2.3.1. Преобразования Лоренца (вывод)

Поставим задачу найти такие преобразования координат и времени, которые удовлетворяли бы постулатам Эйнштейна. При выводе наложим на искомые преобразования несколько требований, которым они должны удовлетворять:

1. преобразования должны быть линейными или, иными словами — координаты и время должны входить в формулы преобразований в первой степени;

2. преобразования должны быть симметричными (т. е. при прямом и обратном преобразовании искомые формулы должны быть одинаковыми);

3. преобразования должны удовлетворять второму постулату СТО;

4. время не является абсолютным;

5. желательно, чтобы преобразования удовлетворяли принципу соответствия Бора (т. е. в нерелятивистской области скоростей переходили в преобразования Галилея).

Требование линейности отражает очень важные физические свойства реального материального мира: однородность времени и пространства, о чем упоминалось ранее в связи с доказательством Э. Неттер соответствующих теорем.

Требование симметричности отражает тот факт, что во всех ИСО физические явления и описывающие их законы одинаковы и не существует возможности выделить одну из них, как особую, например, абсолютно неподвижную систему отсчета.

Искомые преобразования найдем на конкретном примере для двух ИСО S и S′, аналогичных изображенным на рис. 1.5 при выводе преобразований Галилея. Тогда математический вид преобразований, можно для рассматриваемого примера записать так:

$$x' = a_1x + b_1t;$$
$$y' = y;$$
$$z' = z;$$
$$t' = b_2t + a_2x.$$

В таком виде искомые преобразования содержат четыре постоянных коэффициента a_1, a_2, b_1 и b_2, которые необходимо определить, используя сформулированные выше требования.

Попробуем определить эти коэффициенты для конкретных частных случаев, рассуждая приблизительно так: если для частного случая нам известны значения искомых (постоянных) коэффициентов, то они будут иметь те же значения и для всех других случаев.

С этой целью рассмотрим следующие частные ситуации.

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$ и $t' = 0$) точки 0 и $0'$ координатных систем рассматриваемых ИСО S и S' совмещены. Тогда в последующие моменты времени наблюдатель в системе S' может, наблюдая за точкой $x = 0$ системы S, написать ее уравнение движения в виде $x' = - vt'$, а используя искомые преобразования координат и времени записать:

$$x' = - vt' = - vb_2t = b_1t,$$

откуда получим $b_1/b_2 = - v$.

Аналогично для наблюдателя в системе S уравнение движения точки $x' = 0$ системы S' имеет вид $x = vt$, а из преобразования координат $a_1x = - b_1t$. После подстановки в последнее выражение $x = vt$ следует: $b_1/a_1 = - v$.

Полученные отношения между коэффициентами a_1, b_1 и b_2 позволяют переписать искомые преобразования координаты x и времени t в виде:

$$x' = b_2(x - vt) \qquad (2.2)$$

$$t' = b_2t + a_2x \quad (2.3)$$

Для определения оставшихся коэффициентов b_2 и a_2 применим к формулам (2.2) и (2.3) требование инвариантности скорости света в вакууме относительно ИСО.

Применительно к системам S и S', начала координатных осей которых были совмещены в моменты $t = 0$ и $t' = 0$, это может означать следующее: световая волна, испущенная в начальный момент $t = 0$ в системе S из точки 0, за время t, распространяясь во все стороны со скоростью c, достигнет поверхности сферы, радиус которой равен $R = ct$.

Но, с точки зрения наблюдателя в системе S', эта волна, также двигаясь во все стороны со скоростью света за время t' из точки 0', достигнет сферы радиусом $R' = ct'$.

Тогда в декартовых координатах систем S и S', уравнения сфер должны иметь одинаковый вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad (2.4)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \quad (2.5)$$

Это означает, что при подстановке формул преобразований x', y', z' и t' в уравнение (2.5) мы должны всегда получать уравнение (2.4).

Следовательно, подставив в уравнение (2.5) формулы (2.2) и (2.3), а так же $y' = y$ и $z' = z$, мы сможем подобрать такие значения коэффициентов a_2 и b_2, чтобы получить в результате подстановки уравнение (2.4).

Итак, после указанной подстановки получаем уравнение

$$[b_2(x - vt)]^2 + y^2 + z^2 = c^2\,(b_2t + a_2x)^2,$$

которое после раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых преобразуется к виду:

$$(b_2^2 - c^2a_2^2)x^2 + y^2 + z^2 = t^2(c^2 - v^2)b_2^2 + 2xtb_2(vb_2 + a_2c^2) \quad (2.5a)$$

Поскольку в уравнении (2.4) отсутствует слагаемое с произведением xt, необходимо, чтобы сумма в круглых скобках последнего слагаемого в правой части уравнения (2.5а) тождественно равнялась нулю.

Следовательно, для a_2 должно быть выполнено следующее равенство: $a_2 = - vb_2/c^2$.

Подставив это значение коэффициента a_2 в первое слагаемой левой части уравнения (2.5а) получим:

$$b_2^2(1 - v^2/c^2)x^2 + y^2 + z^2 = b_2^2c^2t^2(1 - v^2/c^2).$$

Последнее уравнение будет тождественно совпадать с уравнением сферы (2.4) только в том случае, если значение коэффициента b_2 будет равно:

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2.6)$$

Осталось подставить полученные значения коэффициентов a_2 и b_2 в формулы (2.2) и (2.3), чтобы получить искомые формулы для преобразования координат и времени в СТО — преобразований Лоренца.

В результате этой подстановки формулы преобразований Лоренца приобретают окончательный вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad (2.7)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad (2.8)$$

$$y' = y;$$

$$z' = z.$$

Легко убедиться в том, что полученные преобразования удовлетворяют требованиям, которые были сформулированы перед их выводом. Они линейны, симметричны (в этом можно легко убедиться в результате несложных алгебраических преобразований), выразив x и t из формул (2.7) и (2.8) для x' и t'.

Единственным отличием в обратных преобразованиях будет изменение знака «-» на «+» перед вторыми слагаемыми в числителях формул (2.7) и (2.8), что отражает изменение направления вектора относительной скорости **v**.

Полученные преобразования удовлетворяют второму постулату СТО, так как инвариантность скорости света в вакууме напрямую использовалась при их выводе.

Требование отказа от абсолютности времени отражено в формуле (2.8).

Что касается принципа соответствия, то выполнение его подтверждается предельным переходом при $v \ll c$.

Пренебрегая в знаменателе формулы (2.7) слагаемым v^2/c^2 по сравнению с 1, получим формулу преобразования Галилея для координат (1.13), а формула (2.8) по этой же причине преобразуется в $t' = t$.

Разумеется, нужно помнить, что полученные выше формулы преобразований выведены для частного конкретного случая. Однако более строгий вывод для произвольно направленной относительной скорости систем S и S' принципиально ничего не меняет, только добавляя формулы преобразования координат y и z, аналогичные формуле (2.7) для преобразования координаты x.

Отметим еще раз, что преобразования Лоренца не заменяют и не отменяют классические преобразования Галилея, а только ограничивают область их применения *нерелятивистской*