Министерство Российской Федерации

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
ИМ. ПРОФ. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА**

Конспект лекций по физике.

Раздел «Механика».

А.Д. Андреев, Л.М. Черных.

**Санкт-Петербург
2004**

Классическая механика.

Область применимости классической механики: объекты макромира, движущиеся со скоростями много меньшими скорости света.

Механическое движение – простейшая форма движения, при котором происходит изменение положения тел относительно друг друга. Для описания механического движения вводят систему отсчета – совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение других тел.

Основная задача механики: если известно механическое состояние системы (совокупность координат и скоростей) в момент времени t_0, определить механическое состояние системы в момент времени $t>t_0$.

Сложное движение твердого тела может быть представлено как сумма поступательного и вращательных движений.

Поступательное движение – движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки тела, остается параллельной самой себе при движении этого тела.

Следствие – все точки тела движутся по одинаковым траекториям.

Вращательное движение твердого тела вокруг оси – движение тела, при котором все точки тела описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, и с центрами, лежащими на этой оси.

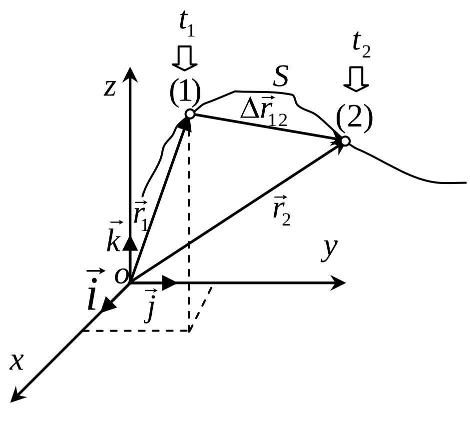
Для описания поступательного движения тела, достаточно описать движение одной точки тела. Поэтому в классической механике вводят понятие материальной точки (тело, формой и размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи) и отдельно рассматривается вопрос о кинематике материальной точки.

Характеристики кинематики материальной точки.

Для описания движения материальной точки будем использовать декартову прямоугольную систему координат (x,y,z).

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты – единичные векторы, задающие направление вдоль осей ox, oy, oz соответственно (см. рис).

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.



$\vec{r}$ - радиус-вектор - вектор, проведенный из начала системы координат в рассматриваемую точку и характеризующий положение точки в пространстве в момент времени t. $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

$\vec{r}_1$ - радиус-вектор, характеризующий положение точки в пространстве в момент времени t_1.

$\vec{r}_2$ - радиус-вектор, характеризующий положение точки в пространстве в момент времени t_2.

$\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - вектор перемещения материальной точки за время $\Delta t = t_2 - t_1$.

Траектория – линия, описываемая материальной точкой при ее движении в пространстве.

S - путь, пройденный материальной точкой - длина траектории. В общем случае $|\Delta\vec{r}_{12}| \neq S$.

$d\vec{r}$ - элементарное перемещение – перемещение за бесконечно малое время dt. $|d\vec{r}| = dS$ как бесконечно малые величины.

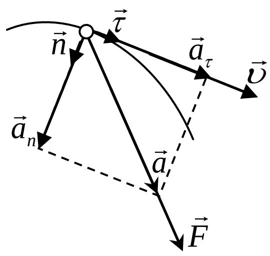
$\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ - <u>мгновенная скорость</u> характеризует быстроту изменения положения материальной точки в пространстве с течением времени.

$|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \dfrac{|d\vec{r}|}{dt} = \dfrac{dS}{dt}$, $\boxed{\upsilon = \dfrac{dS}{dt}}$.

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения.

$\vec{\upsilon}_{ср} = \dfrac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t}$ - вектор средней скорости совпадает по направлению с вектором перемещения.

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ - <u>ускорение</u> характеризует быстроту изменения вектора скорости материальной точки в пространстве с течением времени.

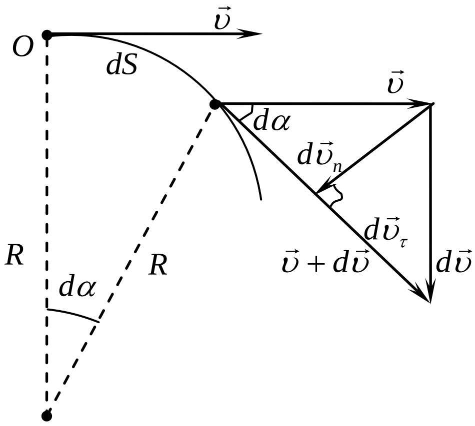


Из II закона Ньютона: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ следует, что направление вектора ускорения определяется направлением результирующей всех сил $\vec{F}$, действующих на материальную точку (см рис.).

Разложим вектор $\vec{a}$ по двум направлениям: по касательной к траектории движения $\vec{a}_\tau$ и по направлению, перпендикулярному к касательной $\vec{a}_n$.

$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$.

$\vec{\tau}$, $\vec{n}$- орты, направленные, соответственно, по касательной к траектории и по перпендикуляру к ней, $\vec{a}_\tau$- тангенциальное ускорение, $\vec{a}_n$- нормальное ускорение.



Свяжем a_τ и a_n со скоростью. Пусть за время dt скорость изменилась на $d\vec{\upsilon}$. Разложим вектор $d\vec{\upsilon}$ по касательному и перпендикулярному к траектории направлениям (см. рис.):

$d\vec{\upsilon} = d\vec{\upsilon}_\tau + d\vec{\upsilon}_n = d\upsilon \cdot \vec{\tau} + d\upsilon_n \cdot \vec{n}$.

$d\upsilon$- характеризует изменение модуля скорости, $d\upsilon_n$ характеризует изменение направления вектора скорости.

Участок траектории длиной dS можно рассматривать, как дугу окружности радиуса R (R - радиус кривизны траектории).

Из рисунка видно, что $d\alpha = \dfrac{dS}{R} \approx \dfrac{d\upsilon_n}{\upsilon}$, откуда $d\upsilon_n = \dfrac{\upsilon \cdot dS}{R}$.

Подставив это выражение в равенство для $d\vec{\upsilon}$, разделив последнее на dt и учтя, что $\dfrac{dS}{dt} = \upsilon$, получим $\vec{a} = \dfrac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$.

Таким образом, тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}$ характеризует быстроту изменения модуля скорости, а нормальное ускорение $\vec{a}_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$ характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.

При равномерном движении по окружности: $\upsilon = const$, $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n$.

При прямолинейном движении: $R = \infty \Rightarrow a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} = 0$, $\vec{a} = \vec{a}_\tau$.

Прямая и обратная задачи кинематики материальной точки.

Прямая задача кинематики заключается в определении скорости по заданной зависимости радиус-вектора или координат от времени, а также в определении ускорения по известной зависимости скорости от времени. Если задан $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, то эта задача решается с помощью равенств: $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$, где $\frac{dx}{dt} = \upsilon_x$, $\frac{dy}{dt} = \upsilon_y$, $\frac{dz}{dt} = \upsilon_z$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k}.$$

Модуль вектора скорости $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$.

Обратная задача кинематики заключается в определении скорости по заданной зависимости ускорения от времени и в определении радиус-вектора или координат по известной зависимости скорости от времени.

Получим соотношения для решения обратной задачи. Изменение скорости за бесконечно малый промежуток времени dt: $d\vec{\upsilon} = \vec{a} \cdot dt$.

Изменение скорости за конечное время от момента t_0 до момента t равно:

$$\vec{\upsilon}(t) - \vec{\upsilon}(t_0) = \int_{t_0}^{t} d\vec{\upsilon} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt.$$

Отсюда получим равенство $\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt$, дающее решение обратной задачи для скорости.

Перемещение материальной точки за время dt: $d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot dt$.

Перемещение за промежуток времени от t_0 до t:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t) \cdot dt.$$

Отсюда получим равенство для решения обратной задачи для радиус-вектора:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t)dt.$$

Если спроектировать входящие в это равенство вектора на одну из координатных осей, например X, то получим решение обратной задачи для соответствующей координаты:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \upsilon_x(t)dt.$$

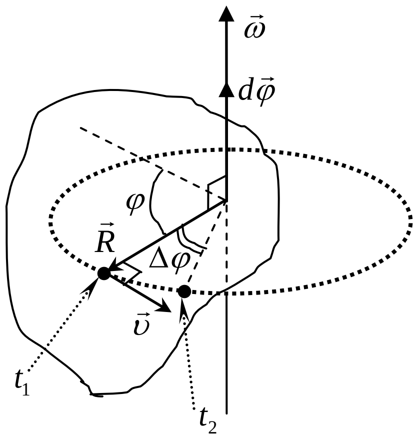
Как видим, для решения обратной задачи требуется задание начальных условий, т.е. величин $\vec{\upsilon}(t_0)$ и $\vec{r}(t_0)$.

Характеристики кинематики вращательного движения твердого тела.

В случае вращательного движения точки тела находятся на разном расстоянии R от оси вращения и, следовательно, имеют разную скорость.

Рассмотрим вращательное движение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси вращения.

<u>Абсолютно твердое тело</u>: тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.



Положение такого тела при вращении вокруг неподвижной оси можно охарактеризовать скалярной величиной – угловой координатой φ (см. рис.).

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ за $\Delta t = t_2 - t_1$.

$d\vec{\varphi}$ - <u>элементарное угловое перемещение</u> за время dt. Введем $d\vec{\varphi}$ как вектор, направление которого вдоль оси вращения определяется по правилу правого винта.

$\boxed{\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}}$ - <u>угловая скорость</u> характеризует быстроту вращения тела вокруг неподвижной оси.

Направление $\vec{\omega}$ совпадает с направлением $d\vec{\varphi}$ и определяется по правилу правого винта.

$\boxed{\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}}$ - <u>угловое ускорение</u>.

Характеризует быстроту изменения угловой скорости. При неподвижной оси вращения $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают по направлению в случае ускоренного вращательного движения, и противоположны по направлению в случае замедленного.

Если задана зависимость $\varphi(t)$, то применение написанных выше равенств для ω и ε дает решение прямой задачи кинематики вращательного движения. Получим соотношения, дающие решение обратной задачи кинематики вращательного движения. Пусть задана зависимость углового ускорения от времени $\varepsilon(t)$. Изменение угловой скорости за малый промежуток времени dt равно $d\omega = \varepsilon \cdot dt$.

Изменение угловой скорости за конечный промежуток времени от момента t_0 до момента t равно:

$$\Delta\omega = \omega(t) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^{t} d\omega = \int_{t_0}^{t} \varepsilon \cdot dt .$$

Отсюда получаем равенство, дающее решение обратной задачи для угловой скорости:

$$\omega(t)=\omega(t_0)+\int_{t_0}^{t}\varepsilon(t)dt\,.$$

Угол поворота тела за малый промежуток времени dt равен $d\varphi=\omega\cdot dt$.

Угол поворота за промежуток времени от t_0 до t равен $\Delta\varphi=\varphi(t)-\varphi(t_0)=\int d\varphi=\int_{t_0}^{t}\omega\cdot dt$.

Отсюда получим решение обратной задачи для угловой координаты:

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}\omega(t)dt\,.$$

Для решения обратной задачи вращательного движения тела требуется задать угловые скорость и координату в начальный момент времени t_0.

Связь угловых и линейных величин.

Путь, пройденный точкой при движении по окружности, определяется формулой:
$\boxed{S=R\varphi}$.

Связь между линейной скоростью точки тела и угловой скоростью в скалярном виде:

$\boxed{\upsilon=R\omega}$ $\quad\left(\upsilon=\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{d(R\varphi)}{dt}=R\dfrac{d\varphi}{dt}=R\omega\right)$.

Связь между линейной скоростью точки тела и угловой скоростью в векторном виде: $\boxed{\upsilon=R\omega\sin\dfrac{\pi}{2}}$, $\quad\boxed{\vec{\upsilon}=[\vec{\omega}\vec{R}]}$.

Связь между тангенциальным ускорением и угловым ускорением:

$\boxed{a_\tau=R\varepsilon}$ $\quad\left(a_\tau=\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{d(\omega R)}{dt}=R\dfrac{d\omega}{dt}=R\varepsilon\right)$.

Связь между нормальным ускорением и угловой скоростью:

$\boxed{a_n=\omega^2 R}$ $\quad\left(a_n=\dfrac{\upsilon^2}{R}=\omega^2 R\right)$.

Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.

Законы Ньютона лежат в основе динамики классической механики.

Первый закон Ньютона - тело движется равномерно и прямолинейно или сохраняет состояние покоя, пока воздействие других тел не изменит это состояние (этот закон также называют законом инерции).

<u>Инерциальная система отсчета</u> – система отсчета, в которой соблюдается первый закон Ньютона.

Следует отметить, что инерциальность системы отсчета можно утверждать с определённой степенью точности. Так систему отсчета, связанную с Землей можно считать инерциальной, если можно пренебречь ее вращательным движением относительно собственной оси и относительно Солнца.

Принцип относительности Галилея – все инерциальные системы отсчета эквивалентны друг другу. И никакими *механическими* опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя определить движется система или нет.

В начале XX столетия А. Эйнштейн на основании достижений физики обобщил принцип относительности Галилея.

Принцип относительности Эйнштейна – все инерциальные системы отсчета эквивалентны друг другу. И никакими *физическими* опытами нельзя определить движется система или нет.

Взаимодействие тел. Второй закон Ньютона.

В механике характеристикой взаимодействия тел является сила. Ее вводят, как меру механического действия на данное материальное тело со стороны других тел. Это действие вызывает изменение скоростей точек тела или его деформацию и может иметь место, как при непосредственном контакте, так и через посредство создаваемых телами полей.

Все силы природы, насколько нам сейчас известно, можно разделить на четыре основных типа.

1) Гравитационные, действующие на любые массы и порождаются массой, действуя на расстоянии.

2) Электромагнитные силы, действующие на заряды и токи, со стороны других зарядов и токов.

3) Ядерные силы, именно они скрепляют ядро, несмотря на сильное электростатическое отталкивание между протонами.

4) Слабые силы, имеющие малый радиус действия (физика элементарных частиц).

Сила – величина векторная и в каждый момент времени она характеризуется численным значением, направлением в пространстве и точкой приложения.

Основным законом классической механики является второй закон Ньютона.

Скорость изменения импульса материальной точки во времени равна результирующей силе, действующей на материальную точку.

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$**,** где $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ - импульс материальной точки;

m - масса материальной точки – физическая величина, одна из основных характеристик материи, определяющая ее инерциальные и гравитационные свойства.

Второй закон Ньютона выполняется в инерциальной системе отсчета.

Для тела с постоянной массой:

$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a}$, отсюда $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, т.е. получим более знакомую формулировку второго закона Ньютона.

Ускорение, с которым движется материальная точка, равно отношению результирующей всех сил, действующих на нее, к её массе $\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}$.

Третий закон Ньютона.

Закон изменения и сохранения импульса системы материальных точек.

По третьему закону Ньютона **силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, имеют одинаковую природу, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.**

Рассмотрим движение материальной точки под действием некоторой силы $\vec{F}$.

По второму закону Ньютона:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}},$$

$d\vec{p} = \vec{F}dt$ Проинтегрируем обе части уравнения.

$\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ – импульсы материальных точек в моменты времени t_1 и t_2, соответственно.

$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \Rightarrow \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt, \qquad \boxed{\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt}$$

Изменение импульса $\Delta\vec{p}$ *равно импульсу силы, действующему на материальную точку за промежуток времени* $\Delta t = t_2 - t_1$.

Рассмотрим систему N взаимодействующих материальных точек с массами $m_1, m_2 ... m_N$.

Импульсы материальных точек системы: $\vec{p}_1, \vec{p}_2 ... \vec{p}_N$.

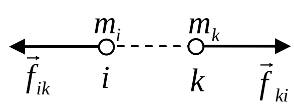
<u>Внутренняя</u> сила $\vec{f}_{ik}$ действует со стороны m_k на m_i - характеристика взаимодействия между материальными точками системы.

$\vec{F}_i$ - результирующая всех <u>внешних</u> сил, действующих на i материальную точку.

Из второго закона Ньютона для $i^{той}$ материальной точки: $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i$.

Напишем такие же уравнения для всех материальных точек и просуммируем по *i* от 1 до *N*.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i.$$



По III закону Ньютона $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} = 0$.

Тогда уравнение можно записать в виде: $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Rightarrow \frac{d\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i$.

Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P}$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}$.

$\vec{P}$ называется импульсом системы материальных точек.

Тогда $\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}}$.

Если в момент времени t_1 и t_2 суммарный импульс системы равен $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ соответственно, то $\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \Delta\vec{P} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$.

Полученное выражение представляет математическую запись закона изменения импульса.

Изменение импульса системы материальных точек за некоторый промежуток времени равно импульсу результирующей всех внешних сил, действующих на систему за этот промежуток времени.

Если $\vec{F} = 0$, то $\vec{P} = const$.

Таким образом, **импульс системы материальных точек есть величина постоянная, если векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю.**

Движение центра инерции тела (системы тел)

Для упрощения описания движения тела под действием сил вводят понятие центра инерции. Представим тело (систему тел), как систему N материальных точек с массой Δm_i, $i = 1...N$.

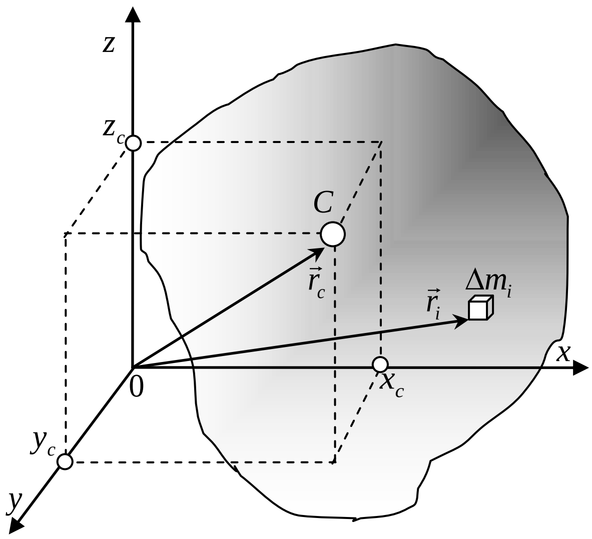
Введем радиус-вектор некоторой точки, вычисляемый по формуле:

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \vec{r}_i},$$

где Δm_i – масса *i*-ой материальной точки,

$\vec{r}_i$ – ее радиус-вектор,

$m = \sum_{i=1}^{N}\Delta m_i$ – масса тела (системы тел).



Определенная таким образом точка называется центром инерции или центром масс тела (системы тел). Это геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе.

Ускорение центра инерции равно:

$$\vec{a}_c = \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \frac{d^2 \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \vec{r}_i}{dt^2}.$$

$\frac{1}{m}$ можно вынести за знак производной.

А производная суммы равна сумме производных.

Получаем: $\vec{a}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$, где $\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{a}_i$

$\vec{a}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \vec{a}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i = \frac{\vec{F}}{m}$, где $\vec{a}_i$ – ускорение i-ой материальной точки,

$\vec{f}_i$ – результирующая всех сил, приложенных к i-ой материальной точке,

$\vec{F}$ – результирующая всех внешних сил, приложенных к телу (геометрическая сумма всех внутренних сил системы равна нулю по третьему закону Ньютона).

Ускорение центра инерции: $\boxed{\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m}}$.

Иными словами, **центр инерции тела (системы тел) движется так же, как двигалась бы материальная точка с массой** m **под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телу (системе тел).**

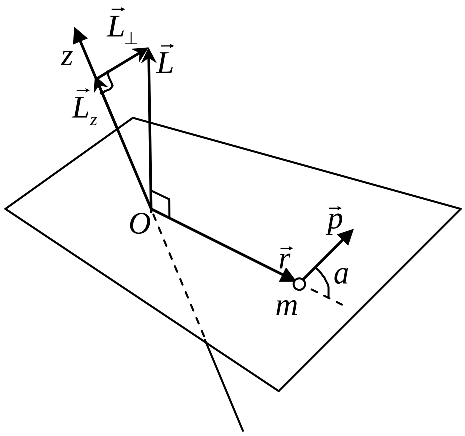
Заметим, что в однородном поле силы тяжести центр инерции совпадает с центром тяжести тела.

Момент импульса. Момент силы. Связь между ними.

Введем понятия момента импульса и момента силы для материальной точки.

Момент импульса материальной точки относительно точки (О) равен векторному произведению радиус-вектора на вектор импульса материальной точки.

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]}.$$



$\vec{L}$ - момент импульса (количества движения).

$L = rp\sin a$

Представим вектор $\vec{L}$, как сумму векторов моментов импульсов относительно произвольной оси (z) и перпендикулярной ей составляющей: $\vec{L} = \vec{L}_z + \vec{L}_\perp$ (см. рис.).

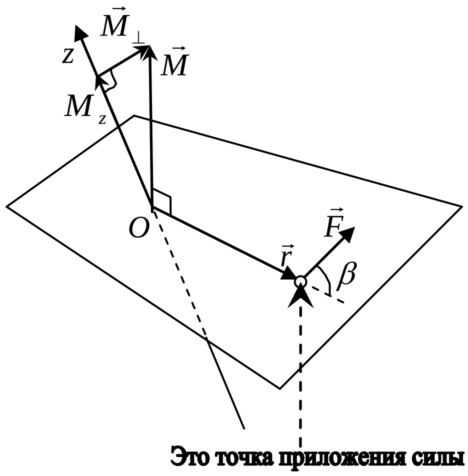
Момент импульса материальной точки $\vec{L}_z$ относительно оси вращения – это параллельная выбранной оси составляющая момента импульса $\vec{L}$ относительно точки О, лежащей на оси, и определяемая соотношением:

$\vec{L}_z = [\vec{r} \cdot \vec{p}]_z$.

Вектор $\vec{L}_z$ направлен вдоль оси z.

Момент силы относительно точки (О) равен векторному произведению радиус-вектора на вектор силы.

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]}.$$



$\vec{M}$ - момент силы.

$M = rF\sin\beta$.

Представим вектор $\vec{M}$, как сумму векторов моментов сил относительно произвольной оси (z) и перпендикулярной составляющей: $\vec{M} = \vec{M}_z + \vec{M}_\perp$.

Момент силы $\vec{M}_z$ относительно оси вращения – это параллельная выбранной оси составляющая момента силы $\vec{M}$ относительно точки О, лежащей на оси, и определяемая соотношением:

$\vec{M}_z = [\vec{r} \cdot \vec{F}]_z$.

Вектор $\vec{M}_z$ направлен вдоль оси z.

Найдем связь между $\vec{M}$ и $\vec{L}$ для материальной точки.

Возьмем производную от момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r}\vec{p}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon}, m\vec{\upsilon}] + [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}.$$

$[\vec{\upsilon}, m\vec{\upsilon}] = 0$, так как синус угла между векторами =0.

Таким образом, скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту сил и определяется уравнением моментов:

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ относительно точки,

$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$ относительно оси.

Причем это справедливо не только для материальной точки, но и для системы из N материальных точек.

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$, где $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ - момент импульса системы материальных точек относительно точки О равен геометрической сумме моментов импульсов всех точек системы относительно той же точки.

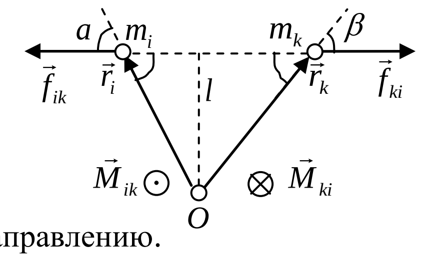
$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$ – сумма моментов всех <u>внешних</u> сил относительно точки О.

Моменты внутренних сил взаимно компенсируют друг друга. Для доказательства этого утверждения рассмотрим взаимодействие двух материальных точек системы материальных точек.

Моменты внутренних сил, действующих на m_i и m_k относительно <u>произвольной</u> точки О:

$\vec{M}_{ik} = [\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}]$,

$\vec{M}_{ki} = [\vec{r}_k \times \vec{f}_{ki}]$,



$M_{ik} = r_i f_{ik} \sin a = f_{ik} l$,

$M_{ki} = r_k f_{ki} \sin \beta = f_{ki} l$

$\Longrightarrow$ M_{ik} и M_{ki} равны по величине и противоположны по направлению.

Что и требовалось доказать.

Закон сохранения момента импульса.

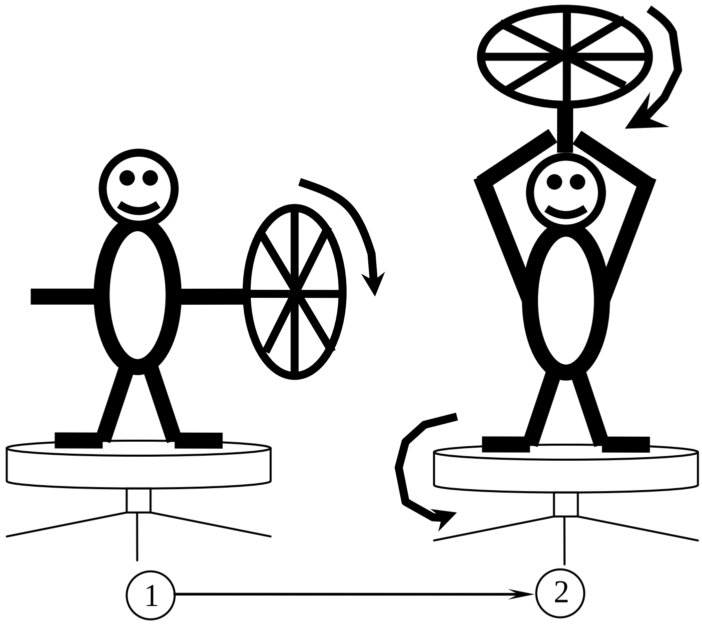
Если для системы материальных точек:

$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0$, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.

Следовательно, $\vec{L} = const$.

Закон сохранения момента импульса: суммарный момент импульса системы материальных точек относительно точки (оси) есть величина постоянная, если векторная сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

Рассмотрим опыт со скамьей Жуковского. Человек стоит на скамье и держит вращающееся колесо горизонтально. Следовательно, суммарный момент импульса относительно вертикали равен нулю. Подняв вращающееся колесо над головой, момент импульса колеса относительно вертикали перестает быть равным нулю. Исходя из закона сохранения, суммарный момент импульса системы относительно вертикали, должен оставаться равным нулю. Значит, должен появиться противоположный по направлению момент импульса скамьи. В результате чего мы наблюдаем вращающуюся в противоположную сторону скамью с человеком.



Момент инерции относительно неподвижной оси.

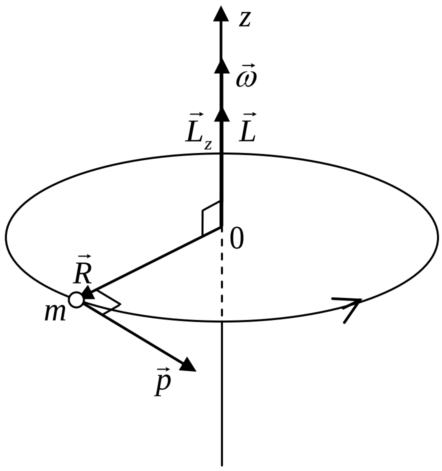
1. Момент инерции материальной точки относительно оси, перпендикулярной плоскости вращения.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся по окружности с угловой скоростью ω в плоскости, перпендикулярной оси (z) и проходящей через центр окружности.

Найдем момент импульса материальной точки относительно точки О (он равен моменту импульса относительно оси z):

$\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}] = \vec{L}_z$,

где $\vec{R}$ - радиус-вектор, характеризующий положение материальной точки относительно оси.



Проекция момента импульса на ось z равна модулю вектора $\vec{L}$ относительно точки О:

$$L_z = \left|\vec{L}_z\right| = Rp\sin\frac{\pi}{2} = Rm\upsilon = Rm\omega R = mR^2\omega .$$

Величина mR^2 постоянна и называется моментом инерции материальной точки.

Момент инерции материальной точки относительно оси – это величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения.

$$\boxed{I_z = mR^2}.$$

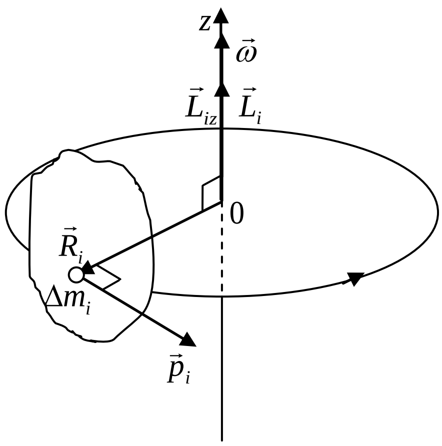
Так как $\vec{L}_z$ и $\vec{\omega}$ сонаправлены, выражение для момента импульса можно записать следующим образом: $\boxed{\vec{L}_z = I_z\vec{\omega}}$.

2. Момент инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z с некоторой угловой скоростью. Представим тело как совокупность N материальных точек.

Пусть Δm_i - масса i-ой материальной точки.

R_i - характеризует положение материальной точки относительно оси.



Момент количества движения (импульса) относительно оси для абсолютно твердого тела, как системы материальных точек:

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{zi} = \sum_{i=1}^{N}\Delta m_i R_i^2\vec{\omega} = \vec{\omega}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i R_i^2 = I_z\vec{\omega}\text{, где}$$

$\boxed{I_z = \sum_{i=1}^{N}\Delta m_i R_i^2}$ **- момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси z.**

Он зависит от:

1) массы материальных точек;

2) распределения масс в теле относительно оси (R_i);

3) выбора оси.

Формулу для момента инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси можно представить в интегральном виде.

Для этого от Δm_i перейдем к бесконечно малой массе dm, от R_i к r и от суммы Σ к интегралу:

$$I_z = \int\limits_{(m)} r^2 dm .$$

Для однородного по объему тела плотность материала (ρ) постоянна.

$dm = \rho \cdot dV$, где dV - элементарный объем.

Таким образом, расчет момента инерции однородного тела сводится к интегралу по объему:

$$I_z = \rho \int\limits_{(V)} r^2 dV .$$

Если момент импульса постоянен относительно оси, то при *уменьшении момента инерции, угловая скорость будет возрастать (*$\vec{L}_z = const \;\; I_z \downarrow \Leftrightarrow \omega \uparrow$ *и* $I_z \uparrow \Leftrightarrow \omega \downarrow$*).*

Это применяют фигуристы, балерины в своих выступлениях, вытягивая руки в стороны и прижимая их к себе, чтобы изменить скорость вращения.

Основное уравнение динамики вращательного движения.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси. Момент импульса тела относительно оси:

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega} .$$

Действие внешних сил на тело приведет к изменению угловой скорости вращения и изменению момента импульса. Возьмем производную по времени от обеих частей уравнения:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} .$$

Учитывая, что

$\dfrac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$, а $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, получим:

$\boxed{\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{M}_z}{I_z}}$ - **основное уравнение динамики вращательного движения.**

Во втором законе Ньютона масса материальной точки является мерой инертности в динамике ее движения. В динамике вращательного движения такой мерой инертности является момент инерции тела.

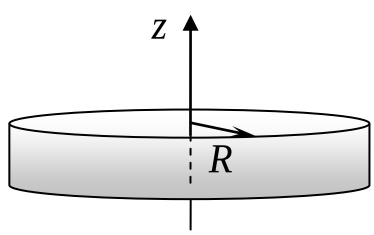
Примеры расчета момента инерции абсолютно твердого тела.

1. Тонкое кольцо, полый тонкостенный цилиндр

Если ось z совпадает с осью симметрии кольца (цилиндра), то расстояние от центра кольца до каждой Δm_i постоянно и равно R. Момент инерции кольца или полого цилиндра равен:

$$I_z = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m .$$

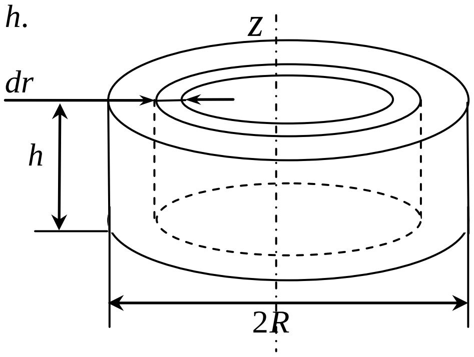
$\boxed{I_z = mR^2}$.



2. Однородный диск (сплошной цилиндр)

Для вычисления момента инерции однородного диска относительно оси симметрии, проходящей через его центр масс, используем формулу для момента инерции в интегральном виде.

Для удобства интегрирования элементарный объем dV выбираем в виде тонкого цилиндрического кольца радиусом r, толщиной dr и высотой h.



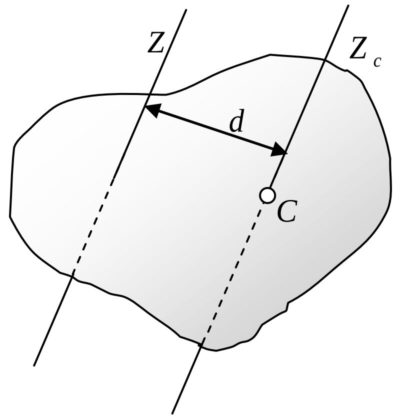
$$I_z = \rho\int_0^R r^2(2\pi r\cdot h)dr = \rho\cdot 2\pi\cdot h\int_0^R r^3 dr =$$

$$= 2\pi h\rho\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi h\rho R^4}{2} = \frac{(\pi R^2\cdot h\cdot\rho)\cdot R^2}{2}$$

Заметим, что $\pi R^2\cdot h = V$, а $V\cdot\rho = m$.

Искомая формула имеет вид: $I_z = \frac{mR^2}{2}$.

Теорема Штейнера.



Момент инерции тела относительно произвольной оси Z равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс этого тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Если I_z - искомый момент инерции тела относительно оси Z,

I_c - момент инерции тела относительно оси Z_c, параллельной оси Z, и проходящей через центр масс тела – точку С,

d – расстояние между осями, то можно показать, что:

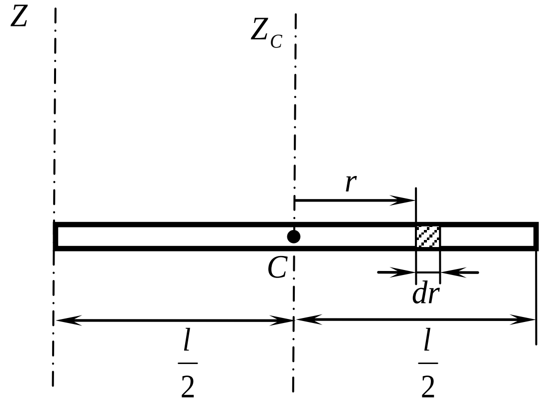
$$\boxed{I_z = I_c + md^2}.$$

Момент инерции однородного стержня.

Для вывода формулы для момента инерции стержня (I_C) длиной l и массой m относительно оси Z_C, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр, разобьем его на элементарные участки длиной dr (см. рис.) Масса такого участка $dm = \frac{m}{l}dr$, а его момент инерции $dI_C = r^2 dm = \frac{m}{l}r^2 dr$.

Момент инерции всего стержня:

$$I_C = 2\int_0^{l/2} dI_C = 2\frac{m}{l}\int_0^{l/2} r^2 dr = 2\frac{m}{l}\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{l/2} = \frac{ml^2}{12}.$$



Таким образом, момент инерции стержня относительно оси симметрии Z_C равен $I_C = \frac{1}{12}ml^2$.

Теперь получим формулу для момента инерции относительно оси Z, параллельной оси Z_C, но проходящей через конец стержня (см. рис.). Для этого применим теорему Штейнера:

$$I_Z = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Таким образом, $I_Z = \frac{1}{3}ml^2$.

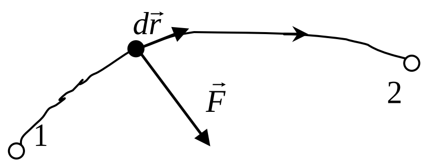
Работа силы. Мощность.

Понятие работы силы является фундаментальным понятием классической механики, с которым связано введение таких важных понятий, как потенциальная, кинетическая, полная механическая энергия.

Работа A силы $\vec{F}$ - мера действия силы, зависящая от величины и направления силы, и от перемещения точки ее приложения.

<u>Элементарной работой</u> (δA) силы $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение этой силы на $d\vec{r}$:

$$\boxed{\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}}.$$



Или в декартовых координатах:

$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

<u>Работой силы</u> $\vec{F}$ при перемещении материальной точки из точки (1) в точку (2) называется:

$$\boxed{A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}}.$$

Мощность P - физическая величина, измеряемая отношением элементарной работы δA к тому промежутку времени dt, в течение которого она произведена:

$$\boxed{P = \frac{\delta A}{dt}} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}.$$

Мощность является характеристикой двигателя.

Работа силы тяготения. Работа силы Кулона.

Закон тяготения

Две материальные точки массами m_1 и m_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга, притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и направленной по прямой, соединяющей их.

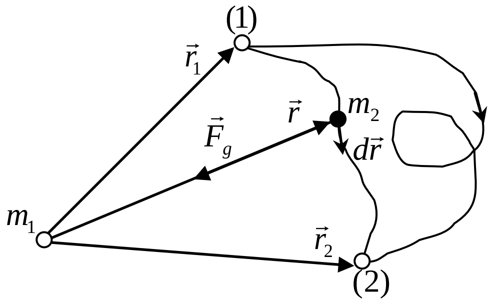
$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r},$$

где $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{м^3}{кг\cdot с^2}$ – гравитационная постоянная.

Знак “-” указывает на то, что сила тяготения является силой притяжения. Перепишем закон всемирного тяготения в виде:

$\vec{F}_g = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}$, где $\alpha = -Gm_1m_2$.

Будем перемещать материальную точку с массой m_2 относительно материальной точки с массой m_1 из точки (1) в точку (2) (см. рис.).



Закон Кулона

Два точечных заряда q_1 и q_2, расположенных на расстоянии r друг от друга в вакууме, взаимодействуют друг с другом с силой, прямо пропорциональной произведению этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Сила взаимодействия направлена по прямой, соединяющей заряды.

$$\vec{F}_k = k\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r},$$

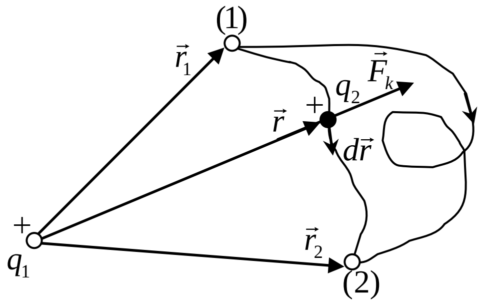
где $k = 9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2.

q_1 и q_2 - алгебраические величины, от их знаков зависит направление силы (притяжение или отталкивание).

Перепишем закон Кулона в виде:

$\vec{F}_к = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}$, где $\alpha = kq_1q_2$.

Будем перемещать положительный заряд q_2 относительно положительного заряда q_1 из точки (1) в точку (2) (см. рис.).



Найдем работу этих сил по перемещению материальной точки (заряда) из точки (1) в точку (2) по произвольной траектории относительно другой материальной точки (заряда):

$A = \int\limits_{(1)}^{(2)}\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{r} = \alpha\int\limits_{(1)}^{(2)}\frac{1}{r^3}\vec{r}d\vec{r} = \alpha\int\limits_{(1)}^{(2)}\frac{1}{r^3}r(d\vec{r})_r$, где $(d\vec{r})_r$ - проекция элементарного перемещения на направление радиус-вектора, характеризующего положение материальной точки (заряда) относительно другой материальной точки (заряда).

$(d\vec{r})_r = dr$ и характеризует изменение r по величине.

$$A = \alpha\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = \alpha\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Подстановка α приводит к формулам для работы силы гравитационного взаимодействия и кулоновского взаимодействия:

$$\boxed{A_g = -\gamma\frac{m_1m_2}{r_1} - \left(-\gamma\frac{m_1m_2}{r_2}\right)}.$$

$$\boxed{A_k = \frac{kq_1q_2}{r_1} - \frac{kq_1q_2}{r_2}}.$$

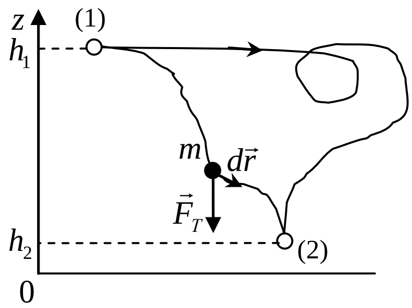
Таким образом, работа силы гравитации и работа силы Кулона не зависят от траектории, по которой движется материальная точка (заряд), а зависит от начального и конечного положения материальной точки (заряда). Сила, работа которой зависит от начального и конечного положения материальной точки (точечного заряда) и не зависит ни от вида траектории, ни от закона ее движения, называется потенциальной (консервативной) силой. Следовательно, сила гравитации и сила кулоновского взаимодействия *являются консервативными силами*.

Работа силы тяжести

Сила тяжести – сила, действующая на любую материальную точку массой m, находящуюся вблизи поверхности Земли или другого небесного тела, и сообщающая ей ускорение свободного падения g. В области, размеры которой малы по сравнению с радиусом Земли, поле силы тяжести можно считать однородным.

Сила тяжести, действующая на материальную точку, равна произведению ее массы на ускорение свободного падения: $\vec{F}_T = m\vec{g}$.

Пусть материальная точка перемещается из точки (1) в точку (2) по произвольной траектории. Рассмотрим элементарную работу силы тяжести на элементарном перемещении $d\vec{r}$ (см. рис.).



$\delta A_T = \vec{F}_T d\vec{r} = F_T (dr)_F$, где $(dr)_F$ – проекция элементарного перемещения $d\vec{r}$ на направление силы тяжести $\vec{F}_T$.

$\delta A_T = F_T(-dz) = -mgdz$, где $(-dz)$ проекция элементарного перемещения $d\vec{r}$ на ось z.

Тогда работа силы тяжести по перемещению материальной точки из точки (1) в точку (2) будет равна: $A_T = \int_{h_1}^{h_2} -mgdz = -mg\int_{h_1}^{h_2} dz = mgh_1 - mgh_2$.

$$\boxed{A_T = mgh_1 - mgh_2}.$$

Отсюда следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением материальной точки в пространстве.

Таким образом, сила тяжести является консервативной силой.

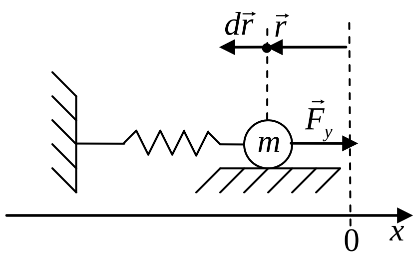
Работа силы упругости

Рассмотрим систему, в которой действует упругая сила. На рисунке изображена пружина с закрепленным концом, к другому концу которой прикреплена материальная точка массой m. Величина x характеризует абсолютную деформацию пружины, вызванную внешней силой:

x=0 – соответствует равновесному положению материальной точки;

x>0 – соответствует деформации растяжения пружины;

x<0 – соответствует деформации сжатия пружины.



$\vec{r}$ - характеризует положение материальной точки относительно положения равновесия.

$d\vec{r}$ - элементарное перемещение тела.

$\vec{F}_{упр}$ - сила упругости, приложенная к материальной точке со стороны пружины, <u>всегда направлена к положению равновесия.</u>

В случае небольших деформаций соблюдается закон Гука, согласно которому $\vec{F}_{упр} = -k\vec{r}$, где k - коэффициент упругости, а в нашем примере коэффициент жесткости пружины.

Найдем элементарную работу силы упругости по перемещению материальной точки:

$$\delta A_{упр} = \vec{F}_{упр} d\vec{r} = -\kappa \cdot \vec{r} d\vec{r} = -\kappa \cdot r(d\vec{r})_r = -\kappa \cdot r dr .$$

$(d\vec{r})_r$ – проекция $d\vec{r}$ на направление $\vec{r}$.

Работа силы упругости по перемещению материальной точки из положения, характеризуемого $\vec{r}_1$ в положение $\vec{r}_2$:

$$A_{упр} = -\int_{r_1}^{r_2} \kappa \cdot r dr = \frac{\kappa \cdot r_1^2}{2} - \frac{\kappa \cdot r_2^2}{2} .$$

$$\boxed{A_{упр} = \frac{\kappa \cdot r_1^2}{2} - \frac{\kappa \cdot r_2^2}{2}}.$$

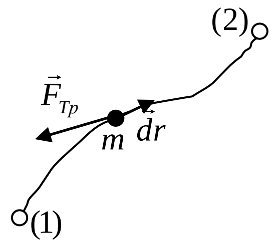
Таким образом, сила упругости тоже является консервативной силой.

Работа силы трения

<u>Сила трения</u> – сила, возникающая при относительном перемещении соприкасающихся тел и направленная в сторону, противоположную относительному перемещению.

Элементарная работа силы трения:

$$\delta A_{Тр} = \vec{F}_{Тр} d\vec{r} = -F_{Тр} dS .$$



Работа силы трения при перемещении материальной точки из точки (1) в точку (2):

$$A = -\int_{(1)}^{(2)} F_{Тр} dS .$$

При $F_{Тр} = Const$ $A_{Тр} = -F_{Тр} S$.

Работа силы трения зависит от формы траектории. Значит, сила трения – неконсервативная сила. Сила, работа которой сопровождается выделением теплоты, разрушением тел и т.д. называется диссипативной силой. Таким образом, сила трения - диссипативная сила.

Поле силы. Потенциальная энергия. Связь между консервативной силой и потенциальной энергией.

<u>Поле сил</u> – свойство пространства, которое заключается в том, что на помещенное в него тело действует сила, закономерно изменяющаяся от точки к точке пространства.

Поля сил бывают:

• поля консервативной силы (гравитационное, электростатическое, упругой силы) – потенциальные поля;

• поля неконсервативной силы (магнитное, электрическое) – вихревые поля.

Выше, рассматривая работу консервативных сил, мы пришли к выводу о том, что она не зависит от формы траектории и равна разности 2-х значений функции, характеризующей относительное положение взаимодействующих тел. Обозначим эти значения функции буквами W_{n1} и W_{n2} и назовем их потенциальными энергиями взаимодействия.

Гравитационное поле: $A_g = \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}\right) - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2}\right)$.

Электростатическое поле: $A_k = k\frac{q_1 q_2}{r_1} - k\frac{q_1 q_2}{r_2}$.

Поле силы тяжести: $A_T = mgh_1 - mgh_2$.

Поле упругой силы: $A_{упр} = \frac{\kappa \cdot r_1^2}{2} - \frac{\kappa \cdot r_2^2}{2}$.

Работа консервативной силы: $A_{к.с.} = W_{n1} - W_{n2}$.

$A_{к.с.} = W_{n1} - W_{n2}$.

$\delta A_{к.с.} = -dW_n$.

Работа консервативной силы равна взятому со знаком минус изменению потенциальной энергии тела.

Потенциальная энергия может быть определена с точностью до некоторой постоянной.

$W_g = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + Const$. Пусть: $W_g = 0$ при $r = \infty$, тогда $const = 0$ и $W_g = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$.

$W_k = k\frac{q_1 q_2}{r} + Const$. Пусть: $W_k = 0$ при $r = \infty$, тогда $const = 0$ и $W_k = k\frac{q_1 q_2}{r}$.

$W_T = mgh + Const$. Пусть: $W_T = 0$ при $h = 0$, тогда $const = 0$ и $W_T = mgh$.

$W_{упр} = \frac{\kappa \cdot r^2}{2} + Const$. Пусть: $W_{упр} = 0$ при $r = 0$, тогда $const = 0$ и $W_{упр} = \frac{\kappa \cdot r^2}{2}$.

Таким образом, потенциальная энергия есть величина относительная. Ее можно определить, как часть общей механической энергии системы, зависящую от взаимного расположения материальных точек, составляющих эту систему, и от их положения во внешнем силовом поле. Потенциальная энергия системы в данном ее положении численно равна работе, которую совершают действующие на систему консервативные силы при перемещении системы из этого положения в то, где потенциальная энергия условно принимается равной нулю. Понятие потенциальной энергии имеет место только для консервативных сил, т.е. сил, работа которых зависит от начального и конечного положения системы.

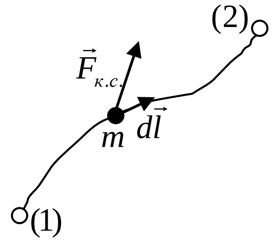
Связь между потенциальной энергией и силой.

Пусть материальная точка перемещается из точки (1) в точку (2).

Одна из сил, действующих на материальную точку – консервативная сила.

Обозначим ее $\vec{F}$.

Элементарная работа консервативной силы на элементарном перемещении $d\vec{l}$ равна: $\delta A = \vec{F}d\vec{l} = F_l dl$, где F_l - проекция консервативной силы $\vec{F}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.



С другой стороны элементарная работа консервативной силы равна: $\delta A = -dW_n$.

Следовательно:

$$F_l dl = -dW_n \Rightarrow \boxed{F_l = -\frac{dW_n}{dl}}.$$

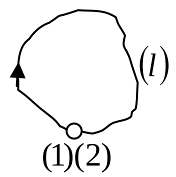
Получена формула для проекции консервативной силы на произвольное направление. Применим ее для определения проекций консервативной силы на оси координат.

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial W_n}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial W_n}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial W_n}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \vec{F}_{к.с.} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial W_n}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_n}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_n}{\partial z}\vec{k}\right) = -gradW_n.$$

Консервативная сила, действующая на материальную точку, равна минус градиенту потенциальной энергии, и направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии по нормали к эквипотенциальной поверхности (поверхность, в каждой точке которой потенциальная энергия материальной точки имеет одинаковое значение).

$$\boxed{\vec{F}_{к.с.} = -gradW_n}.$$

Если точки (1) и (2) совпадают, т.е. перемещение материальной точки происходит по замкнутой траектории, то



$$A_{к.с.} = \oint\limits_{(l)} \vec{F}_{к.с.} d\vec{l} = W_{n1} - W_{n2} = 0.$$

Таким образом, работа потенциальных сил по замкнутому пути равна нулю.

Иными словами: $\boxed{A_{к.с.} = \oint\limits_{(l)} \vec{F}_{к.с.} d\vec{l} = 0}$ - циркуляция вектора консервативной силы по замкнутому контуру равна нулю.

Кинетическая энергия.

1) Кинетическая энергия материальной точки.

Пусть $\vec{F}$ - результирующая **всех** сил, действующих на материальную точку, перемещающуюся из точки (1) в точку (2). Тогда элементарная работа результирующей всех сил на элементарном перемещении $d\vec{r}$ будет равна:

$$\delta A_F = \vec{F}d\vec{r} = m\vec{a}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)d\vec{\upsilon} = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = m\upsilon(d\vec{\upsilon})_\upsilon = m\upsilon d\upsilon,$$

где $(d\vec{\upsilon})_\upsilon$ - проекция $d\vec{\upsilon}$ на направление вектора скорости.

$A_F = \int\limits_{(1)}^{(2)} m\upsilon d\upsilon = \int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$, где υ_1 и υ_2 - скорости материальной точки в точках (1) и (2) соответственно.

Таким образом, работа результирующей всех сил, действующих на материальную точку при ее перемещении из точки (1) в точку (2), равна разности двух значений функции, зависящей от скорости материальной точки. Обозначим эти значения $W_{\kappa 1}$, $W_{\kappa 2}$ и назовем их кинетическими энергиями. Следовательно:

$A_F = W_{\kappa 2} - W_{\kappa 1}$, т.е. изменение кинетической энергии равно работе результирующей всех сил, действующих на материальную точку (теорема об изменении кинетической энергии материальной точки).

В дифференциальной форме эту теорему можно записать в виде:

$\delta A_F = dW_\kappa$.

Кинетическая энергия материальной точки может быть определена с точностью до некоторой постоянной.

$$W_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{2} + const.$$

Пусть $W_\kappa = 0$, когда $\upsilon = 0$ в данной системе отсчета. Тогда *const=0* и $W_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{2}$.

Таким образом, кинетическая энергия есть величина относительная (зависит от выбора системы отсчета).

2) Кинетическая энергия поступательного и вращательного движения.

Рассмотрим систему *N* материальных точек. Их суммарная кинетическая энергия будет равна:

$$\boxed{W_\kappa = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\upsilon_i^2}{2}}.$$

Поступательное движение. Все точки тела движутся по одинаковым траекториям: $\upsilon_i = \upsilon$.

Таким образом, при поступательном движении тела, его кинетическая энергия будет равна:

$$W_\kappa = \frac{\upsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Вращательное движение.

Пусть абсолютно твердое тело вращается относительно неподвижной оси. Разобьем тело на маленькие фрагменты Δm_i.

$\vec{\omega}$ - угловая скорость одинакова для всех точек тела.

$$W_к = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i \upsilon_1^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{2} (\omega R_i)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 = \frac{\omega^2 I_z}{2}. \quad \boxed{W_к = \frac{I_z \omega^2}{2}}$$

, где I_z – момент инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Работа при вращательном движении.

Рассмотрим вращательное движение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси. $d\vec{\varphi}$ – элементарное угловое перемещение. $\vec{M}_z$ – результирующий момент сил относительно оси.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{M}_z d\vec{\varphi} \ .$$

Пределы интегрирования (1) и (2) соответствуют состояниям абсолютно твердого тела в моменты времени t_1 и t_2, когда угол поворота изменяется от φ_1 до φ_2, а угловая скорость от ω_1 до ω_2.

Докажем, что этот интеграл равен работе сил при вращательном движении.

$$\vec{M}_z d\vec{\varphi} = M_z d\varphi = \frac{dL_z}{dt} d\varphi = d(I_z \omega) \frac{d\varphi}{dt} = I_z d\omega \cdot \omega \ .$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z \omega d\omega = I_z \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega = I_z \left(\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2} \right) = \frac{I_z \omega_2^2}{2} - \frac{I_z \omega_1^2}{2} = W_{к2} - W_{к1} = \Delta W_к .$$

А так как изменение кинетической энергии равно работе $(\Delta W_k = A)$, то $\boxed{A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{M}_z d\vec{\varphi}}$ - работа результирующего момента сил при вращательном движении абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси.

Закон сохранения полной механической энергии.

Полная механическая энергия системы определяется суммой кинетических энергий тел, входящих в систему, и потенциальных энергий, обусловленных их взаимодействием друг с другом и внешними телами.

1) Пусть на материальную точку действуют силы:

$\vec{F}$ - результирующая всех сил. Под действием этих сил материальная точка перемещается из точки (1) в точку (2).

$\vec{F}_{к.с.}$ - результирующая всех консервативных сил.

$\vec{F}_{н.к.}$ - результирующая всех неконсервативных сил.

Тогда: $\vec{F} = \vec{F}_{к.с.} + \vec{F}_{н.к.}$ (умножим левую и правую часть на элементарное перемещение $d\vec{r}$)

$\vec{F}d\vec{r} = \vec{F}_{к.с.}d\vec{r} + \vec{F}_{н.к.}d\vec{r}$ (1).

Уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$\delta A_F = \delta A_{к.с.} + \delta A_{н.к.}$, где δA_F - элементарная работа результирующей всех сил,

$\delta A_{к.с.}$ - элементарная работа результирующей всех консервативных сил,

$\delta A_{н.к.}$ - элементарная работа результирующей всех неконсервативных сил.

А так как $\delta A_{к.с.} = -dW_п$ и $\delta A_F = dW_к$, получаем:

$dW_к = -dW_п + \delta A_{н.к.}$;

$d(W_к + W_п) = \delta A_{н.к.}$.

$\boxed{W_к + W_п = W}$ - полная механическая энергия материальной точки.

$dW = \delta A_{н.к.}$.

$A_{н.к.} = W_2 - W_1$.

Изменение полной механической энергии материальной точки равно работе неконсервативных сил.

Если $A_{н.к.} = 0$, то $W_1 = W_2$ и полная механическая энергия материальной точки не меняется. Это утверждение справедливо и в случае системы N материальных точек.

2) Рассмотрим систему, состоящую из N взаимодействующих материальных точек.

Определим полную механическую энергию системы материальных точек (тела):

$\sum_{i=1}^{N} W_{кi}$ - полная кинетическая энергия системы, где $W_{кi}$ - кинетическая энергия i-ой материальной точки.

$W_{пiк}$ - потенциальная энергия взаимодействия i-ой материальной точки с k-ой.

$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} W_{пiк}$ - потенциальная энергия взаимодействия i-ой материальной точки со всеми материальными точками в системе.

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{к=1 \\ к \neq i}}^{N} W_{пiк}$ - полная потенциальная энергия взаимодействия материальных точек в системе.

Множитель $\frac{1}{2}$ связан с тем, что $W_{пiк} = W_{пкк}$ и в двойной сумме встречается дважды.

$\sum_{i=1}^{N} W_{ni}$ - полная потенциальная энергия взаимодействия системы с внешними телами.

Полная механическая энергия системы материальных точек:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_{\kappa i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa\neq i}}^{N} W_{ni\kappa} + \sum_{i=1}^{N} W_{ni} .$$

В общем случае при наличии внешних сил, действующих на систему, изменение энергии ΔW системы равно работе внешних сил и диссипативных сил системы:

$$\Delta W = A_{\substack{внешних \\ сил}} + A_{\substack{диссипативных \\ сил}} .$$

Если работа внешних сил, действующих на систему, равна нулю и диссипативные силы отсутствуют, то *полная механическая энергия системы сохраняется*.

Закон сохранения энергии.

Диссипативные силы приводят к уменьшению механической энергии системы тел. Но как показывает опыт, при этом происходит возрастание внутренней энергии тел (например, при трении тела нагреваются). Эксперименты показали: на какую величину уменьшится механическая энергия системы тел, на такую же величину возрастет внутренняя энергия этих и окружающих тел, т.е. происходит не бесследное исчезновение механической энергии, а ее переход в эквивалентном количестве во внутреннюю энергию. В природе помимо механической и внутренней энергии существует множество других видов энергии: электрическая, магнитная, ядерная и т.д. И, как показало развитие науки, эти виды энергии могут превращаться друг в друга, но всегда при этих превращениях выполняется условие: уменьшение или увеличение одного вида энергии приводит, соответственно, к возрастанию или уменьшению других в эквивалентном количестве. Это позволило сформулировать закон сохранения энергии.

Энергия не исчезает бесследно и не возникает из ничего, она превращается из одного вида энергии в другой вид, либо передается от одних тел к другим телам в эквивалентном количестве. При этом суммарное количество энергии остается постоянным.

Литература.

1. Савельев И. В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1998.- Кн.1.
2. Иродов И. Е. Механика. Основные законы.- М.: Высшая школа, 2000.
3. Трофимова Т. И. Курс физики.- М.: Высшая школа, 1997 и более поздние издания.
4. Дмитриева В. Ф., Прокофьев В. Л. Основы физики.- М.: Высшая школа, 2001. Учебник предназначен для заочников.