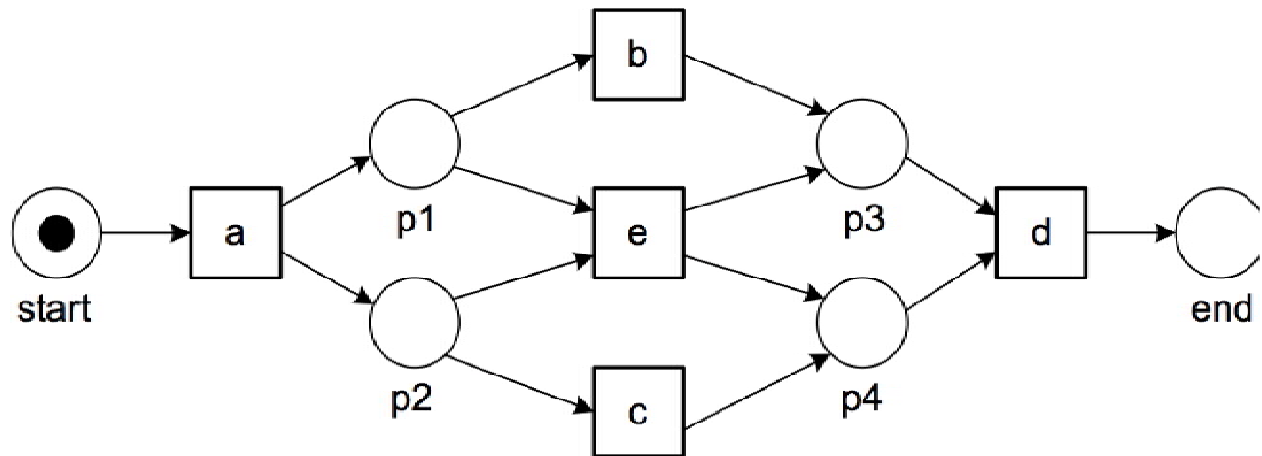


Макаров Я.М.

Моделирование многофакторных производственных систем



$$L_1 = [\langle a, b, c, d \rangle^3, \langle a, c, b, d \rangle^2, \langle a, e, d \rangle]$$

Лекции

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Введение..... | 2 |
| 1. Организационно-технические особенности создания производств..... | 3 |
| 1.2 Обобщенная структура производственных процессов..... | 8 |
| 1.3 Процессный подход..... | 9 |
| 2. Моделирование бизнес процессов..... | 12 |
| 2.1. Сети Петри..... | 14 |
| 3. Математические основы моделирования..... | 23 |
| 3.1 Основы построения решающих правил снижения размерности..... | 24 |
| 3.2 Математическая модель главных компонент..... | 25 |
| 3.3 Комментарии к методу главных компонент..... | 31 |
| 3.4 Сущность методов факторного анализа и их классификация..... | 35 |
| 4. Многофакторный анализ..... | 36 |
| 4.1 Факторные системы..... | 37 |
| 4.2 Факторный анализ, его виды и задачи..... | 38 |
| 4.3 Детерминированный факторный анализ..... | 40 |
| 4.4 Виды детерминированных факторных моделей..... | 41 |
| 4.5 Типовые задачи детерминированного факторного анализа..... | 42 |
| 4.6 Основные методы детерминированного факторного анализа..... | 43 |
| 5. Основы моделирования..... | 47 |
| 5.1 Модели и моделирование систем управления..... | 48 |
| 5.2 Принципы и подходы к построению математических моделей..... | 53 |
| 5.3 Формализм анализа..... | 56 |
| 5.4 Геометрическая интерпретация коэффициента корреляции..... | 58 |
| 5.5 Геометрический подход к факторному анализу..... | 59 |
| 5.6 Геометрическая интерпретация центроидного метода факторного анализа..... | 61 |
| 5.7 Общий алгоритм факторного анализа..... | 64 |
| Заключение..... | 75 |
| Литература..... | 76 |

Введение

Предприятия являются особым видом социальной системы. В этой системе протекают производственные процессы, при осуществлении которых рабочий с помощью орудий труда воздействует на предметы труда и превращает их в готовый продукт.

Исходя из этого, производственная система - совокупность множества элементов и подсистем, спроектированная и построенная для реализации целей изготовления и выпуска промышленной продукции или других видов материальных благ.

Элемент можно рассматривать как простую систему, не подлежащую расчленению на данном уровне исследования. Элементами производственной системы являются люди и материальные объекты - труд, орудия труда, предметы труда, а также технология, организация производства.

Элементы объединяются в комплексы, которые являются частями системы и подчиняются этой системе. Такие комплексы называются подсистемами. В производственной системе выделяются подсистемы: социальная, производственно-техническая, информационная. Во всех производственных системах выделяются подсистемы: управляющая и управляемая. В состав производственной системы любого уровня и иерархии (предприятие, цех, участок, рабочее место) включают следующие ресурсы:

1. Технические ресурсы: особенности производственного оборудования, инвентаря, основных и вспомогательных материалов и т. д.

2. Технологические ресурсы: гибкость технологических процессов, наличие конкурентоспособных идей, штучные заделы и др.
3. Кадровые ресурсы: квалификационный, демографический состав работников, их способность адаптироваться к изменению целей производственной системы.
4. Пространственные ресурсы: характер производственных помещений, территории предприятия, коммуникаций, возможность расширения и т. д.
5. Ресурсы организационной структуры системы управления: характер и гибкость управляющей системы, скорость прохождения управляющих воздействий.
6. Информационные ресурсы: характер информации о самой производственной системе и внешней среде, возможность ее расширения и повышения достоверности и т. д.
7. Финансовые ресурсы: состояние активов, ликвидность, наличие кредитных линий и т. д.

Каждый из указанных видов ресурсов представляет собой совокупность возможностей производственной системы для достижения своих целей. Это означает, что, имея в своем распоряжении те или иные средства производства (станки, вспомогательное оборудование, сырье и материалы, инструменты, инвентарь и т.п.), кадры (рабочих соответствующих разрядов, ИТР соответствующей квалификации, научных сотрудников и т.д.), производственные помещения с определенными характеристиками, дороги, сооружения и прочие ресурсы, производственная система способна в той или иной степени удовлетворять изменяющиеся нужды, потребности и запросы потенциальных покупателей.

В результате взаимодействия всех составляющих систему ресурсов получают новые свойства, которыми каждый отдельный вид ресурса не обладает. Эти свойства обозначаются таким понятием как эффект целостности системы. Например, нельзя своевременно вывести на нужный сегмент рынка товар, отвечающий его требованиям, не располагая соответствующими ресурсами всех видов: возможностями применяемого оборудования и используемой технологии, квалификационными возможностями кадров и т. п. И наоборот, каждый отдельный ресурс не может раскрыться полностью вне связи с другими ресурсами: возможности, которыми располагают станки, не могут быть реализованы без соответствующей квалификации работников, без применения основных и вспомогательных материалов, без требуемых характеристик производственных помещений.

В рыночной экономике существенную роль играет такой человеческий ресурс как предпринимательская способность (предприимчивость). Это особый вид ресурса, который приводит в движение, организует взаимодействие всех остальных видов ресурсов производственной системы.

1. Организационно-технические особенности создания производств

В современных условиях сфера распространения поточных форм организации производства и соответствующих видов поточных линий (ОНПЛ, ОППЛ, МНПЛ, МППЛ, АЛ, РЛ) ограничена в основном массовым и крупносерийным типами производства, доля которых в общем объеме производства не столь значительна и постоянно уменьшается под воздействием ряда факторов, порождаемых научно-техническим прогрессом. К таким факторам относятся: увеличение многообразия разработки объектов новой продукции; частая сменяемость выпускаемых изделий; возрастание многономенклатурности производства изделий, сборочных единиц, деталей; снижение объема выпуска отдельных изделий при увеличении объема других и т. д. Развитие радиоэлектроники, вычислительной техники и программирования, серийное производство высокопроизводительных многоцелевых станков с ЧПУ (обрабатывающих центров), робототехника и использование групповой технологии обусловили создание базы для автоматизации серийного, мелкосерийного и единичного производств, а также для перехода к гибкому автоматизированному производству и к массовому внедрению гибких производственных систем (ГПС);

В отличие от поточных и автоматических линий, имеющих узкую специализацию на изготовление определенного вида изделий, создание ГПС направлено на обеспечение выпуска серийных и мелкосерийных изделий дискретными партиями, номенклатура и размеры которых могут меняться во времени. При этом использование ГПС должно способствовать сохранению для многономенклатурного производства отличительных особенностей и преимуществ массового производства (непрерывности и ритмичности) и существенному повышению производительности труда и качества выпускаемой продукции при сокращении численности рабочих-операторов.

Гибкие производственные системы отличаются от технических систем, состоящих из универсального оборудования и автономно работающих станков с ЧПУ и от производств, оборудованных станками-автоматами и полуавтоматами в линии (АЛ, РЛ и др.) с механической связью. От производств, оснащенных универсальным оборудованием и станками с ЧПУ, ГПС отличаются высокой производительностью оборудования и труда как за счет одновременного выполнения многих операций производственного процесса с одной установки обрабатываемого предмета труда, так и за счет того, что ГПС может работать в автоматическом режиме круглосуточно. От автоматических линий ГПС отличается гибкостью в широком смысле слова, что позволяет обрабатывать в нем широкую номенклатуру изделий и быструю смену объектов производства.

Обладая широкой гибкостью, ГПС обеспечивает высокую производительность оборудования, приближающую к уровню производительности автоматических линий и линий, скомпонованных из специализированных станков. Основным показателем ГПС - степень гибкости - может быть определен величиной затрачиваемого времени, количеством необходимых дополнительных расходов, при переходе на выпуск изделий определенного наименования, а также широтой номенклатуры выпускаемой продукции.

Понятие степень гибкости производственной системы - это не однозначный, а многокритериальный (многофакторный) показатель. В зависимости от конкретной решаемой задачи ГПС выдвигаются различные аспекты гибкости:

- 1) машинная гибкость - простота перестройки технологического оборудования для производства заданного множества изделий каждого наименования;
- 2) технологическая гибкость - способность системы производить заданное множество деталей каждого наименования разными вариантами технологического процесса;
- 3) структурная гибкость - возможность расширения ГПС за счет введения новых дополнительных технологических модулей, а также возможность объединения нескольких систем в единый комплекс;
- 4) гибкость по объему выпуска - способность системы экономично изготавливать изделия каждого наименования при разных размерах партий запуска и может быть охарактеризована минимальным размером партии, при котором использование системы остается экономически эффективным;
- 5) гибкость по номенклатуре - способность системы к обновлению выпуска продукции, она характеризуется сроками и стоимостью подготовки производства деталей нового наименования. В мелкосерийном производстве в качестве показателя гибкости номенклатуры можно принять максимальный коэффициент обновления продукции, при котором использование системы остается экономически эффективным.

Важное значение для обеспечения гибкости по номенклатуре имеет унификация конструктивных и технологических решений, достигаемая за счет автоматизации процессов конструирования изделий и технологической подготовки производства, а также широкого применения принципов групповой технологии, являющейся технологическим фундаментом современных механообрабатывающих производств.

Перечисленные виды гибкости тесно связаны между собой и улучшение одного показателя гибкости может вызвать ухудшение другого. Поэтому при сопоставлении различных ГПС, особенно при анализе вариантов на стадии проектирования, желательно пользоваться не качественными оценками, а некоторой системой количественных характеристик, так как создание ГПС, обладающих высокой гибкостью по всем перечисленным показателям, является не только техниче-

ски невозможным, но и экономически нецелесообразным. Поскольку, каждая ГПС разрабатывается для нужд конкретного предприятия, цеха, участка, она оказывается специализированной не только по своему технологическому назначению, но и по решаемым производственным задачам. В общем виде под гибкой производственной системой понимается автоматизированное производство, построенное на современных технических средствах (станках с ЧПУ, роботизированных технологических комплексах, гибких производственных модулях, транспортно-накопительных и складских системах и т. д.), способное обеспечивать выпуск широкой номенклатуры продукции, однородной лишь по своим основным конструктивным и технологическим параметрам и способное безынерционно переходить на выпуск новых изделий любого наименования.

К числу основных факторов, обеспечивающих функционирование ГПС, относятся: 1) комплексная автоматизация всех основных и вспомогательных технологических операций; 2) программная переналадка технологического оборудования; 3) оперативная (автоматизированная) конструкторско-технологическая и организационно-экономическая подготовка производства; 4) автоматизация управления производственно-технологическими процессами, осуществляемая в режиме реального времени; 5) реализация и оптимизация оперативно-производственного планирования, позволяющая получить максимальную загрузку оборудования, минимизировать производственный цикл и обеспечить комплектность деталей и сборочных единиц для сборки; 6) групповая технология обработки деталей.

Реализация названных факторов обеспечивается за счет функциональных элементов ГПС, которые можно разделить на две группы:

- производственно-технологические функциональные элементы ГАП, составляющие производственно-технологическую часть ГПС;
- электронно-вычислительные функциональные элементы ГАП, составляющие информационно-вычислительную и управляющую часть ГПС.

При проектировании производственно-технологической части ГПС, как правило, используют блочно-модульный принцип на различных организационных уровнях системы (рис. 1.1).

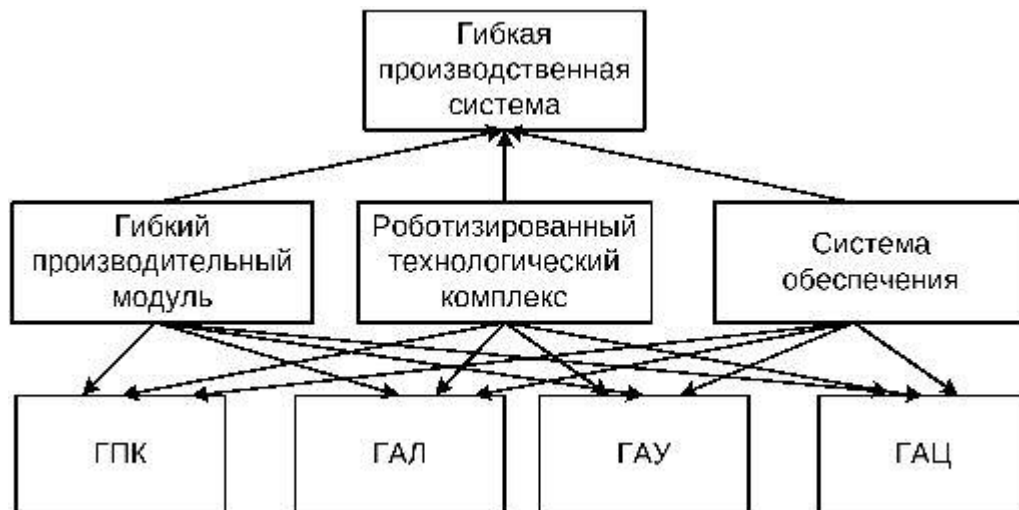


Рис.1.1. Структура гибкой производственной системы:

ГПК - гибкий производственный комплекс; ГАЛ - гибкая автоматизированная линия; ГАУ - гибкий автоматизированный участок; ГАЦ - гибкий автоматизированный цех

Основными элементами производственно-технологической части ГПС являются: гибкий производственный модуль (ГПМ), роботизированный технологический комплекс (РТК) и система обеспечения.

Гибкий производственный модуль (ГПМ) - это единица технологического оборудования для производства изделий произвольной номенклатуры в установленных пределах значений их характеристик с ЧПУ, автономно функционирующая, автоматически осуществляющая все функции, связанные с изготовлением продукции, имеющая возможность встраиваться в более сложную ГПС.

В состав ГПМ входят специальное технологическое оборудование (от одного до трех станков с ЧПУ); контрольно-измерительная аппаратура и установки; промышленные роботы и манипуляторы; средства автоматизации технологического процесса; средства идентификации деталей, заготовок, инструмента и оснастки.

Роботизированный технологический комплекс (РТК) - это совокупность единиц технологического оборудования от 3 до 10 станков с ЧПУ, роботов и средств их оснащения. Этот комплекс автономно функционирует и осуществляет многократные циклы. Предназначенные для работы в ГПС роботизированные комплексы должны иметь автоматизированную переналадку и возможность встраиваться в ГПС. В качестве средств оснащения они могут быть устройствами накопления, ориентации, поштучной выдачи объектов производства и т. д.

Таким образом, основными характеристиками ГПМ и РТК являются:

- способность работать автономно, без участия человека;
- автоматически выполнять все основные и вспомогательные операции производственного процесса;
- гибкость, удовлетворяющая требованиям единичного и мелкосерийного производства;
- простота наладки, устранения отказов основного оборудования и системы управления;
- совместимость с оборудованием традиционного и гибкого производства;
- большая степень завершенности обработки деталей с одного станка;
- высокая экономическая эффективность при правильной эксплуатации.

В настоящее время создаются и эксплуатируются ГПС полного технологического цикла, на которых детали или изделия обрабатываются (изготавливаются) со 100%-ной готовностью, и ГПС неполного цикла, когда для завершения изготовления детали требуются дополнительные операции, выполняемые вне данной системы. В соответствии с этим создаются более сложные ГПС в виде гибких производственных комплексов (ГПК), гибких автоматизированных линий (ГАЛ), гибких автоматизированных участков (ГАУ), гибких автоматизированных цехов (ГАЦ) и гибких автоматизированных заводов (ГАЗ).

ГПК - ГПС, состоящая из нескольких ГПМ (1/3 парка от 6 до 10, а остальные - 11 и более ГПМ) или РТК, объединенных АСУ и автоматизированной транспортно-складской системой (АТСС), автономно функционирующая в течение заданного времени и имеющая возможность встраиваться в систему более высокого уровня автоматизации.

ГАЛ - ГПС, состоящая из нескольких ГПМ или РТК, объединенных АСУ, в которой технологическое оборудование располагается в принятой последовательности технологических операций вдоль автоматизированной транспортно-накопительной системы.

ГАУ - ГПС, состоящая из нескольких ГПМ, РТК, ГАЛ и отдельных единиц специального технологического оборудования, автоматизированной транспортно-накопительной системы, объединенных АСУ в гибкий участок, в котором предусмотрено изменение последовательности использования технологического оборудования в пределах заданного технологического маршрута.

ГАЦ - ГПС, объединяющая ГАУ (или ГАЛ), вспомогательные участки и отдельные ГПМ, ГПК, АТСС и управляемая автоматизированной системой.

ГАЗ - ГПС, состоящая из ГАЦ заготовительного производства, ГАЦ обрабатывающей и сборочной стадий, автоматизированных складов материалов, заготовок, комплектующих изделий, готовых деталей и изделий, автоматизированной транспортной системы (АТС), объединенная АСУ.

Система обеспечения функционирования ГПС в автоматическом или автоматизированном режиме включает: а) автоматизированную транспортно-складскую систему - систему взаимосвязанных автоматизированных транспортных и складских устройств с установкой в транспортной таре для временного накопления, распределения и доставки предметов производства и технологической оснастки к ГПМ, РТК или другому технологическому оборудованию в ГПС; б) автоматизированную систему инструментального обеспечения (АСИО), осуществляющую подготовку, хранение, автоматическую замену инструмента; в) автоматизированную систему слежения за износом и поломками инструмента (АССИ); г) автоматизированную систему обеспечения надежности, осуществляющую слежение за состоянием оборудования (АСОН); д) автоматизированную систему управления качеством продукции (АСУКП); е) автоматизированную систему удаления отходов производства (АСУОП).

Производственно-технологическая часть ГПС предназначена для выполнения всех основных и вспомогательных технологических процессов и операций над элементами материального потока.

Основными элементами информационно-вычислительной и управляющей части ГПС являются: система автоматизированного проектирования (САПР); автоматизированная система технологической подготовки производства (АСТПП); автоматизированная система управления технологическими процессами] (АСУТП); автоматизированная система научных исследований (АСНИ); локальные системы управления (ЛСУ); автоматизированная система управления предприятием (АСУП), обеспечивающая автоматизированное организационно-экономическое, управление гибким автоматизированным производством.

Частичная или полная интеграция производственно-технологической части ГПС с функциональными системами информационно-вычислительной и управляющей частей в единую производственную систему превращает ее в гибкое автоматизированное производство (ГАП).

Информационно-вычислительная и управляющая части ГПС обеспечивают управление и координацию деятельности производственно-технологических функциональных элементов системы, которая реализуется иерархией ЭВМ (рис. 1.2).

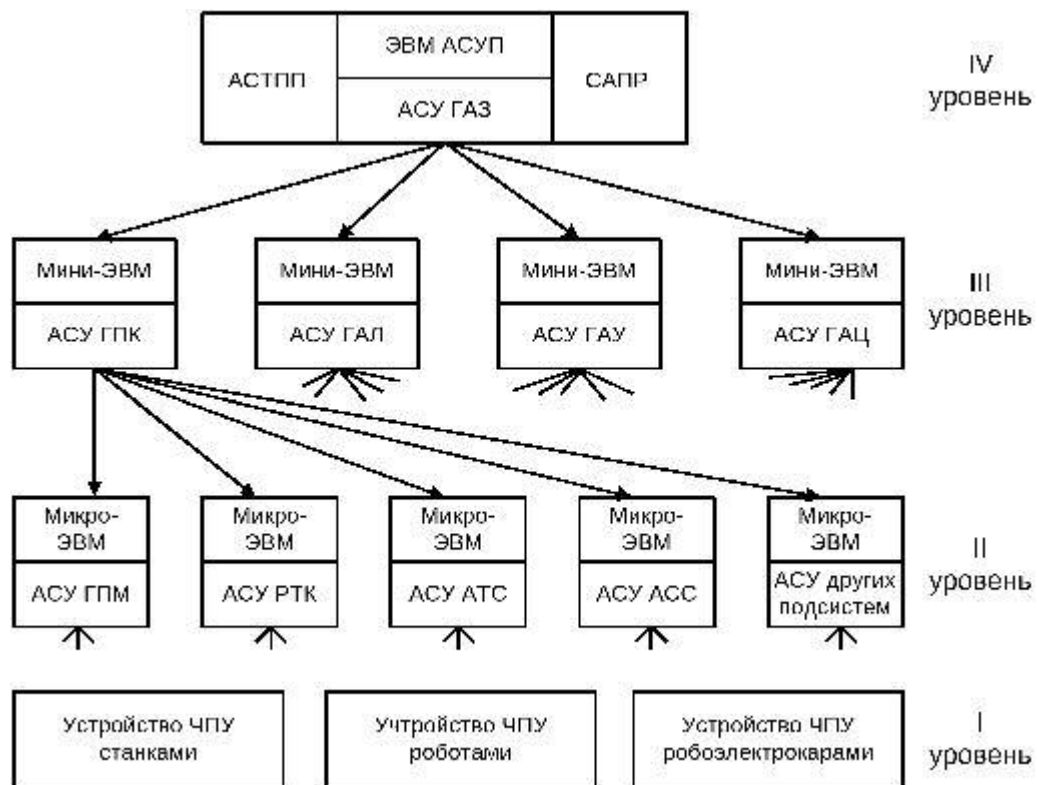


Рис.1.2. Структурная схема автоматизированной системы управления

На первом уровне иерархии управления используются ЧПУ. С их помощью управляются станки и другое технологическое оборудование, промышленные роботы, роботоэлектрокары и прочие транспортные системы.

На втором уровне используются микро-ЭВМ и другие программно совместимые с ней ЭВМ. С их помощью управляются ГПМ, РТК, АТС, АСС и другие обеспечивающие системы.

На третьем уровне используются мини-ЭВМ типа СМ-1420 и другие программно совместимые с ними ЭВМ. Мини-ЭВМ управляют группами модулей (ГПК, ГАЛ, ГАУ, ГАЦ). В механообработке в среднем одной микро-ЭВМ может быть подчинено до четырех станков с ЧПУ или один ГПМ, а эти группы станков (ГПМ), в свою очередь, подчиняются мини-ЭВМ следующего поколения

На четвертом уровне используется ЭВМ типа ЕС в составе АСУП. На всех этапах разработки гибкие производственные системы рассматриваются как сложные производственные системы, в состав которых входят производственно-технологические и электронно-вычислительные элементы ГАП, предметы труда и обслуживающий персонал, а также система управления. Задача проектирования заключается в том, чтобы обеспечить высокие технико-экономические показатели не только каждого элемента ГПС, но и всей системы в целом.

Для современных предприятий чрезвычайно важно формировать модели, позволяющие создать прогноз событий развития, хотя бы на ближайшее будущее. Такие модели оперируют понятиями финансов, профессиональных и материальных ресурсов. Хорошо известна многофакторная модель экономического роста (модель Кобба - Дугласа) - макроэкономическая модель, разработанная в 20-е гг. XX века Чарльзом Коббом и Поллом Дуглусом. Согласно ей объем совокупного продукта при данном уровне технологий Y зависит от 2ух факторов: капитала K и трудовых ресурсов L :

$$Y = f(K, L).$$

1.2 Обобщенная структура производственных процессов

Система менеджмента качества - это система, созданная на предприятии для постоянного формирования политики и целей в области качества, а также для достижения этих целей с целью постоянного улучшения качества выпускаемой продукции или оказываемых услуг. Итак, прежде всего система менеджмента качества - это система.

Система менеджмента качества призвана обеспечивать качество продукции или услуг предприятия и "настраивать" это качество на ожидания потребителей (заказчиков). При этом ее главная задача - не контролировать каждую единицу продукции, а сделать так, чтобы не было ошибок в работе, которые могли бы привести к появлению брака (плохому качеству продукции или услуг).

Причиной брака всегда являются неправильные действия. А для того, чтобы их избежать, необходимо формализовать (описать) правильные действия для создания качественной продукции или услуг, разработать инструкции по выполнению правильных действий и контролировать эти действия.

Система менеджмента качества как система состоит из следующих элементов: организация, процессы, документы, ресурсы.

По определению ISO, организация это группа сотрудников и необходимых средств с распределением ответственности, полномочий и взаимоотношений. Другими словами, под организацией понимается совокупность элементов организационно-штатной структуры, связанных с качеством, правила их взаимодействия, а также персонал, отвечающий за качество.

Процесс - совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов деятельности, преобразующих "входы" в "выходы". При этом "входами" процесса обычно являются "выходы" других

процессов. Процессы в организации, как правило, планируются и осуществляются с целью добавления ценности (от "входа" к "выходу").

новленный способ осуществления деятельности или процесса. Таким образом, процедурой можно назвать процесс (или совокупность процессов); с другой стороны - это документ, формализующий правильный способ выполнения процесса.

Документ - информация (значимые данные), размещенная на соответствующем носителе. Основные документы СМК перечислены во врезке. С документами системы качества должны быть связаны другие организационно-распорядительные документы предприятия, например "Положения о подразделениях" и "Должностные инструкции".

1.3 Процессный подход

Одним из важнейших достижений современной доктрины достижения качества является принцип процессного подхода к выполнению работы. Разработчики последней версии международных стандартов сертификации системы качества серии ИСО 9000 подчеркивают, что основным достижением этой версии является именно процессный подход в достижении качества.

Стандарт ИСО 9001 -- цитата: «Настоящий стандарт отстаивает применение принципа «процессного подхода» при разработке, внедрении и улучшении результативности системы менеджмента качества с целью повышения удовлетворенности потребителей посредством выполнения их требований.

Для успешного функционирования организация должна определить и управлять многочисленными взаимосвязанными видами деятельности. Деятельность, использующая ресурсы и управляемая с целью преобразования входов в выходы, может рассматриваться как процесс. Часто выход одного процесса образует непосредственно вход следующего.

Применение в организации системы процессов наряду с их идентификацией и взаимодействием, а также их менеджмент процессов могут считаться «процессным подходом».

Преимущество процессного подхода состоит в непрерывности управления, которое он обеспечивает на стыке отдельных процессов в рамках их системы, а также при их комбинации и взаимодействии.

При применении внутри системы менеджмента качества такой подход подчеркивает важность:

- понимания требований и соответствия им;
- необходимости рассмотрения процессов с точки зрения добавления ценности;
- достижения результатов в рабочих характеристиках процессов и эффективности;
- постоянного улучшения процессов, основанного на объективном измерении.

Что такое процессный принцип достижения качества? Если говорить простым языком -- это рассмотрение действий по изготовлению продукции как непрерывного технологического процесса, в котором участвует множество людей -- работников, каждый из которых вносит в изделие свой трудовой вклад, и общий результат работы зависит от вклада всех участников без исключения. То есть можно сказать, что ошибка в работе даже одного участника процесса может серьезно сказаться на общем результате всего процесса и свести на нет усилия всех остальных участников.

До появления массового производства по системе Ф.Тейлора работа в основном носила ремесленный цеховой характер. Как происходил такой трудовой процесс? Работу делали бригады ремесленников, в которых все работники достаточно хорошо знали все элементы технологического цикла. Изделие обрабатывалось в одном месте, причем пока не был выполнен текущий технологический переход, следующий не начинался. Многие переходы выполнял один и тот же мастер. В таком виде производства процессный подход выполнялся в полной мере. Данный вид производства делал очень качественную продукцию, но имел низкую производительность труда.

Ф. Тейлор, предложив идею массового машинного производства, разрушил идею процессного подхода. Его система предполагает расчленение всего технологического процесса на отдельные операции (принцип дифференциального производства), которые выполняются постоянно за-

крепленными работниками, причем операции могут выполняться параллельно (одновременно) и в разных местах. При таком типе производства получается очень высокая производительность труда. Но теряется процессный подход -- каждый работник выполняет только одну операцию, которой он обучен и совершенно не знает, для чего он ее выполняет и не видит готовое изделие. Работники находясь в разных местах (цехах) даже могут быть не знакомы друг с другом, детали, которые они изготавливают, собирает другой работник, также с ними не знакомый. Получается, что каждый делает свою часть работы, за которую он отвечает, и совершенно не заботится об общем результате работы всех участников процесса. Как сказал великий сатирик А.Райкин: «Пуговицы пришивает один, рукава другой, карманы третий, а за качество всего пиджака конкретно не отвечает никто».

В эпоху тотального роста качества возникла необходимость возврата процессного подхода при сохранении достигнутой высокой производительности. Рассмотрим основные принципы внедрения процессного подхода в работу современной организации.

Для достижения наилучшего результата соответствующие ресурсы и деятельность, в которую они вовлечены, нужно рассматривать как процесс.

Процессная модель предприятия состоит из множества бизнес-процессов, участниками которых являются структурные подразделения и должностные лица организационной структуры предприятия.

Под бизнес-процессом понимают совокупность различных видов деятельности, которые вместе создают результат, имеющий ценность для самой организации, потребителя, клиента или заказчика. Обычно на практике применяются следующие виды бизнес-процессов:

- основной, на базе которого осуществляется выполнение функций по текущей деятельности предприятия по производству продукции или оказанию услуг;
- обслуживающий, на базе которого осуществляется обеспечение производственной и управленческой деятельности организации.

Бизнес-процессы реализуются посредством осуществления бизнес-функций.

При применении процессного подхода структура управления предприятием включает два уровня:

- управление в рамках каждого бизнес-процесса,
- управление группой бизнес-процессов на уровне всей организации.

Основой управления отдельным бизнес-процессом и группой бизнес-процессов являются показатели эффективности, среди которых можно выделить:

- затраты на осуществление бизнес-процесса,
- расчет времени на осуществление бизнес-процесса,
- показатели качества бизнес-процесса.

Для более глубокого понимания процессного подхода необходимо применять цикл Деминга-Шухарта «Plan -- Do -- Check -- Act» (PDCA). Это «планирование -- осуществление -- проверка -- действие». Использование этого цикла позволяет на практике реализовать непрерывное улучшение процессов, направленное на повышение эффективности работы организации.

На основе процессного подхода организация должна определить процессы проектирования, производства и поставки продукции или услуги. С помощью управления процессами достигается удовлетворение потребностей заказчиков. В итоге управление результатами процесса переходит в управление самим процессом. Также ИСО 9001 предлагает внедрить и некоторые другие процессы (анализ со стороны руководства, корректирующие и предупреждающие действия, внутренние проверки системы качества и т.д.)

Следующим этапом на пути к достижению качества является оптимизация использования ресурсов в каждом выделенном процессе. Это означает строгий контроль за использованием каждого вида ресурсов и поиск возможностей для снижения затрат на производство продукции или оказание услуг.

Для эффективного внедрения процессного подхода очень важно иметь оптимальную работоспособную организационную структуру предприятия, правильно выбрать тип управления работниками. Как известно, в настоящее время применяют два основных типа управления -- иерар-

хический и органический. Первый тип примыкает к армейской структуре управления с жесткой вертикальной системой управления с постоянно закрепленными обязанностями каждого элемента системы. Второй тип отличается высокой адаптивностью к условиям работы, здесь больше горизонтальных связей управления, обязанности участников процесса могут достаточно часто меняться. Обе системы управления имеют свои плюсы и минусы, необходимо в каждом конкретном случае искать свой вариант системы управления, сочетающий элементы обоих типов, но считается, что органическая система более предпочтительна в современных условиях.

После определения структуры предприятия и системы его управления можно выделить все бизнес-процессы, которые здесь протекают. Необходимо определить ответственность каждой структуры предприятия, каждого ответственного лица за конкретный процесс, поэтому составляется матрица ответственности, графическая схема, где показывают, кто за что отвечает.

Теперь имея перечень всех процессов, можно решать вопросы их регламентации, то есть полностью описать действия по реализации процесса, которые должны быть задокументированы для всеобщего ознакомления и использования. В перечень этой документации входят должностные инструкции, маршрутные и технологические карты, процедуры и т.д.

Стандарт ИСО 9001 требует составления 6 обязательных и дополнительных процедур. Документ -- процедура -- это как раз и есть материализованный объект системы качества, подтверждающий применение процессного подхода в работе.

Кажется, определив необходимые бизнес-процессы, назначив ответственных за них, написав процедуры можно считать, что внедрение процессного подхода успешно сделано, но на практике достаточно часто бывает, что организация выполнив эти требования реально процессного подхода в работе не имеет. Все необходимые бумаги есть, но работники ими практически не пользуются. В чем дело?

Для внедрения принципа процессного подхода необходимо осуществить еще ряд мероприятий объективного и субъективного характера, связанных непосредственно с людьми-работниками.

Объективные мероприятия:

1. Необходимо реально внедрить управление на основе целей. Это означает через постоянные постановки целей достижение общей цели предприятия. Для каждого уровня предприятия, каждого отдела, подразделения, каждого конкретного работника должна быть поставлена цель, причем цели должны быть как долгосрочные, так и текущие. Такое управление позволяет каждому сотруднику точно понимать, что он делает, для чего он это делает, и более точно оценивать свои действия с точки зрения приближения к цели. Достижение цели определяется получением конкретного результата. Работать необходимо на результат. При достижении поставленного результата, ставится новая цель и результат, определяющий ее достижение. Причем мотивация труда делает упор именно на достижение цели как текущей, так и долгосрочной.

2. В обязательном порядке внедрить внутренние отношения клиент-поставщик. Необходимо создать единый процесс, в котором каждый работник ощущал бы свою ответственность не только за свой участок работы, но и за весь процесс в целом. Основа такого процесса -- это внутренняя цепочка: процесс - клиент - поставщик. Каждый работник в процессе является поставщиком работы-продукта следующему по цепочке сотруднику-клиенту. В то же время этот же работник является клиентом предыдущего в цепочке работника. Работники передают друг другу работу, и каждый вносит в нее свою лепту. Каждый одновременно является и клиентом и поставщиком. В основе такой модели лежат следующие принципы:

- каждая деятельность -- это процесс, в конце которого находится продукт, причем продукт: это не только материальные объекты -- детали, машины и т.д., но и информация, сообщения и т.д.;
- получатель этих продуктов -- это клиент, то есть каждый продукт на предприятии имеет своего получателя, который работает с ним дальше;
- для каждой деятельности необходимы поставки. Поставщик -- это тот, чей продукт находит получателя-клиента. Поставщик обязан действовать так, чтобы получатель-клиент был доволен;

- между клиентами и поставщиками происходит обмен информацией относительно пожеланий и результатов работы;
- каждая деятельность подвержена влиянию окружения или даваемых указаний;
- отношения «клиент-поставщик» протекают в обоих направлениях;
- пожелания и замечания внутренних клиентов должны восприниматься, так же как и пожелания и замечания внешних клиентов.

Субъективные мероприятия. Необходимо создать дружественную доброжелательную атмосферу в коллективе, каждый член организации должен чувствовать себя в большой семье. Для этого все работники, задействованные в технологическом процессе, должны хорошо знать друг друга, знать характер работы своего коллеги и т.д.

2. Моделирование бизнес процессов

Для моделирования бизнес-процессов можно использовать различные методы. Метод, или методология, моделирования включает в себя последовательность действий, которые необходимо выполнить для построения модели, т. е. процедуру моделирования, и применяемую нотацию (язык). Наиболее популярной методологией бизнес-моделирования является ARIS, но также известны Catalyst компании CSC, Business Genetics, SCOR (Supply \ Chain Operations Reference), POEM (Process Oriented Enterprise Modeling) и др. Язык моделирования имеет свой синтаксис (условные обозначения различных элементов и правила их сочетания) и семантику (правила толкования моделей и их элементов). В теории и на практике существуют различные подходы к построению и отображению моделей бизнес-процессов, основными из которых являются функциональный и объектно-ориентированный.

В функциональном подходе главным структурообразующим элементом является функция (бизнес-функция, действие, операция), и система представляется в виде иерархии взаимосвязанных функций. При объектно-ориентированном подходе система разбивается на набор объектов, соответствующих объектам реального мира и взаимодействующих между собой посредством посылки сообщений. Бизнес-функция представляет собой специфический тип работы (операций, действий), выполняемой над продуктами или услугами по мере их продвижения в бизнес-процессе. Как правило, бизнес-функции определяются самой организационной структурой компании, начиная с функций высшего руководства через функции управления среднего и нижнего уровня и заканчивая функциями, возложенными на производственный персонал. Функциональный подход в моделировании бизнес-процессов сводится к построению схемы бизнес-процесса в виде последовательности бизнес-функций, с которыми связаны материальные и информационные объекты, используемые ресурсы, организационные единицы и т. п. Преимуществом функционального подхода является наглядность последовательности и логики операций в бизнес-процессах компании, а недостатком — некоторая субъективность в детализации операций.

В роли объектов при моделировании бизнес-процессов компании могут выступать конкретные предметы или реальные сущности, например клиент, заказ, услуга и т. п. Каждый объект характеризуется набором атрибутов, значения которых определяют его состояние, а также набором операций для проверки и изменения этого состояния. Объектно-ориентированный подход предполагает вначале выделение объектов, а затем определение тех действий, в которых они участвуют. При этом различают пассивные объекты (материалы, документы, оборудование), над которыми выполняются действия, и активные объекты (организационные единицы, конкретные исполнители, программное обеспечение), которые осуществляют действия. Такой подход позволяет более объективно выделить операции над объектами и решить задачу о целесообразности использования этих объектов.

Недостаток объектно-ориентированного подхода состоит в меньшей наглядности конкретных бизнес-процессов. Важным понятием любого метода моделирования бизнес-процессов являются связи (как правило, в графических нотациях их изображают в виде стрелок). Связи служат для описания взаимоотношений объектов и/или бизнес-функций друг с другом. К числу таких

взаимоотношений могут относиться: последовательность выполнения во времени, связь с помощью потока информации, использование другим объектом и т.д.

Модели бизнес-процессов применяются предприятиями для различных целей, что определяет тип разрабатываемой модели. Графическая модель бизнес-процесса в виде наглядной, общепонятной диаграммы может служить для обучения новых сотрудников их должностным обязанностям, согласования действий между структурными единицами компании, подбора или разработки компонентов информационной системы и т. д. Описание с помощью моделей такого типа существующих и целевых бизнес-процессов используется для оптимизации и совершенствования деятельности компании путем устранения узких мест, дублирования функций и проч. Имитационные модели бизнес-процессов позволяют оценить их эффективность и посмотреть, как будет выполняться процесс с входными данными, не встречавшимися до сих пор в реальной работе предприятия. Исполняемые модели бизнес-процессов могут быть запущены на специальном программном обеспечении для автоматизации процесса непосредственно по модели. Поскольку модели бизнес-процессов предназначены для широкого круга пользователей (бизнес-аналитиков, рядовых сотрудников и руководства компании), а их построением часто занимаются неспециалисты в области информационных технологий, наиболее широко используются модели графического типа, в которых в соответствии с определенной методологией бизнес-процесс представляется в виде наглядного графического изображения — диаграммы, состоящей в основном из прямоугольников и стрелок.

Такое представление обладает высокой, многомерной информативностью, которая выражается в различных свойствах (цвет, фон, начертание и т.д.) и атрибутах (вес, размер, стоимость, время и т.д.) каждого объекта и связи. В последние годы разработчики программных средств моделирования бизнес-процессов уделяют большое внимание преобразованию графических моделей в модели других видов, в частности в исполняемые, назначением которых является обеспечение автоматизации бизнес-процесса и интеграция работы задействованных в его исполнении информационных систем.

Согласно еще одной классификации, пришедшей из моделирования сложных систем, выделяют следующие виды моделей бизнес-процессов:

функциональные, описывающие совокупность выполняемых системой функций и их входы и выходы;

поведенческие, показывающие, когда и/или при каких условиях выполняются бизнес- функции, с помощью таких категорий, как состояние системы, событие, переход из одного состояния в другое, условия перехода, последовательность событий;

структурные, характеризующие морфологию системы — состав подсистем, их взаимосвязи;

информационные, отражающие структуры данных — их состав и взаимосвязи.

История моделирования бизнес-процессов насчитывает уже почти столетие, хотя вплоть до начала 1990-х гг., когда термин «бизнес-процесс» вошел в широкое употребление, говорили об описании того, каким образом организация осуществляет свои функции и выполняет те или иные задачи. Развитие методов моделирования и автоматизации бизнес-процессов принято разделять на три этапа, или три «волны».

Началом каждой из них явился очередной всплеск интереса к повышению эффективности деятельности предприятий и процессному управлению, происходивший каждый раз на новом качественном уровне.

Начало первого этапа относят к 1920-м гг. XX в. и связывают с именем Фредерика Тейлора и его книгой «Принципы научного управления». В этот период впервые была осознана необходимость исследовать бизнес-процессы, описывать их в различных документах и действовать в соответствии с этими описаниями. Описание бизнес-процессов производится в текстовом, табличном и графическом виде, причем последний все более формализуется.

В период «первой волны» для моделирования бизнес-процессов используются блок-схемы, ориентированные графы, сети Петри, методологии SADT, IDEF, DFD. Блок-схемы на основе определенной в ГОСТ 19.701-90 нотации схем алгоритмов, программ, данных и систем (в англ. лите-

ратуре — ANSI flowcharts) остаются и сегодня простейшим, но практически важным формальным графическим языком моделирования бизнес-процессов.

Что же касается сетей Петри, то использование этого аппарата непосредственно для описания бизнес-процессов хотя и имеет своих сторонников, но не завоевало широкой популярности, так как его графическая нотация не является интуитивно понятной (с ней сложно работать бизнес-аналитикам и менеджерам).

2.1. Сети Петри

Событие в сети Петри - это срабатывание перехода в сети, при котором метки из входных позиций этого перехода перемещаются в выходные позиции. События происходят мгновенно, либо одновременно, при выполнении некоторых условий.

В модели временного ряда принято выделять две основные составляющие: детерминированную (систематическую), случайную.

Детерминированная составляющая — это последовательность значений, элементы которой вычисляются по определенному правилу как функция времени t . Случайная составляющая — это составная часть временного ряда, оставшаяся после выделения систематических компонент. Детерминированная составляющая может содержать следующие структурные компоненты:

1. Тренд, или тенденция $F(t)$ -представляет собой устойчивую закономерность, наблюдаемую в течение длительного периода времени.
2. Сезонная компонента $S(t)$ связана с наличием факторов, действующих с заранее известной периодичностью. Это регулярные колебания, которые носят периодический или близкий к нему характер и заканчиваются в течение года.
3. Циклическая компонента $U(t)$ — неслучайная функция, описывающая длительные периоды (более одного года) относительного подъема и спада и состоящая из циклов переменной длительности и амплитуды. В зависимости от вида связи между перечисленными компонентами может быть построена либо аддитивная модель временного ряда: $X(t)=F(t) + S(t)+U(t) + E(t)$, либо мультипликативная модель $X(t)=F(t)S(t)U(t) + E(t)$.

Сети Петри разрабатывались для моделирования систем с параллельными взаимодействиями компонентами. Сети Петри впервые предложил Карл Адам Петри "Связь с автоматами" он сформулировал основные понятия теории связи асинхронных компонент вычислительной системы.

Сети Петри - инструмент моделирования

В настоящее время сети Петри применяются, в основном, в моделировании. Во многих областях исследований явление изучается не непосредственно, а косвенно, через модель. Модель - это представление, как правило, в математических терминах того, что считается наиболее характерным в изучаемом объекте или системе. Манипулируя моделью системы, можно получить новые знания о ней, избегая опасности, дороговизны или неудобства анализа самой реальной системы. Обычно модели имеют математическую основу.

Развитие теории сетей Петри проводилось по двум направлениям. Формальная теория сетей Петри занимается разработкой основных средств, методов и понятий, необходимых для применения сетей Петри. Прикладная теория сетей Петри связана главным образом с применением сетей Петри к моделированию систем, их анализу и получающимся в результате этого глубоким проникновением в моделируемые системы.

Моделирование в сетях Петри осуществляется на событийном уровне. Определяются, какие действия происходят в системе, какие состояние предшествовали этим действиям и какие состояния примет система после выполнения действия. Выполнения событийной модели в сетях Петри описывает поведение системы. Анализ результатов выполнения может сказать о том, в каких состояниях пребывала или не пребывала система, какие состояния в принципе не достижимы. Однако, такой анализ не дает числовых характеристик, определяющих состояние системы. Развитие теории сетей Петри привело к появлению, так называемых, "цветных" сетей Петри. Понятие цвет-

ности в них тесно связано с понятиями переменных, типов данных, условий и других конструкций, более приближенных к языкам программирования. Несмотря на некоторые сходства между цветными сетями Петри и программами, они еще не применялись в качестве языка программирования.

Не смотря на описанные выше достоинства сетей Петри, неудобства применения сетей Петри в качестве языка программирования заключены в процессе их выполнения в вычислительной системе. В сетях Петри нет строго понятия процесса, который можно было бы выполнять на указанном процессоре. Нет также однозначной последовательности исполнения сети Петри, так как исходная теория представляет нам язык для описания параллельных процессов.

В этом отношении наилучшими возможностями описания параллельных систем обладают сети Петри.

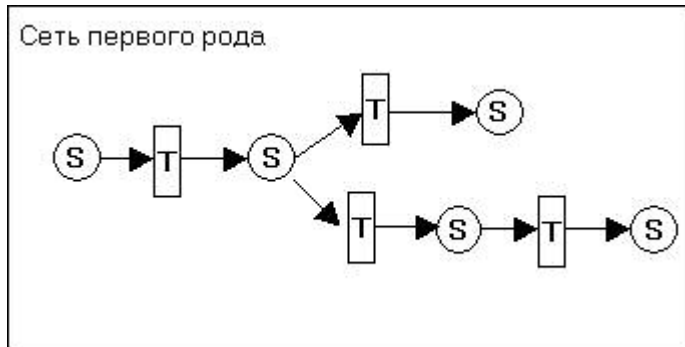


Рис. 2.1. Сеть Петри первого рода
- это цветная сеть Петри, описанная на языке предписаний.

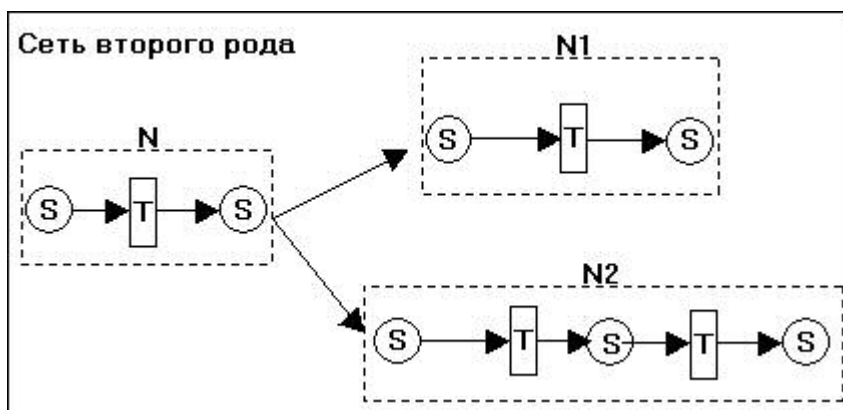


Рис. 2.2 Сеть Петри второго рода
- это сеть, представленная в виде иерархической композиции объектов.

Виды сетей Петри

Некоторые виды сетей Петри:

- Временная сеть Петри - такая сеть, где переходы обладают весом, определяющим продолжительность срабатывания (задержку).
- Стохастическая сеть Петри - сеть, в которой задержки являются случайными величинами.
- Функциональная сеть Петри - сеть, в которой задержки определяются как функции некоторых аргументов, например, количества меток в каких-либо позициях, состояния некоторых переходов.
- Цветная сеть Петри - сеть, в которой метки могут быть различных типов, обозначаемых цветами, тип метки может быть использован как аргумент в функциональных сетях.
- Ингибиторная сеть Петри - сеть, в которой возможны ингибиторные, то есть подавляющие, дуги, запрещающие срабатывания перехода, если во входной позиции, связанной с переходом ингибиторной дугой, находится метка.

- Иерархическая сеть Петри - сеть, содержащая немгновенные переходы, в которые вложены другие, возможно, также иерархические, сети. Срабатывание такого перехода характеризует выполнение полного жизненного цикла вложенной сети.
- WF-сети Петри - подкласс сетей Петри, называемый также сетями потоков работ. Формализм WF-сетей введен Вил ван дер Аальстом (англ. Wil van der Aalst) для моделирования потоков работ в workflow-системах.

Сеть Петри $PN = (P, T, F)$ называется сетью потоков работ (WF-сетью), если выполняются следующие условия:

- существует только одна исходная позиция i , такая что отсутствуют переходы входящие в i ;
- существует только одна конечная позиция o , такая что отсутствуют переходы выходящие из o ;
- каждый узел данной сети расположен на пути от i к o .
- WF-сети используются для проверки графов потоков работ на наличие таких структурных конфликтов, как "тупики" (англ. deadlocks) и "недостатки синхронизации" (англ. lack of synchronization). Структурные конфликты отсутствуют, если WF-сеть является бездефектной.
- Свойство бездефектности, правильной завершаемости - соответствует следующим требованиям:
 - конечная позиция o достижима при любой последовательности переходов от позиции i ;
 - WF-сеть не содержит лишних позиций (которые никогда не будут выполнены);
 - при достижении конечной позиции данной сети не должно оставаться фишек в промежуточных позициях. Свойство бездефектности соответствует двум хорошо известным свойствам сетей Петри - живости и ограниченности.

Анализ сетей Петри

Основными свойствами сети Петри являются:

- ограниченность сети Петри - свойство сети, число меток которой в любой позиции сети не может превысить некоторого значения K ;
- безопасность сети Петри - есть частный случай ограниченности, $K=1$;
- сохраняемость сети Петри - есть постоянство загрузки ресурсов, когда $\sum A_i N_i$ постоянна. Где N_i - число маркеров в i -той позиции, A_i - весовой коэффициент;
- достижимость сети Петри - возможность перехода сети из одного заданного состояния (характеризуемого распределением меток) в другое;
- живость сети Петри - возможность срабатывания любого перехода при функционировании моделируемого объекта.

В основе исследования перечисленных свойств лежит анализ достижимости. Методы анализа свойств сетей Петри основаны на использовании графов достижимых (покрывающих) маркировок, решении уравнения состояний сети и вычислении линейных инвариантов позиций и переходов. Применяются также вспомогательные методы редукции, позволяющие уменьшить размер сети Петри с сохранением ее свойств, и декомпозиции, разделяющие исходную сеть на подсети.

Универсальная сеть Петри

В 1974 году Тилак Аджервала показал, что ингибиторная сеть Петри является универсальной алгоритмической системой. В монографии В. Е. Котова приведен набросок доказательства, указывающий правила кодирования ингибиторной сетью программы счетного автомата Минского. Дж. Питерсон приводит примеры других расширенных классов сетей Петри, являющихся универсальной алгоритмической системой: синхронных и приоритетных. Построенная в явном виде универсальная сеть Петри насчитывала несколько тысяч вершин и недавно была уменьшена до 56 вершин.

Бесконечные сети Петри

Бесконечные сети Петри были введены для верификации вычислительных решеток и позволяют определять свойства сетей Петри для регулярных структур (линейная, древовидная, квадратная, треугольная, шестиугольная и гиперкуб) произвольного размера, полученных путем композиции типовых фрагментов.

Теория сетей Петри является хорошо известным и популярным формализмом, предназначенным для работы с параллельными и асинхронными системами.

Модели систем в которых имеются потоки событий, например, в случае использования технологии передачи данных от одного блока к другому, удобно представлять в виде автоматов.

Цифровым автоматом называют дискретный преобразователь информации, способный принимать различные состояния, переходить под воздействием входных сигналов, или команд программы решения задачи, из одного состояния в другое и выдавать выходные сигналы. Автомат называется конечным, если множество его внутренних состояний, а также множества значений входных и выходных сигналов конечны.

Цифровые автоматы могут быть с "жесткой", или схемной, логикой и с логикой, хранимой в памяти. Различают два класса автоматов: асинхронные и синхронные.

Синхронный автомат характеризуется тем, что функционирует под управлением тактовых (или синхронизирующих) сигналов - ТС, с постоянной длительностью $t_{ТС}$ и постоянной частотой $f_{ТС}$, если квантование времени равномерное.

Такт (квант) времени t_i совмещается с фронтом i -того сигнала ТС. Входные сигналы могут воздействовать на автомат лишь при наличии сигнала ТС и не изменяются в течение $t_{ТС}$. Период следования сигналов ТС должен быть больше или равен времени, которое необходимо реальному автомату для перехода из одного состояния в другое. Когда рассматривается абстрактный автомат, то считается, что изменение внутренних состояний автомата происходит в интервалы времени между смежными ТС, а выходные сигналы формируются по фронту очередного ТС.

В асинхронных автоматах длительность интервала времени, в течение которого остается неизменным состояние входных сигналов, является величиной переменной и определяется временем, которое необходимо автомату для установки соответствующих выходных сигналов и завершения перехода в новое состояние. Следовательно, асинхронный автомат должен формировать каким-нибудь подходящим способом сигнал о завершении очередного такта, по которому текущие входные сигналы могут быть сняты, после чего может начаться следующий такт, т.е. возможно поступление новых входных сигналов.

На стадии абстрактного синтеза обычно пользуются представлением автомата в виде одного блока, имеющего один вход и один выход. На стадии структурного синтеза автомат изображают в виде обобщенной структурной схемы, приведенной на рис. 2.3, n входных и m выходных каналов, по которым в подавляющем большинстве случаев передаются двоичные сигналы x_1, x_2, \dots, x_n и z_1, z_2, \dots, z_m .

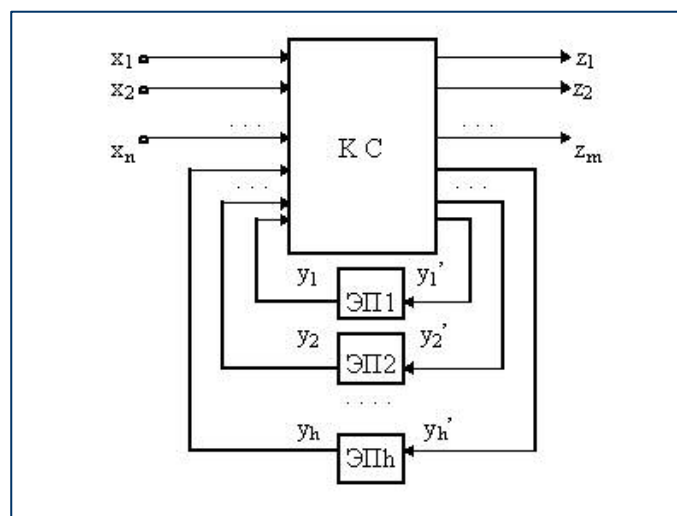


Рис. 2.3 Схема синхронного автомата

Переменные x_1, x_2, \dots, x_n называют входными переменными, а z_1, z_2, \dots, z_m - выходными переменными или функциям выходов автомата¹.

Рассматриваемая схема состоит из двух частей: комбинационной схемы (КС) и набора элементов памяти (ЭП). Переменные y_1, y_2, \dots, y_h , соответствующие выходным сигналам элементов памяти, называют внутренними переменными автомата. Переменные y_1', y_2', \dots, y_h' используются в схеме для обозначения входных сигналов, изменяющих состояние элементов памяти, и называют функциями возбуждения. В качестве элементов памяти на практике чаще всего используют элементарные автоматы.

В приведенной схеме наборы значений входных переменных x_1, x_2, \dots, x_n соответствуют буквам входного алфавита P абстрактного автомата, наборы выходных переменных z_1, z_2, \dots, z_m - буквам выходного алфавита W , y_1, y_2, \dots, y_h - состояниям абстрактного автомата.

Особенности асинхронного автомата², или точнее асинхронной модели автомата, определяются свойствами входных сигналов. Напомним, что при построении модели автомата синхронного типа мы пользовались понятием дискретного времени. Входные сигналы такого автомата подобны сигналам импульсного типа (рис. 2.4,а). При этом были приняты следующие ограничения:

- сигналы могут поступать на вход автомата только в строго определенные моменты времени, задаваемые тактирующей последовательностью СИ с постоянным периодом T ;
- длительность входных сигналов t пренебрежимо мала ($t \ll 0$);
- в промежутках между тактирующими сигналами на входе автомата сигнал отсутствует.

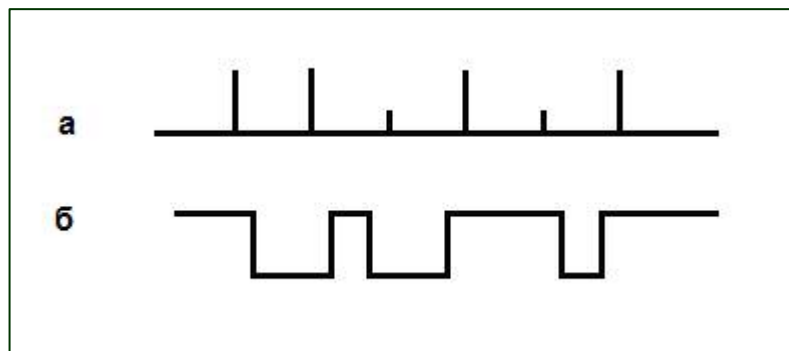


Рис 2.4 а) сигналы импульсного типа б) сигналы потенциального типа

Модель автомата, построенная для такого сигнала, соответствует схемам, работающим с сигналами импульсного типа, элементы которых не имеют гальванической связи. Входные сигна-

¹ Синхронный автомат

Синхронный автомат - конечный автомат, в котором:

- генератор тактовых импульсов воздействует на автомат;
- выходные сигналы считываются только во время выдачи тактовых импульсов, когда под воздействием входных и промежуточных сигналов автомат уже перешел в новое состояние.

² Асинхронный автомат

Асинхронный автомат - конечный автомат, в котором выходные сигналы считываются в любое время, а переход в новое состояние определяется лишь временем срабатывания всех логических элементов, входящих в логический преобразователь.

лы асинхронного автомата подобны сигналам потенциального типа (рис. 2.4,б). Такие сигналы должны обладать следующими свойствами:

- сигнал присутствует на входе автомата в каждый момент времени;
- длительность входного сигнала не ограничена и превышает некоторую минимальную величину t_0 ;
- изменения входного сигнала могут происходить в произвольные моменты времени.

Перечисленные свойства позволяют считать, что асинхронный автомат работает в непрерывном времени. Ограничимся, так же как и для синхронного автомата, рассмотрением только двоичных входных сигналов. При этом модель асинхронного автомата может быть использована для описания работы схем, построенных из элементов потенциального типа.

Автомат, все состояния которого устойчивы, называется асинхронным. Следует заметить, что в дальнейшем при более детальном анализе процесса работы автомата придется отказаться от этого определения и допустить наличие неустойчивых состояний.

Кроме того, есть процессы, которые невозможно описать с его помощью. Однако, забегая вперед, отметим, что сети Петри лягут в основу ряда языков, специально разработанных для моделирования бизнес-процессов в рамках «третьей волны». В 1980-х гг. предпринимаются первые попытки автоматизации бизнес-процессов (уточним: не отдельных шагов, а хода процесса в целом) путем реализации в программном обеспечении для 6 управления документами — системах электронного документооборота — функций по отслеживанию последовательности выполняемых действий для автоматизации процедур утверждения и выпуска документов. Успех таких систем вдохновляет разработчиков ПО на распространение аналогичного подхода на автоматизацию других функциональных областей бизнеса. Бизнес-моделирование выделяется в самостоятельное научно-прикладное направление только к началу 1990-х гг. Большинство созданных и применяемых до этого момента методологий не предназначались специально для описания бизнес-процессов, а разрабатывались для моделирования сложных систем и проектирования ПО. Они зачастую лишены строго определенной семантики.

Модели, полученные с помощью таких методологий, как правило, воспринимаются интуитивно, и их интерпретация может меняться в зависимости от пользователя или области приложений модели. Эти модели хорошо подходят для обсуждения бизнес-процессов между сотрудниками компании и руководством, для чего они, собственно, и применялись, но не могут быть основой для работы информационной системы, так как неполны и допускают различные интерпретации.

Начало второго этапа ознаменовал выход книги М. Хаммера и Д. Чампи «Реинжиниринг корпорации: манифест революции в бизнесе», которая возродила в управленческой среде интерес к описанию и анализу бизнес-процессов с целью их радикальной перестройки — реинжиниринга. Реинжиниринг бизнес-процессов предполагает построение двух моделей бизнес-процесса: как есть (англ. as is) и как должно быть (англ. to be), а затем внедрение последней на предприятии. Как следующий шаг в автоматизации бизнес-процессов в 1990-х гг. появляются системы управления потоками работ WfMS (Workflow Management System) второго поколения, предназначенные для маршрутизации потоков работ любого типа в рамках бизнес-процессов компании.

Эти системы снабжены средой разработчика, которая теоретически может использоваться для моделирования различных нестандартных бизнес- 8 процессов, однако на практике в большинстве случаев внедрение нового или изменение имеющегося процесса требовало привлечения труда программистов. Еще более ограниченные возможности по настройке и изменению процессов предоставляли поддерживающие управление потоками работ системы планирования ресурсов предприятия ERP (Enterprise Resource Planning). Внесение любых существенных изменений в бизнес- процесс превращалось в весьма дорогостоящий и долгосрочный проект по проектированию и разработке программного обеспечения, а модели бизнес-процессов, построенные аналитиками, использовались для более четкой формулировки требований, которые затем передавались программистам.

В качестве примера методологии и средства автоматизации бизнес-процессов второго поколения можно назвать соответственно ARIS и распространенную ERP ³-систему SAP R/3. ERP системы внедряются для того, чтобы объединить все подразделения компании и все необходимые функции в одной компьютерной системе, которая будет обслуживать текущие потребности этих подразделений. Разработка подобной единой системы - непростая задача. Обычно каждое подразделение имеет собственную компьютерную систему, оптимизированную для решения его задач. ERP система ведет единую базу данных по всем подразделениям и задачам, так что доступ к информации становится проще, а главное, подразделения получают возможность обмениваться информацией.

Негибкость моделей и средств автоматизации, их неспособность обеспечить оперативное реагирование на постоянные изменения в бизнес-среде стали основными недостатками систем «второй волны», стимулировавшими разработку в начале 2000-х гг. методологий следующего — третьего — поколения. Манифестом «третьей волны» в моделировании бизнес-процессов можно по праву назвать книгу Г. Смита и П. Фингара «Управление бизнес-процессами: третья волна». На смену радикальному реинжинирингу приходит системное и «плавное» управление. Изменчивость бизнес-процессов, возможность их корректировки в ответ на изменения в бизнесе становятся главным критерием использования информационных технологий как средства, позволяющего получить преимущества на рынке. Идея методологий и инструментов моделирования третьего поколения состоит в том, чтобы позволить руководству и сотрудникам компании создавать и самим внедрять новые процессы «на лету».

Автоматизация процессов производится посредством так называемых систем управления бизнес-процессами BPMS (Business Process Management System), которые дают возможность непосредственно реализовывать бизнес-процессы в соответствии с построенной формальной моделью и не требуют разработки дополнительного программного обеспечения. Для разработки понятных машине «исполняемых» моделей требуются более точные методы моделирования. К таким методам относятся языки моделирования на базе XML: BPML, BPEL, XPDЛ. Однако построение моделей непосредственно на этих языках неудобно для бизнес-пользователей.

В этой связи большое внимание разработчики программного обеспечения уделяют средствам конвертирования графических моделей бизнес-процессов в исполняемые. Это позволяет бизнес-аналитику или менеджеру строить модели бизнес-процессов с использованием графической нотации, а затем преобразовывать построенную модель (пока нередко с помощью технического специалиста) в исполняемый вид. Следует понимать, что графические модели, предназначенные для преобразования в исполняемые, должны быть гораздо более строгими и формальными по сравнению с моделями, создаваемыми в аналитических целях.

В модели бизнес-процесса отражают взаимодействие компании с различными внешними сущностями: клиентами, коммерческими партнерами, поставщиками, административными органами. При автоматизации процесса данные взаимодействия также стараются по возможности автоматизировать. Особенно активно развиваются технологии автоматизации межкорпоративного взаимодействия — бизнес-бизнес (англ. Business-to-Business, B2B). Потребности в автоматизации бизнес-процессов взаимодействия между предприятиями возникли еще в 60-х гг. прошлого века. Первое поколение электронных систем B2B- взаимодействия описывает стандарт UN/EDIFACT, или ЭДИФАКТ ООН (Правила ООН Электронного Обмена Данными в Управлении, Торговле и на Транспорте, ISO 9735), который, несмотря на высокую конкуренцию со стороны XML-систем в последние годы, до сих пор довольно широко применяется в Европе во многих секторах экономики.

Развитие сети Интернет послужило толчком к созданию новых методов и технологий в области электронного обмена данными. Одним из наиболее удачных методов электронного обмена является появившаяся в 1998 г. методология консорциума RosettaNet. Данная технология описывает открытую платформу электронного взаимодействия, основанного на стандарте XML, и позволяет сторонам, участвующим во взаимодействии, обмениваться бизнес-информацией через Ин-

³ Enterprise Resource Planning System - система управления ресурсами компании

тернет. Первоначально стандарт был разработан для индустрии высоких технологий (информационные технологии и электроника), однако предложенный подход послужил основой механизмов взаимодействия предприятий и других отраслей. В рамках методологии RosettaNet разработаны стандарты более сотни процессов бизнес-взаимодействия между различными компаниями или подразделениями внутри одного предприятия.

Эти стандартизованные процессы получили название процессов интерфейса взаимодействия с партнером (Partner Interface Process, PIP) и специфицируют транзакции между двумя бизнес-системами в форме диалога на основе стандарта XML. Еще одной современной технологией автоматизации межкорпоративного взаимодействия является ebXML (Electronic Business using extensible Markup Language, ИСО 15000). Работа над технологией ebXML началась в 1999 г. по инициативе СЕФАКТ ООН (Центр ООН по поддержке процедур и практики управления, коммерции и транспорта) и консорциума OASIS, накопившего большой опыт в сфере организации ведения бизнеса в Интернете на базе XML. Целью данного проекта является разработка инфраструктуры электронного бизнеса — полного набора спецификаций, позволяющего осуществлять бизнес-взаимодействия через единообразную XML-среду. С появлением ebXML компании получили стандартизованный де-факто метод обмена данными и бизнес-сообщениями, а также единые условия информационной поддержки торговых отношений. Архитектура ebXML объединяет спецификации формата сообщений, модели бизнес-процессов, пакет синтаксически нейтральных базовых компонентов и распределенные хранилища данных (репозитории). Стандарт ebXML получает все более широкое распространение с внедрением технологии веб-сервисов (Web Services).

Эволюцию бизнес-моделей на протяжении XX века можно представить следующим образом:

- Самая старая бизнес-модель, которая до сих пор остается одной из базовых, - модель «хранителя магазина» (the shop keeper model): открытие магазина там, где находятся потенциальные клиенты;
- Следующая очень популярная бизнес-модель, которая появилась в начале 20-го столетия, после чего переживала многочисленные новые рождения, - это модель «приманки и крюка» (также называемая "моделью бритв и лезвий" или «моделью, привязывающей к продуктам").

Теоретические основы анализа экономических процессов

Наряду с представлениями о возможности построения прогноза событий, например, посредством создания математических моделей, обладающих начальным потоком данных, уникальной возможностью их позиционирования и формирования некоторого конечного состояния автомата, характеризуемого набором выходных данных, создавались представления о механизмах изменения экономики - макроэкономики с течением времени и при участии всех участников социума. В области экономики в 30-е годы прошлого столетия появилось имя Дж. Кейнса (1883-1946 гг.). В 1936 г. вышла в свет его основная работа «Общая теория занятости процента и денег». Вместе с выходом в свет этой книги наступил конец теории «невидимой руки рынка», конец теории автоматической настройки рыночной экономики.

Работа Кейнса содержит ряд новых идей. С первых страниц своей книги он указывает на приоритет первого слова в ее названии, т.е. общей теории, в отличие от частной интерпретации этих категорий со стороны неоклассиков. Далее он исследует причину кризисов и безработицы и разрабатывает программу борьбы с ними. Тем самым Кейнс впервые признал наличие безработицы и кризисов, внутренне присущих капитализму.

Затем он заявил о неспособности капитализма своими внутренними силами справиться с данными проблемами. По Кейнсу, при их решении необходимо вмешательство государства. Фактически он нанес удар по неоклассическому направлению в целом, а также по тезису об ограниченности ресурсов. Имеет место не нехватка ресурсов, а, наоборот, их переизбыток, о чем свидетельствует безработица. И если для рыночной экономики естественным является неполная занятость, то реализация теории предполагает полную занятость. Причем под последней Кейнс понимал не абсолютную занятость, а относительную. Он считал необходимой 3-хпроцентную безрабо-

тицу, которая должна служить буфером для давления на занятых и резервом для маневра при расширении производства.

Возникновение кризисов и безработицы Кейнс объяснял недостаточным «совокупным спросом», являющимся следствием двух причин. Первой причиной он назвал «основной психологический закон» общества. Суть его состоит в том, что с ростом дохода потребление растет, но в меньшей мере, чем доход. Другими словами, рост дохода граждан опережает их потребление, что и приводит к недостаточному совокупному спросу. В результате возникают диспропорции в экономике, кризисы, которые в свою очередь ослабляют стимулы капиталистов к дальнейшим инвестициям.

Второй причиной недостаточного «совокупного спроса» Кейнс считает невысокую норму прибыли на капитал вследствие высокого уровня процента. Это вынуждает капиталистов держать свой капитал в денежной форме (в ликвидной форме). Этим наносится ущерб росту инвестиций и еще более урезается «совокупный спрос». Недостаточный рост инвестиций в свою очередь не позволяет обеспечить занятость в обществе.

Следовательно, недостаточное расходование доходов, с одной стороны, и «предпочтение ликвидности» с другой, ведет к недопотреблению. Недопотребление уменьшает «совокупный спрос». Скапливаются нереализованные товары, что и приводит к кризисам и безработице. Кейнс делает следующий вывод: если рыночная экономика предоставлена самой себе, то она будет стагнировать.

Кейнс разработал макроэкономическую модель, в которой установил зависимость между инвестициями, занятостью, потреблением и доходом. Важная роль в ней отводится государству. Государство должно делать все возможное, чтобы поднять предельную (дополнительную) эффективность капитальных вложений, т.е. предельную рентабельность последней единицы капитала за счет дотаций, госзакупок и пр. В свою очередь, Центральный банк должен понижать ставку ссудного процента и проводить умеренную инфляцию. Инфляция должна обеспечить систематический умеренный рост цен, который будет стимулировать рост капиталовложений. В результате будут созданы новые рабочие места, что приведет к достижению полной занятости.

Главную ставку в увеличении совокупного спроса Кейнс делал на рост производительного спроса и производительного потребления. Недостаток личного потребления он предлагал компенсировать расширением производительного потребления.

Потребительский спрос нужно стимулировать через потребительский кредит. Кейнс также положительно относился к милитаризации экономики, сооружению пирамид, что, по его мнению, увеличивает размеры национального дохода, обеспечивает занятость рабочих и высокие прибыли. Наиболее полное выражение макроэкономическая модель Кейнса нашла в теории так называемого «мультипликационного процесса». В основу этой теории положен принцип мультипликатора. Мультипликатор означает множитель, т.е. кратное увеличение прироста дохода, занятости и потребления к приросту инвестиций. Кейнсианский «мультипликатор инвестиций» выражает отношение прироста дохода к приросту инвестиций.

Механизм «мультипликатора инвестиций» состоит в том, что инвестиции в какой-либо отрасли вызывают в ней увеличение производства и занятости. Результатом этого явится дополнительное расширение спроса на предметы потребления, что вызовет расширение их производства в соответствующих отраслях, которые предъявят дополнительный спрос на средства производства. По Кейнсу, мультипликатор инвестиций указывает, что когда происходит прирост общей суммы инвестиций, то доход возрастает на величину, которая в R раз больше, чем прирост инвестиций.

Мультипликатор зависит от величины «склонности к потреблению» C/Y , где Y — национальный доход, C — его часть, расходуемая на личное потребление. Чаще рассматривается зависимость мультипликатора от «предельной склонности к потреблению», т.е. отношения прироста потребления к приросту дохода $\Delta C/\Delta Y$. Чем больше предельная склонность к потреблению, тем больше величина мультипликатора, и значит, тем больше сдвиги в занятости, вызываемые данным изменением в рамках инвестиций. Таким образом, теория мультипликатора обосновывает наличие прямой и пропорциональной связей между накоплением капитала и потреблением. Размер накоп-

ления капитала (инвестиций) обусловлен «склонностью к потреблению», а накопление вызывает множественное увеличение потребления.

3. Математические основы моделирования

Для изучения процессов производства, экономических явлений на рынке создают модели. Построение модели осуществляется с использованием типовых представлений о потоках событий, наблюдаемых как в естественных условиях, так и искусственно созданных системах - автоматах. Наблюдения - это факты, данные позволяющие конструировать модели развития событий. Поскольку окружающий мир неоднороден, в нем присутствуют разные по природе события и явления, принято говорить о многомерности факторов влияющих на некоторый формальный исход процесса.

Многомерным статистическим анализом называется раздел математической статистики, изучающий методы сбора и обработки многомерных статистических данных, их систематизации и обработки с целью выявления характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака, получения практических выводов.

Предположим, что рассматривается некоторая совокупность, состоящая из n стран, для каждой из которых известны макроэкономические показатели: X_1 — валовой внутренний продукт, X_2 — площадь территории, X_3 — средняя продолжительность жизни населения и т. п. В результате получен набор из n наблюдений над k -мерным случайным вектором $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$.

Похожая ситуация возникает, когда изучается совокупность предприятий, для каждого из которых рассчитаны показатели X_1 — валовая прибыль, X_2 — численность работников, X_3 — стоимость основных производственных фондов и т. п.

Типичные задачи, которые можно решить методами многомерного статистического анализа, таковы:

- по наблюдавшимся значениям случайного вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ может понадобиться изучить связь между его компонентами X_1, X_2, \dots, X_k ;
- может понадобиться определить, какие из (большого числа) рассчитанных показателей X_1, X_2, \dots, X_k в наибольшей степени влияют на валовой внутренний продукт или на продолжительность жизни населения;
- может понадобиться классифицировать страны по какому-либо признаку.

Отметим, что способы сбора данных могут различаться. Так, если исследуется мировая экономика, то естественно взять в качестве объектов, на которых наблюдаются значения вектора X , страны, если же изучается национальная экономическая система, то естественно наблюдать значения вектора X на одной и той же (интересующей исследователя) стране в различные моменты времени.

Методы снижения размерности пространства описания процессов позволяют без существенной потери информации перейти от первоначальной системы большого числа наблюдаемых взаимосвязанных факторов к системе существенно меньшего числа скрытых (ненаблюдаемых) факторов, определяющих вариацию первоначальных признаков.

Другой подход - методы многомерной классификации предназначены для разделения совокупностей объектов (характеризующиеся большим числом признаков) на классы, в каждый из которых должны входить объекты, в определенном смысле однородные или близкие. Такую классификацию на основании статистических данных о значениях признаков на объектах можно провести методами кластерного и дискриминантного анализа.

Развитие вычислительной техники и программного обеспечения способствует широкому внедрению методов многомерного статистического анализа в практику. Однако применение программ без понимания математической сущности используемых алгоритмов способствует развитию у исследователя иллюзии простоты применения многомерных статистических методов, что может привести к неверным или необоснованным результатам. Значимые практические результаты могут быть получены только на основе профессиональных знаний в предметной области, под-

крепленных владением математическими методами и пакетами прикладных программ, в которых эти методы реализованы.

3.1 Основы построения решающих правил снижения размерности

Во многих практических задачах исследователя интересуют главным образом признаки, которые обнаруживают наибольшую изменчивость - вариабельность (т. е. разброс, дисперсию) при переходе от одного объекта к другому, при этом такие признаки часто невозможно наблюдать непосредственно на объектах.

Сущность задач снижения размерности многомерного пространства, которая заключается в выражении большого числа исходных факторов, непосредственно измеренных на объектах, через меньшее (как правило, намного меньшее) число более емких, максимально информативных, но непосредственно не наблюдаемых внутренних характеристик объектов. При этом предполагается, что более емкие признаки будут отражать наиболее существенные свойства объектов.

Целью методов снижения размерности является исследование внутренней структуры изучаемой системы к случайных величин, «сжатие» этой системы без существенной потери содержащейся в ней информации путем выявления небольшого числа факторов, объясняющих изменчивость и взаимосвязи исходных случайных величин.

Метод главных компонент выявляет k компонент — факторов, объясняющих всю дисперсию и корреляции исходных k случайных величин; при этом компоненты строятся в порядке убывания объясняемой ими доли суммарной дисперсии исходных величин, что позволяет зачастую ограничиться несколькими первыми компонентами.

Факторный анализ выявляет m ($m < k$) общих для всех исходных величин факторов, объясняя оставшуюся после этого дисперсию влиянием специфических факторов.

Среди прикладных задач, решаемых указанными методами, отметим следующие:

- поиск скрытых, но объективно существующих взаимосвязей между экономическими и социальными показателями, проверка гипотез о взаимосвязях этих показателей, выявление природы различий между объектами;
- описание изучаемой системы числом признаков, значительно меньшим числа исходных факторов, при этом выявленные факторы или главные компоненты содержат в среднем больше информации, чем непосредственно зафиксированные на объектах значения исходных факторов;
- построение обобщенных экономических и социальных показателей, таких как качество продукции, размер предприятия, интенсивность ведения хозяйства и т. п.;
- визуализация исходных многомерных наблюдений путем их проецирования на специально подобранную прямую, плоскость или трехмерное пространство;
- построение регрессионных моделей по главным компонентам;

в социальных и экономических задачах исходные факторы часто обладают мультиколлинеарностью (т. е. являются коррелированными между собой), что затрудняет построение и интерпретацию регрессионных моделей, не позволяя часто получать точные прогнозы; главные компоненты, сохраняя всю информацию об изучаемых объектах, являются некоррелированными по построению;

- классификация по обобщенным экономическим показателям;

практика показывает, что классификация объектов, проведенная по факторам или по главным компонентам, оказывается более объективной, чем классификация тех же объектов по исходным признакам; по одному - трем факторам или главным компонентам возможно проведение визуальной классификации, в случае большей размерности пространства обобщенных показателей, полученного в результате компонентного или факторного анализа, необходимо привлечение методов многомерной классификации сжатие исходной информации, значительное уменьшение объемов информации, хранимой в базах данных, без существенных потерь в информативности.

3.2 Математическая модель главных компонент

Метод главных компонент состоит в разложении (с помощью ортогонального преобразования) k -мерного случайного вектора

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$$

по системе линейно независимых векторов, в качестве которой выбирается ортонормированная система собственных векторов, отвечающих собственным значениям ковариационной матрицы вектора X .

Линейная модель главных компонент для центрированного вектора- столбца
 $X = X - MX$

записывается в виде

$$X = AF \quad (3.1)$$

где

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_k)^T \text{ —}$$

центрированный и нормированный случайный вектор-столбец некоррелированных главных компонент F_j ($j = 1, 2, \dots, k$),

$$A = (a_{ij}) \in R^{K \times K}$$

неслучайная матрица нагрузок случайных величин X_i на компоненты

$$F_j \quad (i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, k).$$

Рассмотрим алгоритм построения вектора F и расчета матрицы A .

Пусть имеется

$$\Sigma = M(XX^T)$$

ковариационная матрица вектора X . Будучи симметричной и неотрицательно определенной, она имеет k вещественных неотрицательных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Предположим, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$,

как и бывает обычно в большинстве приложений компонентного анализа.

Обозначим

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$V_j = (V_{1j}, V_{2j}, \dots, V_{kj})^T$$

нормированные собственные векторы-столбцы матрицы Σ , соответствующие собственным значениям λ_j ($j = 1, 2, \dots, k$). Тогда для всех $j = 1, 2, \dots, k$ справедливы следующие равенства:

$$\det|\Sigma - \lambda_j I| = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, k)$$

где I — единичная матрица порядка k ;

$$\sum V_j = \lambda_j V_j \quad (j = 1, 2, \dots, k); \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v}_p^T \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^k v_{ip} v_{ij} = \delta_{pj} = \begin{cases} 1, & p = j, \\ 0, & p \neq j \end{cases} \quad (3.3)$$

$(p = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, k).$

Введем матрицу

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k).$$

С учетом соотношений (3.2 и 3.3) имеем

$$\mathbf{v}_j^T \Sigma \mathbf{v}_p = \lambda_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_p = \begin{cases} \lambda_j, & p = j, \\ 0, & p \neq j \end{cases}$$

$(p = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, k),$

Тогда

$$\mathbf{V}^T \Sigma \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} = \Lambda. \quad (3.4)$$

Пусть

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{V}^T \dot{\mathbf{X}}; \quad (3.5)$$

Будем учитывать, что

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{M}(\mathbf{V}^T \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$$

(где $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^k$), то $\dot{\mathbf{F}}$ — центрированный вектор, а поскольку

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{F}}^T) = \mathbf{M}(\mathbf{V}^T \dot{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{V}) = \mathbf{V}^T \mathbf{M}(\dot{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}}^T) \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \Sigma \mathbf{V},$$

то в силу (1.2.4) компоненты вектора $\dot{\mathbf{F}}$ некоррелированы и

$$\mathbf{D} \dot{F}_j = \lambda_j \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Поэтому искомый центрированный и нормированный вектор \mathbf{F} равен

$$\mathbf{F} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{F}} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T \dot{\mathbf{X}}. \quad (3.6)$$

Обратим внимание на следующие факты:

- так как след матрицы Σ

$$\text{tr } \Sigma = \text{tr } \Lambda,$$

то

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{D} \dot{X}_i = \sum_{i=1}^k \mathbf{D} X_i = \text{tr } \Sigma = \text{tr } \Lambda = \sum_{j=1}^k \lambda_j = \sum_{j=1}^k \mathbf{D} \dot{F}_j, \quad (3.7)$$

т. е. дисперсия исходных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_k полностью исчерпывается дисперсией компонент $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dots, \dot{F}_k$; при этом, поскольку

$$\mathbf{D} \dot{F}_1 > \mathbf{D} \dot{F}_2 > \dots > \mathbf{D} \dot{F}_k,$$

то дисперсией каждой следующей компоненты объясняется меньшая доля дисперсии исходных случайных величин, чем дисперсией предыдущей компоненты;

- так как

$$\mathbf{M}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \mathbf{I},$$

то

$$\Sigma = \mathbf{M}(\dot{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}}^T) = \mathbf{M}(\mathbf{A} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{A}^T) = \mathbf{A} \mathbf{M}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^T \quad (3.8)$$

или

$$\text{cov}(X_i X_p) = \sum_j^k a_{ij} a_{pj} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (p = 1, 2, \dots, k)$$

$$\text{в частности } \mathbf{D} X_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Другими словами ковариационная матрица вектора X полностью воспроизводится матрицей нагрузок A .

$$\mathbf{M}(X \mathbf{F}^T) = \mathbf{M}(\mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{F}^T) = \mathbf{A} \mathbf{M}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T) = \mathbf{A} \quad (3.9)$$

$$\text{то } \text{cov}(X_i F_j) = a_{ij}$$

В таком случае ковариация случайной величины X_i и компоненты F_j равна нагрузке a_{ij} . Собственные значения и собственные векторы существенно зависят от выбора масштаба и единиц измерения случайных величин. Поэтому компонентный анализ эффективен, когда величины имеют одинаковую содержательную природу и измерены в одних и тех же единицах. К примерам таких величин можно отнести структуру бюджета времени индивидуумов или организаций (все X_i измеряются в единицах времени), структуру потребления семей, структуру затрат организаций (все X_i измеряются в денежных единицах) и т. п. При нарушении указанного условия вектор X нормируют и центрируют, тогда Σ — это корреляционная матрица, и из соотношений (3.7) по (3.9) следует, что

$$k = \sum_{j=1}^k \lambda_j,$$

или иначе $\frac{\lambda_j}{k}$ — характеризует долю суммарной дисперсии случайных величин X_1, X_2, \dots, X_k , которая может отображаться компонентой F_j . В таком случае имеем:

$$\rho(X_i, X_p) = \sum_{j=1}^k a_{ij} a_{pj};$$

$$\rho(X_i, F_j) = a_{ij};$$

$$\sum_{j=1}^k a_{ij}^2 = 1.$$

Отметим, что использование в компонентном анализе корреляционной матрицы затрудняет проверку ряда гипотез.

Найдем матрицу нагрузок A . Из соотношения (3.5), используя ортогональность матрицы V , получим:

$$V \dot{F} = V V^T \dot{X} = V V^{-1} \dot{X} = \dot{X},$$

а с учетом (3.6) получим:

$$\dot{X} = V \dot{F} = V \Lambda^{\frac{1}{2}} \dot{F}.$$

Отсюда имеем:

$$A = V \Lambda^{\frac{1}{2}},$$

$$F_j = \frac{\sum_{i=1}^k a_{ij} \dot{X}_i}{\lambda_j} = \frac{\sum_{i=1}^k v_{ij} \dot{X}_i}{\sqrt{\lambda_j}} \quad (j=1, 2, \dots, k). \quad (3.10)$$

Как правило, для анализа используют k' первых главных компонент, которыми исчерпывается не менее 70% дисперсии исходных случайных величин ($k' < k$). Можно доказать, что с помощью компонент $F_1, F_2, \dots, F_{k'}$ достигается наилучший, в смысле метода наименьших квадратов, прогноз величин X_1, X_2, \dots, X_k среди всех прогнозов, которые можно построить с помощью k' линейных комбинаций набора из k произвольных величин (это свойство называется свойством наилучшей само воспроизводимости), при этом относительная ошибка прогноза составляет

$$\delta = \frac{\sum_{i=k'+1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i}.$$

Или то что имеется на практике, где рекомендуется брать $K' = 1, 2$, или 3

$$\frac{k'}{k} \approx 10 \div 25\%.$$

Геометрический образ метода главных компонент

Метод главных компонент допускает следующую процедуру построения образа

- вначале (при переходе от исходного вектора \mathbf{X} к центрированному вектору $\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{MX}$) фактически производится перенос начала координат в точку \mathbf{MX} , являющуюся центром эллипсоида рассеивания случайного вектора \mathbf{X} ;
- затем производится поворот осей координат таким образом, чтобы новые оси координат $Of(1)$, $Of(2)$, ... были направлены вдоль осей эллипсоида рассеивания, причем разброс точек вдоль оси $Of(1)$ должен быть не меньше, чем вдоль оси $Of(2)$ и т. д.

При этом разброс наблюдений вдоль новой оси $Of(1)$ для исследователя наиболее важен, менее важен разброс вдоль оси $Of(2)$, а разбросом вдоль нескольких последних осей можно пренебречь. Графически это иллюстрирует рис. 3.1.

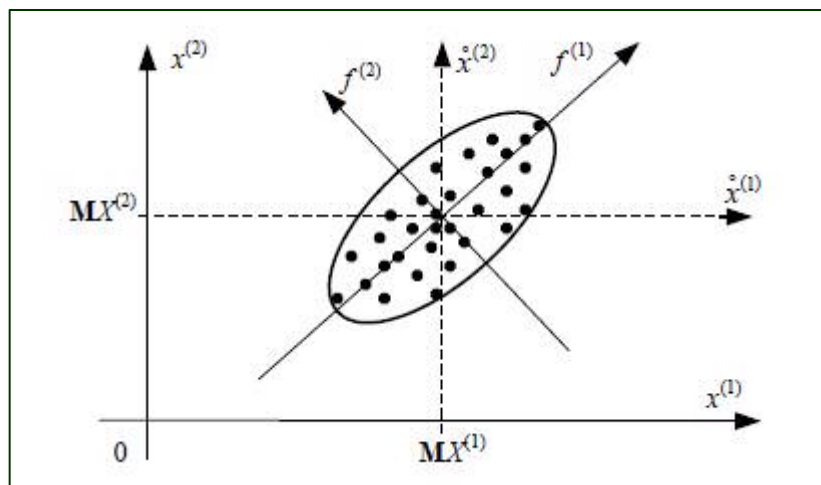


Рисунок 3.1 Построение образа

В реальных задачах располагают лишь n наблюдениями

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

k -мерного случайного вектора

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$$

и оценками \mathbf{MX} и Σ вектора математических ожиданий \mathbf{MX} и ковариационной матрицы Σ . Будем предполагать, что наблюдения центрированы, т. е. произведен переход от x_{ij} к

$$\tilde{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_j \quad \left(\text{где } \bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n} \right);$$

в дальнейшем значок « \sim » (тильда) над x будем опускать. Если вектор \mathbf{X} имеет нормальное распределение, наблюдения независимы, проведены в одинаковых вероятностных условиях, и все k собственных значений матрицы Σ различны, то справедливо:

- оценки $\hat{\mathbf{M}}$

$$\lambda_j, \dots, v_j = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{kj})^T \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

найденные по матрице Σ , являются оценками максимального правдоподобия соответственно для λ_j и v_j . Поэтому выборочные главные компоненты

$$\hat{F}_j = (\hat{f}_{j1}, \hat{f}_{j2}, \dots, \hat{f}_{jn}) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

где

$$\hat{f}_{ji} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}_j}} \sum_{p=1}^k \hat{v}_{pj} \hat{x}_{ip} \quad (j = 1, 2, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

можно интерпретировать как оценки главных компонент F_j (f_{ij} — оценка j главной компоненты на i -м объекте);

• случайные величины

$$Y_j = \sqrt{n-1}(\hat{\lambda}_j - \lambda_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

являются асимптотически нормальными с математическими ожиданиями $MY_j = 0$ и дисперсиями $DY_j = \lambda_j$. Поэтому при больших n доверительный интервал для собственного значения λ_j задается выражением:

$$P \left\{ \frac{\hat{\lambda}_j}{1 + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{(n-1)r}}} \leq \lambda_j \leq \frac{\hat{\lambda}_j}{1 - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{(n-1)r}}} \right\} = 1 - \alpha, \quad (3.11)$$

где $u_{\alpha/2}$ — квантиль уровня $\alpha/2$ стандартного нормального распределения (т. е. число, при котором $P\{N(0; 1) < u_{\alpha/2}\} = \alpha/2$), а r — кратность собственного значения λ_j (в данном случае $r = 1$). Если λ_i попадает в доверительный интервал для λ_j при $i \neq j$, то возможно, что $\lambda_i = \lambda_j$.

Проверка гипотезы

$$H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$$

[или равносильной ей гипотезы о диагональном виде ковариационной матрицы Σ (корреляционной матрицы R)] основана на том, что при достаточно больших n статистика

$$\left[n - \frac{1}{6} \left(2k + 1 + \frac{2}{k} \right) \right] \left[-\ln(\det || \hat{\Sigma} ||) + k \ln \frac{\text{tr } \hat{\Sigma}}{k} \right]$$

$$\chi^2 \left(\frac{k(k+1)}{2} - 1 \right)$$

(где $\det || \Sigma$ — определитель матрицы Σ) имеет распределение

$$-\left(n - \frac{2k+5}{6}\right) \ln(\det |\hat{\mathbf{R}}|)$$

$$\chi^2\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)].$$

имеет распределение

Принятие гипотезы H_0 означает, что переход к главным компонентам равносильно упорядочению исходных величин в порядке убывания их дисперсий.

Далее. Предположим, что k' первых главных компонент учтены; пусть $m = k - k'$.

Проведем проверку гипотезы

$$H_0: \lambda_{k'+1} = \lambda_{k'+2} = \dots = \lambda_k$$

основана на статистике

$$a \left[-\ln(\det |\hat{\Sigma}|) + \ln(\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \dots \hat{\lambda}_{k'}) + m \ln b \right],$$

где

$$a = n - k' - \frac{1}{6} \left(2m + 1 + \frac{2}{m} \right), \quad b = \frac{\text{tr} \hat{\Sigma} - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{k'}}{m},$$

имеющей при больших n распределение $\chi^2\left(\frac{(m+2)(m-1)}{2}\right)$.

Если используется матрица $\hat{\mathbf{R}}$, и k' компонентами исчерпывается бо́льшая доля суммарной дисперсии, то проверка гипотезы H_0 основана на аналогичной статистике с заменой $\hat{\Sigma}$ на $\hat{\mathbf{R}}$ и a на n ; однако в этом случае

аппроксимация распределения этой статистики распределением χ^2 менее точна, даже при больших значениях n , чем при использовании матрицы Σ

3.3 Комментарии к методу главных компонент

Рассмотрим условный пример построения алгоритма. Пусть эффективность создания производства зависит от множества факторов $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Требуется найти такое преобразование величин X_i в новый набор величин $Z_i = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$, которые были бы независимыми и располагались в порядке убывания дисперсий.

Каждая величина Z_i представляет собой линейную комбинацию m исходных величин, т.е. имеет вид:

$$Z = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m \quad (3.11)$$

Эта величина и называется главной компонентой. Теоретически число главных компонент равно числу исходных параметров, однако, первые две - четыре главные компоненты описывают до 90 %

изменчивости исходного массива. Для двух случайных величин x_1 и x_2 первая главная компонента может быть записана:

$$Z_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad (3.12)$$

где α_1 и α_2 - неизвестные параметры. Пусть имеется некоторое число n наблюдений над x_1 и x_2 . Для пары наблюдений с номером j ($j=1 \dots n$) можно найти величину $h_j^2 = x_{1j}^2 + x_{2j}^2$, которая может быть определена через главную компоненту

$$h_j^2 = (b_1 x_{1j} + b_2 x_{2j})^2 + d_j^2 = Z_{1j}^2 + d_j^2, \quad (3.13)$$

где d_j - случайная составляющая, соответствующая наблюдению с номером j , b_1 и b_2 - оценки α_1 и α_2 , которые находят минимизацией выражения:

$$\sum_{j=1}^n d_j^2 = \sum_{j=1}^n [h_j^2 - (b_1 x_{1j} + b_2 x_{2j})^2]. \quad (3.14)$$

Для того, чтобы избежать неоднозначных решений при определении b_1 и b_2 вводится условие $b_1^2 + b_2^2 = 1$. Это позволяет представить главную компоненту (3.12) в виде:

$$Z_1 = \alpha_1 (x_1 - \mu_1) + \alpha_2 (x_2 - \mu_2), \quad (3.15)$$

где μ_1 и μ_2 - неизвестные истинные средние значения случайных величин x_1 и x_2 . С учетом (5) уравнение (4) может быть записано:

$$\sum_{j=1}^n d_j^2 = \sum_{j=1}^n \{h_j^2 - [b_1(x_{1j} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2j} - \bar{x}_2)]^2\} = \sum_{j=1}^n h_j^2 - \sum_{j=1}^n [b_1(x_{1j} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2j} - \bar{x}_2)]^2, \quad (3.16)$$

где \bar{x}_1 и \bar{x}_2 - выборочные средние значения величин x_1 и x_2 , а

$$h_j^2 = (x_{1j} - \bar{x}_1)^2 + (x_{2j} - \bar{x}_2)^2.$$

$\sum_{j=1}^n h_j^2$ для одной и той же совокупности наблюдений величина постоянная. Из уравнения (3.16)

видно, что минимизация этой величины равносильна минимизации выражения

$$\sum_{j=1}^n [b_1(x_{1j} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2j} - \bar{x}_2)]^2 = \sum_{j=1}^n Z_{1j}^2,$$

которое представляет собой сумму квадратов значений главной компоненты Z_{1j} .

Вторая главная компонента имеет вид: $Z_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$. На коэффициенты α и β накладываются следующие ограничения:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1, \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0$$

Эти условия означают, что векторы (α_1, α_2) и (β_1, β_2) ортогональны. Для случая m переменных ($m > 2$) главная компонента равна

$$Z_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}x_{ij}, \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.16) примет вид:

$$\sum_{j=1}^n d_j^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^m b_i (z_{ij} - \bar{x}_i) \right]^2, \quad \text{где } \bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}}{n}.$$

Свойства главных компонент таковы, что описание объектов в пространстве k главных компонент имеет наименьшие искажения особенностей их взаимного расположения по сравнению с описанием в любом другом подпространстве той же размерности. Интерес представляет случай, когда k не велико. Тогда расположение объектов в пространстве выбранных главных компонент легко изучается визуально. При этом становится возможным делать выводы общего характера, например, выделить скопления объектов. Другая возможность использования главных компонент состоит в том, что при количественном описании объектов при проведении в дальнейшем статистического анализа ограничиваются только выделенными k компонентами ($k < p$). Например, в множественном регрессионном анализе вместо большого набора независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_m можно рассмотреть гораздо меньший набор главных компонент, к тому же не коррелирующих друг с другом.

Рассмотрим пример

Пусть существует некоторая сложная система, которая имеет три входа и один выход, или три входных фактора и одну выходную характеристику. Зависимость, которая существует между ними, имеет вид

$Y = f(X_1, X_2, X_3)$, в нашем случае предполагаем ее линейной, то

есть $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$. Коэффициенты $a_i, i = \overline{1,3}$ необходимо определить. Известна табл. 1 данных эксперимента (или статистических данных).

Исследуем исходные данные на мультиколлинеарность. На первом шаге нормируем исходные данные и получим табл. 2. При нормализации учитываем, что $n=10, \bar{X}_1=11.4, \bar{X}_2=5.7, \bar{X}_3=43.6, \sigma_1=7.2691, \sigma_2=3.002, \sigma_3=19.38$. Транспонируем матрицу табл. 2 и умножим транспонированную матрицу на исходную из табл. 2. Получим корреляционную матри-

цу

$$r = \begin{pmatrix} 1 & -0.146 & 0.983 \\ -0.146 & 1 & -0.21 \\ 0.983 & -0.21 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующим шагом определим.

$$\chi^2 = -\left(10 - 1 - \frac{1}{6} \cdot (2 - 3 + 5)\right) \cdot \ln |r| = -\left(9 - \frac{11}{6}\right) \cdot \ln(0.028434) = 25.51463$$

Таблица 1

| X1 | X2 | X3 | Y |
|----|----|----|----|
| 1 | 9 | 12 | 23 |
| 3 | 8 | 23 | 43 |
| 5 | 3 | 34 | 12 |
| 7 | 2 | 29 | 26 |
| 9 | 5 | 38 | 76 |
| 12 | 6 | 45 | 43 |
| 15 | 7 | 54 | 23 |
| 18 | 11 | 56 | 76 |
| 21 | 1 | 67 | 18 |
| 23 | 5 | 78 | 44 |

Таблица 2

| X1n | X2n | X3n |
|----------|----------|----------|
| -0,45243 | 0,347657 | -0,51572 |
| -0,36542 | 0,242307 | -0,3362 |
| -0,27842 | -0,28445 | -0,15668 |
| -0,19141 | -0,3898 | -0,23828 |
| -0,10441 | -0,07375 | -0,09139 |
| 0,026102 | 0,031605 | 0,022849 |
| 0,156611 | 0,136956 | 0,169732 |
| 0,287119 | 0,558359 | 0,202372 |
| 0,417628 | -0,49515 | 0,381896 |
| 0,504634 | -0,07375 | 0,56142 |

Сравним вычисленное значение с табличным при 3 степенях свободы и уровне значимости $\alpha = 0.05$, $F_{\text{табл}} = 7.8$. Поскольку вычисленное значение больше табличного, то в массиве факторов существует мультиколлинеарность.

Определим мультиколлинеарность каждого фактора с остальными. Для этого найдем

$$C = r^{-1} = \begin{pmatrix} 33.614 & -2.141 & -33.5 \\ -2.138 & 1.182 & 2.351 \\ 33.49 & 2.353 & 34.42 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу

и вычислим F -критерии.

Так, $F_1 = 114.1498$, $F_2 = 0.63827$, $F_3 = 119.979$. Поскольку табличное значение критерия при 7 и 2 степенях свободы равно $F_{\text{табл}} = 19.36$, то сравнивая вычисленные значения и табличное, получим, что первый и третий фактор мультиколлинеарен с другими.

Таблица 3

| X1 | X2 | X3 |
|--------|-------|--------|
| -1,431 | 1,099 | -1,631 |
| -1,156 | 0,766 | -1,063 |
| -0,88 | -0,9 | -0,495 |
| -0,605 | -1,23 | -0,753 |
| -0,33 | -0,23 | -0,289 |
| 0,083 | 0,1 | 0,0723 |
| 0,495 | 0,433 | 0,5367 |
| 0,908 | 1,766 | 0,64 |
| 1,321 | -1,57 | 1,2077 |
| 1,596 | -0,23 | 1,7754 |

Для выяснения мультиколлинеарности каждой пары переменных находим частичные коэффициенты корреляции: $r_{12} = 0.339543$, $r_{13} = 0.984722$, $r_{23} = -0.36845$ и вычисляем значения t -критерия: $t_{12} = 0.9551$, $t_{13} = 14.961$, $t_{23} = -1.049$. Вычисленные значения сравниваем с табличным при 7 степенях свободы и уровне значимости

$$\alpha = 0.05, t_{\text{табл}} = 2.45$$

Мультиколлинеарность существует между первым и третьим факторами.

Далее для поиска коэффициентов линейной модели используем метод главных компонент. Вначале нормализуем вектор факторов (начальный), получим табл.3.

$$r = \begin{pmatrix} 1 & -0.14 & 0.983 \\ -0.14 & 1 & -0.21 \\ 0.983 & -0.21 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим корреляционную матрицу

Далее находим собственные (характеристические) числа матрицы \mathbf{r} . Полу-

$$\text{eigenvals}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 2.045 \\ 0.012 \\ 0.943 \end{pmatrix}$$

чим

$$\text{eigenvecs}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0.682 & -0.701 & 0.189 \\ -0.237 & 0.045 & 0.974 \\ 0.692 & 0.711 & 0.128 \end{pmatrix}$$

Вычисляем собственные векторы
ные числа, получим массив (2.045, 0.943, 0.012). Соответственно массив собственных векторов

$$\begin{pmatrix} 0.682 & 0.189 & 0.189 \\ -0.237 & 0.974 & 0.974 \\ 0.692 & 0.128 & 0.711 \end{pmatrix}$$

будет таким

Вычислим главные компоненты:

$$\mathbf{Z}_1 = (-2.323, -1.762, -0.747, -0.678, -0.365, 0.079, 0.613, 0.644, 2.117, 2.37)$$

$$\mathbf{Z}_2 = (0.602, 0.382, -1.111, -1.385, -0.29, 0.121, 0.582, 1.978, -1.154, 0.335)$$

$$\mathbf{Z}_3 = (-0.107, 0.094, 0.235, -0.202, -0.012, -0.002, 0.053, -0.103, -0.137, 0.135)$$

Следующим шагом проведем определение параметров модели

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\mathbf{b} \text{ по формуле}$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Y}$$

Полученный результат: $\mathbf{b} = (1.431, 12.992, -32.11)$

И остается вычислить параметры модели $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ по формуле $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, где \mathbf{a} - массив собственных векторов. Результат $\boldsymbol{\beta} = (25.94, 10.87, -20.17)$

Таким образом, искомая модель имеет вид

$$\mathbf{Y} = 25.94\mathbf{X}_1 + 10.87\mathbf{X}_2 - 20.17\mathbf{X}_3$$

Полученное выражение можно рассматривать в качестве основы построения графического образа

3.4 Сущность методов факторного анализа и их классификация

В современной статистике под факторным анализом понимают совокупность методов, которые на основе реально существующих связей признаков, объектов или явлений позволяют выявлять латентные (скрытые и не доступные для непосредственного измерения) обобщающие характеристики организованной структуры и механизма развития изучаемых явлений или процессов.

Понятие латентности является ключевым и означает неявность характеристик, раскрываемых при помощи методов факторного анализа. Идея, заложенная в основе факторного анализа, достаточно проста. В результате измерения мы имеем дело с набором элементарных признаков X_i , измеренных по нескольким шкалам. Это – явные переменные. Если признаки изменяются согласованно, то можно предположить существование определенных общих причин этой изменчивости, т.е. существование некоторых скрытых (латентных) факторов. Задача анализа – найти эти факторы.

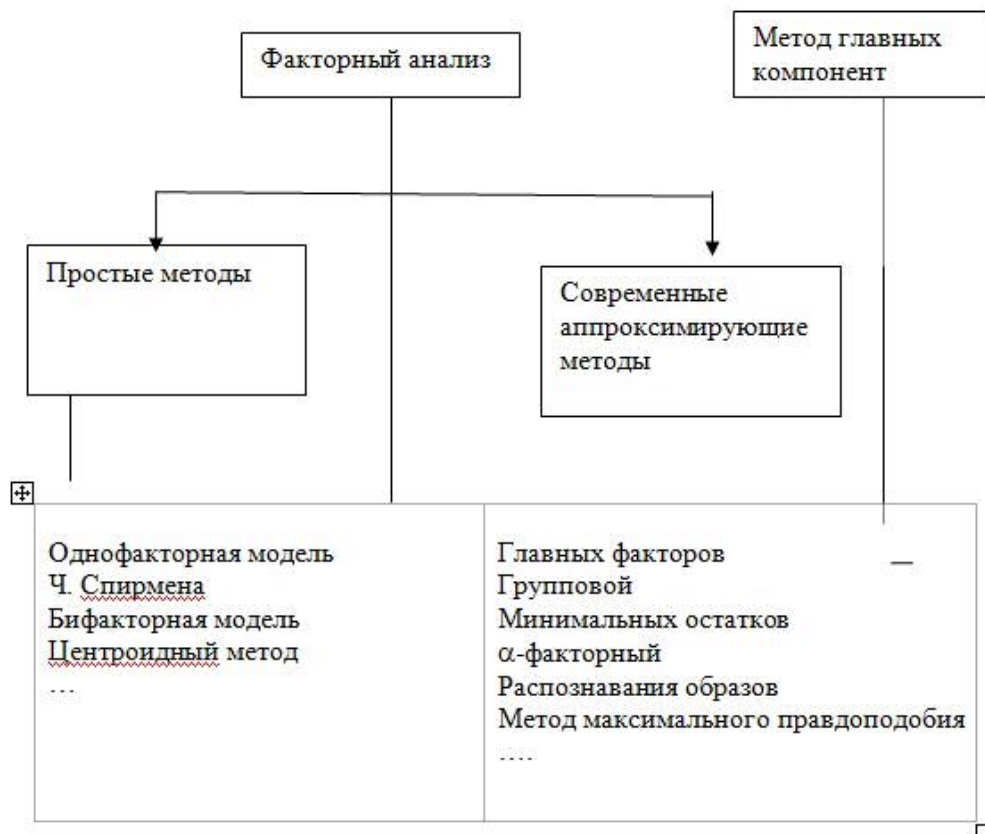


Рис. 3.2 Классификация методов факторного анализа

4. Многофакторный анализ

Прежде чем начать говорить об одном из видов финансового анализа – факторном анализе, напомним, что такое финансовый анализ и каковы его цели. Финансовый анализ представляет собой метод оценки финансового состояния и эффективности работы хозяйствующего субъекта на основе изучения зависимости и динамики показателей финансовой отчетности.

Финансовый анализ преследует несколько целей:

- оценку финансового положения;
- выявление изменений в финансовом состоянии в пространственно-временном разрезе;
- выявление основных факторов, вызвавших изменения в финансовом состоянии;
- прогноз основных тенденций в финансовом состоянии.

Как известно, существуют следующие основные виды финансового анализа:

- горизонтальный анализ;

- вертикальный анализ;
- трендовый анализ;
- метод финансовых коэффициентов;
- сравнительный анализ;
- факторный анализ.

Каждый вид финансового анализа основан на применении какой-либо модели, дающей возможность оценить и проанализировать динамику основных показателей деятельности предприятия. Выделяют три основных типа моделей: дескриптивные, предикативные и нормативные.

Дескриптивные модели известны также, как модели описательного характера. Они являются основными для оценки финансового состояния предприятия. К ним относятся: построение системы отчетных балансов, представление финансовой отчетности в различных аналитических разрезах, вертикальный и горизонтальный анализ отчетности, система аналитических коэффициентов, аналитические записки к отчетности. Все эти модели основаны на использовании информации бухгалтерской отчетности.

В основе вертикального анализа лежит иное представление бухгалтерской отчетности – в виде относительных величин, характеризующих структуру обобщающих итоговых показателей. Обязательным элементом анализа являются динамические ряды этих величин, что позволяет отслеживать и прогнозировать структурные сдвиги в составе хозяйственных средств и источников их покрытия.

Горизонтальный анализ позволяет выявить тенденции изменения отдельных статей или их групп, входящих в состав бухгалтерской отчетности. В основе этого анализа лежит исчисление базисных темпов роста статей баланса и отчета о прибылях и убытках.

Система аналитических коэффициентов – основной элемент анализа финансового состояния, применяемый различными группами пользователей: менеджеры, аналитики, акционеры, инвесторы, кредиторы и др. Существуют десятки таких показателей, подразделяемых на несколько групп по основным направлениям финансового анализа:

- показатели ликвидности;
- показатели финансовой устойчивости;
- показатели деловой активности;
- показатели рентабельности.

Предикативные модели – это модели предсказательного характера. Они используются для прогнозирования доходов предприятия и его будущего финансового состояния. Наиболее распространенными из них являются: расчет точки критического объема продаж, построение прогнозных финансовых отчетов, модели динамического анализа (жестко детерминированные факторные модели и регрессионные модели), модели ситуационного анализа.

Нормативные модели. Модели этого типа позволяют сравнить фактические результаты деятельности предприятий с ожидаемыми, рассчитанными по бюджету. Эти модели используются в основном во внутреннем финансовом анализе. Их сущность сводится к установлению нормативов по каждой статье расходов по технологическим процессам, видам изделий, центрам ответственности и т. п. и к анализу отклонений фактических данных от этих нормативов. Анализ в значительной степени базируется на применении жестко детерминированных факторных моделей.

4.1 Факторные системы

Все явления и процессы хозяйственной деятельности предприятий находятся во взаимозависимости. Связь экономических явлений – это совместное изменение двух или более явлений. Среди многих форм закономерных связей важную роль играет причинно-следственная (детерминистская), при которой одно явление порождает другое.

В хозяйственной деятельности предприятия некоторые явления непосредственно связаны между собой, другие - косвенно. Например, на величину валовой продукции непосредственное влияние оказывают такие факторы, как численность рабочих и уровень производительности их труда. Множество других факторов косвенно воздействует на этот показатель.

Кроме того, каждое явление можно рассматривать как причину и как следствие. Например, производительность труда можно рассматривать, с одной стороны, как причину изменения объема производства, уровня ее себестоимости, а с другой - как результат изменения степени механизации и автоматизации производства, усовершенствования организации труда и т. д. Количественная характеристика взаимосвязанных явлений осуществляется с помощью показателей. Показатели, характеризующие причину, называются факторными (независимыми); показатели, характеризующие следствие, называются результативными (зависимыми). Совокупность факторных и результативных признаков, связанных причинно-следственной связью, называется факторной системой.

Моделирование какого-либо явления - это построение математического выражения существующей зависимости. Моделирование - это один из важнейших методов научного познания. Существуют два типа зависимостей, изучаемых в процессе факторного анализа: функциональные и стохастические.

Связь называется функциональной, или жестко детерминированной, если каждому значению факторного признака соответствует вполне определенное неслучайное значение результативного признака.

Связь называется стохастической (вероятностной), если каждому значению факторного признака соответствует множество значений результативного признака, т. е. определенное статистическое распределение.

Модель факторной системы - это математическая формула, выражающая реальные связи между анализируемыми явлениями. В общем виде она может быть представлена так:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где y - результативный признак;

x_i - факторные признаки.

Таким образом, каждый результативный показатель зависит от многочисленных и разнообразных факторов. В основе экономического анализа и его раздела - факторного анализа - лежат выявление, оценка и прогнозирование влияния факторов на изменение результативного показателя. Чем детальнее исследуется зависимость результативного показателя от тех или иных факторов, тем точнее результаты анализа и оценка качества работы предприятий. Без глубокого и всестороннего изучения факторов нельзя сделать обоснованные выводы о результатах деятельности, выявить резервы производства, обосновать планы и управленческие решения.

4.2 Факторный анализ, его виды и задачи

Под факторным анализом понимается методика комплексного и системного изучения и измерения воздействия факторов на величину результативных показателей. В общем случае можно выделить следующие основные этапы факторного анализа:

- Постановка цели анализа.
- Отбор факторов, определяющих исследуемые результативные показатели.
- Классификация и систематизация факторов с целью обеспечения комплексного и системного подхода к исследованию их влияния на результаты хозяйственной деятельности.
- Определение формы зависимости между факторами и результативным показателем.
- Моделирование взаимосвязей между результативным и факторными показателями.
- Расчет влияния факторов и оценка роли каждого из них в изменении величины результативного показателя.

Работа с факторной моделью (практическое ее использование для управления экономическими процессами). Отбор факторов для анализа того или иного показателя осуществляется на основе теоретических и практических знаний в конкретной отрасли. При этом обычно исходят из принципа: чем больший комплекс факторов исследуется, тем точнее будут результаты анализа. Вместе с тем необходимо иметь в виду, что если этот комплекс факторов рассматривается как механическая сумма, без учета их взаимодействия, без выделения главных, определяющих, то выводы могут быть ошибочными. В анализе хозяйственной деятельности (АХД) взаимосвязанное исследование влияния факторов на величину результативных показателей достигается с помощью их систематизации, что является одним из основных методологических вопросов этой науки.

Важным методологическим вопросом в факторном анализе является определение формы зависимости между факторами и результативными показателями: функциональная она или стохастическая, прямая или обратная, прямолинейная или криволинейная. Здесь используется теоретический и практический опыт, а также способы сравнения параллельных и динамических рядов, аналитических группировок исходной информации, графический и др.

Моделирование экономических показателей также представляет собой сложную проблему в факторном анализе, решение которой требует специальных знаний и навыков.

Расчет влияния факторов - главный методологический аспект в АХД. Последний этап факторного анализа - практическое использование факторной модели для подсчета резервов прироста результативного показателя, для планирования и прогнозирования его величины при изменении ситуации.

В зависимости от типа факторной модели различают два основных вида факторного анализа - детерминированный и стохастический.

Детерминированный факторный анализ представляет собой методику исследования влияния факторов, связь которых с результативным показателем носит функциональный характер, т. е. когда результативный показатель факторной модели представлен в виде произведения, частного или алгебраической суммы факторов.

Данный вид факторного анализа наиболее распространен, поскольку, будучи достаточно простым в применении (по сравнению со стохастическим анализом), позволяет осознать логику действия основных факторов развития предприятия, количественно оценить их влияние, понять, какие факторы и в какой пропорции возможно и целесообразно изменить для повышения эффективности производства. Подробно детерминированный факторный анализ мы рассмотрим в отдельной главе.

Стохастический анализ представляет собой методику исследования факторов, связь которых с результативным показателем в отличие от функциональной является неполной, вероятностной (корреляционной). Если при функциональной (полной) зависимости с изменением аргумента всегда происходит соответствующее изменение функции, то при корреляционной связи изменение аргумента может дать несколько значений прироста функции в зависимости от сочетания других факторов, определяющих данный показатель. Например, производительность труда при одном и том же уровне фондовооруженности может быть неодинаковой на разных предприятиях. Это зависит от оптимальности сочетания других факторов, воздействующих на этот показатель.

Стохастическое моделирование является в определенной степени дополнением и углублением детерминированного факторного анализа. В факторном анализе эти модели используются по трем основным причинам:

- необходимо изучить влияние факторов, по которым нельзя построить жестко детерминированную факторную модель (например, уровень финансового левериджа);
- необходимо изучить влияние сложных факторов, которые не поддаются объединению в одной и той же жестко детерминированной модели;
- необходимо изучить влияние сложных факторов, которые не могут быть выражены одним количественным показателем (например, уровень научно-технического прогресса).
- В отличие от жестко детерминированного стохастический подход для реализации требует ряда предпосылок:

- наличие совокупности;
- достаточный объем наблюдений;
- случайность и независимость наблюдений;
- однородность;
- наличие распределения признаков, близкого к нормальному;
- наличие специального математического аппарата.

Построение стохастической модели проводится в несколько этапов:

- качественный анализ (постановка цели анализа, определение совокупности, определение результативных и факторных признаков, выбор периода, за который проводится анализ, выбор метода анализа);
 - предварительный анализ моделируемой совокупности (проверка однородности совокупности, исключение аномальных наблюдений, уточнение необходимого объема выборки, установление законов распределения изучаемых показателей);
 - построение стохастической (регрессионной) модели (уточнение перечня факторов, расчет оценок параметров уравнения регрессии, перебор конкурирующих вариантов моделей);
 - оценка адекватности модели (проверка статистической существенности уравнения в целом и его отдельных параметров, проверка соответствия формальных свойств оценок задачам исследования);
 - экономическая интерпретация и практическое использование модели (определение пространственно-временной устойчивости построенной зависимости, оценка практических свойств модели).
- Кроме деления на детерминированный и стохастический, различают следующие типы факторного анализа:
- прямой и обратный;
 - одноступенчатый и многоступенчатый;
 - статический и динамичный;
 - ретроспективный и перспективный (прогнозный).
- При прямом факторном анализе исследование ведется дедуктивным способом - от общего к частному. Обратный факторный анализ осуществляет исследование причинно-следственных связей способом логичной индукции - от частных, отдельных факторов к обобщающим.

Факторный анализ может быть одноступенчатым и многоступенчатым. Первый тип используется для исследования факторов только одного уровня (одной ступени) подчинения без их детализации на составные части. Например, $y = a * b$.

При многоступенчатом факторном анализе проводится детализация факторов a и b на составные элементы с целью изучения их поведения. Детализация факторов может быть продолжена и дальше. В этом случае изучается влияние факторов различных уровней соподчиненности.

Необходимо также различать статический и динамический факторный анализ. Первый вид применяется при изучении влияния факторов на результативные показатели на соответствующую дату. Другой вид представляет собой методику исследования причинно-следственных связей в динамике.

И, наконец, факторный анализ может быть ретроспективным, который изучает причины прироста результативных показателей за прошлые периоды, и перспективным, который исследует поведение факторов и результативных показателей в перспективе.

4.3 Детерминированный факторный анализ

Детерминированный факторный анализ имеет достаточно жесткую последовательность выполняемых процедур:

- построение экономически обоснованной детерминированной факторной модели;
- выбор приема факторного анализа и подготовка условий для его выполнения;
- реализация счетных процедур анализа модели;
- формулирование выводов и рекомендаций по результатам анализа.

Первый этап особенно важен, так как неправильно построенная модель может привести к логически неоправданным результатам. Смысл этого этапа состоит в следующем: любое расширение жестко детерминированной факторной модели не должно противоречить логике связи “причина – следствие”. В качестве примера рассмотрим модель, связывающую объем реализации (Р), численность (Ч) и производительность труда (ПТ).

Теоретически можно исследовать три модели:

$$P = Ч \cdot ПТ; Ч = P / ПТ; ПТ = P / Ч;$$

Все три формулы верны с позиции арифметики, однако с позиции факторного анализа только первая имеет смысл, поскольку в ней показатели, стоящие в правой части формулы, являются факторами, т. е. причиной, порождающей и определяющей значение показателя, стоящего в левой части (следствие).

На втором этапе выбирается один из приемов факторного анализа: интегральный, цепных подстановок, логарифмический и др. Каждый из этих приемов имеет свои достоинства и недостатки. Краткую сравнительную характеристику этих способов мы рассмотрим ниже.

4.4 Виды детерминированных факторных моделей

Существуют следующие модели детерминированного анализа:

аддитивная модель, т. е. модель, в которую факторы входят в виде алгебраической суммы, в качестве примера можно привести **модель товарного баланса**:

$$P = З_{Н} + П - З_{К} - В,$$

где Р - реализация;

$З_{Н}$ - запасы на начало периода;

П - поступление товаров;

$З_{К}$ - запасы на конец периода;

В - прочее выбытие товаров;

мультипликативная модель, т. е. модель, в которую факторы входят в виде произведения; примером может служить простейшая двухфакторная модель:

$$P = Ч \cdot ПТ,$$

где Р - реализация;

Ч - численность;

ПТ - производительность труда;

кратная модель, т. е. модель, представляющая собой отношение факторов, например:

$$\Phi_{В} = \frac{ОС}{Ч},$$

где $\Phi_{В}$ - фондовооруженность;

ОС - стоимость основных средств;

Ч - численность;

смешанная модель, т. е. модель, в которую факторы входят в различных комбинациях, например:

$$P_{г} = \frac{P}{ОС + Об},$$

где Р - реализация;

P_r - рентабельность;

ОС - стоимость основных средств;

Об - стоимость оборотных средств.

Жестко детерминированная модель, имеющая более двух факторов, называется многофакторной.

4.5 Типовые задачи детерминированного факторного анализа

В детерминированном факторном анализе можно выделить четыре типовые задачи:

Оценка влияния относительного изменения факторов на относительное изменение резуль- тативного показателя. Оценка влияния абсолютного изменения i-го фактора на абсолютное изменение ре- зультативного показателя.

Определение отношения величины изменения резуль- тативного показателя, вызванного из- менением i-го фактора, к базовой величине резуль- тативного показателя.

Определение доли абсолютного изменения резуль- тативного показателя, вызванного изме- нением i-го фактора, в общем изменении резуль- тативного показателя. Охарактеризуем эти задачи и рассмотрим решение каждой из них на конкретном простом примере.

Пример.

Объем валовой продукции (ВП) зависит от двух основных факторов первого уровня: численности работников (ЧР) и среднегодовой выработки (ГВ). Имеем двухфакторную мультипликативную модель: $ВП = ЧР \cdot ГВ$. Рассмотрим ситуацию, когда и выработка, и численность рабочих в отчет- ном периоде отклонились от запланированных значений.

Данные для расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Данные для факторного анализа объема валовой продукции.

| Показатель | Условное обо- значение | План | Факт | Отклонение |
|--|------------------------|---------|---------|------------|
| Валовая продукция, млн. руб. | ВП | 160 000 | 240 000 | 80 000 |
| Среднегодовая числен- ность рабочих, чел. | ЧР | 1000 | 1200 | +200 |
| Среднегодовая выработка одного рабочего, млн. руб. | ГВ | 160 | 200 | +40 |

Задача 1.

Задача имеет смысл для мультипликативных и кратных моделей. Рассмотрим простейшую двух- факторную модель $p = a \cdot b$. Очевидно, что при анализе динамики этих показателей будет выпол- няться следующее соотношение между индексами:

$$I_p = I_a \cdot I_b$$

где значение индекса находится отношением значения показателя в отчетном периоде к базисно- му.

Рассчитаем индексы валовой продукции, численности работников и среднегодовой выработки для нашего примера:

$$I_{\text{чр}} = \frac{\text{ЧР}_{\phi}}{\text{ЧР}_{\text{пл}}} = \frac{1200}{1000} = 1,2$$

$$I_{\text{зе}} = \frac{\text{ГВ}_{\phi}}{\text{ГВ}_{\text{пл}}} = \frac{200}{160} = 1,25$$

Согласно вышеприведенному правилу, индекс валовой продукции равен произведению индексов численности работников и среднегодовой выработки, т. е.

$$I_{\text{еп}} = I_{\text{чр}} \cdot I_{\text{зе}} = 1,2 \cdot 1,25 = 1,5$$

Очевидно, что если мы рассчитаем непосредственно индекс валовой продукции, то получим то же самое значение:

$$I_{\text{еп}} = \frac{\text{ЧР}_{\phi} \cdot \text{ГВ}_{\phi}}{\text{ЧР}_{\text{пл}} \cdot \text{ГВ}_{\text{пл}}} = \frac{1200 \cdot 200}{1000 \cdot 160} = \frac{240000}{160000} = 1,5$$

Можно сделать вывод: в результате увеличения численности работников в 1,2 раза и увеличения среднегодовой выработки в 1,25 раза объем валовой продукции увеличился в 1,5 раза.

Таким образом, относительные изменения факторных и результативного показателей связаны той же зависимостью, что и показатели в исходной модели. Данная задача решается при ответе на вопросы типа: "Что будет, если i -й показатель изменится на $n\%$, а j -й показатель изменится на $k\%$?"

Задача 2.

Эта задача является основной задачей детерминированного факторного анализа; общая постановка имеет вид:

Пусть $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - жестко детерминированная модель, характеризующая изменение результативного показателя y от n факторов; все показатели получили приращение Δ (например, в динамике, по сравнению с планом, по сравнению с эталоном):

$$\Delta_0 y = y^1 - y^0, \quad \Delta x_i = x_i^1 - x_i^0$$

Требуется определить, какой частью приращение результативного показателя y обязано приращению i -го фактора, т. е. расписать следующую зависимость:

$$\Delta_0 y = \Delta x_1 y + \Delta x_2 y + \dots + \Delta x_n y,$$

где $\Delta_0 y$ - общее изменение результативного показателя, складывающееся под одновременным влиянием всех факторных признаков;

$\Delta x_i y$ - изменение результативного показателя под влиянием только фактора x_i .

В зависимости от того, какой метод анализа модели выбран, факторные разложения могут различаться. Поэтому рассмотрим в контексте данной задачи основные методы анализа факторных моделей.

4.6 Основные методы детерминированного факторного анализа

Одним из важнейших методологических в АХД является определение величины влияния отдельных факторов на прирост результативных показателей. В детерминированном факторном анализе (ДФА) для этого используются следующие способы: выявления изолированного влияния факторов, цепной подстановки, абсолютных разниц, относительных разниц, пропорционального деления, интегральный, логарифмирования и др.

Первые три способа основываются на методе элиминирования. Элиминировать - значит устранить, отклонить, исключить воздействие всех факторов на величину результативного показателя, кроме одного. Этот метод исходит из того, что все факторы изменяются независимо друг от друга: сначала изменяется один, а все другие остаются без изменения, потом изменяются два, затем три и т. д., при неизменности остальных. Это позволяет определить влияние каждого фактора на величину исследуемого показателя в отдельности.

Дадим краткую характеристику наиболее распространенным способам. Прием выявления изолированного влияния факторов. Изменение результативного показателя под влиянием какого-либо фактора вычисляется по формуле:

$$\Delta x_i y = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^1, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

Применяя этот метод к нашему примеру, получим следующее:

$$\Delta ВП_{\varphi} = (ЧР_{\varphi} \cdot ГВ_{нл}) - (ЧР_{нл} \cdot ГВ_{нл}) = (1200 \cdot 160) - (1000 \cdot 160) = 32000 \text{ млн. руб.};$$

$$\Delta ВП_{ze} = (ЧР_{нл} \cdot ГВ_{\varphi}) - (ЧР_{нл} \cdot ГВ_{нл}) = (1000 \cdot 200) - (1000 \cdot 160) = 40000 \text{ млн. руб.};$$

то есть объем валовой продукции повысился на 32000 млн. руб. за счет увеличения численности рабочих и на 40000 млн. руб. за счет повышения выработки.

Однако, если мы рассчитаем общий прирост валовой продукции, то он будет равен 80000 млн. руб., что больше суммы приростов за счет отдельных факторов:

$$\Delta ВП_{ze} = (ЧР_{нл} \cdot ГВ_{\varphi}) - (ЧР_{нл} \cdot ГВ_{нл}) = (1200 \cdot 200) - (1000 \cdot 160) = 80000 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, при использовании данного метода полное разложение не достигается, т. е. сумма влияний всех факторов не равна общему приросту результативного показателя. Этот метод позволяет только приблизительно оценить степень влияния факторов, но, с другой стороны, он является самым простым методом и не требует установления очередности изменения факторов.

1. Прием цепных подстановок.

$$\Delta x_i y = f(x_1^1, \dots, x_{i-1}^1, x_i^1, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^1, \dots, x_{i-1}^1, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

Способ цепной подстановки является весьма простым и наглядным методом, наиболее универсальным из всех. Он используется для расчета влияния факторов во всех типах детерминированных факторных моделей: аддитивных, мультипликативных, кратных и смешанных.

Этот способ позволяет определить влияние отдельных факторов на изменение величины результативного показателя путем постепенной замены базисной величины каждого факторного показателя в объеме результативного показателя на фактическую в отчетном периоде. С этой целью определяют ряд условных величин результативного показателя, которые учитывают изменение одного, затем двух, затем трех и т. д. факторов, допуская, что остальные не меняются. Сравнение величины результативного показателя до и после изменения уровня того или иного фактора позволяет определить воздействие конкретного фактора на прирост результативного показателя, исключив влияние остальных факторов. При использовании этого метода достигается полное разложение.

Напомним, что при использовании этого способа большое значение имеет очередность изменения значений факторов, так как от этого зависит количественная оценка влияния каждого фактора. Прежде всего нужно отметить, что не существует и не может существовать единой методики определения этого порядка - существуют модели, в которых он может быть определен про-

извольно. Лишь для небольшого числа моделей можно использовать формализованные подходы. На практике эта проблема не имеет большого значения, поскольку в ретроспективном анализе важны тенденции и относительная значимость того или иного фактора, а не точные оценки их влияния.

Тем не менее для соблюдения более или менее единого подхода к определению порядка замены факторов в модели можно сформулировать общие принципы. Введем некоторые определения. Признак, непосредственно относящийся к изучаемому явлению и характеризующий его количественную сторону, называется первичным или количественным. Эти признаки: а) абсолютные (объемные); б) их можно суммировать в пространстве и времени. В качестве примера можно привести объем реализации, численность, стоимость оборотных средств и т. д.

Признаки, относящиеся к изучаемому явлению не непосредственно, а через один или несколько других признаков и характеризующие качественную сторону изучаемого явления, называются вторичными или качественными. Эти признаки: а) относительные; б) их нельзя суммировать в пространстве и времени. Примерами могут служить фондовооруженность, рентабельность и др. В анализе выделяют вторичные факторы 1-го, 2-го и т. д. порядков, получаемые путем последовательной детализации.

Жестко детерминированная факторная модель называется полной, если результативный показатель количественный, и неполной, если результативный показатель качественный. В полной двухфакторной модели один фактор всегда количественный, второй - качественный. В этом случае замену факторов рекомендуют начинать с количественного показателя. Если же имеется несколько количественных и несколько качественных показателей, то сначала следует изменить величину факторов первого уровня подчинения, а потом более низкого. Таким образом, применение способа цепной подстановки требует знания взаимосвязи факторов, их соподчиненности, умения правильно их классифицировать и систематизировать.

Теперь рассмотрим на нашем примере порядок применения способа цепных подстановок. Алгоритм расчета способом цепной подстановки для данной модели выглядит следующим образом:

$$ВП_{пл} = ЧР_{пл} \cdot ГВ_{пл} = 1000 \cdot 160 = 160000 \text{ млн. руб.}$$

$$ВП_{усл} = ЧР_{\phi} \cdot ГВ_{пл} = 1200 \cdot 160 = 192000 \text{ млн. руб.}$$

$$ВП_{\phi} = ЧР_{\phi} \cdot ГВ_{\phi} = 1200 \cdot 200 = 240000 \text{ млн. руб.}$$

Как видим, второй показатель валовой продукции отличается от первого тем, что при его расчете принята фактическая численность рабочих вместо запланированной. Среднегодовая выработка одним рабочим в том и другом случае плановая. Значит, за счет увеличения количества рабочих выпуск продукции увеличился на 32 000 млн. руб. (192 000 - 160 000).

Третий показатель отличается от второго тем, что при расчете его величины выработка рабочих принята по фактическому уровню вместо плановой. Количество же работников в обоих случаях фактическое. Отсюда за счет повышения производительности труда объем валовой продукции увеличился на 48 000 млн. руб. (240 000 - 192 000).

Таким образом, перевыполнение плана по объему валовой продукции явилось результатом влияния следующих факторов:

| | |
|--|--------------------|
| а) увеличение численности рабочих | + 32 000 млн. руб. |
| б) повышение уровня производительности труда | + 48 000 млн. руб. |
| Итого | + 80 000 млн. руб. |

Алгебраическая сумма факторов при использовании данного метода обязательно должна быть равна общему приросту результативного показателя:

$$\Delta BП_{чр} + \Delta BП_{гв} = \Delta BП_{общ}$$

Отсутствие такого равенства свидетельствует о допущенных ошибках в расчетах.

Другие методы анализа, такие как интегральный и логарифмический, позволяют достичь более высокой точности расчетов, однако эти методы имеют более ограниченную сферу применения и требуют проведения большого объема вычислений, что неудобно для проведения оперативного анализа.

Задача 3.

Является в определенном смысле следствием второй типовой задачи, поскольку базируется на полученном факторном разложении. Необходимость решения этой задачи обусловлена тем обстоятельством, что элементы факторного разложения составляют абсолютные величины, которые трудно использовать для пространственно-временных сопоставлений. При решении задачи 3 факторное разложение дополняется относительными показателями:

$$\alpha_i = \frac{\Delta x_i y}{y^0} \cdot 100\%$$

Экономическая интерпретация: коэффициент α_i показывает, на сколько процентов к базисному уровню изменился результативный показатель под влиянием i -го фактора.

Рассчитаем коэффициенты α для нашего примера, используя факторное разложение, полученное ранее методом цепных подстановок:

$$\alpha_{чр} = \frac{\Delta BП_{чр}}{BП_{пл}} \cdot 100\% = \frac{32000}{160000} \cdot 100\% = 20\%$$

$$\alpha_{гв} = \frac{\Delta BП_{гв}}{BП_{пл}} \cdot 100\% = \frac{48000}{160000} \cdot 100\% = 30\%$$

Таким образом, объем валовой продукции повысился на 20% за счет увеличения численности рабочих и на 30% за счет увеличения выработки. Суммарный прирост валовой продукции составил 50%.

Задача 4.

Также решается на основе базовой задачи 2 и сводится к расчету показателей:

$$\gamma_i = \frac{\Delta x_i y}{\Delta_0 y} \cdot 100\%$$

Экономическая интерпретация: коэффициент γ_i показывает долю прироста результативного показателя, обусловленную изменением i -го фактора. Здесь не возникает вопроса, если все факторные признаки изменяются однонаправленно (либо возрастают, либо убывают). Если это условие не выполняется, решение задачи может быть осложнено. В частности, в наиболее простой двухфакторной модели в подобном случае расчет по приведенной формуле не выполняется и считается, что 100% прироста результативного показателя обусловлены изменением доминирующего факторного признака, т. е. признака, изменяющегося однонаправленно с результативным показателем.

Рассчитаем коэффициенты γ для нашего примера, используя факторное разложение, полученное методом цепных подстановок:

$$\gamma_{\text{чп}} = \frac{\Delta \text{ВП}_{\text{чп}}}{\Delta \text{ВП}} \cdot 100\% = \frac{32000}{80000} \cdot 100\% = 40\%$$
$$\gamma_{\text{зе}} = \frac{\Delta \text{ВП}_{\text{зе}}}{\Delta \text{ВП}} \cdot 100\% = \frac{48000}{80000} \cdot 100\% = 60\%$$

Таким образом, увеличение численности работников обусловило 40% общего повышения объема валовой продукции, а увеличение выработки - 60%. Значит, увеличение выработки в данной ситуации является определяющим фактором.

5. Основы моделирования

Функционирование любой социально-экономической системы (к которым относится и действующее предприятие) происходит в условиях сложного взаимодействия комплекса внутренних и внешних факторов. Фактор - это причина, движущая сила какого-либо процесса или явления, определяющая его характер или одну из основных черт.

Классификация и систематизация факторов в анализе хозяйственной деятельности.

Классификация факторов представляет собой распределение их по группам в зависимости от общих признаков. Она позволяет глубже разобраться в причинах изменения исследуемых явлений, точнее оценить место и роль каждого фактора в формировании величины результативных показателей.

Исследуемые в анализе факторы могут быть классифицированы по разным признакам.

По своей природе факторы подразделяются на природные, социально-экономические и производственно-экономические.

Природные факторы оказывают большое влияние на результаты деятельности в сельском хозяйстве, в лесном хозяйстве и других отраслях. Учет их влияния дает возможность точнее оценить результаты работы субъектов хозяйствования.

К социально-экономическим факторам относятся жилищные условия работников, организация оздоровительной работы на предприятиях с вредным производством, общий уровень подготовки кадров и др. Они способствуют более полному использованию производственных ресурсов предприятия и повышению эффективности его работы.

Производственно-экономические факторы определяют полноту и эффективность использования производственных ресурсов предприятия и конечные результаты его деятельности.

По степени воздействия на результаты хозяйственной деятельности факторы делятся на основные и второстепенные. К основным относятся факторы, оказывающие решающее воздействие на результативный показатель. Второстепенными считаются те, которые не оказывают решающего воздействия на результаты хозяйственной деятельности в сложившихся условиях. Необходимо отметить, что в зависимости от обстоятельств один и тот же фактор может быть и основным, и второстепенным. Умение выделить из всего множества факторов главные обеспечивает правильность выводов по результатам анализа.

Факторы делятся на внутренние и внешние, в зависимости от того, влияет на них деятельность данного предприятия или нет. При анализе основное внимание уделяется внутренним факторам, на которые предприятие может воздействовать.

Факторы подразделяются на объективные, не зависящие от воли и желаний людей и субъективные, подверженные влиянию деятельности юридических и физических лиц.

По степени распространенности факторы делятся на общие и специфические. Общие факторы действуют во всех отраслях экономики. Специфические факторы действуют в пределах отдельной отрасли или конкретного предприятия.

В процессе работы организации одни факторы оказывают воздействие на изучаемый показатель непрерывно на протяжении всего времени. Такие факторы называются постоянными. Фак-

торы, воздействие которых проявляется периодически, называются переменными (это, например, внедрение новой технологии, новых видов продукции).

Большое значение для оценки деятельности предприятий имеет деление факторов по характеру их действия на интенсивные и экстенсивные. К экстенсивным относятся факторы, которые связаны с изменением количественных, а не качественных характеристик функционирования предприятия. В качестве примера можно привести увеличение объема производства продукции за счет увеличения числа рабочих. Интенсивные факторы характеризуют качественную сторону процесса производства. Примером может служить увеличение объема производства продукции за счет повышения уровня производительности труда.

Большинство изучаемых факторов по своему составу являются сложными, состоят из нескольких элементов. Однако есть и такие, которые не раскладываются на составные части. В связи с этим факторы делятся на сложные (комплексные) и простые (элементарные). Примером сложного фактора является производительность труда, а простого - количество рабочих дней в отчетном периоде.

По уровню соподчиненности (иерархии) различают факторы первого, второго, третьего и последующего уровней подчинения. К факторам первого уровня относятся те, которые непосредственно влияют на результативный показатель. Факторы, влияющие на результативный показатель косвенно, при помощи факторов первого уровня, называют факторами второго уровня и т. д.

Понятно, что при изучении влияния на работу предприятия какой-либо группы факторов необходимо их упорядочить, то есть проводить анализ с учетом их внутренних и внешних связей, взаимодействия и соподчиненности. Это достигается с помощью систематизации. Систематизация - это размещение изучаемых явлений или объектов в определенном порядке с выявлением их взаимосвязи и подчиненности.

Создание факторных систем является одним из способов такой систематизации факторов. Рассмотрим понятие факторной системы.

5.1 Модели и моделирование систем управления

Модели сложных систем. Под моделированием понимается процесс исследования реальной системы, включающий построение модели, изучение ее свойств и перенос полученных сведений на моделируемую систему.

Общими функциями моделирования являются описание, объяснение и прогнозирование поведения реальной системы.

Типовыми целями моделирования могут быть поиск оптимальных или близких к оптимальным решений, оценка эффективности решений, определение свойств системы (чувствительности к изменению значений характеристик и др.), установление взаимосвязей между характеристиками системы, перенос информации во времени.

Модель - это объект, который имеет сходство в некоторых отношениях с прототипом и служит средством описания и/или объяснения, и/или прогнозирования поведения прототипа. Важнейшим качеством модели является то, что она дает упрощенный образ, отражающий не все свойства прототипа, а только те, которые существенны для исследования.

Сложные системы характеризуются выполняемыми процессами (функциями), структурой и поведением во времени. Для адекватного моделирования этих аспектов в автоматизированных информационных системах различают функциональные, информационные и поведенческие модели, пересекающиеся друг с другом.

Функциональная модель системы описывает совокупность выполняемых системой функций, характеризует морфологию системы (ее построение) - состав функциональных подсистем, их взаимосвязи.

Информационная модель отражает отношения между элементами системы в виде структур данных (состав и взаимосвязи).

Поведенческая (событийная) модель описывает информационные процессы (динамику функционирования), в ней фигурируют такие категории, как состояние системы, событие, переход из одного состояния в другое, условия перехода, последовательность событий.

Особенно велико значение моделирования в системах, где натурные эксперименты невозможны по целому ряду причин: сложность, большие материальные затраты, уникальность, длительность эксперимента. Так, нельзя «провести войну в мирное время», натурные испытания некоторых типов систем связаны с их разрушением, для экспериментальной проверки сложных систем управления требуется длительное время и т.д.

Можно выделить три основные области применения моделей: обучение, научные исследования, управление. При обучении с помощью моделей достигается высокая наглядность отображения различных объектов и облегчается передача знаний о них. Это в основном модели, позволяющие описать и объяснить систему. В научных исследованиях модели служат средством получения, фиксирования и упорядочения новой информации, обеспечивая развитие теории и практики. В управлении модели используются для обоснования решений. Такие модели должны обеспечить как описание, так и объяснение и предсказание поведения систем.

Классификация видов моделирования систем

Классификация видов моделирования может быть проведена по разным основаниям. В соответствии с классификационным признаком полноты моделирование делится на полное, неполное и приближенное. При полном моделировании модели идентичны объекту во времени и пространстве. Для неполного моделирования эта идентичность не сохраняется. В основе приближенного моделирования лежит подобие, при котором некоторые стороны реального объекта не моделируются совсем. Теория подобия утверждает, что абсолютное подобие возможно лишь при замене одного объекта другим точно таким же. Поэтому при моделировании абсолютное подобие не имеет места. Исследователи стремятся к тому, чтобы модель хорошо отображала только исследуемый аспект системы.

В зависимости от типа носителя и сигнатуры модели различаются следующие виды моделирования: детерминированное и стохастическое, статическое и динамическое, дискретное, непрерывное и дискретно-непрерывное.

Детерминированное моделирование отображает процессы, в которых предполагается отсутствие случайных воздействий. Стохастическое моделирование учитывает вероятностные процессы и события. Статическое моделирование служит для описания состояния объекта в фиксированный момент времени, а динамическое — для исследования объекта во времени. При этом оперируют аналоговыми (непрерывными), дискретными и смешанными моделями.

В зависимости от формы реализации носителя и сигнатуры моделирование классифицируется на мысленное и реальное. Мысленное моделирование применяется тогда, когда модели не реализуемы в заданном интервале времени либо отсутствуют условия для их физического создания (например, ситуация микромира). Мысленное моделирование реальных систем реализуется в виде наглядного, символического и математического. Для представления функциональных, информационных и событийных моделей этого вида моделирования разработано значительное количество средств и методов.

При наглядном моделировании на базе представлений человека о реальных объектах создаются наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. Примером таких моделей являются учебные плакаты, рисунки, схемы, диаграммы.

В основу гипотетического моделирования закладывается гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. Этот вид моделирования используется, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей. Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней.

Для достаточно простых объектов наивысшим уровнем является полная аналогия. С усложнением системы используются аналогии последующих уровней, когда аналоговая модель отображает несколько (или только одну) сторон функционирования объекта. Макетирование приме-

няется, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию или могут предшествовать проведению других видов моделирования. В основе построения мысленных макетов также лежат аналогии, обычно базирующиеся на причинно-следственных связях между явлениями и процессами в объекте.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает его основные свойства с помощью определенной системы знаков и символов. В основе языкового моделирования лежит некоторый тезаурус, который образуется из набора понятий исследуемой предметной области, причем этот набор должен быть фиксированным. Под тезаурусом понимается словарь, отражающий связи между словами или иными элементами данного языка, предназначенный для поиска слов по их смыслу. Традиционный тезаурус состоит из двух частей: списка слов и устойчивых словосочетаний, сгруппированных по смысловым (тематическим) рубрикам; алфавитного словаря ключевых слов, задающих классы условной эквивалентности, указателя отношений между ключевыми словами, где для каждого слова указаны соответствующие рубрики. Такое построение позволяет определить семантические (смысловые) отношения иерархического (род/вид) и неиерархического (синонимия, антонимия, ассоциации) типа.

Математическое моделирование - это процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью. В принципе, для исследования характеристик любой системы математическими методами, включая и машинные, должна быть обязательно проведена формализация этого процесса, т.е. построена математическая модель. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и от задач исследования объекта, от требуемой достоверности и точности решения задачи. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект с некоторой степенью приближения.

Для представления математических моделей могут использоваться различные формы записи. Основными являются инвариантная, аналитическая, алгоритмическая и схемная (графическая). Инвариантная форма - запись соотношений модели с помощью традиционного математического языка безотносительно к методу решения уравнений модели. В этом случае модель может быть представлена как совокупность входов, выходов, переменных состояния и глобальных уравнений системы в виде.

Аналитическая форма — запись модели в виде результата решения исходных уравнений модели. Обычно модели в аналитической форме представляют собой явные выражения выходных параметров как функций входов и переменных состояния.

Для аналитического моделирования характерно то, что в основном моделируется только функциональный аспект системы. При этом глобальные уравнения системы, описывающие закон (алгоритм) ее функционирования, записываются в виде некоторых аналитических соотношений (алгебраических, интегродифференциальных, конечноразностных и т.д.) или логических условий. Аналитическая модель исследуется несколькими методами:

- аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными состояния системы;
- численным, когда, не умея решать уравнения в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных (напомним, что такие модели называются цифровыми);
- качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

В настоящее время распространены компьютерные методы исследования характеристик процесса функционирования сложных систем. Для реализации математической модели на ЭВМ необходимо построить соответствующий моделирующий алгоритм.

Алгоритмическая форма - запись соотношений модели и выбранного численного метода решения в форме алгоритма. Среди алгоритмических моделей важный класс составляют имитационные модели, предназначенные для имитации физических или информационных процессов при

различных внешних воздействиях. Собственно имитацию названных процессов называют имитационным моделированием.

При имитационном моделировании воспроизводится алгоритм функционирования системы во времени - поведение системы, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и другие, которые часто создают трудности при аналитических исследованиях. В настоящее время имитационное моделирование - наиболее эффективный метод исследования систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее проектирования.

В имитационном моделировании различают метод статистических испытаний (Монте-Карло) и метод статистического моделирования.

Метод Монте-Карло — численный метод, который применяется для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадают с решениями аналитических задач. Состоит в многократном воспроизведении процессов, являющихся реализациями случайных величин и функций, с последующей обработкой информации методами математической статистики.

Если этот прием применяется для машинной имитации в целях исследования характеристик процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, то такой метод называется методом статистического моделирования.

Метод имитационного моделирования применяется для оценки вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния изменения различных параметров системы. Имитационное моделирование может быть положено в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза систем, когда требуется создать систему с заданными характеристиками при определенных ограничениях.

Комбинированное (аналитико-имитационное) моделирование позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования. При построении комбинированных моделей производится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы, и для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся имитационные модели. Такой подход дает возможность охватить качественно новые классы систем, которые не могут быть исследованы с использованием аналитического или имитационного моделирования в отдельности.

Информационное (кибернетическое) моделирование связано с исследованием моделей, в которых отсутствует непосредственное подобие физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессам. В этом случае стремятся отобразить лишь некоторую функцию, рассматривают реальный объект как «черный ящик», имеющий ряд входов и выходов, и моделируют некоторые связи между выходами и входами. Таким образом, в основе информационных (кибернетических) моделей лежит отражение некоторых информационных процессов управления, что позволяет оценить поведение реального объекта. Для построения модели в этом случае необходимо выделить исследуемую функцию реального объекта, попытаться формализовать эту функцию в виде некоторых операторов связи между входом и выходом и воспроизвести данную функцию на имитационной модели, причем на совершенно другом математическом языке и, естественно, иной физической реализации процесса. Так, например, экспертные системы являются моделями ЛПР.

Структурное моделирование системного анализа базируется на некоторых специфических особенностях структур определенного вида, которые используются как средство исследования систем или служат для разработки на их основе специфических подходов к моделированию с применением других методов формализованного представления систем (теоретико-множественных,

лингвистических, кибернетических и т.п.). Развитием структурного моделирования является объектно-ориентированное моделирование.

Структурное моделирование системного анализа включает:

- методы сетевого моделирования;
- сочетание методов структуризации с лингвистическими;
- структурный подход в направлении формализации построения и исследования структур разного типа (иерархических, матричных, произвольных графов) на основе теоретико-множественных представлений и понятия номинальной шкалы теории измерений.

При этом термин «структура модели» может применяться как к функциям, так и к элементам системы. Соответствующие структуры называются функциональными и морфологическими. Объектно-ориентированное моделирование объединяет структуры обоих типов в иерархию классов, включающих как элементы, так и функции.

Ситуационное моделирование опирается на модельную теорию мышления, в рамках которой можно описать основные механизмы регулирования процессов принятия решений. В центре модельной теории мышления лежит представление о формировании в структурах мозга информационной модели объекта и внешнего мира. Эта информация воспринимается человеком на базе уже имеющихся у него знаний и опыта. Целесообразное поведение человека строится путем формирования целевой ситуации и мысленного преобразования исходной ситуации в целевую. Основой построения модели является описание объекта в виде совокупности элементов, связанных между собой определенными отношениями, отображающими семантику предметной области. Модель объекта имеет многоуровневую структуру и представляет собой тот информационный контекст, на фоне которого протекают процессы управления. Чем богаче информационная модель объекта и выше возможности манипулирования ею, тем лучше и многообразнее качество принимаемых решений при управлении.

При реальном моделировании используется возможность исследования характеристик либо на реальном объекте целиком, либо на его части. Такие исследования проводятся как на объектах, работающих в нормальных режимах, так и при организации специальных режимов для оценки интересующих исследователя характеристик (при других значениях переменных и параметров, в другом масштабе времени и т.д.). Реальное моделирование является наиболее адекватным, но его возможности ограничены.

Натурным моделированием называют проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия. Натурное моделирование подразделяется на научный эксперимент, комплексные испытания и производственный эксперимент. Научный эксперимент характеризуется широким использованием средств автоматизации, применением весьма разнообразных средств обработки информации, возможностью вмешательства человека в процесс проведения эксперимента. Одна из разновидностей эксперимента - комплексные испытания, в процессе которых вследствие повторения испытаний объектов в целом (или больших частей системы) выявляются общие закономерности о характеристиках качества, надежности этих объектов. В этом случае моделирование осуществляется путем обработки и обобщения сведений о группе однородных явлений.

Наряду со специально организованными испытаниями возможна реализация натурального моделирования путем обобщения опыта, накопленного в ходе производственного процесса, т.е. можно говорить о производственном эксперименте. Здесь на базе теории подобия обрабатывают статистический материал по производственному процессу и получают его обобщенные характеристики. Необходимо помнить про отличие эксперимента от реального протекания процесса. Оно заключается в том, что в эксперименте могут появиться отдельные критические ситуации и определиться границы устойчивости процесса. В ходе эксперимента вводятся новые факторы и возмущающие воздействия в процесс функционирования объекта.

Другим видом реального моделирования является физическое, отличающееся от натурального тем, что исследование проводится на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим подобием. В процессе физического моделирования задаются некоторые характеристики внешней среды, и исследуется поведение либо реального объекта, либо его модели при за-

данных или создаваемых искусственно воздействиях внешней среды. Физическое моделирование может протекать в реальном и модельном (псевдореальном) масштабах времени или рассматриваться без учета времени. В последнем случае изучению подлежат так называемые «замороженные» процессы, фиксируемые в некоторый момент времени.

5.2 Принципы и подходы к построению математических моделей

Математическое моделирование многие считают скорее искусством, чем стройной и законченной теорией. Здесь очень велика роль опыта, интуиции и других интеллектуальных качеств человека. Поэтому невозможно написать достаточно формализованную инструкцию, определяющую, как должна строиться модель той или иной системы. Тем не менее отсутствие точных правил не мешает опытным специалистам строить удачные модели. К настоящему времени уже накоплен значительный опыт, дающий основание сформулировать некоторые принципы и подходы к построению моделей. При рассмотрении порознь каждый из них может показаться довольно очевидным. Но совокупность взятых вместе принципов и подходов далеко не тривиальна. Многие ошибки и неудачи в практике моделирования являются прямым следствием нарушения этой методологии.

Принципы определяют те общие требования, которым должна удовлетворять правильно построенная модель. Рассмотрим эти принципы.

1. **Адекватность.** Этот принцип предусматривает соответствие модели целям исследования по уровню сложности и организации, а также соответствие реальной системе относительно выбранного множества свойств. До тех пор, пока не решен вопрос, правильно ли отображает модель исследуемую систему, ценность модели незначительна.
2. **Соответствие модели решаемой задаче.** Модель должна строиться для решения определенного класса задач или конкретной задачи исследования системы. Попытки создания универсальной модели, нацеленной на решение большого числа разнообразных задач, приводят к такому усложнению, что она оказывается практически непригодной. Опыт показывает, что при решении каждой конкретной задачи нужно иметь свою модель, отражающую те аспекты системы, которые являются наиболее важными в данной задаче. Этот принцип связан с принципом адекватности.
3. **Упрощение при сохранении существенных свойств системы.** Модель должна быть в некоторых отношениях проще прототипа—в этом смысл моделирования. Чем сложнее рассматриваемая система, тем по возможности более упрощенным должно быть ее описание, умышленно утрирующее типичные и игнорирующее менее существенные свойства. Этот принцип может быть назван принципом абстрагирования от второстепенных деталей.
4. **Соответствие между требуемой точностью результатов моделирования и сложностью модели.** Модели по своей природе всегда носят приближенный характер. Возникает вопрос, каким должно быть это приближение. С одной стороны, чтобы отразить все скольконибудь существенные свойства, модель необходимо детализировать. С другой стороны, строить модель, приближающуюся по сложности к реальной системе, очевидно, не имеет смысла. Она не должна быть настолько сложной, чтобы нахождение решения оказалось слишком затруднительным. Компромисс между этими двумя требованиями достигается нередко путем проб и ошибок. Практическими рекомендациями по уменьшению сложности моделей являются:

- изменение числа переменных, достигаемое либо исключением несущественных переменных, либо их объединением. Процесс преобразования модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений называют агрегированием. Например, все типы ЭВМ в модели гетерогенных сетей можно объединить в четыре типа - ПЭВМ, рабочие станции, большие ЭВМ, кластерные ЭВМ;
- изменение природы переменных параметров. Переменные параметры рассматриваются в качестве постоянных, дискретные — в качестве непрерывных и т.д. Так, условия распространения радиоволн в модели радиоканала для простоты можно принять постоянными;
- изменение функциональной зависимости между переменными. Нелинейная зависимость заменяется обычно линейной, дискретная функция распределения вероятностей - непрерывной;

- изменение ограничений (добавление, исключение или модификация). При снятии ограничений получается оптимистичное решение, при введении — пессимистичное. Варьируя ограничениями, можно найти возможные граничные значения эффективности. Такой прием часто используется для нахождения предварительных оценок эффективности решений на этапе постановки задач;
- ограничение точности модели. Точность результатов модели не может быть выше точности исходных данных.

5. Баланс погрешностей различных видов. В соответствии с принципом баланса необходимо добиваться, например, баланса систематической погрешности моделирования за счет отклонения модели от оригинала и погрешности исходных данных, точности отдельных элементов модели, систематической погрешности моделирования и случайной погрешности при интерпретации и осреднении результатов.

6. Многовариантность реализаций элементов модели. Разнообразие реализаций одного и того же элемента, отличающихся по точности (а следовательно, и по сложности), обеспечивает регулирование соотношения «точность/сложность».

7. Блочное строение. При соблюдении принципа блочного строения облегчается разработка сложных моделей и появляется возможность использования накопленного опыта и готовых блоков с минимальными связями между ними. Выделение блоков производится с учетом разделения модели по этапам и режимам функционирования системы. К примеру, при построении модели для системы радиоразведки можно выделить модель работы излучателей, модель обнаружения излучателей, модель пеленгования и т.д.

В зависимости от конкретной ситуации возможны следующие подходы к построению моделей;

- непосредственный анализ функционирования системы;
- проведение ограниченного эксперимента на самой системе;
- использование аналога;
- анализ исходных данных.

Имеется целый ряд систем, которые допускают проведение непосредственных исследований по выявлению существенных параметров и отношений между ними. Затем либо применяются известные математические модели, либо они модифицируются, либо предлагается новая модель. Таким образом, например, можно вести разработку модели для направления связи в условиях мирного времени.

При проведении эксперимента выявляются значительная часть существенных параметров и их влияние на эффективность системы. Такую цель преследуют, например, все командно-штабные игры и большинство учений.

Если метод построения модели системы не ясен, но ее структура очевидна, то можно воспользоваться сходством с более простой системой, модель для которой существует.

К построению модели можно приступить на основе анализа исходных данных, которые уже известны или могут быть получены. Анализ позволяет сформулировать гипотезу о структуре системы, которая затем апробируется. Так появляются первые модели нового образца иностранной техники при наличии предварительных данных об их технических параметрах.

Разработчики моделей находятся под действием двух взаимно противоречивых тенденций: стремления к полноте описания и стремления к получению требуемых результатов возможно более простыми средствами. Достижение компромисса ведется обычно по пути построения серии моделей, начинающихся с предельно простых и восходящих до высокой сложности (существует известное правило: начинай с простых моделей, а далее усложняй). Простые модели помогают глубже понять исследуемую проблему. Усложненные модели используются для анализа влияния различных факторов на результаты моделирования. Такой анализ позволяет исключать некоторые факторы из рассмотрения.

Сложные системы требуют разработки целой иерархии моделей, различающихся уровнем отображаемых операций. Выделяют такие уровни, как вся система, подсистемы, управляющие объекты и др.

Этапы построения математической модели.

Сущность построения математической модели состоит в том, что реальная система упрощается, схематизируется и описывается с помощью того или иного математического аппарата.

Можно выделить следующие основные этапы построения моделей.

1. Содержательное описание моделируемого объекта. Объекты моделирования описываются с позиций системного подхода. Исходя из цели исследования устанавливаются совокупность элементов, взаимосвязи между элементами, возможные состояния каждого элемента, существенные характеристики состояний и соотношения между ними. Например, фиксируется, что если значение одного параметра возрастает, то значение другого - убывает и т.п. Вопросы, связанные с полнотой и единственностью набора характеристик, не рассматриваются. Естественно, в таком словесном описании возможны логические противоречия, неопределенности. Это исходная естественно-научная концепция исследуемого объекта. Такое предварительное, приближенное представление системы называют концептуальной моделью. Для того чтобы содержательное описание служило хорошей основой для последующей формализации, требуется обстоятельно изучить моделируемый объект. Нередко естественное стремление ускорить разработку модели уводит исследователя от данного этапа непосредственно к решению формальных вопросов. В результате построенная без достаточного содержательного базиса модель оказывается непригодной к использованию. На этом этапе моделирования широко применяются качественные методы описания систем, знаковые и языковые модели.

2. Формализация операций. Формализация сводится в общих, чертах к следующему. На основе содержательного описания определяется исходное множество характеристик системы. Для выделения существенных характеристик необходим хотя бы приближенный анализ каждой из них. При проведении анализа опираются на постановку задачи и понимание природы исследуемой системы. После исключения несущественных характеристик выделяют управляемые и неуправляемые параметры и производят, символизацию. Затем определяется система ограничений на значения управляемых параметров. Если ограничения не носят принципиальный характер, то ими пренебрегают.

Дальнейшие действия связаны с формированием целевой функции модели. В соответствии с известными положениями выбираются показатели исхода операции и определяется примерный вид функции полезности на исходах. Если функция полезности близка к пороговой (или монотонной), то оценка эффективности решений возможна непосредственно по показателям исхода операции. В этом случае необходимо выбрать способ свертки показателей (способ перехода от множества показателей к одному обобщенному показателю) и произвести саму свертку. По свертке показателей формируются критерий эффективности и целевая функция.

Если при качественном анализе вида функции полезности окажется, что ее нельзя считать пороговой (монотонной), прямая оценка эффективности решений через показатели исхода операции неправомерна. Необходимо определять функцию полезности и уже на ее основе вести формирование критерия эффективности и целевой функции.

В целом замена содержательного описания формальным - это итеративный процесс.

3. Проверка адекватности модели. Требование адекватности находится в противоречии с требованием простоты, и это нужно учитывать при проверке модели на адекватность. Исходный вариант модели предварительно проверяется по следующим основным аспектам:

- Все ли существенные параметры включены в модель?
- Нет ли в модели несущественных параметров?
- Правильно ли отражены функциональные связи между параметрами?
- Правильно ли определены ограничения на значения параметров?

Для проверки рекомендуется привлекать специалистов, которые не принимали участия в разработке модели. Они могут более объективно рассмотреть модель и заметить ее слабые стороны, чем ее разработчики. Такая предварительная проверка модели позволяет выявить грубые ошибки. После этого приступают к реализации модели и проведению исследований. Полученные результаты моделирования подвергаются анализу на соответствие известным свойствам исследуемой системы.

двух объектов. Для установления соответствия создаваемой модели оригиналу используются следующие пути:

- сравнение результатов моделирования с отдельными экспериментальными результатами, полученными при одинаковых условиях;
- использование других близких моделей;
- сопоставление структуры и функционирования модели с прототипом.

Главным путем проверки адекватности модели исследуемому объекту выступает практика. Однако она требует накопления статистики, которая далеко не всегда бывает достаточной для получения надежных данных. Для многих моделей первые два пути приемлемы в меньшей степени. В этом случае остается один путь: заключение о подобии модели и прототипа делать на основе сопоставления их структур и реализуемых функций. Такие заключения не носят формального характера, поскольку основываются на опыте и интуиции исследователя.

По результатам проверки модели на адекватность принимается решение о возможности ее практического использования или о проведении корректировки.

4. **Корректировка модели.** При корректировке модели могут уточняться существенные параметры, ограничения на значения управляемых параметров, показатели исхода операции, связи показателей исхода операции с существенными параметрами, критерий эффективности. После внесения изменений в модель вновь выполняется оценка адекватности.

5. **Оптимизация модели.** Сущность оптимизации моделей состоит в их упрощении при заданном уровне адекватности. Основными показателями, по которым возможна оптимизация модели, выступают время и затраты средств для проведения исследований на ней. В основе оптимизации лежит возможность преобразования моделей из одной формы в другую. Преобразование может выполняться либо с использованием математических методов, либо эвристическим путем

5.3 Формализм анализа

Метод главных компонент (Г. Хотеллинг). Этот метод, строго говоря, не является методом факторного анализа, хотя и имеет с ним много общего. В рамках данного подхода реализуются стратегии:

- в ходе вычислительных процедур *одновременно* получают все главные компоненты (факторы) и их число равно числу явных переменных;
- для каждой переменной возможно ее полное объяснение через латентные переменные (факторы). В терминах дисперсии это означает, что
 - общая дисперсия = дисперсии общего фактора + ошибка измерения.
- Таким образом, в рамках метода главных компонент не предполагается и, соответственно, не рассматривается влияние специфических факторов.
- *Методы факторного анализа.* Главным отличием группы этих методов от предыдущего является то, что:
 - дисперсия явных переменных объясняется не в полном объеме. При проведении процедуры факторного анализа признается влияние специфических факторов на результаты измерений, однако сама процедура направлена на выделение только общих факторов. В терминах дисперсии это выглядит следующим образом:
 - общая дисперсия = дисперсии общего фактора + дисперсия специфического фактора + ошибка измерения.
 - Общие факторы обычно выделяют последовательно: первый, объясняющий наибольшую долю дисперсии элементарных признаков, затем второй, объясняющий меньшую, вторую после первого латентного фактора часть дисперсии, потом третий и т.д. Процесс выделения факторов может быть прерван на каждом шаге, если принято решение о достаточности доли объясненной дисперсии либо с учетом интерпретируемости латентных факторов.

Простые методы факторного анализа в основном связаны с начальными теоретическими разработками и имеют ограниченные возможности в выделении латентных переменных и аппроксимации факторных решений.

Однофакторная модель Ч. Спирмена позволяет выделить только один генеральный фактор и один специфический (иногда в литературе этот фактор называется характерным). Других возможно существующие латентные факторы считаются незначимыми.

Бифакторная модель (Г. Хользингер) допускает влияние на дисперсию элементарных признаков нескольких латентных факторов (чаще всего двух) и одного специфического фактора.

В *центроидном методе* (Л. Тэрстоун) корреляция между переменными рассматривается как пучок векторов, а латентный фактор представляется как уравнивающий вектор, проходящий через центр этого пучка (центроид). Метод позволяет выделять несколько латентных и специфические факторы, а также появляется возможность соотнести факторное решение с исходными данными, т.е. решить задачу аппроксимации.

В *современных аппроксимирующих методах* предполагается, что первое приближенное решение уже найдено каким-либо способом и последующими шагами это решение оптимизируется. В *групповом методе* (Л. Гутман, П. Хорст) решение базируется на предварительно отобранных группах элементарных признаков.

Метод главных факторов (Г. Томсон) очень близок к методу главных компонент, а котором предполагается существование как специфического фактора, так, соответственно, и его дисперсии.

Метод максимального правдоподобия (Д.Лоули), *минимальных остатков* (Г. Харман), *α -факторного анализа* (Г. Кайзер, И. Кэффри), *канонического факторного анализа* (К. Рао) – являются оптимизирующими. Они позволяют последовательно улучшать предварительно найденные решения. Наиболее удобным, но не единственным, для оптимизации признается метод максимального правдоподобия. Другие методы оптимизации основаны на использовании статистических приемов оценивания случайной величины или статистических критериев и предполагают большой объем вычислений.

Независимо от используемого метода, основной задачей факторного анализа является сжатие информации: переход от множества значений по m явным переменным для n испытуемых ($m \times n$) к ограниченному множеству элементов матрицы значений латентных факторов для признаков ($m \times f$) либо для каждого наблюдаемого объекта ($n \times f$), причем обычно $f < m$. (Рис.5.1.)

Матрица исходных данных ($m \times n$) Корреляционная матрица ($m \times n$) Факторная матрица ($m \times f$)

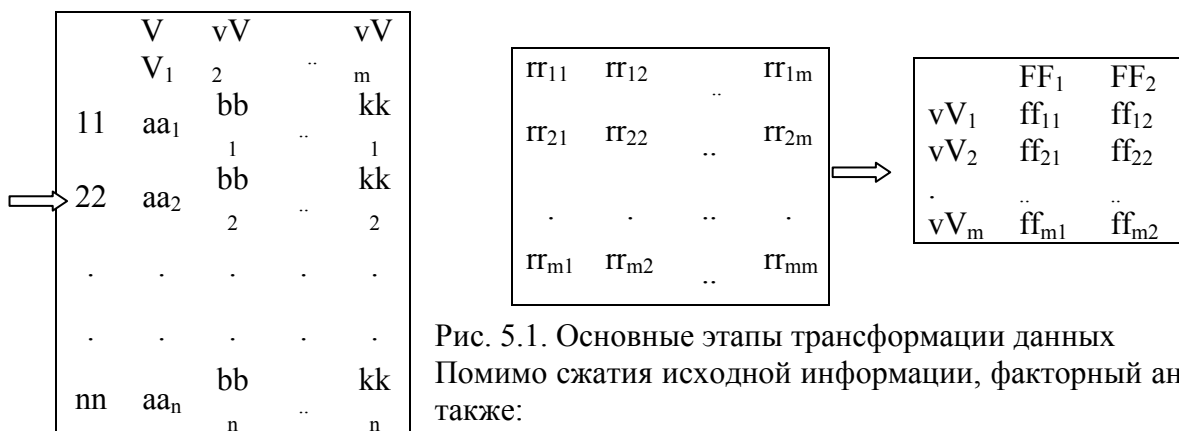


Рис. 5.1. Основные этапы трансформации данных

Помимо сжатия исходной информации, факторный анализ позволяет также:

- исследовать структуру взаимосвязей переменных. В этом случае каждая группировка переменных будет определяться фактором, по которому эти переменные имеют максимальные нагрузки;
- проводить идентификацию факторов как латентных переменных;

- визуализировать структуру изучаемых явлений и процессов;
- идентифицировать объекты, т.е. решать задачу распознавания образа.

5.4 Геометрическая интерпретация коэффициента корреляции

Вам уже хорошо известно, что для количественного описания связи между двумя переменными чаще всего используется коэффициент корреляции. Существует много разновидностей этого коэффициента, причем выбор адекватной меры связи определяется как спецификой эмпирических данных, так и измерительной шкалой.

Однако существует еще и геометрическая возможность описания связи между признаками. Графически коэффициент корреляции между двумя переменными можно изобразить в виде двух векторов – стрелок, берущих начало в одной точке. Эти векторы располагаются под углом друг к другу, косинус которого и равен коэффициенту корреляции. Косинус угла - это тригонометрическая функция, значение которой можно найти в справочнике. В рамках данной темы мы не будем обсуждать тригонометрическую функцию косинуса, достаточно знать, где найти соответствующие данные.

В таблице 5.1 приводятся несколько значений косинусов углов, что даст о них общее представление.

Таблица 5.1

Таблица косинусов для графического изображения корреляции между переменными.

| Угол, α , ° градус | Косинус угла, $\cos \alpha$ |
|---------------------------|-----------------------------|
| 0° | 1,00 |
| 30° | 0,876 |
| 60° | 0,500 |
| 90° | 0,00 |
| 120° | -0,500 |
| 180° | -1,000 |

В соответствии с данной таблицей полной положительной корреляции ($r = 1$) будет соответствовать угол в 0° ($\cos 0^\circ = 1$), т.е. графически это будет соответствовать полному совпадению обоих векторов (см. рис. 5.2 а).

Полная отрицательная корреляция ($r = -1$) означает, что оба вектора лежат на одной прямой, но направлены в противоположные стороны ($\cos 180^\circ = -1$). (рис. 5.2 б).

Взаимная независимость переменных ($r = 0$) эквивалентна взаимной перпендикулярности (ортogonalности) векторов ($\cos 90^\circ = 0$). (рис. 5.2 в).

Промежуточные значения коэффициента корреляции изображенные в виде пар векторов, образующих либо острые ($r > 0$), либо тупые ($r < 0$) углы. (рис. 5.2, г, д)

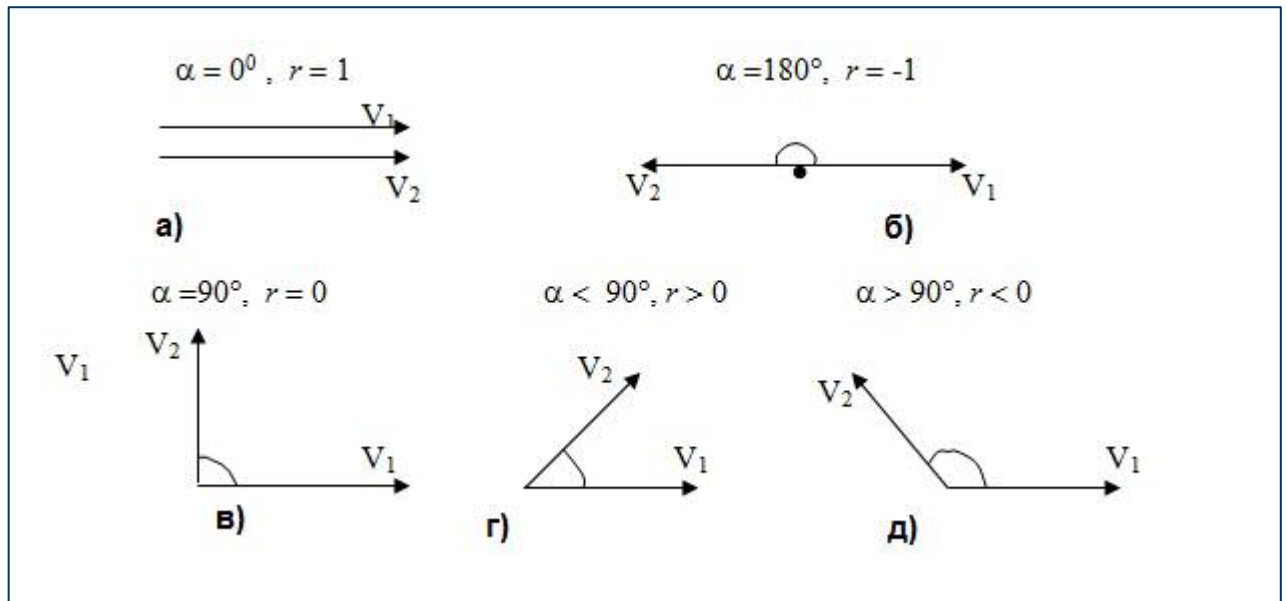


Рисунок 5.2. Геометрическая интерпретация коэффициентов корреляции.

5.5 Геометрический подход к факторному анализу

Приведенная выше геометрическая интерпретация коэффициента корреляции является основой для графического представления всей корреляционной матрицы и последующей интерпретации данных в факторном анализе.

Построение матрицы начинается с построения вектора, представляющего любую переменную. Другие переменные изображаются с помощью векторов равной длины, причем все они исходят из одной и той же точки. В качестве примера рассмотрим геометрическое выражение корреляций между пятью переменными. (Рис 5.3.)

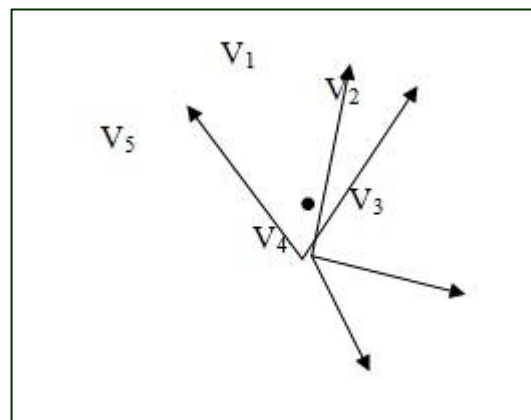


Рисунок 5.3. Геометрическая интерпретация корреляционной матрицы (5x5).

Понятно, что не всегда можно представить корреляцию в двух измерениях (на плоскости). Некоторые векторы переменных должны были бы располагаться под углом к странице. Этот факт не является проблемой для собственно математических процедур, однако требует некоторого воображения от читателя. На рисунке 7.5. можно видеть, что корреляция между переменными V1 V2 большая и положительная (т.к. между этими векторами маленькие углы). Переменные V2 V3

практически независимы друг от друга, т.к. угол между ними очень близок к 90° , т.е. корреляция равна 0.

Переменные $V_3 - V_5$ связаны между собой сильно и отрицательно. Высокие корреляции между V_1 и V_2 являются свидетельством того, что обе эти переменные практически измеряют одно и то же свойство и что, собственно говоря, одна из этих переменных может быть исключена из дальнейшего рассмотрения без существенной потери информации. Наиболее информативными для нас являются переменные независимые друг от друга, т.е. имеющие между собой минимальные корреляции, или углы соответствующие 90° (рис. 5.4.)

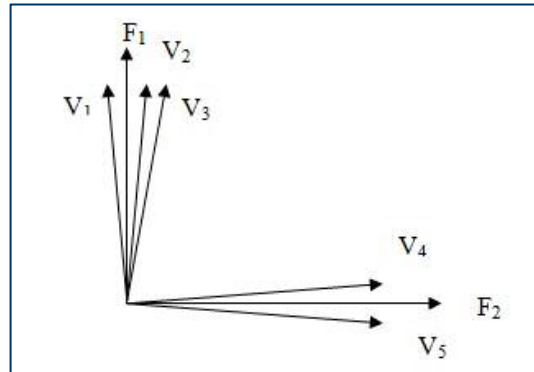


Рисунок 5.4 . Геометрическая интерпретация корреляционной матрицы

Из данного рисунка видно, что существует две группы корреляций: V_1, V_2, V_3 и V_4, V_5 . Корреляции между переменными V_1, V_2, V_3 очень большие и положительные (между этими векторами маленькие углы, а, следовательно, большие значения косинусов). Аналогично корреляция между переменными V_4 и V_5 тоже большая и положительная. А вот между этими группами переменных корреляция близка нулю, так как эти группы переменных практически ортогональны друг другу, т.е. расположены относительно друг друга под прямым углом. Приведенный пример показывает, что существует две группы корреляций и информация, полученная от этих переменных, может быть аппроксимирована двумя общими факторами (F_1 и F_2), которые в данном случае ортогональны друг другу. Однако так бывает не всегда. Разновидности факторного анализа, в которых вычисляются корреляции между факторами, расположенными не ортогонально, называются облическим решением. Однако такие случаи в рамках данного курса мы не будем рассматривать, и остановимся исключительно на ортогональных решениях.

Измеряя угол между каждым общим фактором и каждой общей переменной, можно вычислить корреляции между этими переменными и соответствующими факторами. Корреляция между переменной и общим фактором обычно называется *факторной нагрузкой*. Геометрическая интерпретация этого понятия дана на рис. 5.5.

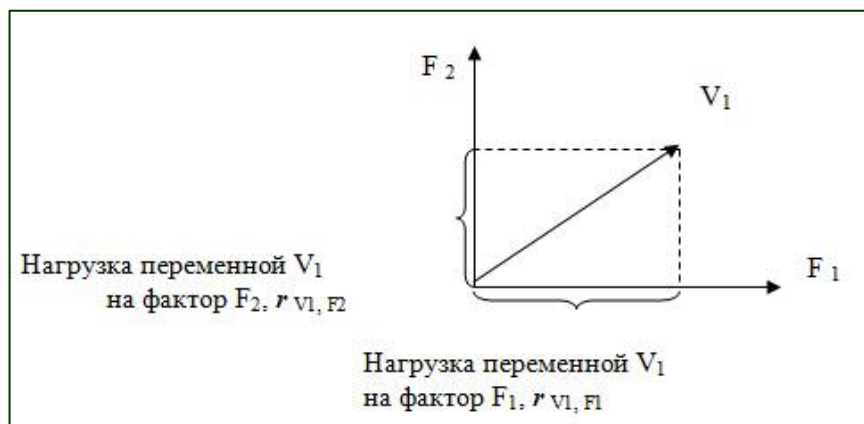


Рисунок 5.5. Геометрическая интерпретация факторной нагрузки

Зная факторные нагрузки аналитически длину вектора V_1 можно определить по теореме Пифагора:

$$V_1^2 = r_{V_1F_1}^2 + r_{V_1F_2}^2$$

Необходимо напомнить, что квадрат коэффициента корреляции показывает, какая часть дисперсии является общей для двух переменных, или, иначе говоря, насколько сильно они перекрываются. Поскольку факторные нагрузки представляют собой просто корреляции между общими факторами и переменными, то возведенная в квадрат каждая факторная нагрузка показывает долю перекрытия между каждой переменной и каждым общим фактором. Этот факт позволяет использовать факторную матрицу в двух главных направлениях.

1. Факторная матрица позволяет выявить долю перекрытия между каждой переменной и всеми общими факторами. Это достигается суммированием квадратов факторных нагрузок по всем факторам (см. рис. 7.6. для 2-х факторов). Эта доля называется *общностью* (обычно обозначается как h^2). В случае высокой общности наблюдается большая степень перекрытия с одним или более общим фактором. Низкая общность подразумевает, что переменные не связаны с общим фактором. Содержательно это может соответствовать тому, что переменная в этом случае может измерять другую черту; может быть велика ошибка измерения; возможно ответы на задания были плохо согласованы.

2. Факторная матрица показывает относительную значимость общих факторов. Можно определить какую часть дисперсии объясняет каждый общий фактор. Понятно, что фактор, который объясняет 60% всех перекрытий между переменными, более значим, чем фактор, объясняющий только 20% дисперсии.

5.6 Геометрическая интерпретация центроидного метода факторного анализа

Ранее отмечали, что максимальную информацию об объекте можно получить в случае отсутствия корреляции между переменными, описывающими данный объект. Можно предположить, что специальным подбором переменных можно было бы очень экономно и исчерпывающе описать объект. Этот подход достаточно сложно реализовать на практике, однако остается возможность искусственным образом построить систему попарно некоррелированных координатных осей, причем ни одна из них может не совпадать с исходными шкалами. Такой подход соответствует основной идее факторного анализа, согласно которой существуют скрытые факторы, управляющие наблюдаемыми свойствами объекта исследования.

Таких факторов гораздо меньше, чем потенциальное количество эмпирических переменных, и они определяют глубинную сущность объекта. Задача исследования заключается в выявлении этой скрытой факторной структуры (латентной переменной) по явной переменной, т.е. величине, которую можно непосредственно или косвенно измерить.

Подобный замысел впервые был осуществлен Ч. Спирменом и изложен в опубликованной в 1904 г. статье “Объективное определение и измерение общего уровня умственного развития”. По результатам своего исследования он сделал вывод, что за всеми конкретными показателями интеллекта и школьной успеваемости (он исследовал уровень умственного развития британских школьников) стоит некий фактор, общий для всех. Он приписал этому фактору направление от вершины пучка векторов – переменных к его центру тяжести.

Рассмотрим реализацию этой идеи на примере двух переменных в двумерной системе, в которой конфигурация векторов лежит в одной плоскости (рис 5.6.). Рассматривая окончания векторов как систему материальных точек, можно определить центр тяжести (центроид) этой системы (точка Ц.Т. на рис.5.6.). Координата центроида равна среднеарифметическому соответствующих координат. В данном случае центроидное направление совпадает с большой диагональю параллелограмма, построенного на исходных векторах V_1 и V_2 , т.е. с вектором F_1 . Вклад этих переменных в общий фактор F_1 , обозначим V_1' и V_2' соответственно. Если теперь из векторов V_1 и V_2

вычесть их вклады в фактор F_1 , то остаточные векторы $V_1 - V_1'$ и $V_2 - V_2'$ будут равны соответственно V_1'' и V_2'' (это векторные разности!) и лежат на прямой, перпендикулярной F_1 . Они одинаковы по длине и противоположны по направлению; в сумме они дают 0.

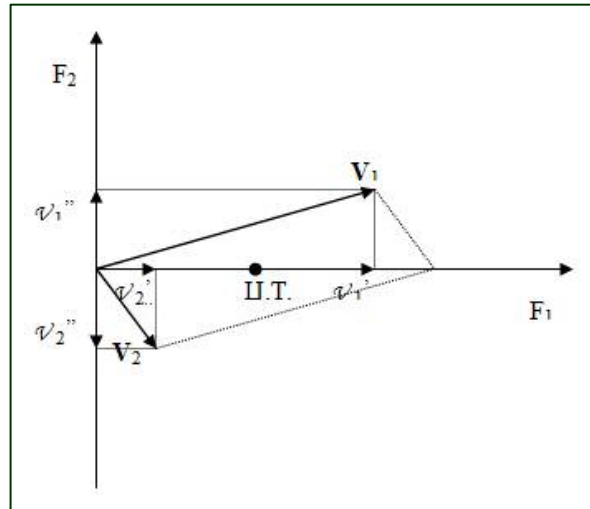


Рисунок 5.6 . Центроидное разложение двух векторов

Направление V_1'' или V_2'' естественно выбрать в качестве второго фактора. Поиск дальнейших факторов в этом примере исключается, т.к. каждый из векторов V_1 и V_2 точно равен сумме своих составляющих по F_1 и F_2 .

Представим, что у нас не две, а пять исходных переменных (рис. 5.7.). Рассматривая окончания векторов как систему материальных точек можно определить центр тяжести (центроид) этой системы. Тогда ось первого фактора проводится через две точки: начало конфигурации векторов (точка 0) и центр тяжести (точка ЦТ). Таким образом, определяется ось первого фактора.

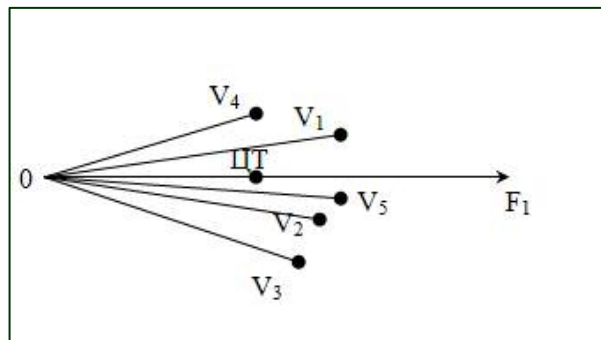


Рис 5.7. Исходный пучок векторов-переменных

Вклад каждой переменной в первый фактор геометрически определяется переносом начала отсчета в центроид ЦТ. После вычитания из векторов их составляющих по F_1 , мы получаем новый пучок разнонаправленных векторов, которые в новой системе отсчета обозначены пунктиром. (рис 5.8.)

Для дальнейшего продвижения необходимо преобразовать остаточный пучок таким образом, чтобы его принципиальная структура не нарушилась, но центроид уже не совпадал бы с уже имеющимся. Это достигается поворотом некоторых из остаточных векторов на 180° , таким образом, чтобы новый пучок укладывался в пределы как можно меньшего угла.

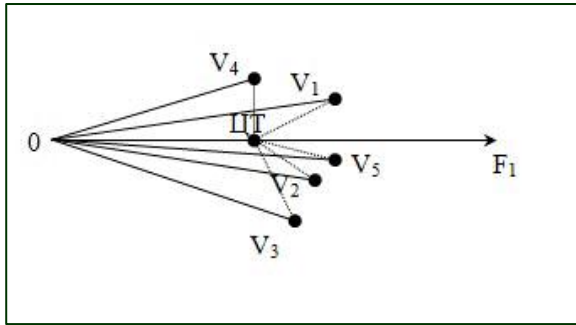


Рис. 5.8. Остаточный пучок векторов.

Длина векторов уменьшилась пропорционально уменьшению их проекции на ось F_1 .

(Эта процедура называется обращением или преобразованием матрицы) В этом случае все корреляции между остаточными векторами окажутся положительными и точность определения нового центроида окажется максимальной. (рис. 5.9.) Очевидно, что в обращенной матрице для тех коэффициентов корреляции, который соответствуют перевернутым векторам, знаки должны быть изменены на противоположные. Правила изменения знаков будут рассмотрены ниже.

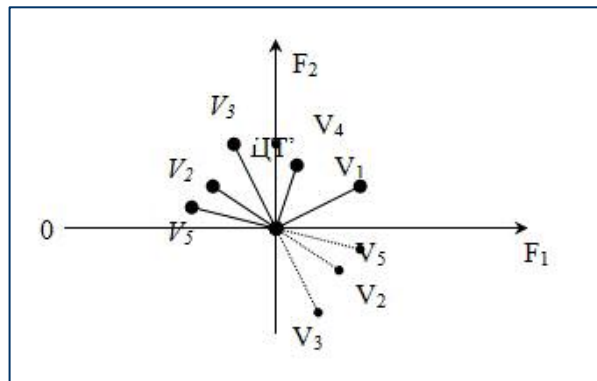


Рис. 5.9. Остаточный пучок после поворота двух векторов на 180°
(обращенная остаточная матрица; $\text{ЦТ}'$ – новый центроид).

После определения второго центроидного направления необходимо определить нагрузки переменных на этот второй фактор, в результате чего будет получен новый остаточный пучок векторов. Очень схематично он представлен на рис 5.10.

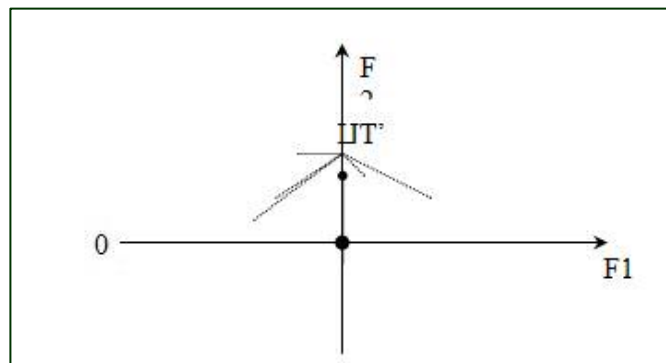


Рис. 5.10. Остаточный пучок векторов после выделения второго фактора

Новый остаточный пучок векторов обрабатывается аналогично, т.е. определяется направление F3. Максимальное количество факторов соответствует количеству исходных переменных, при этом первый фактор является наиболее информативным, объясняющим поведение многих (иногда даже всех) явных переменных. Далее следуют факторы, информативность которых убывает. Выделение факторов завершается, когда остаточный пучок векторов становится неинформативным. Для определения этого момента разработано множество формальных критериев, с некоторыми из которых мы познакомимся.

Таким образом, в ходе факторного анализа у нас происходит уменьшение (компрессия) исходного пространства данных, что в значительной степени облегчает анализ и интерпретацию цифровых результатов. Алгебраический аналог продемонстрированной геометрической процедуры будет описан ниже.

5.7 Общий алгоритм факторного анализа

При всем своем разнообразии методы факторного анализа имеют общий алгоритм решения. (рис 5.11.). Он начинается с построения матрицы исходных данных и заканчивается получением матрицы факторных оценок.

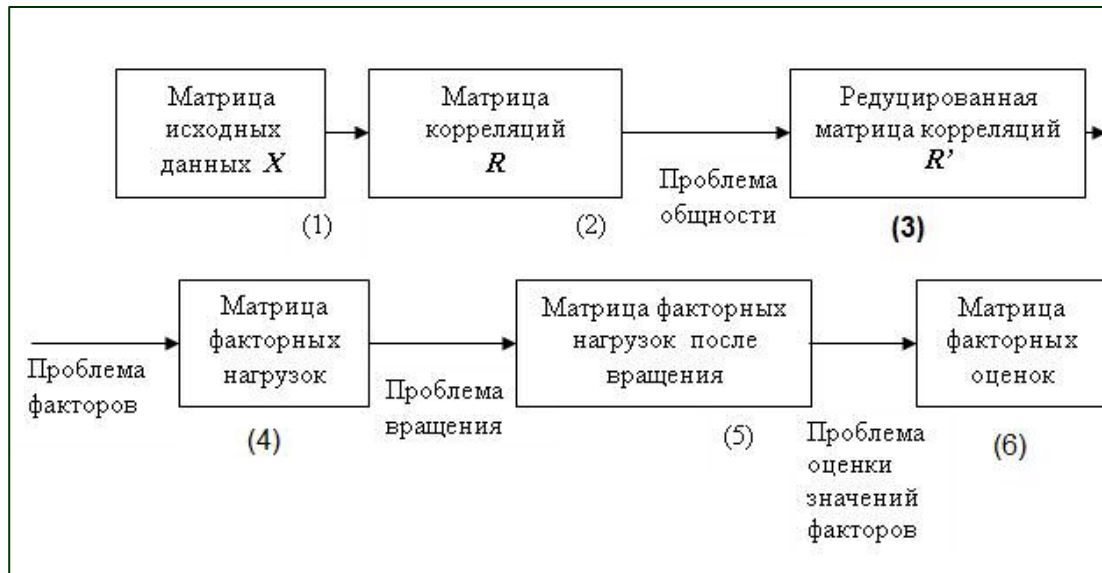


Рис. 5.11. Алгоритмическая схема реализации методов факторного анализа

Первые два шага алгоритма не вызывают затруднений. Выполнение третьего шага – построение редуцированной матрицы - связано с решением проблемы общности. Эта проблема актуальна именно для методов факторного анализа, так как в методе главных компонент предполагается, что дисперсию исходных признаков полностью объясняют латентные факторы, при этом в редуцированной матрице, как и в корреляционной все общности равны единицам. (Это соответствует равенству единице всех диагональных элементов матрицы.)

$$R = R' = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

В факторном анализе дисперсия признаков может быть объяснена не на все 100 %, а несколько меньше с учетом существования специфических факторов. Матрица корреляций преобразуется в редуцированную матрицу, в которой в качестве диагональных элементов располагаются соответствующие общности.

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} h_1^2 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & h_2^2 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & h_3^2 & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & h_m^2 \end{pmatrix}$$

Существует несколько методов поиска общностей h_j^2 , среди кото-

рых чаще всего используются:

- *Метод наибольшей корреляции.* На главной диагонали матрицы записываются наибольшие по абсолютной величине значения коэффициента корреляции в соответствующем столбце.
- *Метод Барта.* По каждому столбцу матрицы \mathbf{R} находят среднее значение коэффициента корреляции. Если это значение сравнительно велико, то за общность принимают значение, несколько выше наибольшего в столбце коэффициента корреляции. Если же среднее значение коэффициента сравнительно мало, то общность будет несколько меньше наибольшего в столбце коэффициента корреляции.

На этапе построения факторной матрицы (4 этап) проблема заключается в выборе оптимального метода выделения факторных нагрузок. Следует помнить, что наилучшие решения обычно находят с помощью современных методов факторного анализа. В общем случае выделенные факторы не обязательно ортогональны, что означает, что переменные-векторы (столбцы) матрицы не независимы, т.е. они будут зависимыми.

Выполнение шага 5 алгоритма и решение проблемы вращения пространства выделенных факторов не обязательно. Необходимость в этом этапе возникает, когда пространственное расположение факторов нелогично или трудно поддается интерпретации. Возникновение подобной ситуации возможно из-за того, что положение факторных осей в пространстве четко не задается, т.е. изначально отсутствует пространственная привязка факторных осей.

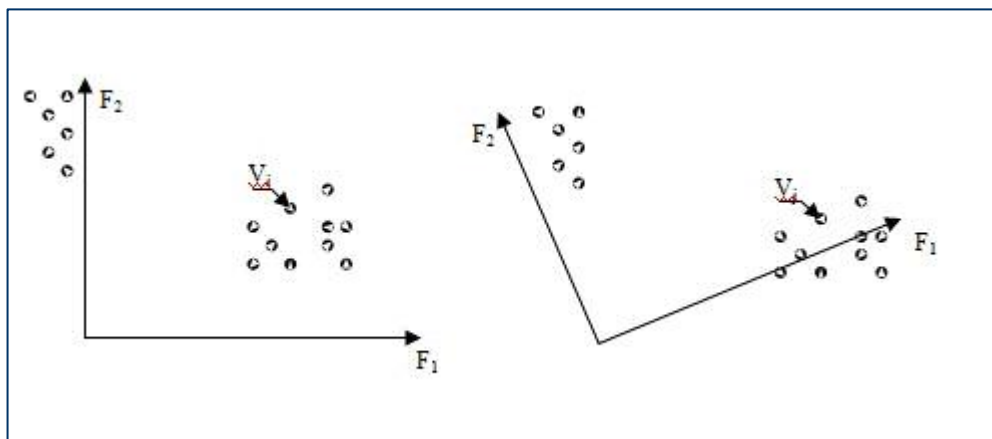


Рис. 5.12. Факторная структура до и после вращения

Из рисунка видно, что поворот осей приводит с одной стороны к изменению координат исходных признаков, что, соответственно, изменяет факторные нагрузки, а с другой - к большей интерпретируемости факторов.

Получение факторной матрицы может быть конечным этапом факторного анализа, однако матрица может являться основой для расчета факторных оценок – значений факторов для каж-

дого объекта. Их получение, как правило, и является конечным результатом факторного анализа.

Для того, чтобы наши рассуждения о факторном анализе приобрели конкретное содержание, проиллюстрируем выделение факторов на конкретном примере, на примере центроидного метода факторного анализа.

Общая стратегия центроидного метода факторного анализа.

Для того, чтобы наши рассуждения о факторном анализе приобрели конкретное содержание, проиллюстрируем выделение факторов на конкретном примере. Предположим, что у нас есть результаты исследования большой группы людей ($n=100$) по шести переменным. Данные могут быть представлены в виде матрицы размером 6×100 , где a_{ij} соответствует измерению i -ого испытуемого по j -ой шкале.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{46,1} & a_{46,2} & a_{46,3} & \dots & a_{46,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{100,1} & a_{100,2} & a_{100,3} & \dots & a_{100,6} \end{pmatrix}$$

В качестве величины a_{ij} могут быть значение, измерение в любой шкале.

На основании матрицы исходных данных получаем корреляционную матрицу R размером 6×6 , причем в качестве меры связи используем коэффициент корреляции, соответствующий шкале переменных.

Итак, в результате наших расчетов получилась корреляционная матрица R :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,44 & 0,41 & 0,29 & 0,33 & 0,25 \\ 0,44 & 1 & 0,35 & 0,35 & 0,32 & 0,33 \\ 0,41 & 0,35 & 1 & 0,16 & 0,19 & 0,18 \\ 0,29 & 0,35 & 0,16 & 1 & 0,6 & 0,47 \\ 0,33 & 0,32 & 0,19 & 0,6 & 1 & 0,46 \\ 0,25 & 0,33 & 0,18 & 0,47 & 0,46 & 1 \end{pmatrix}$$

Корреляционная матрица R используются не непосредственно, а в виде редуцированной матрицы, которая отличается от исходной тем, что по ее диагонали располагаются не единицы, а оценки общих нормированных дисперсий. Модель центроидного факторного анализа предлагает, что для любого измерения a_{ij} .

Общая дисперсия = дисперсия общих факторов + дисперсия специфических факторов + дисперсия ошибки измерения.

Общими называются факторы, влияющие на результаты измерений по двум и более шкалами. Каждый из специфических факторов действует на показания, полученные лишь по какой-либо одной шкале. Под ошибкой измерения подразумевается совокупность не поддающихся учету причин, определяющих результаты измерения. Общая дисперсия, обусловленная действием всех вышеперечисленных причин, принимается за 1, а дисперсии, объясняемые отдельно действием

общих факторов, специфических факторов или ошибок измерения, выражающих как доли общей дисперсии, т.е. как доли единицы.

Значения общих дисперсий нам пока не известны, поэтому им дается вначале достаточно приближительная, но более или менее правдоподобная оценка. В качестве начальных оценок нормированных общих дисперсий, которые располагаются по диагоналям матрицы R , стоящих в соответствующих столбцах (метод наибольшей корреляции). В нашем примере это будет редуцированная матрица $R_{1;1}$ (последний из двух индексов указывает на номер приближения)

$$R_{1;1} = \begin{pmatrix} 0,44 & 0,44 & 0,41 & 0,29 & 0,33 & 0,25 \\ 0,44 & 0,44 & 0,35 & 0,35 & 0,32 & 0,33 \\ 0,41 & 0,35 & 0,41 & 0,16 & 0,19 & 0,18 \\ 0,29 & 0,35 & 0,16 & 0,6 & 0,6 & 0,47 \\ 0,33 & 0,32 & 0,19 & 0,6 & 0,6 & 0,46 \\ 0,25 & 0,33 & 0,18 & 0,47 & 0,46 & 0,47 \end{pmatrix}$$

По данным матрицы $R_{1;1}$ определяется положение первого фактора (первого центроида) относительно исходного пучка. На языке факторного анализа это называется определением нагрузок исходных шкал на первый фактор или определением первой серии факторных нагрузок. Эта процедура складывается из ряда действий.

Алгоритм определения факторных нагрузок.

1. Суммирование элементов матрицы $R_{1;1}$ по столбцам. В результате получаем маргинальные суммы $C_{j,1;1}$ где индексы соответствуют :

j – номер столбца;

1 – номер фактора;

1 – номер приближения.

В нашем примере это величины $C_{1,1;1} \dots C_{6,1;1}$, которые равны соответственно 2,16; 2,23; 1,7; 2,47; 2,5; 2,16.

2. Определение общей суммы элементов матрицы $C_{1;1}$, т.е.

$$C_{1;1} = \sum C_{j,1;1}$$

у нас $C_{1;1} = 13,22$

3. Определение модулей факторных нагрузок

$$|H_{j,1;1}| = \frac{C_{j,1;1}}{\sqrt{C_{1;1}}}$$

В нашем примере

$$H_{1;1} = \frac{2,16}{\sqrt{13,22}} \approx 0,59$$

$$H_{2;1} = 0,61$$

$$H_{3;1} = 0,47$$

$$H_{4;1} = 0,68$$

$$H_{5;1} = 0,69$$

$$H_{6;1} = 0,59$$

Итак, выделили нагрузки исходных переменных на первый фактор.

Переходим к вычислению нагрузок на второй фактор и следующим шагом будет вычисление остаточной матрицы $R_{2;1}$, которая определяется по матричной формуле:

$$R_{2;1} = R_{1;1} - F_{1;1} \times F'_{1;1}$$

где $F_{1;1}$ – вектор – столбец только, что выделенных факторных нагрузок, а $F'_{1;1}$ – вектор – строка из тех же элементов.

Произведение общих векторов есть матрица попарных произведений факторных нагрузок $H_{1;1;1} \dots H_{6;1;1}$

Напоминаем, что произведением столбца на строку является матрица, а умножение строки на строку приведет к появлению только обычного числа, т.е. $(\) \times (\) = [\]$, а $(\) \times (\) = k$

Разность двух матриц, есть матрица, элементы которой равны разностям соответственных элементов матриц уменьшаемого ($R_{1;1}$) и вычитаемого ($F_{1;1} \times F'_{1;1}$). В нашем случае это

$$R_{2;1} = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,08 & 0,13 & -0,11 & -0,08 & -0,1 \\ 0,08 & 0,06 & 0,06 & -0,07 & -0,1 & -0,03 \\ 0,13 & 0,06 & 0,19 & -0,16 & -0,13 & -0,1 \\ -0,11 & -0,07 & -0,16 & 0,14 & 0,13 & 0,07 \\ -0,08 & -0,1 & -0,13 & 0,13 & 0,13 & 0,05 \\ -0,1 & -0,03 & -0,1 & 0,07 & 0,05 & 0,12 \end{pmatrix}$$

Матрица $R_{2;1}$ является основой для вычисления второй серии факторных нагрузок. Эта процедура аналогична процедуре выделения первой серии нагрузок и начинается с редуцирования матрицы $R_{2;1}$, т.е. замены диагональных элементов матрицы $R_{2;1}$ на максимальные модули элементов соответствующих столбцов.

Имеем

$$R'_{2;1} = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,08 & 0,13 & -0,11 & -0,08 & -0,1 \\ 0,08 & 0,1 & 0,06 & -0,07 & -0,1 & -0,03 \\ 0,13 & 0,06 & 0,19 & -0,16 & -0,13 & -0,1 \\ -0,11 & -0,07 & -0,16 & 0,16 & 0,13 & 0,07 \\ -0,08 & -0,1 & -0,13 & 0,13 & 0,13 & 0,05 \\ -0,1 & -0,03 & -0,1 & 0,07 & 0,05 & 0,12 \end{pmatrix}$$

Полученная редуцированная остаточная матрица содержит много отрицательных корреляций. Геометрически это соответствует тому, что векторы переменных разнонаправлены. В таком случае процедура вычисления факторных нагрузок начинается с консолидации векторного пучка, которые заключается в таком преобразовании матрицы, которое приведет к минимизации количества и “общего веса” ее отрицательных элементов. Геометрически это соответствует повороту на 180° некоторых векторов исходного пучка с таким расчетом, чтобы в результате пучок располагался в пределах как можно меньшего пространственного угла.

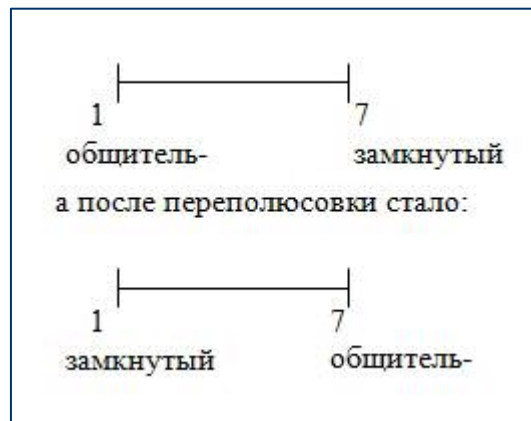
Алгоритм консолидации векторного пучка

1. Суммируем элементы матрицы по столбцам без включения в суммы диагональных элементов. В результате получим частичные маргинальные суммы. $S_{1;2;1} \dots S_{6;2;1}$

2. Суммируем полученные частичные маргинальные суммы, т.е. определили их общую сумму $S_{2;1}$.
3. Среди частичных маргинальных сумм $S_{1;2;1} \dots S_{6;2;1}$ определяем наибольшие (по абсолютной величине) отрицательные значения. Если окажется, что все маргинальные суммы положительны, то в консолидации векторного пучка нет необходимости.
4. Меняем знаки у всех элементов соответствующих столбцов (те, у которых наибольшие отрицательные частичные маргинальные суммы) и одноименных строк. Такая процедура называется переполлюсовкой шкалы. Геометрически эта процедура эквивалентна повороту переменной - вектора на 180° . В содержательном плане такая операция означает перемену направления измерения соответствующего признака

Было, например,:

а после переполлюсовки стало:



т.е. измерение “лучшего” к “худшему” заменено измерением от “худшего” к “лучшему”. Процедура консолидации может проводиться либо последовательно столбец за столбцом либо несколько столбцов одновременно.

5. После вышеприведенной процедуры повторно вычисляем частичные маргинальные суммы и их общую сумму.

6. Если окажется, что новое значение $S_{2;1}$ больше предыдущего, то это хорошо, и можно будет приступить к выделению факторных нагрузок. Если же сумма уменьшилась, то необходимо вернуться к виду матрицы до последней переполлюсовки.

В нашем случае частные маргинальные суммы до консолидации векторного пучка равны:

$$S_{1;2;1} = -0,08 \quad S_{2;2;1} = -0,06 \quad S_{3;2;1} = -0,2 \quad S_{4;2;1} = -0,14 \quad S_{5;2;1} = -0,13 \quad S_{6;2;1} = -0,11, \text{ и их общая сумма } S_{2;1} = -0,72.$$

Переполлюсовке подвергались шкалы 4,5,6 и соответствующие строки. В результате получили матрицу $R_{2;1}^*$, диагональные элементы которой те же, что и в матрице $R'_{2;1}$, остальные элементы совпадают по модулю, но могут отличаться знаком.

$$R_{2;1}^* = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,08 & 0,13 & 0,11 & 0,08 & 0,1 \\ 0,08 & 0,1 & 0,06 & 0,07 & 0,1 & 0,03 \\ 0,13 & 0,06 & 0,19 & 0,16 & 0,13 & 0,1 \\ 0,11 & 0,07 & 0,16 & 0,16 & 0,13 & 0,07 \\ 0,08 & 0,1 & 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0,05 \\ 0,1 & 0,03 & 0,1 & 0,07 & 0,05 & 0,12 \end{pmatrix}$$

Частичные маргинальные суммы для этой матрицы $S_{1,2;1} = 0,5$ $S_{2,2;1} = 0,34$ $S_{3,2;1} = 0,58$ $S_{4,2;1} = 0,54$ $S_{5,2;1} = 0,49$ $S_{6,2;1} = 0,35$, а их сумма $S_{2;1} = 2,8$ (сравните с $-0,72$!), т.е. переполусовка привела к желаемому результату.

Номера шкал, переполусовка которых привела к возрастанию общей суммы S , необходимо записать, т.к. эта информация будет необходима в дальнейшем (V_4 V_5 V_6).

По данным матрицы $R_{2;1}^*$ определяется нагрузка шкал на второй фактор по уже известному алгоритму:

- Определяем маргинальные суммы (с диагональными элементами)
 $C_{1,2;1} = 0,63$; $C_{2,2;1} = 0,44$; $C_{3,2;1} = 0,77$; $C_{4,2;1} = 0,7$; $C_{5,2;1} = 0,62$; $C_{6,2;1} = 0,47$
- и определяем их сумму
 $C_{2;1} = 3,63$
- Определяем модули факторных нагрузок:

$$H_{1,2;1} = \frac{0,63}{\sqrt{3,63}} = 0,33$$

$$\begin{aligned} H_{2,2;1} &= 0,23 \\ H_{3,2;1} &= 0,4 \\ H_{4,2;1} &= 0,37 \\ H_{5,2;1} &= 0,32 \\ H_{6,2;1} &= 0,25 \end{aligned}$$

На этом этапе вводится новая операция, в которой мы должны учесть результаты переполусовки шкал, т.е. результате консолидации. Это достигается простановкой “минусов” при факторных нагрузках, соответствующих шкалам, которые подвергалось переполусовке. В результате получили нагрузки исходных переменных на второй фактор. В нашем случае эти нагрузки будут соответственно равны: 0,33; 0,23; 0,4; -0,37; 0,32; -0,25.

Можно приступить к определению следующего комплекта факторных нагрузок на 3 –ий фактор. Для этого определяем остаточную матрицу $F_{3;1}$:

$$R_{3;1} = R_{2;1}' - F_{2;1} \times F_{2;1}'$$

У нас

$$R_{3;1} = \begin{pmatrix} 0,02 & 0 & 0 & 0,01 & 0,03 & -0,02 \\ 0 & 0,05 & -0,03 & 0,02 & -0,03 & 0,03 \\ 0 & -0,03 & 0,03 & -0,01 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0,02 & -0,01 & 0,02 & 0,01 & -0,02 \\ 0,03 & -0,03 & 0 & 0,01 & 0,03 & -0,03 \\ -0,02 & 0,03 & 0 & -0,02 & -0,03 & 0,06 \end{pmatrix}$$

По данной матрице видно, что значение в столбцах стали очень маленькими и это наводит на мысль, что третий фактор для нас может быть уже не информативными. Обычно нет необходимости вычислять все возможные факторы (в нашем случае - шесть). Нескольких первых факторов оказывается достаточно.

Вопрос о том, на выделение какого по счету фактора следует остановиться, решается с помощью специального разработанных критериев, которые позволяют установить, насколько очередная остаточная матрица информативна. Можно использовать критерий, разработанный Саундерсом, для чего вычисляют величину критерия.

$G = a - b \times c$, где

$$a = \frac{2n}{n-1} \times \sum_{ij} a_{ij}^2 \quad (\text{Под знаком суммы - сумма квадратов элементов остаточной матрицы})$$

$$b = \left(\frac{n-v}{n} \right)^2$$

$c = \frac{1}{N} \left(n - \sum_{ik} F_{vi}^2 \right)^2$ (Под знаком суммы – сумма квадратов факторных нагрузок в факторных матрице после извлечения v -ого фактора)

- ✓ N - число объектов;
- ✓ n – число шкал или переменных;
- ✓ v - количество факторов, которые были выделены.

Если $G < 0$, то выделение факторов можно закончить, если $G > 0$, то выделение факторов продолжается. В нашем случае выделение факторов закончено.

Другим критерием прекращения выделения факторов является уравнение Л. Терсдоуна, связывающие порядок матрицы n и минимальное число общих факторов f , которое можно извлечь из матрицы порядка n :

$$n = 0,5(2f + 1 + \sqrt{8f + 1})$$

$$n = 0,5(2f + 1 - \sqrt{8f + 1})$$

Для $n \leq 15$ значение минимального числа общих факторов приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| n | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| f | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Будем исходить из предположения, основанного на критерии Саундерса, что число выделенных факторов равно 2 (F_1 и F_2). Представим совокупность факторных нагрузок в виде таблицы – матрицы факторных нагрузок, которую обозначим как Φ_1

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,33 \\ 0,61 & 0,23 \\ 0,47 & 0,4 \\ 0,68 & -0,37 \\ 0,69 & -0,32 \\ 0,59 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Это и есть главный результат выделения факторов.

Нам осталось только связать полученную матрицу с совокупностью общих дисперсий.

Для этого все факторные нагрузки по строкам в матрице Φ_1 возводятся в квадрат:

$$d_{i;m+1} = (H_{i,1;m})^2 + (H_{i,2;m})^2 \implies$$

и складываются последовательно для всех i -шкал. В общем случае,



$$d_{i;m+1} = \sum (H_{i,v;m})^2$$

когда количество выделенных факторов больше двух переход от Φ_1 к d осуществляется по формуле:

Полученные таким образом дисперсии подставляются в диагонали исходной корреляционной матрицы и процедура выделения факторных нагрузок повторяется; теперь это будет называться вторым приближением (индекс 2 после точки с занятой). Если при сравнении матрицы Φ_1 (первого приближения) с матрицей Φ_2 (второе приближение) все соответствующие элементы обеих матриц попарно равны друг другу, то процедуру выделения факторов можно завершить и вычислять суммарную долю полной дисперсии, проходящей на выделенные факторы. Это осуществляется по формуле

$$h_v = \frac{\sum (H_{i,v})^2}{n} \Rightarrow$$

В нашем случае $h_1=0,37$; $h_2=0,1$.

Построение факторных диаграмм

Матрица факторных нагрузок может быть использована для построения факторной диаграммы исходных переменных. При этом значение факторных нагрузок в факторной матрице рассматриваются как точки в координатной системе, образованной взаимно ортогональными осями F_1 и F_2 . Если все предыдущие вычисления произведены правильно, то ось F_1 должна проходить через “центр тяжести” пучка векторов исходных переменных, начало которых находится в начале координат (точка 0,0), а концами служат построенные точки.

Предположим, что результаты построения такой диаграммы представлены на рисунке 5.13.

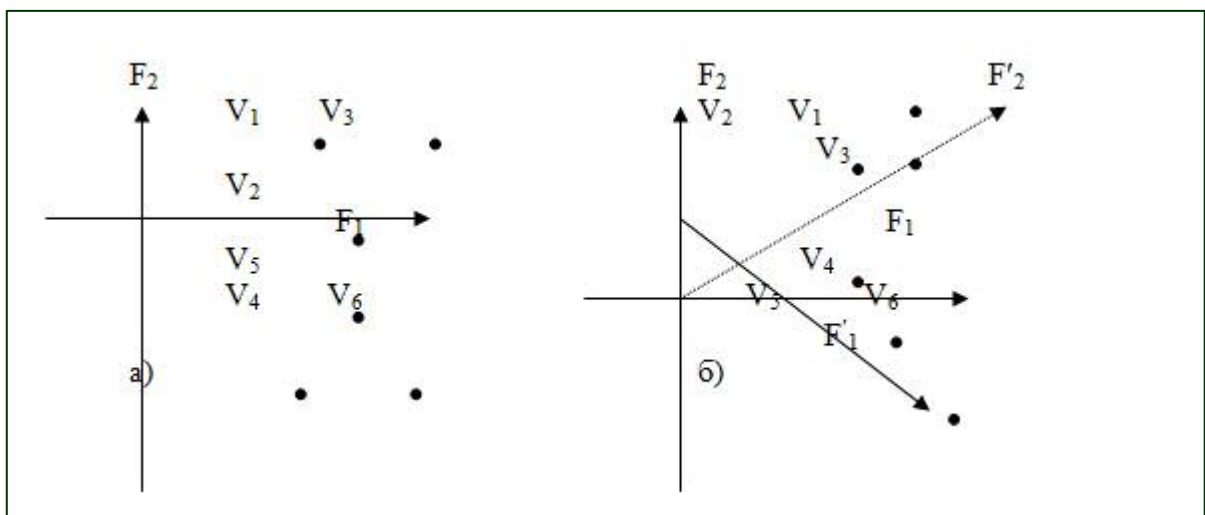


Рисунок 5.13. Примерный вид факторных диаграмм.

Из рисунка 5.13. а можно заключить, что все наши переменные оказывают существенный вклад в первый фактор (проекции радиус –векторов $V_1 - V_6$ на эту ось больше, чем на F_2)

Второй фактор F_2 отражает некоторую специфику переменных. В данном случае, по – видимому, исходные переменные $V_1 - V_6$ мало отличаются друг от друга в представлениях испытуемого. В случае факторной диаграммы рис. 7.14. б - различие между переменными значительно. В этом случае для облегчения интерпретации целесообразно повернуть систему координат вокруг ее начала на некоторый угол таким образом, чтобы оси F'_1 и F'_2 проходили вблизи имеющих сгустков точек.

Иногда для более содержательной интерпретации результатов, особенно когда точки факторной диаграммы рассеяны относительно осей, целесообразно произвести поворот факторного пространства (без смещения начала координат) на некоторый угол (Рис. 5.14.)

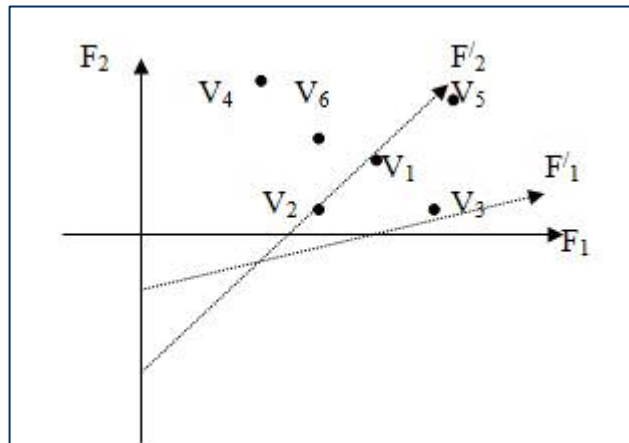


Рисунок 5.14. факторная диаграмма.

Новые оси должны проходить вблизи скоплений точек. Наименования новым факторами F'_2 и F'_1 присваиваются путем синтеза “близлежащих” точек.

Вращение факторов

Процесс поиска оптимальной факторной структуры называется процедурой вращения факторов. Л. Терстоун считал, что цель исследования заключается в поиске “простой структуры” или попытке объяснить большое число переменных меньшим числом факторов. С формальной точки зрения при поиске простой структуры следует иметь в виду следующее:

- целесообразно стремиться к получению для каждой переменной максимального числа больших факторных нагрузок по одним факторам;
- и одновременно наибольшего количества минимальных факторных нагрузок по другим факторам.

Следуя этому правилу, мы стремимся к тому, чтобы одну группу переменных можно было в большей степени объяснить влиянием одних факторов, а другую - других. Таким образом, “простота” хорошего факторного решения заключается в том, что каждая переменная имеет наиболее простое факторное объяснение, т.е. характеризуется преобладающим влиянием некоторого одного фактора и наоборот: один фактор должен быть специфическим образом связан с одной группой переменных и не связан с другими переменными. В предельном случае самая простая структура получается тогда, когда все переменные располагаются на соответствующих факторных осях, т.е. имеют ненулевые факторные нагрузки только по одному фактору, а по остальным – нулевые.

Если у нас система координат – двумерная, то вращение можно осуществить вручную. Математический смысл ротации – это поворот ортогональной системы координат относительно неизменного начала отсчета на некоторый угол ϕ . (При допущении, что факторы облические, - вращению подвергаются отдельные оси координат).

Ортогональная ротация двумерной системы сводится к двум этапам.

1. Определить угол φ , на который следует повернуть систему координат в плоскости, для того, чтобы по возможности удовлетворялись критерии “простой структуры”. При вычислении вручную это производится геометрически на чертеже.

2. Вычисление новых значений факторных зарядов.

Геометрически это осуществляется следующим образом:

- на кальке вычерчиваем конфигурацию векторов.
- прямоугольная система координат в том же масштабе (длина оси =1!) на миллиметровой бумаге накладывается сверху.
- начало координат и начало конфигурации векторов совмещают.
- вращают миллиметровую бумагу – до “простой структуры”.

Найдя некоторое положение осей, по миллиметровке на осях отмечают новые проекции, которые определяются в числовом виде по миллиметровой бумаге. Эти новые проекции и образуют новые значения факторной матрицы после вращения.

Однако при трех и более факторах пересчет системы координат вручную и построение факторных диаграмм становится делом очень сложным.

В компьютерных программах, исходя из общего принципа построения простой структуры, предлагается несколько способов решения проблемы оптимального вращения системы координат.

Выделяют два класса методов вращения – методы ортогонального вращения, когда при повороте осей координат, угол между факторами остается прямой (и, следовательно, - факторы не связаны между собой) и более общие методы косоугольного (облического) вращения, когда первоначальное ограничение о некоррелированности факторов снимается.

Методы ортогонального вращения: *варимакс, кватримакс, эквимакс.*

Варимакс – наиболее часто используемый на практике метод, цель которого минимизировать количество переменных, имеющих высокие нагрузки на данный фактор, что способствует упрощению описания фактора за счет группировки вокруг него только тех переменных, которые с ним связаны в большей степени, чем остальные.

Кватримакс - в определенном смысле противоположен варимаксу, т.к. минимизирует количество факторов, необходимых для объяснения данной переменной. Поэтому он усиливает интерпретабельность переменных. Кватримакс – вращение приводит к выделению одного из общих факторов с достаточно большими нагрузками на большинство переменных.

Эквимакс и бикватримакс - это два схожих метода, представляющих собой своеобразную комбинацию варимакса, упрощающего описания факторов и кватримакса, - упрощающего описание переменных.

Выбор более подходящего метода вращения требует определенного опыта использования факторного анализа. Однако специальные исследования (Л. Кайзер, 1958) свидетельствуют в пользу преимущественного использования варимакса при прочих равных условиях.

Методы косоугольного вращения также позволяют упростить описание факторного решения за счет введения предположения о коррелированности факторов и, следовательно, о возможности существования факторов более высокого порядка, объясняющих наблюдаемую корреляцию. Основное преимущество косоугольного вращения состоит в возможности проверки ортогональности получаемых факторов: если в результате вращения получаются действительно ортогональные факторы, то можно быть уверенным в том, что ортогональность и, соответственно, независимость им действительно свойственна, а не является следствием использования метода ортогонального вращения.

Заключение

На переднем крае теоретических разработок, имеющих большую практическую значимость, в настоящее время оказались направления, которые в наибольшей мере отражают изменившиеся условия функционирования организаций. Это вызвано и ориентацией на новейшие технологии, и проблемой рискованных инвестиций, и способами высокопродуктивного ведения хозяйства, и прогнозированием потребительского спроса и поведения конкурентов, и господством стратегического подхода в управлении. Среди основных направлений теоретических обобщений и разработок можно назвать следующие.

1. Реинжиниринг, или перестройка на современной информационной и технологической основе организации производства и управления. Это и теория, и методы комплексного оздоровления корпораций, управленческого ренессанса с охватом и реконструкцией всех без исключения элементов, в том числе систем человеческих мотиваций и стимулов. В рамках этого направления рассматриваются и новые импульсы повышения эффективности, связанные с сокращением размеров и оптимизацией хозяйствующих субъектов, и потенциал матричных структур, органически сочетающих линейное и программное руководство, и возможности деятельности комплексных целевых команд, и многое другое. Управленческий механизм фирмы настраивается на овладение рынком – анализ его емкости, организацию сбыта товаров, способы стимулирования продаж, обеспечение конкурентоспособности товаров и услуг.

2. Концепция внутренних рынков корпораций (или организационных рынков). Она характеризуется перенесением закономерностей и принципов рыночного хозяйства на внутреннюю деятельность корпораций. Такие революционные преобразования должны охватить все их подразделения (линейные, функциональные, маркетинговые и даже аппарат высших руководителей). Они становятся автономными звеньями, которые покупают и продают товары и услуги, участвуя во внутрифирменном и межфирменном обороте, и объединяются едиными информационными сетями, финансовыми системами и предпринимательской культурой. Благодаря развитию прямых связей организационные рынки резко сокращают многие виды расходов, внимание фирм фокусируется на обосновании перехода от иерархических к горизонтальным управленческим структурам, на поиске выгодного соотношения между крупными и малыми операциями.

Согласно этой концепции, подразделения, имеющие широкую экономическую самостоятельность внутри предприятий, могут оперативно вносить изменения в производстве товаров, предоставлении услуг, во всей системе отношений с потребителями. На этой основе и с использованием информационных технологий формируются сетевые организации с распределенными автономными звеньями, так называемые виртуальные корпорации. Появляется принципиально новый объект управления, требующий очень тонкой настройки. К этому направлению примыкает и разрабатываемая концепция «демократической корпорации», предусматривающая широкую децентрализацию управления с развитием демократических форм и методов функционирования подразделений и руководителей.

Литература

1. Михеева Е.Н., Сероштан М.В. Управление качеством. - М.: Дашков и Ко,
2. Эванс. Д. Управление качеством. - М.: Юнити-Дана, 2007
3. Миронов М.Г. Управление качеством. - М.: Проспект, 2006.-206с
4. Ершов. А.К. Управление качеством. - М.: Логос, 2008
5. М. В. Степашкин, И. В. Котенко, В. С. Богданов МОДЕЛИРОВАНИЕ АТАК ДЛЯ АКТИВНОГО АНАЛИЗА УЯЗВИМОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ
6. В. Л. Конюх, А. Ю. Михайлишин ИМИТАТОР СЕТЕЙ ПЕТРИ И ОПЫТ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ
7. Учебный курс МГТУ им. Баумана “Основы САПР. Моделирование”. Сети Петри. Анализ сетей Петри
8. Сети Петри на сайте Института автоматизации и процессов управления. Исходные тексты примеров программ, реализующих сети Петри и строго иерархические сети.
9. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. - М.: Мир, 1984
10. Котов В.Е. Сети Петри. - М.: Наука, 1984.
11. Ачасова С.М., Бандман О.Л. Корректность параллельных вычислительных процессов. – Н.: Наука, 1990.