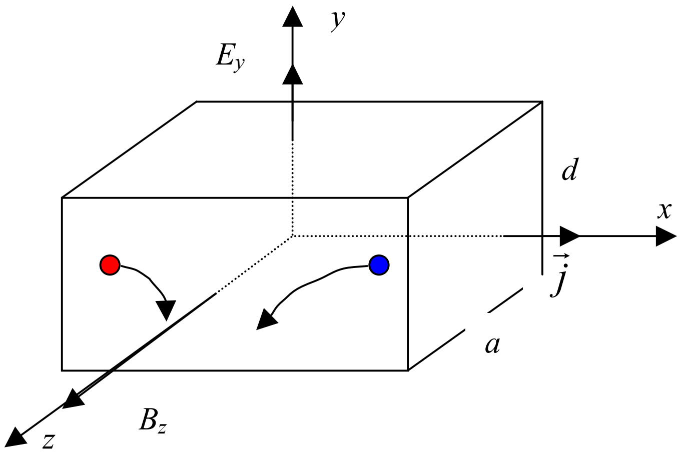


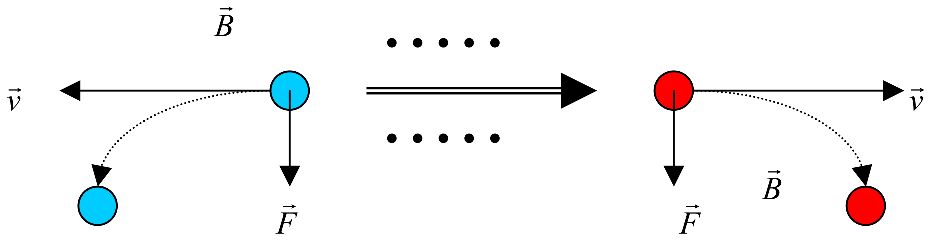

$$e\vec{E} = \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \tag{3.15.2}$$

Поэтому заряды будут смещаться, пока не накопятся на гранях, перпендикулярных оси $y$, чтобы создать такое же электрическое поле, препятствующее смещению зарядов:

$$\vec{E}(0, E_y, 0) \tag{3.15.3}$$

Интересно при этом, что положительные и отрицательные заряды смещаются в одну сторону. На рисунке ниже показано направление тока (слева направо) и соответствующее направление движения положительного и отрицательного зарядов (индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости рисунка и направлена на нас):




Итак, возникает электрическое поле, направленное по оси $y$ и равное:

$$E_y = -\frac{1}{c} v_x B_z \tag{3.15.4}$$

Скорость движения зарядов находим из плотности тока $j_x = env_x$:

$$v_x = \frac{j}{en} \tag{3.15.5}$$

Таким образом, электрическое поле Холла равно:

$$E_y = \frac{j_x B_z}{cne} \tag{3.15.6}$$

Коэффициент или *постоянная Холла* определяются:

$$R = \frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{cne} \tag{3.15.7}$$

Разность потенциалов на обкладках по оси $y$ (в силу того, что электрическое поле однородное) называется *Холловской разностью потенциалов*:

$$U_H = E_y d = R j_x B_z d \tag{3.15.8}$$

Все это и есть эффект Холла. Эксперимент Холла позволяет определить знак носителей заряда. Смена знака носителей заряда ведет к смене направления $E_y$ и, соответственно, к смене знака зарядов на стенках образца. На практике получают постоянную Холла из следующего соотношения:

$$R = \frac{E_y \cdot ad}{Bj \cdot ad} = \frac{U_H \cdot a}{B \cdot I} \tag{3.15.9}$$

где $a$ - ширина образца. Итак, измеряя постоянную Холла, можно найти знак и концентрацию носителей заряда. Было подтверждено, что в металлах носителями являются электроны. В полупроводниках бывает, что проводимость обеспечивается положительными носителями – *дырками*.

Вводят понятие *подвижности* (см ранее § 3.2 (3.2.9)):

$$\mu = \frac{v}{E} \tag{3.15.10}$$

где $v$ скорость носителей, а $E$ - электрическое поле вдоль тока (в отличие от $E_y$). Тогда можно записать соотношение, связывающее постоянную Холла, проводимость и подвижность:

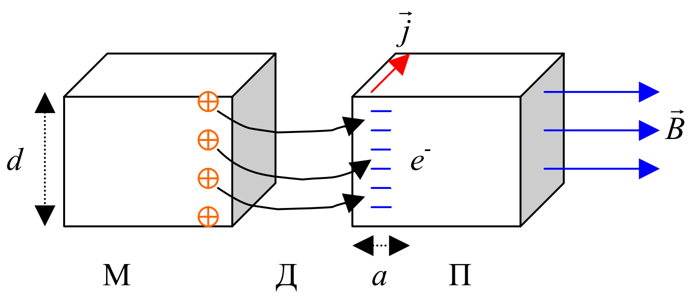
$$\begin{aligned} &\frac{j}{E} = \sigma = ne\frac{v}{E} = ne\mu \\ &R\sigma = \frac{\mu}{c} \end{aligned} \tag{3.15.11}$$

Эффект Холла широко используется для определения знака заряда носителей тока.

3.15.2. Двумерный ток. МДП структуры.

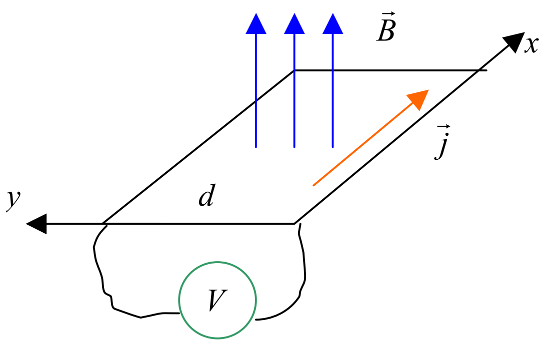
Устремим толщину образца к нулю $a \to 0$, получая при этом плоскую двумерную структуру, – по такой тонкой пластинке течет двумерный ток. Введем при этом линейную плотность тока $\vec{i}$ $(I = id)$ как ток, текущий через единицу длины (*см*) тонкой пластинки. При этом Холловская разность потенциалов, следуя (3.15.8), равна:

$$U_H = -\frac{di}{nqc}B = -\frac{IB}{nqc} \tag{3.15.12}$$




Концентрация носителей в плоскости пластинки определяется:

$$n = \frac{dN}{dS} = \frac{dN}{dxdy} \tag{3.15.13}$$




Случай двумерного тока (см рисунок слева - ток в плоскости $x,y$) реализован в 70-е годы. Это так называемые МДП структуры (М – металл, Д – диэлектрик, П – полупроводник) (См об МДП структурах в статье Бедного Б.И. "Электронные ловушки на поверхности полупроводников." Соросовский образовательный журнал 1998, Т.7, с.114-121). Диэлектрик обычно представляет собой очень тонкую пленку окисла на поверхности полупроводника. Электроны, перескочившие через диэлектрическую пленку в полупроводник посредством диффузии, задерживаются на поверхности полупроводника полем, возникающим в металле положительным зарядом. Толщина слоя $a$ ~ 10 Ангстрем. Прикладываем внешнее электрическое поле параллельно границе раздела, так что ток идет вдоль границы, и прикладываем внешнее магнитное поле перпендикулярно поверхности. Таким образом имеем эффект Холла на поверхности. Холловская разность потенциалов ($I = id$):

$$U_H = U_y = \frac{I_x B}{nec} \qquad (3.15.14)$$

Откуда Холловское сопротивление равно:

$$r_H = \rho_{xy} = \frac{U_y}{I_x} = \frac{B}{nec} \qquad (3.15.15)$$

Заметим, что это не совсем обычное сопротивление, т.к. обычное $R = \rho_{xx} = \frac{U_x}{I_x}$, а здесь отношение Холловской разности потенциалов к току вдоль оси $x$. Холловское сопротивление (двумерный случай) не зависит от размеров образца:

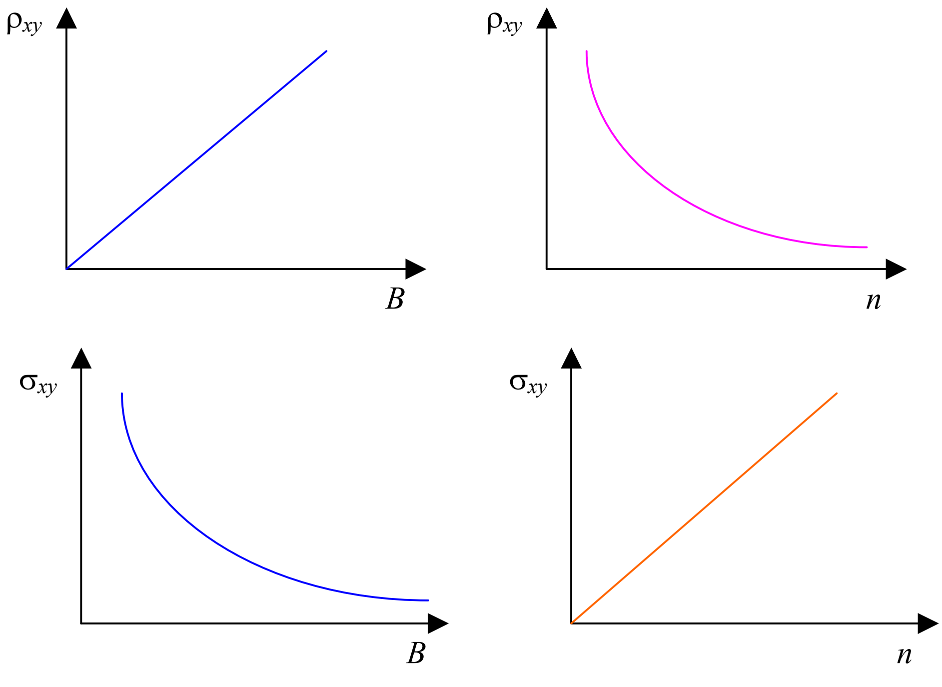
$$r_H = \frac{U_y}{I_x} = \frac{E_y d}{i_x d} = \frac{E_y}{i_x} = \rho_{xy}, \qquad (3.15.16)$$

т.е. полное сопротивление равно удельному сопротивлению. Можно также показать для двумерного случая, что обычное сопротивление также не зависит от размеров образца (в трехмерном случае не так).

Проводимость Холла: (на самом деле в теории она вводится чуть сложнее) в нашем случае равна:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{I_x}{U_y} = \frac{nec}{B} \qquad (3.15.17)$$

Классические зависимости сопротивления и проводимости (3.15.17) от величины магнитной индукции и концентрации представлены на рисунках ниже:



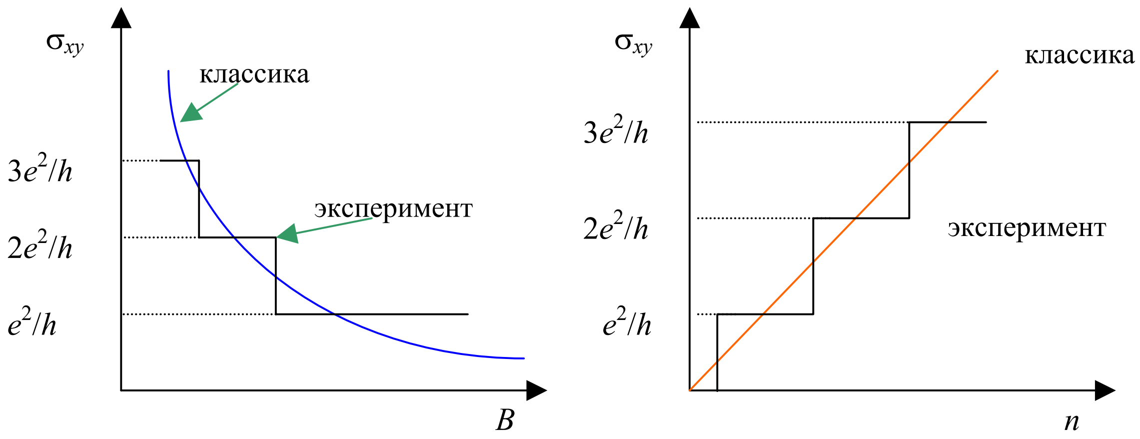

3.15.3. <u>Квантовый эффект Холла</u>.

Измерение проводимости при низких температурах $(T \sim 5^{o}K)$ показало (фон Клитцинг, немецкий физик, 1980 г.), что Холловская проводимость $\sigma_{xy}$ меняется ступенчато с ростом магнитного поля $B$ и концентрации $n$ (см рисунок ниже). Скачок проводимости - *квант проводимости*:

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h}. \qquad (3.15.18)$$

Эксперимент показал следующую зависимость:

$$\sigma_{xy} = N\frac{e^2}{h}, \qquad N = 1,2,3,\ldots \tag{3.15.19}$$




Точность определения ступенек и их соответствие кратным значениям $e^2/h$ на эксперименте порядка 7-9 значащих цифр. Чем ниже температура, тем ярче выражены ступеньки. Итак, эксперимент показал, что сопротивление от “ступеньки” равно:

$$r_{step} = \frac{h}{e^2} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} = 25812.80 \text{ Ом} \tag{3.15.20}$$

Важный вывод: от образца ничего не зависит. Есть только фундаментальные константы и сопротивление зависит только от них. То есть мы получаем “эталон сопротивления” – международный стандарт сопротивления - $r_{step}$.

Фон Клитцинг за открытие квантового эффекта Холла получил Нобелевскую премию в 1985 году. До сих пор удовлетворительной теории, объясняющей точность эффекта, нет.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------

Дополнение.

Приведем качественные соображения для пояснения движения электронов в плоскости. Уравнение движения электрона в магнитном поле (см также §3.4):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right] \tag{3.15.21}$$

Поскольку сила всегда направлена перпендикулярно к вектору скорости, то энергия сохраняется и электрон движется по окружности. Можно увидеть, если умножить (3.15.21) скалярно на скорость $\vec{v}$ :

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c}\vec{v}\left[\vec{v},\vec{B}\right] = 0$$

Откуда

$$\frac{m}{2}\frac{d\vec{v}^{\,2}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{и} \qquad W = \frac{mv^2}{2} = const \tag{3.15.22}$$

Электрон движется по окружности: $\vec{v} = \left[\vec{\omega},\vec{r}\right]$, тогда пользуясь (3.15.21) имеем:

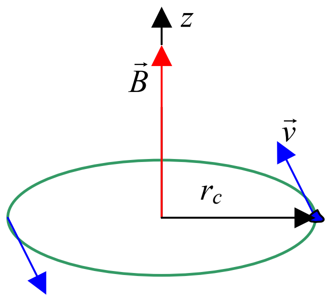
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega},\vec{r}\right] = \left[\vec{\omega},\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \left[\vec{\omega},\vec{v}\right] = -\frac{e}{mc}\left[\vec{v},\vec{B}\right] = \frac{e}{mc}\left[\vec{B},\vec{v}\right]$$

Из сравнения этих соотношений получаем циклотронную частоту и циклотронный радиус:

$$\vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{mc} \qquad r_c = \frac{mc}{eB}v \tag{3.15.23}$$

Координаты $x(t)$ и $y(t)$ как функции времени на плоскости $(x,y)$ испытывают гармонические колебания, энергия которых *квантуется*:

$$W_{кол} = W_{вращ} = \left(k + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \hbar\omega\,, \qquad (3.15.24)$$




где $k = 0,1,2,3,...$

Расстояние между уровнями энергии при $\Delta k = 1$ определяется:

$$\Delta W = \hbar\omega = \frac{m}{2}\omega^2 r_c^2 .$$

Откуда получаем циклотронный радиус:

$$r_c^2 = \frac{2\hbar}{m\omega} = \frac{2\hbar c}{eB} \qquad (3.15.25)$$

и получаем, что циклотронный радиус не зависит от массы частицы (это важно!!).

------------------------------------------------------------------------------------------------

Примечание 1: *Квант магнитного потока*. Из квантования орбиты по правилу квантования Бора находим скорость электрона:

$$p \cdot 2\pi R = 2\pi k\hbar \qquad \text{и} \qquad v = \frac{k\hbar}{mR}$$

Тогда радиус орбиты, исходя из (3.15.23), равен:

$$R^2 = \frac{cmv}{eB} = k\frac{c\hbar}{eB}$$

Сосчитаем поток магнитной индукции через орбиту электрона.

$$\Phi = \pi R^2 \cdot B = k\frac{\pi c h B}{2\pi e B} = k\frac{ch}{2e}$$

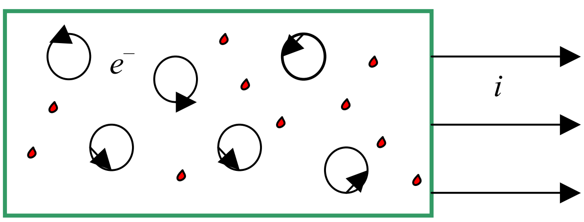
При $k = 1$ получаем квант магнитного потока:

$$\Phi_0 = \frac{ch}{2e} = 2 \cdot 10^{-7}\ Гс \cdot см^2$$

Квант магнитного потока, зависящий только от мировых констант, является наименьшим возможным значением магнитного потока.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------

Вернемся к двумерному эффекту Холла. Если тока нет, то электрон кружится на месте. Если ток есть, то крутящийся электрон движется поступательно. Радиус “кружка” равен (3.15.25). С математической точки зрения эффект Холла можно представить как дрейф вращающегося электрона вдоль приложенного напряжения.




$B$, (направлено на нас)

Сколько можно “напихать кружков”, если учесть невозможность их пересечения (по принципу Паули для ферми частиц). Площадь кружка, учитывая (3.15.25), равна:

$$\pi r_c^2 = \frac{2\pi\hbar c}{eB} = \frac{1}{n_e},$$

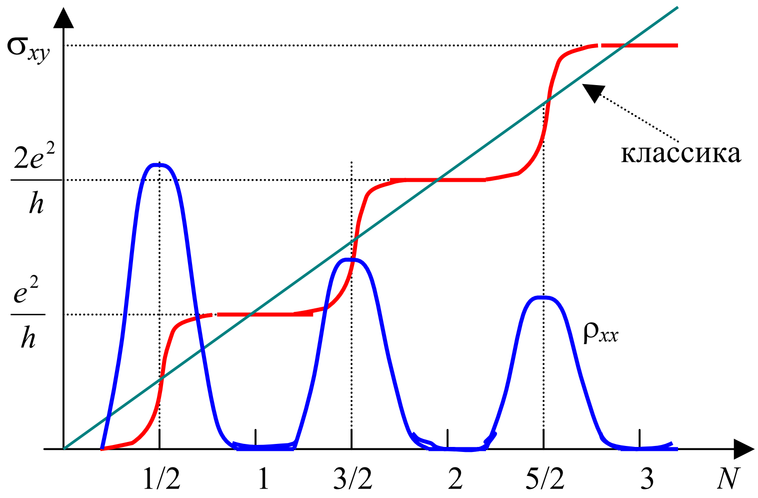
где $n_e$ - концентрация электронов при условии, что “кружки” заполняют всю плоскость:

$$n_e = \frac{eB}{2\pi\hbar c} \qquad (3.15.26)$$

Холловская проводимость равна:

$$\sigma_{xy} = \frac{n_e ec}{B} = \frac{eBec}{2\pi\hbar cB} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h} \qquad (3.15.27)$$

Оказывается, и это важно, что в двумерном случае площадь “кружка” $\pi r_c^2$ есть фазовый объем и эти “кружки” не могут накладываться друг на друга, поскольку только одна ферми частица может находиться в этом элемента фазового объема. Но над плоскостью электронов можно заполнить еще одну плоскость электронов (плоскость или уровень Ландау – выше по энергии), пока “влезаем” в толщину $10$ Å. Пусть у нас заполнено $N$ плоскостей, тогда Холловская проводимость равна:




$$\sigma_{xy} = N\frac{e^2}{h} \qquad (3.15.28)$$

Как уровень Ландау заполнен и до момента заполнения следующего наблюдаем плато в проводимости. Если уровни Ландау заполняются, то это и есть моменты перехода с одного плато на уровень другого плато.

Интересен тот факт, что если рассмотреть обычное омическое сопротивление $\rho_{xx}$, то оно равно нулю, когда Холловская проводимость соответствует заполненному уровню Ландау (т.е. соответствует (3.15.28)). В момент перестройки $\sigma_{xy}$ омическое сопротивление отлично от нуля $\rho_{xx}.\neq 0$.