

Раздел I.

СИСТЕМНАЯ АНАЛИТИКА ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЛОГИСТИКЕ НА ОСНОВЕ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ

Практические задачи системного анализа в логистике нередко соотносятся с ситуациями, когда для нахождения оптимального решения требуется учитывать одновременно ряд целей, условий или критериев, в частности, возможно и противоречивых (например, при желании максимизировать рентабельность, качество, надежность и т.д. при одновременной минимизации стоимости, издержек и т.п.). В таком случае говорят о задачах многокритериальной или векторной оптимизации. Сразу же подчеркнем, что указанные задачи оптимизации имеют следующую особенность. Каждое лицо, принимающее решения (ЛПР), может иметь собственный опыт в бизнесе, собственную систему предпочтений, собственное отношение к возможным потерям / выигрышам в рамках частных критериев. Поэтому, определяя в формате одной и той же задачи многокритериальной оптимизации системы логистики или звена цепи поставок наилучшее или оптимальное решение, различные ЛПР могут выбирать в качестве оптимальных альтернатив совершенно разные решения. В этом нет никакого противоречия, поскольку каждый участник рынка может и должен уметь реализовать именно свое отношение к специфике решаемой задачи многокритериальной оптимизации и, в частности, реализовать свои предпочтения в формате таких задач.

Указанная особенность заранее предусматривается в формате методов многокритериальной оптимизации. Менеджер может реализовать ее, например, задавая конкретный критерий выбора (формализуемый на основе исходно заданных критериев, называемых частными) с учетом его линий уровня. Основные подходы и методы решения таких задач оптимизации, которыми может пользоваться менеджер, представлены в этом разделе книги.

В монографии [Сергеев В.И.] подчеркивается, что понятие цепи поставок в словаре ANNEX (Terminology in Logistics. ANNEX Dictionary. European Logistics Association, 1994) трактуется, по существу, как «интеграция основных функциональных сфер бизнеса (логистических функций) компании и ее партнеров». При этом понятие управления цепями поставок (SCM – supply chain management), как отмечено в книге [Сток Д.Р.], - «это высокоинтерактивный, комплексный и системный подход, который требует одновременного рассмотрения и учета многих актов обмена». Таким образом при решении соответствующих задач управления в цепях поставок приходится иметь дело с ситуациями, когда нахождение оптимального решения в рамках, например, анализируемого звена / звеньев цепи поставок осложняется необходимостью одновременной оптимизации целого ряда показателей или критериев.

В таких ситуациях от менеджера требуется умение находить наилучшие (в рамках заданной области допустимых анализируемых альтернатив) решения. Учитывая подчеркнутые выше особенности, понятно, что это – не простая задача для менеджера. Найденное наилучшее решение должно быть адаптировано к системе предпочтений ЛПР. Из-за указанной специфики задач оптимизации при многих критериях, такие решения также называют компромиссными. Их требуется находить для любого из следующих случаев.

1. Имеющиеся критерии в рамках задачи оптимального управления в цепи поставок формализованы в виде конкретных критериальных функций, причем сама задача управления также формализована как соответствующая задача многокритериальной оптимизации.
2. Имеющиеся критерии не удастся формализовать в виде конкретных критериальных функций, но, тем не менее, ЛПР может задать свои предпочтения на основе попарного сравнения как самих критериев (между собой), так имеющихся альтернатив с позиций каждого из критериев.

Применительно к любому из указанных случаев существуют свои специальные методы, приемы и подходы для нахождения оптимальных или наилучших решений (такие решения также называют компромиссными). А именно, применительно к первому из указанных случаев – это методы решения задач многокритериальной оптимизации, а применительно ко второму – например, метод аналитической иерархии (процессы аналитической иерархии). Цель данной книги – представить (в краткой форме) соответствующие методы и подходы на примерах ситуаций, связанных с необходимостью принятия оптимальных решений при многих критериях в системах логистики при анализе соответствующего звена / звеньев цепи поставок.

В этом разделе представлены основные подходы к решению задач многокритериальной оптимизации на основе так называемых прямых методов. В формате таких подходов используются методы и приемы сведения многокритериальных задач к решению задач скалярной оптимизации. Указанные методы называют «прямыми методами», поскольку для них вид общего критерия выбора $F(\vec{x})$ задается без всяких обоснований, а его параметры («весовые» коэффициенты) либо также задаются, либо «впрямую» оцениваются ЛПР. К ним тесно примыкают так называемые «аксиоматические методы», направленные на построение функции полезности ЛПР (см., например, [Кини Р.], [Фишберн П.]).

ГЛАВА 1

АТТРИБУТЫ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЛОГИСТИКЕ

1.1. Формальная постановка задач оптимизации при многих критериях

В упомянутой выше книге [Сток Д.Р.] подчеркнута, что «управление цепочками поставок есть управление восемью ключевыми бизнес-процессами: взаимоотношениями с потребителями; обслуживанием потребителей; спросом; выполнением заказов; производственным потоком; снабжением; разработкой продукции и доведением ее до коммерческого использования; возвратными потоками».

Каждый из указанных процессов характеризуется своими атрибутами и показателями. Поэтому для организации оптимального управления в рамках анализируемого звена (звеньев) цепи поставок системы логистики менеджеру потребуется задать определенные критерии, обуславливаемые желанием оптимизировать указанные показатели. Пусть уже выделено N критериев, формализующих издержки или потери применительно к указанным выше процессам. Такие исходно заданные критерии называют **частными критериями** (чтобы отличать их от критерия выбора, на основе которого затем будет найдено оптимальное решение в формате задачи многокритериальной оптимизации). Обозначим указанные частные критерии следующим образом:

$$g^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь

- \vec{x} – n -мерная векторная переменная, координаты которой представляют управляемые параметры для задачи многокритериальной оптимизации в рамках анализируемого звена/звеньев цепи поставок, т.е. $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- считается заданной система ограничений $\vec{x} \in X$, причем X представляет множество допустимых значений для \vec{x} в формате задачи многокритериальной оптимизации;
- $g^{(k)}(\vec{x})$ – некоторая функция n переменных (при фиксированном значении k), формализуемая в качестве одного из частных критериев ($k=1, 2, \dots, N$);

Обратим внимание на то, что изменением знака функции $g^{(k)}(\vec{x})$ всегда можно свести задачу максимизации к задаче минимизации частного критерия (и наоборот). Поэтому далее достаточно рассматривать ситуации, когда соответствующие частные критерии формулируются именно как задачи **минимизации** (указанное допущение не ограничивает общности, но при этом позволит стандартизировать изложение последующего материала).

Задача **многокритериальной оптимизации** рассматривается как задача одновременной оптимизации всех частных критериев. Требуется найти точку $\vec{x} \in X$, которая в некотором смысле (будет уточняться) минимизирует все эти критерии. Другими словами, рассматривается следующая оптимизационная задача:

$$g^{(k)}(\vec{x}) \rightarrow \min, \quad k = \overline{1, N},$$

при условии $\vec{x} \in X$. При этом критерии $g^{(k)}(\vec{x})$ называют **частными критериями**. Их совокупность можно рассматривать как векторный критерий $G(\vec{x}) = (g^{(1)}(\vec{x}), \dots, g^{(N)}(\vec{x}))$. Он и подлежит оптимизации (по каждой отдельной или частной компоненте).

Идеальной ситуацией при решении задач многокритериальной оптимизации является случай, когда пересечение множеств оптимальных решений для всех частных критериев не является пустым. Такое

множество обозначают следующим образом: $\bigcap_{k=1}^N \text{Arg} \min_{\vec{x} \in X} g^{(k)}(\vec{x})$.

Если указанное множество не является пустым, то принадлежащие ему альтернативы называют **абсолютными** решениями. Практикующий менеджер понимает, что в реальных ситуациях рассчитывать на такое «везение» не приходится. Обычно указанное множество (множество абсолютных решений) является пустым. В практических ситуациях при оптимизации работы звена цепи поставок для конкретной системы логистики, как правило, не существует решения, минимизирующего (оптимизирующего) одновременно все частные критерии. Более того, одни частные критерии могут противоречить другим. Следовательно, нужно искать компромиссное решение, наилучшее в некотором смысле. Соответствующий подход к его нахождению и понятие наилучшего решения формализуют на основе дополнительно вводимого **критерия**

выбора (чтобы отличать его от исходно заданных при постановке задачи частных критериев). Чем большим количеством таких подходов к формализации указанных критериев выбора владеет менеджер, тем более эффективно он может адаптировать оптимальный выбор применительно к предпочтениям ЛПР. Как правило, такое компромиссное решение стараются найти в классе так называемых эффективных решений (их также называют эффективными по Парето решениями, переговорным множеством или просто множеством Парето). Почему это так, - станет понятно из материалов следующего параграфа.

1.2. Парето-оптимальные решения

Приведем соответствующее формальное определение. Решение $\bar{x}^* \in X$ называется **эффективным решением или оптимальным по Парето решением**, если не существует другого решения $\bar{x} \in X$ среди анализируемых альтернатив, такого, что $g^{(k)}(\bar{x}) \leq g^{(k)}(\bar{x}^*)$, $k=1, \overline{N}$, причем хотя бы для одного k имеет место строгое неравенство. Другими словами, оптимальное по Парето решение $\bar{x}^* \in X$ должно обладать следующим свойством. В множестве X допустимых альтернативных решений не найдется ни одного другого решения, переход к которому (от \bar{x}^*) позволит улучшить показатель хотя бы одного из частных критериев, чтобы при этом не ухудшились бы показатели других частных критериев. Если множество абсолютных решений не является пустым, то множество оптимальных по Парето решений совпадает с множеством абсолютных решений. Убедитесь в этом самостоятельно.

Если множество альтернативных решений является дискретным, то задачу выбора оптимального решения по многим критериям удобно представлять в табличной форме. При этом каждую альтернативу достаточно характеризовать оценками частных критериев. По строкам таблицы представляют альтернативы $\{X_i, i = 1, 2, \dots, m\}$. В каждом столбце такой таблицы указывают оценки по конкретному частному критерию. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 1.1. Требуется выбрать наилучший вариант организации поставок товара, например, из семи доступных и возможных вариантов. Соответствующие варианты альтернатив обозначаем далее через А, В, С, D, E, F и G. Эти семь альтернатив составляют множество $\{X_i, i = 1, 2, \dots, m\}$, причем $m = 7$. Пусть частные критерии в этой ситуации представлены четырьмя критериями. В качестве них критериев могут выступать, например, следующие. Критерий $g^{(1)}$ - минимизация оценки годовых издержек, обуславливаемых соответствующими затратами на перевозки. Критерий $g^{(2)}$ - минимизация оценки годовых издержек, обуславливаемых соответствующими затратами на хранение. Критерий $g^{(3)}$ - минимизация оценки для суммарных денежных средств, замороженных в запасах; $g^{(4)}$ - минимизация оценки годовых издержек, обуславливаемых соответствующими штрафными санкциями из-за срывов сроков поставки; и т.д. (ограничимся в этом примере перечисленными четырьмя частными критериями).

Показатели этих частных критериев в формате заданных альтернатив уже проанализированы и выражены в некоторых удобных для ЛПР денежных единицах (например, в тыс. у.е., см. таблицу 1.1). Уточним, какие из альтернатив являются оптимальными по Парето.

Таблица 1.1.

Значения частных критериев для примера 1.1.

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

РЕШЕНИЕ. Альтернатива В доминирует альтернативу D (т.к. переход от альтернативы D к альтернативе В позволяет улучшить показатели частных критериев $g^{(1)}$ и $g^{(3)}$, не ухудшив показатели остальных частных критериев). Другими словами, вариант В является заведомо лучшим (по заданным частным критериям), чем вариант D. Никакой менеджер никогда в такой ситуации не выберет альтернативу D в качестве наилучшей. Она не является оптимальной по Парето. Аналогично альтернатива С доминирует альтернативу Е. Действительно, переход от альтернативы Е к альтернативе С позволяет улучшить показатели частных критериев $g^{(1)}$, $g^{(3)}$ и $g^{(4)}$, не ухудшив показатели $g^{(2)}$. Таким образом, никакой менеджер или ЛППР никогда в такой ситуации не выберет также и альтернативу Е в качестве наилучшей. Обусловлено это именно тем обстоятельством, что альтернатива Е не является оптимальной по Парето.

В рассматриваемом примере альтернативные варианты решений А, В, С, F и G являются оптимальными по Парето. При переходе от любого из этих вариантов решений к какому-нибудь другому (из множества альтернатив А, В, С, F и G) нельзя улучшить показатель хотя бы одного из частных критериев, не ухудшив при этом показатель / показатели какого-нибудь из остальных частных критериев.

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятие оптимального по Парето решения является основополагающим в теории многокритериальной оптимизации. Несмотря на то, что разные ЛППР могут иметь и разные

предпочтения (и соответственно выбирать в качестве оптимальных решений разные альтернативы), тем не менее, в формате процедур их выбора всегда будет общим следующее. Любое ЛПР *всегда будет выбирать оптимальное решение именно из множества решений оптимальных по Парето.*

Графическая интерпретация. Понятие решения, оптимального по Парето имеет простую интерпретацию. Для графической интерпретации рассмотрим случай, когда задано только два частных критерия ($N=2$): $G(g^{(1)}(\vec{x}), g^{(2)}(\vec{x}))$. Кроме того, пусть каждый из указанных частных критериев будет представлен соответствующей функцией именно двух переменных. Для удобства изложения векторную переменную \vec{x} будем представлять как $\vec{x} = (x, y)$, а частные критерии – как функции φ и ψ , определенные в некоторой области D допустимых значений переменных. Итак, имеем следующий векторный критерий: $G(g^{(1)}(\vec{x}), g^{(2)}(\vec{x})) = G(\varphi(x, y), \psi(x, y))$. Рассматриваем задачу оптимизации двух критериев:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &\rightarrow \min \\ \psi(x, y) &\rightarrow \min \end{aligned}$$

при условии $(x, y) \in D$ (см. рисунок 1.1).

Для интерпретации и графического представления множества решений, оптимальных по Парето, перейдем к двумерному пространству (U, V) , в котором представим все возможные значения частных критериев (в формате анализируемых альтернатив). Такое пространство называют пространством значений частных критериев. Введем обозначения: $U = \varphi(x, y)$, $V = \psi(x, y)$. На плоскости (U, V) изобразим все точки (для всех допустимых решений $(x, y) \in D$), координаты которых определяются по указанным формулам для U и V . Обозначим полученное множество через Ω (см. рис. 1.2). Для представленного на рис. 1.2 множества Ω всех возможных значений для частных критериев видно, что наименьшее значение первого частного критерия (значение U_{\min}) и наименьшее значения второго частного критерия (значение V_{\min}), вообще говоря, могут достигаться в разных точках пространства (U, V) и соответственно в разных точках пространства допустимых решений $(x, y) \in D$. При этом точка с координатами (U_{\min}, V_{\min}) лежит в пространстве значений частных критериев вне интересующего нас множества Ω . Другими словами, для такой ситуации множество абсолютных решений будет пустым, а поставленная задача – неразрешима. Необходимо искать компромиссное решение. При этом множество Парето представляет собой такие точки $(x, y) \in D$, которым в пространстве (U, V) соответствует граничная область множества Ω , обладающая следующим свойством. В указанном пространстве нельзя сдвинуться на «юг», на «запад» или на «юго-запад», чтобы при этом остаться в пределах множества Ω .

УПРАЖНЕНИЕ. Рассмотрите самостоятельно интерпретацию множества оптимальных по Парето решений для случая, когда задача многокритериальной оптимизации является задачей максимизации соответствующих функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, причем менеджер не намерен использовать прием по замене знака критериальной функции для приведения таких частных критериев к оговоренному выше стандартному виду. Кроме того, рассмотрите также интерпретацию множества оптимальных по Парето решений для случая, когда задача многокритериальной оптимизации является задачей максимизации одной из этих функций и задачей минимизации другой из них.

УКАЗАНИЕ. Множеству оптимальных по Парето решений $(x, y) \in D$ соответствуют в области значений частных критериев Ω (при $N=2$) такие *граничные точки*, из которых:

- в задачах минимизации обоих частных критериев нельзя сдвинуться на «юг», «запад» или «юго-запад», чтобы при этом остаться в том же множестве Ω ;
- в задачах максимизации обоих частных критериев нельзя сдвинуться на «север», «восток» или «северо-восток», оставаясь в том же множестве Ω ;
- в задачах минимизации первого из них и максимизации второго нельзя сдвинуться на «север», «запад» или «северо-запад», чтобы при этом остаться в том же множестве Ω ;
- в задачах максимизации первого из них и минимизации второго нельзя сдвинуться на «юг», «восток» или «юго-восток», оставаясь в том же множестве Ω .

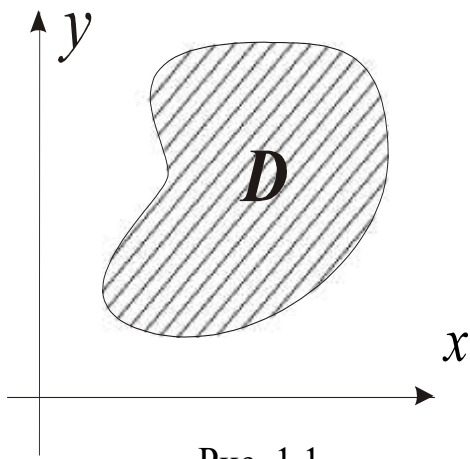


Рис. 1.1

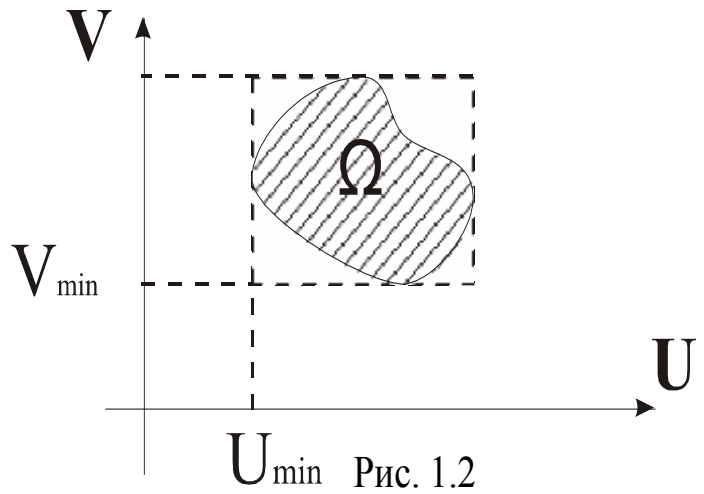


Рис. 1.2

Некоторые примеры, иллюстрирующие аналог множества Парето (оптимальные по Парето границы множеств) в пространстве значений частных критериев для различных Ω представлены ниже:

- на рис. 1.3 (а-б) они представлены применительно к задачам многокритериальной оптимизации, когда *оба частных критерия минимизируются*;
- на рис. 1.4 (а-б) – применительно к задачам многокритериальной оптимизации, когда *оба частных критерия максимизируются*.

На указанных рисунках соответствующие множества выделены жирным шрифтом (линиями / точками). При этом белые кружочки представляют выколотые точки, которые не принадлежат множеству решений, оптимальных по Парето.

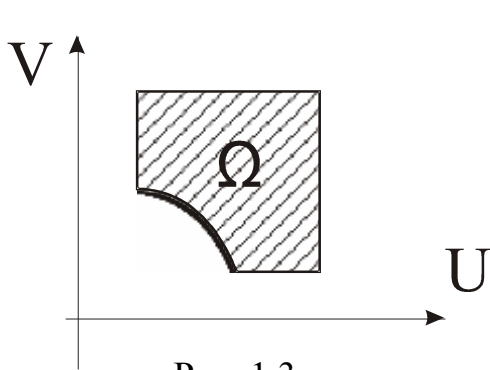


Рис. 1.3а

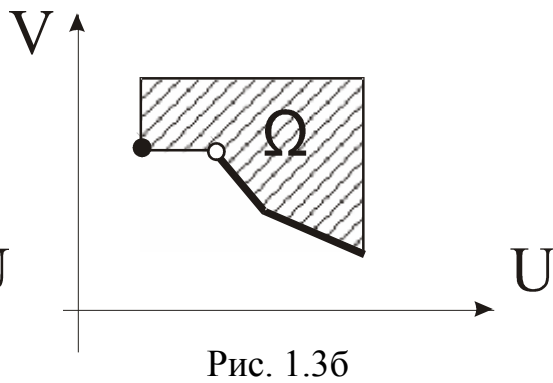


Рис. 1.3б

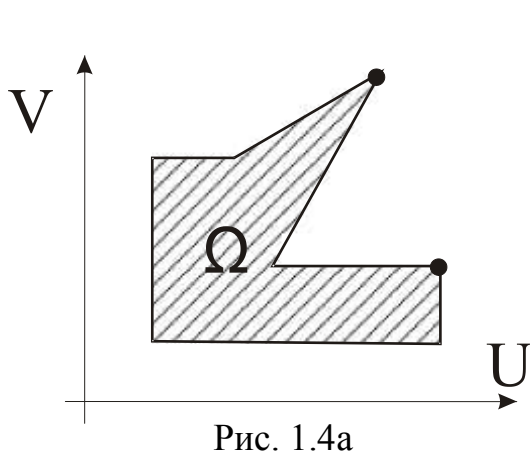


Рис. 1.4а

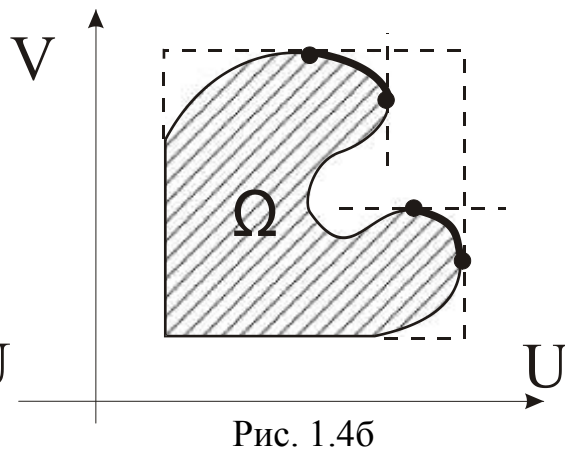


Рис. 1.4б

ПРИМЕР 1.2. Пусть требуется наилучшим образом выбрать соответствующий агрегат по показателям его мощности (x) и надежности (y). Пусть при этом указанные показатели уже выражены в таких единицах, что $x \in [1;2]$ и $y \in [0;1]$. Необходимо минимизировать:

- 1) ожидаемые затраты, обуславливаемые его эксплуатацией в течение года, которые пусть задаются функцией $\varphi(x, y) = 2x - y$ (первый частный критерий);
- 2) ожидаемые годовые издержки на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов, которые пусть задаются функцией $\psi(x, y) = 5 - x - 2y$ (второй частный критерий).

Таким образом, рассматривается задача минимизации при двух частных критериях:

$$\varphi(x, y) \rightarrow \min \quad \text{и} \quad \psi(x, y) \rightarrow \min,$$

и при ограничении $x \in [1;2]$ и $y \in [0;1]$.

В этой задаче множество D в плоскости (x, y) представляет собой четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1.5), вершины которого имеют координаты

$$A(1;0), \quad B(1;1), \quad C(2;1), \quad D(2;0).$$

Положим, как и выше, $U = \varphi(x, y)$ и $V = \psi(x, y)$. Тогда в силу линейности заданных частных критериев U и V исходно заданный четырехугольник $ABCD$ из области допустимых альтернативных решений переходит в четырехугольник $A^*B^*C^*D^*$ (см. рис. 1.6) в плоскости (U, V) значений частных критериев. Его координаты составят:

$$A^* = (2;4), \quad B^* = (1;2), \quad C^* = (3;1), \quad D^* = (4;3).$$

Они определяются соответственно с использованием указанных выше формул ($U=2x-y$ и $V=5-x-2y$).

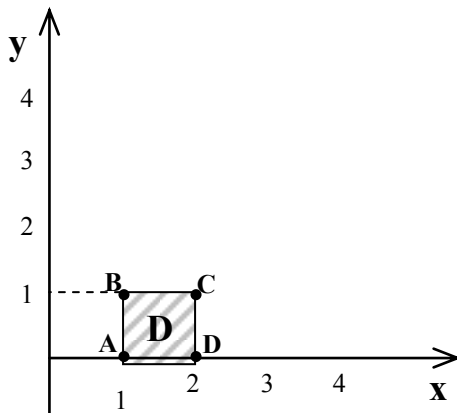


Рис. 1.5.

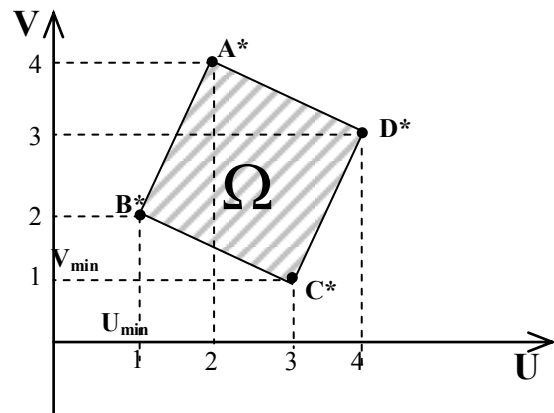


Рис. 1.6.

Как видно из рис. 1.6 точка с координатами (U_{\min}, V_{\min}) лежит вне множества Ω . Следовательно, множество абсолютных решений для рассматриваемой задачи является пустым. При этом множество эффективных или оптимальных по Парето решений представлено в плоскости (U, V) значений частных критериев отрезком B^*C^* . Соответственно в плоскости (x, y) исходных анализируемых решений по показателям мощности (x) и надежности (y) агрегата множество оптимальных по Парето решений задается отрезком BC .

В данном примере наилучшее решение должно быть некоторым компромиссом (в желании ЛПР минимизировать как $\varphi(x, y)$, так и $\psi(x, y)$ одновременно), выбираемым среди эффективных решений $(x, y) \in BC$. Для всех этих эффективных решений общим в данной ситуации является то, что надежность агрегата должна быть максимальной ($y=1$). Запас мощности агрегата может составлять от 0 % до 100 % .

Таким образом, в задачах многокритериальной оптимизации менеджер должен уметь находить компромиссные решения на соответствующем множестве эффективных решений, оптимальных по Парето. Подчеркнем, что в общем случае эффективные решения не являются эквивалентными между собой. Проиллюстрируем это следующим примером.

ПРИМЕР 1.3. Рассмотрим ситуацию, связанную с моделированием звена цепи поставок некоторой системы логистики, когда нужно выбрать наилучший вариант организации поставок сырья, например, из трех доступных анализируемых вариантов А, В и С. При этом, в качестве частных критериев могут выступать, например, следующие: $g^{(1)}$ – минимизация ожидаемых годовых издержек, обуславливаемых соответствующими расстояниями и затратами на перевозки; $g^{(2)}$ – минимизация ожидаемых годовых издержек, обуславливаемых форс-мажорными ситуациями у поставщика (учет влияния факторов надежности); $g^{(3)}$ – минимизация оценки годовых издержек, обуславливаемых возможными срывами поставок из-за погодных условий; и т.д. (ограничимся в этом примере этими тремя частными критериями).

Оценки по этим частным критериям приведены (в млн. руб.) в табл. 1.2.

Табл. 1.2.

Оценки значений частных критериев в формате примера 1.3.

Точки из X: варианты решений	Значения частных критериев		
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$
А	5	1	4
В	2	3	7
С	3	6	1

В рассматриваемом случае все три альтернативы «А», «В» и «С» оптимальны по Парето. Для любого из этих решений выполнено свойство, характеризующее Парето-оптимальное решение: в множестве допустимых решений («А», «В» и «С») не найдется ни одного другого решения, позволяющего улучшить показатель хотя бы одного из критериев, не ухудшая при этом показатели других критериев.

Кроме того, как видим, при этом нельзя однозначно сказать, какое из них лучше. Выбор может зависеть от предпочтений ЛПР. Итак, при решении многокритериальных задач оптимизации при анализе и моделировании систем логистики необходим дополнительный перебор эффективных решений. Образно говоря, на переговорном множестве (множестве Парето) можно устроить соответствующий отбор в виде «тура переговоров» для нахождения приемлемого компромиссного решения исходной задачи векторной оптимизации. Разработаны различные методы, приемы и подходы для достижения соответствующего компромисса в формате таких «переговоров». В качестве основных отметим следующие (для более полного обзора и комментариев см. приведенный в конце книги список литературы):

- методы сведения задач многокритериальной оптимизации к задачам скалярной оптимизации;
- методы, основанные на использовании концепции полезности;
- методы компенсации;
- методы порогов сравнимости.

Следуя [Ермольев Ю.], [Емельянов С.], [Шикин Е.] (напомним, что здесь, как и ранее, ссылки даны по первому из соавторов), далее в этом разделе рассмотрим наиболее распространенные методы в формате прямых подходов к решению многокритериальных задач оптимизации в логистике, в основе которых лежат приемы сведения таких задач к задачам скалярной оптимизации. Предварительно отметим следующее.

В формате первого из указанных выше подходов вместо того, чтобы перебирать точки переговорного множества в соответствии с некоторым критерием применительно к организованному «туру переговоров», часто в конкретных приложениях логистики (при оптимизации работы звена/звеньев соответствующей цепи поставок) стремятся частные критерии $g^{(k)}(\vec{x})$ «свернуть» в один специальный критерий выбора (отсюда и их название). При этом необходимо, чтобы минимизация такого критерия выбора приводила именно к решению из множества Парето для решаемой задачи оптимизации. Поэтому, применяя на практике излагаемые ниже методы многокритериальной оптимизации, важно знать, что имеет место теорема, указывающая как можно строить критерии выбора, обладающие указанным свойством.

Теорема [Ермольев Ю.]. Пусть функция $f(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ является строго возрастающей по каждой из компонент в соответствующей области, определяемой соотношениями

$$Z_1 = g^{(1)}(\vec{x}), \quad Z_2 = g^{(2)}(\vec{x}), \quad \dots, \quad Z_N = g^{(N)}(\vec{x})$$

при $\vec{x} \in X$. Тогда точка минимума функции

$$F(\vec{x}) = f(g^{(1)}(\vec{x}), g^{(2)}(\vec{x}), \dots, g^{(N)}(\vec{x}))$$

в области X является эффективным решением задачи многокритериальной оптимизации:

$$g^{(k)}(\bar{x}) \rightarrow \min, k=\overline{1, N},$$

при условии $\bar{x} \in X$.

Доказательство. Пусть \bar{x}^* - точка минимума $F(\bar{x})$ в области X и пусть, от противного, указанная точка \bar{x}^* не является оптимальной по Парето. Тогда в области X существует такое решение \bar{x}^0 , что

$$g^{(k)}(\bar{x}^0) \leq g^{(k)}(\bar{x}^*), k=\overline{1, N},$$

причем здесь хотя бы для одного k имеет место строгое неравенство.

По условию теоремы имеем

$$\begin{aligned} F(\bar{x}^*) &= f(g^{(1)}(\bar{x}^*), \dots, g^{(N)}(\bar{x}^*)) \geq f(g^{(1)}(\bar{x}^0), \dots, g^{(N)}(\bar{x}^0)) \geq \dots \geq \\ &\geq f(g^{(1)}(\bar{x}^0), \dots, g^{(N)}(\bar{x}^0)) = F(\bar{x}^0). \end{aligned}$$

При этом в последнем соотношении знак равенства невозможен, т.к. функция f является строго возрастающей и хотя бы одно из неравенств $g^{(k)}(\bar{x}^0) \leq g^{(k)}(\bar{x}^*)$ также является строгим. Таким образом, точка \bar{x}^* исходно не является точкой минимума $F(\bar{x})$ в области X . Это противоречие и доказывает теорему.

1.3. Сравнение альтернатив при многих критериях

Сначала проиллюстрируем особенности, которые соотносятся с процедурами сравнения альтернатив при многих критериях, следующим простым примером.

ПРИМЕР 1.4. При формализации многокритериальной задачи оптимизации заданы частные критерии $\{g^{(k)}, k=\overline{1, 4}\}$ для повышения эффективности работы некоторого звена цепи поставок. Все частные критерии минимизируются. Анализируется 5 альтернатив $\{X_i, i=\overline{1, 5}\}$. Оценки частных критериев в формате каждой альтернативы представлены в табл. 1.3. Какое из этих решений следует выбрать ЛПР, если никакой другой дополнительной информации (например, о важности этих оценок / показателей в формате работы соответствующего звена цепи поставок) не имеется?

Табл. 1.3.

Атрибуты задачи оптимизации для примера 1.4.

Альтернативные решения	Оценки частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
X_1	50	40	30	30
X_2	70	30	30	30
X_3	10	80	20	70
X_4	40	80	20	30
X_5	60	20	50	30

РЕШЕНИЕ. В частности, можно предпочесть альтернативу X_1 , так как при этом решении суммарный показатель по всем частным критериям является наименьшим (он равен 150). Никакая другая альтернатива не дает такого результата (хотя в формате отдельных показателей частных критериев потери, соотносимые с X_1 , при других альтернативных решениях могут быть меньшими). Но можно предпочесть, например, альтернативное решение X_2 , обратив внимание на следующее. Только по одному из частных критериев (показатель критерия $g^{(1)}$) альтернатива X_2 уступает альтернативе X_1 , а применительно ко всем остальным частным критериям не уступает. Более того, по критерию $g^{(2)}$ она даже является более предпочтительной. Можно также предпочесть, например, альтернативу X_4 , заметив, например, что только по одному из частных критериев (показатель критерия $g^{(2)}$) она уступает альтернативе X_2 , а применительно ко всем остальным частным критериям она не уступает ей.

Если ЛПР считает, что самым важным из всех показателей является показатель частного критерия $g^{(1)}$ (причем, остальными частными критериями можно пренебречь), то наилучшей будет альтернатива X_3 , т.к. этому решению соответствуют наименьшие потери (они равны 10) по критерию $g^{(1)}$ (например, это критерий минимизации расходов на поставку товара). Можно также предпочесть и решение X_5 , в частности, если ЛПР считает, что в качестве наилучшего решения необходимо выбрать альтернативу с наименьшей суммой показателей частных критериев $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ (например, по сумме показателей критериев минимизации расходов на поставку товара и его хранение) и т.д.

Как видим, можно реализовать много различных подходов при сравнении этих альтернатив. А какой подход к оптимизации при этих критериях предпочли бы вы в формате задач вашего бизнеса? Попробуйте ответить на этот вопрос именно сейчас, пока вы не познакомились с рекомендациями теории (чтобы затем сделать соответствующие сравнения).

Интерпретация процедур сравнения альтернатив (N=2). Для более глубокого понимания и иллюстрации особенностей принятия решений при нескольких критериях удобно выделить случай N=2. Это случай, когда в рамках рассматриваемой оптимизационной модели формализуются два частных критерия. Для такой ситуации таблица с оценками частных критериев имеет всего два столбца. Элементы первого из них (относящегося к частному критерию $g^{(1)}$) будем обозначать через U_i , где i – индекс соответствующего решения X_i . Элементы второго столбца (относящегося к оценкам частного критерия $g^{(2)}$) обозначаем через V_i . Тогда каждое альтернативное решение X_i характеризуется вектором (U_i, V_i) соответствующих потерь по критериям $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ соответственно.

В декартовом пространстве $(U \times V)$ значений частных критериев отдельное решение X_i представляется точкой (U_i, V_i) . При этом, представляя соответствующими точками все анализируемые решения $X_i, i = \overline{1, n}$, можно говорить о так называемом поле издержек/потерь в пространстве значений частных критериев. Оно представляет собой минимальный прямоугольник, включающий все допустимые альтернативные решения (см. рис. 1.7).

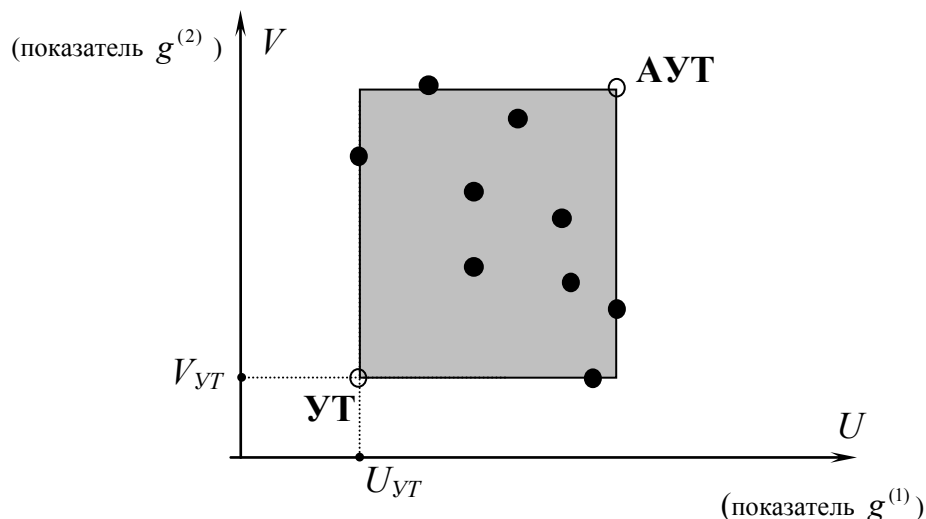


Рис. 1.7. Поле потерь в пространстве значений частных критериев:

- УТ - утопическая точка;
- АУТ - антиутопическая точка;
- - точки, представляющие анализируемые решения.

Поле издержек/потерь содержит все точки, представляющие анализируемые альтернативы $X_i, i = \overline{1, m}$. Дополнительно выделяют утопическую точку (УТ), которая соответствует условному (утопическому) решению X_y , представленному вектором потерь (U_y, V_y) с наилучшими (наименьшими) координатами: $U_y = \min_i \{U_i\}$ и $V_y = \min_i \{V_i\}$. Название УТ обуславливается тем, что среди анализируемых решений $\{X_i, i = \overline{1, m}\}$ указанного решения $X_y = УТ$ (как правило) не будет: иначе, не было бы проблемы выбора в формате задачи оптимизации при многих критериях. Любой участник рынка (любой менеджер или ЛПР) всегда предпочел бы указанное решение $X_y = УТ$. Аналогично, говорят также и об антиутопической точке как точке с наихудшими координатами в формате поля потерь (ее обозначаем через АУТ), - см. рис. 1.7.

Выбор оптимального для ЛПР решения (из представленных в поле потерь) подразумевает, как минимум, необходимость сравнения имеющихся альтернатив. Рассмотрим особенности соответствующих процедур сравнения в пространстве значений частных критериев. Сравняя какое-либо конкретное

решение, например, решение X_0 с некоторыми другими альтернативами ($X_k, k \neq 0$), возможны ситуации, которые представлены на рис. 1.8. Отметим эти ситуации.

- 1) Все другие альтернативные решения в поле потерь, которые отличаются от X_0 , причем такие, для которых ни одна из координат (U либо V) не является большей, чем соответственно U_0 либо V_0 , образуют множество, которое называют конусом предпочтений по отношению к X_0 .
- 2) Кроме того, все другие отличные от X_0 альтернативные решения, для которых ни одна из координат (U либо V) не является меньшей, чем соответственно U_0 либо V_0 , образуют множество альтернатив, которое называют антиконусом по отношению к X_0 .

На рис. 1.8 указанные множества заштрихованы с разным наклоном. Остальные области в соответствующем декартовом пространстве значений частных критериев называют конусами неопределенности (на рис. 1.8 они отмечены как I и II). При сравнении решения X_0 с любым решением из конуса предпочтений и антиконуса никаких проблем не возникает.

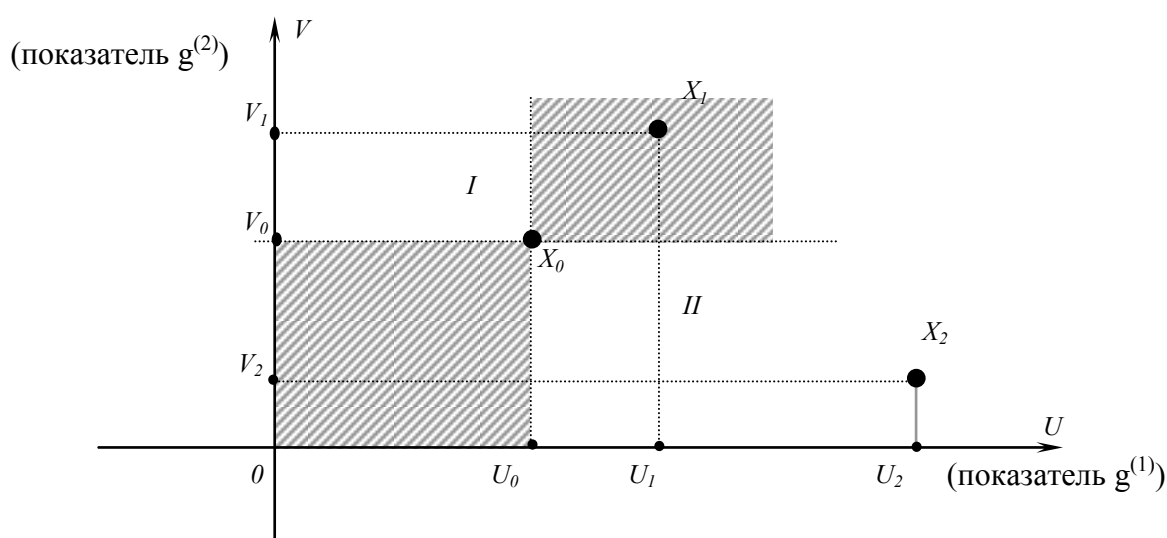


Рис. 1.8. Конус предпочтений, антиконус и конуса неопределённости.

Здесь:

- X_1 - альтернативное решение из антиконуса (по отношению к X_0);
- X_2 - альтернативное решение из конуса неопределенности (по отношению к X_0).

Применительно к рисунку 1.8 отметим, что решение X_1 из антиконуса (относительно X_0) будет для любого ЛПР худшим, чем решение X_0 , т.к. по любому из частных критериев соответствующий показатель потерь будет большим. Все решения, для которых каждая компонента соответствующего вектора потерь превосходит (или равна) аналогичную компоненту альтернативного решения X_0 , причем хотя бы по одному из частных критериев имеет место строгое неравенство, будут худшими, чем X_0 для всех ЛПР. Такие альтернативы называют *доминируемыми по отношению к альтернативе X_0* и их можно заведомо отбросить при нахождении наилучшего решения.

Аналогично, для всех ЛПР любая альтернатива из конуса предпочтений будет лучше, чем X_0 , т.к. по каждому из частных критериев на рис. 1.8 потери для альтернативы из конуса предпочтений будут меньшими, чем для X_0 . Такие альтернативы из конуса предпочтений называют *доминирующими по отношению к X_0* . Все решения, для которых каждая компонента вектора потерь меньше (или равна)

аналогичной компоненте решения X_0 , причём хотя бы для одного из частных критериев имеет место строгое неравенство, будут заведомо лучшими, чем X_0 для всех ЛПР.

Наконец, для решений из конусов неопределённости (I и II – на рис. 1.8) выбор по отношению к X_0 уже не является очевидным и не будет одинаковым / общим для всех ЛПР. Например, для решения X_2 на рис. 1.8 соответствующие потери U_2 по частному критерию $g^{(1)}$ будут большими, чем для решения X_0 по этому же критерию ($U_2 > U_0$), но зато соответствующие потери V_2 по критерию $g^{(2)}$ будут меньшими, чем аналогичные потери для решения X_0 ($V_0 > V_2$). Поэтому нет однозначного ответа на вопрос о том, какая из этих альтернатив (X_0 или X_2) лучше. Надо учитывать предпочтения ЛПР: каждое ЛПР может ответить по-своему. Таким образом, при сравнении альтернатив по многим критериям может иметь место неопределённость (чаще всего именно так и бывает), характеризующая те особенности и затруднения, которые свойственны задачам интересующего нас типа. Каждое ЛПР реализует свои предпочтения в формате специфики соответствующей задачи многокритериальной оптимизации. Поэтому для различных ЛПР результат сравнения решения X_0 с альтернативой из конусов неопределённости (например, с альтернативой X_2) может оказаться различным. Менеджер должен уметь находить наилучшее решение для задач многокритериальной оптимизации систем логистики с учетом имеющихся предпочтений ЛПР. Каким образом это можно осуществить? Формальное задание соответствующих предпочтений для конкретного ЛПР можно реализовать на основе так называемого аппарата линий уровней. Далее представлены необходимые определения и пояснения, формализующие указанное понятие.

1.4. Формализация предпочтений ЛПР. Линии уровня критерия выбора.

Один из подходов для «раскрытия» неопределённостей указанного выше типа состоит в привлечении специального аппарата: линий уровня критерия выбора. С помощью указанного аппарата можно характеризовать специфику предпочтений конкретного ЛПР к показателям частных критериев в соответствующем поле издержек/потерь. Проиллюстрируем особенность такого аппарата применительно к ситуации, представленной на рис. 1.9. А именно, пусть требуется сравнить альтернативное решение X_0 с некоторой другой альтернативой (например, из области конуса неопределённости II), которая по частному критерию $g^{(2)}$ дает показатель V^* , лучший, чем показатель решения X_0 : $V^* < V_0$ (см. рис. 1.9). Другими словами, альтернатива X_0 сравнивается с некоторой альтернативой из области конуса неопределённости II, которая на рис. 1.9 будет представлена некоторой точкой, расположенной где-то на линии, параллельной оси “OU” и проходящей через точку с координатами $(0; V^*)$.

Возможные ситуации, связанные с таким сравнением охарактеризуем следующим образом.

1) С одной стороны, очевидно, следующее. В одном «крайнем» случае, когда такая альтернатива, сравниваемая с X_0 , будет представлена именно точкой \hat{X} (принадлежащей в этом крайнем случае конусу предпочтений по отношению к X_0), решение X_0 будет худшим, чем альтернатива \hat{X} . Подчеркнем, что такое сравнение будет иметь место для всех ЛПР (из-за дополнительных потерь величины $(V_0 - V^*)$ по частному критерию $g^{(2)}$ при одинаковом показателе по критерию $g^{(1)}$).

2) С другой стороны, для любого ЛПР всегда найдется такая «своя» точка \hat{X} (см. рис. 1.9), лежащая на указанной выше линии, которая будет обладать следующим свойством. Соответствующая ей альтернатива будет для конкретного ЛПР худшей, чем альтернативное решение X_0 (за счет увеличения потерь по частному критерию $g^{(1)}$).

Если предпочтения ЛПР будут заданы корректно (отношение предпочтений будет транзитивным), то между точками \hat{X} и \hat{X} найдется единственная точка X^* (на рис. 1.9 она выделена белым кружком), лежащая на указанной линии, для которой будет иметь место следующее. Любая другая альтернатива, представленная точкой на указанной линии, расположенной левее, чем X^* , будет для ЛПР лучшей, чем решение X_0 . Любая другая альтернатива, представленная точкой на указанной линии, расположенной правее, чем X^* , будет для ЛПР худшей, чем решение X_0 .

Таким образом, для любого альтернативного решения X_0 при его сравнении с альтернативой из конуса неопределённости на любой линии, параллельной оси “OU”, всегда найдётся эквивалентная

альтернатива в конусе неопределённости, обладающая следующим свойством. Для данного ЛПР реализуется приемлемый “баланс” между потерей по частному критерию $g^{(1)}$ величины $(u_0 - u^*)$ и требуемой этим ЛПР соответствующей минимально допустимой компенсации в виде выигрыша $(v_0 - v^*)$ по частному критерию $g^{(2)}$. Поскольку здесь в наших рассуждениях величина v^* была произвольной, то эквивалентные по отношению к X_0 альтернативы для данного ЛПР, аналогичные X^* , имеются при любом значении v^* . Соединяя все такие эквивалентные между собой (и по отношению к альтернативе X_0) точки, получаем линию, представляющую одну из линий уровня для данного ЛПР в пространстве значений частных критериев: все точки на этой линии эквивалентны X_0 в рамках системы предпочтений этого ЛПР.

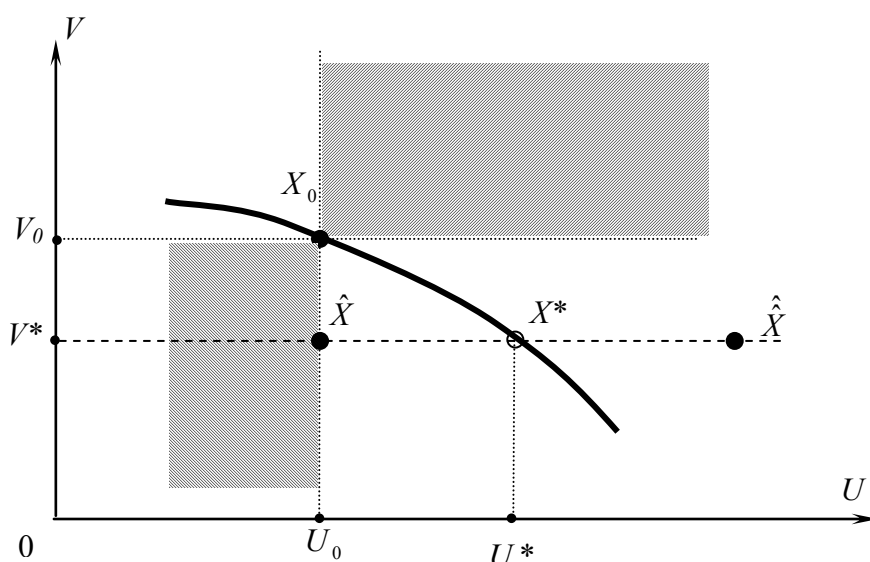


Рис. 1.9. Иллюстрация понятия линии уровня (конкретного ЛПР):

В приведённых выше рассуждениях, точка X_0 также была взята произвольно. Поэтому можно говорить о семействе линий уровня ЛПР, не привязываясь к отдельному решению X_0 (см. рис. 1.10). Все решения, лежащие на одной и той же линии (линии конкретного уровня) являются эквивалентными между собой (для ЛПР). Чем дальше от начала координат проходит линия, тем менее предпочтительные значения частных критериев она представляет: для иллюстрации сравните точки пересечения указанных линий уровня с биссектрисой первого координатного угла и дайте соответствующую интерпретацию.

На формальном уровне соответствующее семейство линий в двумерном пространстве $(U \times V)$ задают на основе параметрического задания таких линий в пространстве значений частных критериев. А именно, под линией уровня K понимают линию, определяемую соотношением $f(u; v) = K$, где

- K – параметр, характеризующий отдельную линию семейства;
- $f(u; v)$ – функция двух переменных, определённая в указанном пространстве $(U \times V)$ и характеризующая отношение ЛПР к показателям частных критериев; она задается таким образом, чтобы большим значениям K соответствовали линии уровня семейства с меньшим предпочтением для данного ЛПР (напомним, что речь идет о минимизации всех частных критериев);
- $(u; v)$ – переменные, представляющие показатели частных критериев в пространстве $(U \times V)$.

Таким образом, на формальном уровне задача оптимального выбора наилучшего решения при двух критериях применительно к двумерному пространству $(U \times V)$ значений частных критериев, может быть представлена как следующая задача: $f(u; v) \rightarrow \min_{\{X_j\}}$. В общем случае, когда модель задачи оптимизации

решения при многих критериях учитывает произвольное число частных критериев $\{g^{(k)}, k = \overline{1, N}\}$, задача выбора наилучшей альтернативы представляется в следующем виде:

$$f(u; v; \dots; z) \rightarrow \min_{\{X_j\}}.$$

Здесь $f(u; v; \dots; z)$ - функция m переменных, аргументами которой являются оценки частных критериев. Она задаётся так, чтобы выполнялось следующее положение. Меньшим значениям параметра « K » для «линии уровня K » (в N -мерном пространстве это – соответствующие гиперплоскости), определяемой равенством $f(u; v; \dots; z) = K$, должны соответствовать более предпочтительные альтернативы (при минимизации частных критериев).

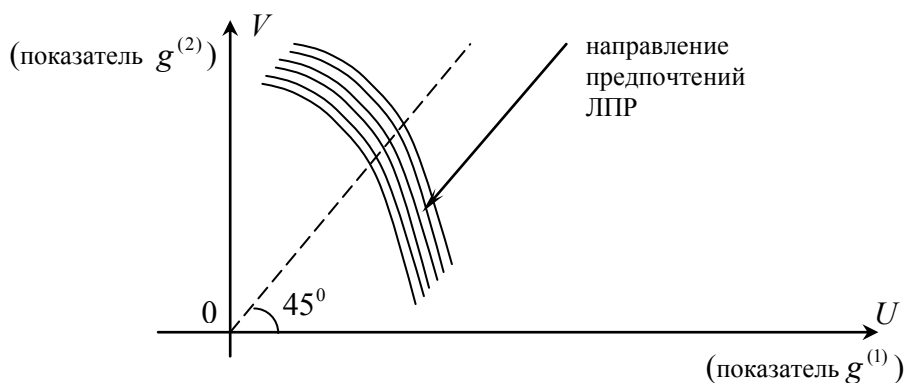


Рис. 1.10. Семейство линий уровня для ЛПР.

При нахождении наилучшего решения для дискретного множества альтернатив в формате заданного семейства «линий уровня» (т.е. при заданной критериальной функции $f = f(u; v; \dots; z)$) удобно поступать следующим образом. К таблице с показателями частных критериев приписывают дополнительный столбец. Его элементы (показатели K_i для решения X_i) определяются по алгоритму, задаваемому соответствующей критериальной функцией f критерия выбора (учитываются показатели частных критериев по строке таблицы). Элементы дополнительного столбца представляют соответствующие показатели «линий уровня» для альтернативных решений. Таким образом, по этому дополнительному столбцу далее остаётся выбрать наилучшее решение. Его укажет наименьший элемент дополнительного столбца. Разным алгоритмам (в формате критерия выбора) будут соответствовать разные семейства линий уровня. Менеджер должен знать и понимать особенности линий уровня любого критерия выбора, чтобы наилучшим образом адаптировать искомое решение к предпочтениям ЛПР. Чем большим будет арсенал соответствующих подходов к формализации критерия выбора в распоряжении менеджера, тем эффективнее будет адаптация найденного решения к предпочтениям ЛПР.

ВОПРОСЫ (по материалам главы 1).

1. Почему формат задач системного анализа в логистике в качестве одного из важнейших элементов или атрибутов включает задачи оптимизации при многих критериях?
2. Какие задачи относят к задачам многокритериальной оптимизации?
3. Уточните атрибуты и особенности таких задач для систем логистики.
4. Уточните специфику понятий «частные критерии» и «критерии выбора» для систем логистики.
5. Какие решения называют оптимальными по Парето? Приведите их формальное определение, а также интерпретации и примеры из области логистики.
6. Уточните, как можно идентифицировать оптимальные по Парето решения в формате: а) графического представления задач оптимизации в пространстве значений частных критериев; б) табличного представления таких задач для систем логистики.
7. Отметьте особенности представления альтернативных решений в пространстве значений частных критериев. В частности, укажите атрибуты следующих понятий: поля издержек/потерь, утопической и антиутопической точек (для задач минимизации частных критериев).
8. Какие особенности процедур сравнения альтернатив при многих критериях обуславливают следующие понятия: конус предпочтения, антиконус, доминирующее решение, доминируемое решение.
9. Что называют «линиями уровня» при формализации предпочтений в задачах сравнения альтернатив по многим критериям? В каком пространстве задают такие линии?
10. Каким образом реализуется параметрическое представление линий уровня в пространстве значений частных критериев? Отметьте атрибуты такого представления.

ГЛАВА 2

КЛАССИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ЛОГИСТИКИ

2.1. Оптимизация основного частного критерия

При таком подходе среди частных критериев выделяется один, который принимается как основной или исключительно важный: на его основе будут реализованы процедуры оптимизации. Остальные частные критерии будут учтены следующим образом. В формате их показателей ЛПР указывает предельно допустимые значения (учитывается имеющийся опыт бизнеса). Пусть критерий $g^{(1)}(\vec{x})$ является основным. Тогда исходная задача многокритериальной оптимизации (все частные критерии минимизируются) в формате рассматриваемого здесь подхода сводится к однокритериальной задаче следующим образом:

$$g^{(1)}(\vec{x}) \rightarrow \min$$

при ограничениях $g^{(k)}(\vec{x}) \leq \overline{g_k}$, $k=2, \overline{N}$, $\vec{x} \in X$, где $\overline{g_k}$ – задаваемые ЛПР предельно допустимые значения для показателей частных критериев (кроме основного).

Вместо исходной многокритериальной задачи оптимизации в формате подхода, называемого методом оптимизации основного частного критерия, решается скалярная задача оптимизации одной функции (основного частного критерия). При этом система ограничений модифицируется с учетом всех остальных частных критериев. Если найденное минимальное значение достигается при двух или более альтернативных решениях, то требуется проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 2.1. Пусть в условиях задачи, представленной в примере 1.2 (см. главу 1), в качестве основного критерия принят критерий минимизации ожидаемых годовых затрат на эксплуатацию выбираемого типа агрегата, т.е. критерий $\varphi(x, y) \rightarrow \min$. Для показателя ожидаемых годовых издержек на «штрафы» из-за срывов и задержек выполнения заказов задано допустимое предельное его значение (в соответствующих принятых единицах измерения) в виде неравенства $\psi(x, y) \leq 1,5$. Тогда исходная задача многокритериальной оптимизации сводится (напомним, что $\varphi(x, y) = 2x - y$ и $\psi(x, y) = 5 - x - 2y$) к следующей:

$$2x - y \rightarrow \min$$

при ограничениях $5 - x - 2y \leq 1,5$; $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

РЕШЕНИЕ. Обычными методами высшей математики находим: оптимальным решением будет точка из множества решений, оптимальных по Парето, с координатами $x^* = 1,5$ и $y^* = 1$. В этом случае следует обеспечить максимально возможную надежность агрегата с 50 % запаса его мощности.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если менеджер использует табличное представление оценок частных критериев, то процедуры метода оптимизации основного частного критерия будут следующими.

- 1) Сначала необходимо обеспечить выполнение требуемой системы ограничений (как и выше, считаем, что основным частным критерием является критерий $g^{(1)}(\vec{x})$):

$$g^{(k)}(\vec{x}) \leq \overline{g_k}, \quad k=2, \overline{N}, \quad \vec{x} \in X.$$

Для этого просматриваются все оценки частных критериев $g^{(k)}(\vec{x})$, $k=2, \overline{N}$ (которые не являются основным). Они будут представлены в столбцах таблицы по соответствующим частным критериям. Если в столбце, который соответствует частному критерию $g^{(k)}$, найдется элемент, превосходящий предельно допустимые потери $\overline{g_k}$, то такая альтернатива далее не рассматривается (она вычеркивается из множества допустимых альтернативных решений). Реализация указанных процедур для всего множества критериев $g^{(k)}$, $k=2, \overline{N}$, обеспечит выполнение требуемой системы ограничений.

- 2) Затем среди оставшихся допустимых альтернатив находится наилучшая по основному частному критерию $g^{(1)}(\vec{x})$. Она определяется по наименьшему показателю среди оставшихся элементов в том столбце, который соответствует частному критерию $g^{(1)}(\vec{x})$.

Для иллюстрации обратимся к условному примеру 1.1 из главы 1.

ПРИМЕР 2.2. Анализируется ситуация, связанная с моделированием работы звена цепи поставок, когда нужно выбрать наилучший вариант организации поставок товара из семи доступных и возможных вариантов А, В, С, D, E, F и G. Множество частных критериев задано четырьмя критериями.

Частные критерии минимизируются. Оценки частных критериев заданы (в тыс. у.е.) в таблице 2.1.

Таблица 2.1.
Оценки / показатели частных критериев для примера 2.2.

Альтернативные решения	Оценки частных критериев							
	$g^{(1)}$			$g^{(2)}$			$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45			27			159	29
B	40			34			148	28
C	42			35			126	24
D	41			34			170	28
E	45			35			146	26
F	43			32			147	27
G	42			36			122	25

Мы уже знаем (см. пример 1.1), что в рассматриваемом примере альтернативы А, В, С, F и G являются оптимальными по Парето. Найдем среди них наилучшее решение по методу оптимизации основного частного критерия. Упростим таблицу 2.1, удалив альтернативы D и E (не оптимальные по Парето). Результат представлен в таблице 2.2.

Таблица 2.2.
Показатели частных критериев для альтернатив оптимальных по Парето.
Оценки частных критериев

Альтернативные решения	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

Пусть в качестве основного частного критерия принят критерий $g^{(1)}$. Для остальных трех частных критериев ЛПР задает следующие ограничения: $g^{(2)} \leq 35$, $g^{(3)} \leq 150$, $g^{(4)} \leq 30$. Другими словами, в данном случае $g_2 = 35$, $g_3 = 150$ и $g_4 = 30$. Задача многокритериальной оптимизации будет преобразована к виду:

$$g^{(1)}(\bar{x}) \rightarrow \min$$

при ограничениях $g^{(2)}(\bar{x}) \leq 35$; $g^{(3)}(\bar{x}) \leq 150$; $g^{(4)}(\bar{x}) \leq 30$; $\bar{x} \in \{A, B, C, F, G\}$.

Для нахождения оптимального решения сначала обеспечим выполнение требуемой системы ограничений: удаляем альтернативы А и G. Альтернатива А не может быть рассмотрена, т.к. не удовлетворяет ограничениям по частному критерию $g^{(3)}$. Альтернатива G не может быть рассмотрена, т.к. не удовлетворяет ограничениям по частному критерию $g^{(2)}$. Получаем новую таблицу 2.3.

Таблица 2.3.
Показатели частных критериев для альтернатив оптимальных по Парето
(удовлетворяющих системе ограничений).
Значения частных критериев

Альтернативные решения	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
F	43	32	147	27

Теперь согласно процедурам рассматриваемого метода оптимизации в формате оставшегося множества допустимых альтернативных решений находится наилучшая альтернатива по основному частному критерию $g^{(1)}(\bar{x})$. Она определяется по наименьшему показателю среди оставшихся элементов в первом столбце (этот столбец соответствует показателям основного частного критерия $g^{(1)}$). Нетрудно видеть, что выбор попадает на альтернативу В. Она и будет принята в качестве оптимальной (т.е. в качестве оптимального решения) в рамках метода оптимизации по основному частному критерию.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Линии уровня указанного критерия выбора для случая задачи минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min$, $g^{(2)} \rightarrow \min$ представлены на рис. 2. 1. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и H);
- в качестве основного частного критерия принимается критерий $g^{(1)}$;
- максимально допустимые издержки по критерию $g^{(2)}$ не должны превышать величины g_2 .

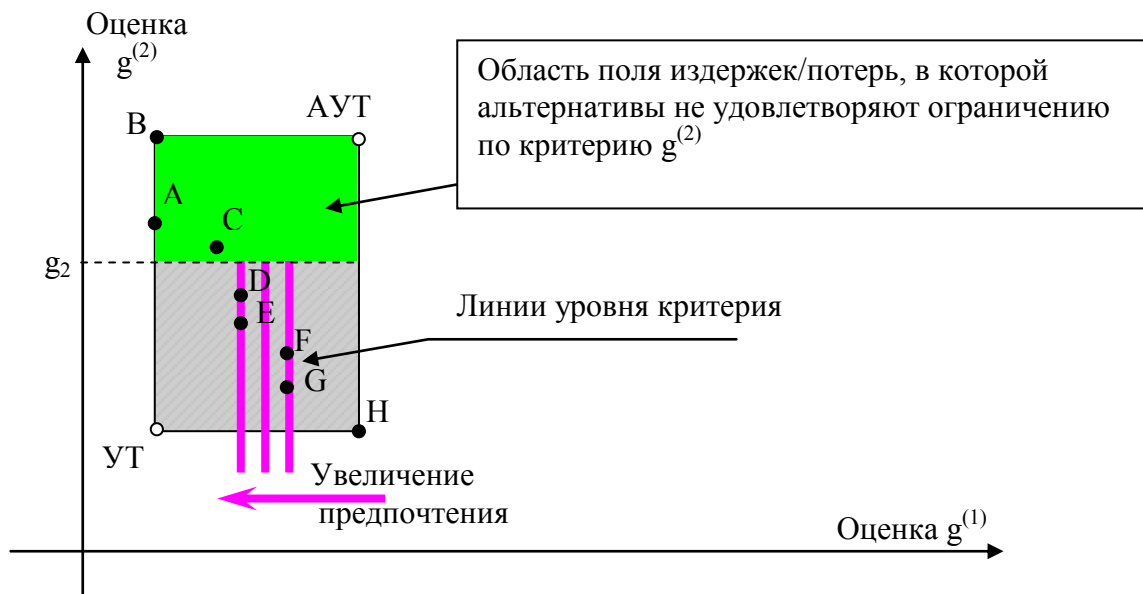


Рис. 2.1. Иллюстрация семейства линий уровня в формате метода оптимизации основного частного критерия ($g^{(1)}$ - основной частный критерий)

На рис. 2.1 интересующее нас семейство линий уровня (при $N = 2$) представляет собой линии, параллельные оси ординат. В этом легко убедиться, если учесть, что в указанном случае линия уровня «К» (см. главу 1) определяется на основе следующего ее представления: $u = K$, где u обозначает оценку показателя $g^{(1)}$. Направление предпочтений соответствует уменьшению показателя основного частного критерия $g^{(1)}$. Выбор на основе указанного семейства линий уровня распространяется только на те допустимые альтернативные решения, которые удовлетворяют ограничениям по второму частному критерию. В ситуации, представленной на этом рисунке, оптимальной альтернативой по методу оптимизации основного частного критерия ($g^{(1)}$) будет альтернатива E.

Этот рисунок иллюстрирует еще одну особенность процедур оптимизации в рамках указанного подхода. Наилучший показатель по основному частному критерию ($g^{(1)}$) достигается сразу у двух альтернатив (D и E). Если в формате указанного подхода к оптимизации не будут учтены процедуры проверки найденного решения на оптимальность по Парето, то возможны нежелательные феномены. В качестве оптимальной альтернативы может быть выбрано решение, не оптимальное по Парето. Например, в ситуации, которая представлена на рис. 2.1, если в алгоритме критерия будет отсутствовать проверка найденного решения на оптимальность по Парето, то может случиться, что будет выбрана альтернатива D (у нее показатель по основному частному критерию $g^{(1)}$ также является наилучшим), а не альтернатива E.

УПРАЖНЕНИЕ. Приведите иллюстрацию линий уровня этого критерия в пространстве издержек/потерь для случая, когда основным частным критерием является минимизация показателя $g^{(2)}$.

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите семейство линий, параллельных оси абсцисс. При этом направление предпочтений определите в сторону уменьшения показателя $g^{(2)}$.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Представленный аппарат линий уровня для критерия выбора на основе процедур оптимизации по основному частному критерию позволяет весьма просто решать задачи нахождения наилучшего решения при двух критериях, если они формализованы в графическом представлении. Проиллюстрируем это следующими примерами.

ПРИМЕР 2.3. Нахождение наилучшего решения по методу оптимизации основного частного критерия (при минимизации двух критериев). Минимизируются два частных критерия: $g^{(1)} \rightarrow \min$, $g^{(2)} \rightarrow \min$. Частный критерий $g^{(1)}$ является основным. Множество допустимых значений критериев в пространстве издержек / потерь ($U \times V$), где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, задано графически (см. рис. 2.2). Требуется: найти множество решений, оптимальных по Парето; в указанном множестве найти наилучшее

решение по методу оптимизации основного частного критерия (ограничение g_2 для максимально допустимых издержек/потерь по второму критерию составляет $g_2 = 38$).

РЕШЕНИЕ. 1) Напомним, что в задаче минимизации двух частных критериев оптимальные по Парето решения можно определять по следующему правилу. Это – такие допустимые точки поля потерь, для которых *нельзя сдвинуться на «юг», «запад» или «юго-запад»*, чтобы при этом остаться в том же множестве (см. главу 1). Множество с указанным свойством представлено в пространстве значений частных критериев точками: $\{P \cup [M, L] \cup N\}$ (т.е. это – точки P, N и отрезок $[M, L]$, включая его концы).

2) Процедура выбора наилучшего решения по методу оптимизации основного частного критерия представлена на рис. 2.2. В области допустимых решений (причем только таких, которые удовлетворяют ограничению по критерию $g^{(2)}$) наилучший показатель основного частного критерия соответствует альтернативе M (остальные точки отрезка $[N; M]$ не представляют решения, оптимальные по Парето). Итак, альтернатива M является оптимальным решением по указанному критерию.

ПРИМЕР 2.3 (продолжение). Нахождение наилучшего решения по методу оптимизации основного частного критерия (при максимизации двух критериев). Пусть в условии примера 2.2 оба частных критерия максимизируются: $g^{(1)} \rightarrow \max$, $g^{(2)} \rightarrow \max$. Множество допустимых значений этих критериев уже будет представлять не пространство издержек, а *пространство доходов*. Оставим для этого пространства прежние обозначения: $(U \times V)$, где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$ (но они относятся уже к пространству доходов). Пусть рис. 2.3, представляет графически задачу оптимизации. Указанный рисунок модифицирован применительно к формату задачи. Указанная модификация учитывает следующее. В отличие от предыдущей ситуации, именно частный критерий $g^{(2)}$ является основным. Требуется: найти множество решений, оптимальных по Парето, в формате такой задачи многокритериальной оптимизации; в указанном множестве найти наилучшее компромиссное решение по методу оптимизации основного частного критерия (ограничение g_1 для минимально требуемого значения показателя первого критерия составляет $g_1 = 46$).

РЕШЕНИЕ. 1) Если оба частных критерия *максимизируются*, то оптимальные по Парето решения будут представлены точками, которые находим по следующему правилу. Это – такие допустимые точки поля потерь, для которых для обоих частных критериев *нельзя сдвинуться на «север», «восток» или «северо-восток»*, чтобы при этом остаться в множестве допустимых альтернатив (см. главу 1). В рассматриваемом примере искомое множество точек с указанным свойством (т.е. оптимальных по Парето) представлено в пространстве доходов следующими точками: $\{C \cup [E, F]\}$ (т.е. это – точка C и отрезок $[E, F]$, включая его концы).

2) Процедура выбора наилучшего решения представлена на рис. 2.3. Легко видеть, что в области допустимых решений (причем только таких, которые удовлетворяют ограничению по первому критерию $g^{(1)}$) наилучший показатель основного частного критерия соответствует альтернативе E. Итак, альтернатива E является оптимальным решением по указанному критерию.

2.2. Метод взвешенной суммы оценок частных критериев

При таком подходе критерий выбора $F(\vec{x})$ формализуется как взвешенная сумма оценок частных критериев:

$$F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot g^{(k)}(\vec{x}).$$

Здесь c_k – вес k-го критерия, задаваемый, например, экспертами или непосредственно лицом, принимающим решение. При этом учитывается и имеющийся опыт бизнеса, и особенности частных критериев, и особенности исходной рассматриваемой задачи многокритериальной оптимизации.

Указанная функция $F(\vec{x})$ исследуется на минимум (для задач многокритериальной оптимизации, представленных в стандартном виде, когда все частных критерии минимизируются) методами высшей математики. Точка минимума функции $F(\vec{x})$ принимается в качестве оптимального решения в рамках этого подхода к решению исходной задачи. Если найденное минимальное значение критериальной функции достигается при двух или более альтернативных решениях, то в качестве оптимального может быть выбрано любое из них: все они будут оптимальными о Парето.

ПРИМЕР 2.4. Пусть в условиях примера 1.2 (см. гл.1) для нахождения наилучшего решения используется метод взвешенной суммы оценок критериев. При этом пусть оба частных критерия, по мнению экспертов или ЛПР, должны быть учтены с одинаковыми весами. Напомним, что согласно условию указанного примера в качестве частных критериев выступают следующие критерии: 1) минимизация ожидаемых годовых затрат на эксплуатацию агрегата в зависимости от выбираемой его мощности и надежности (x, y); 2) минимизация ожидаемых годовых издержек на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов.

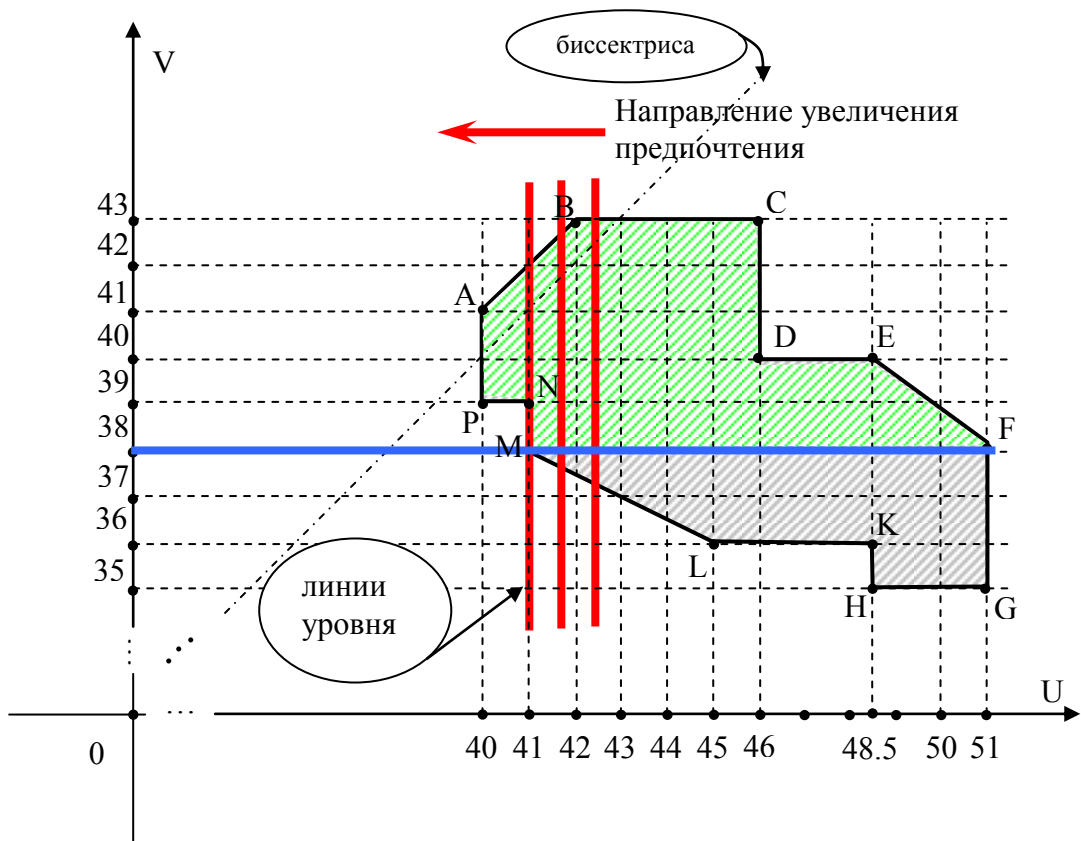


Рис. 2.2. Иллюстрация выбора наилучшего решения при минимизации двух критериев (критерий $g^{(1)}$ - основной).

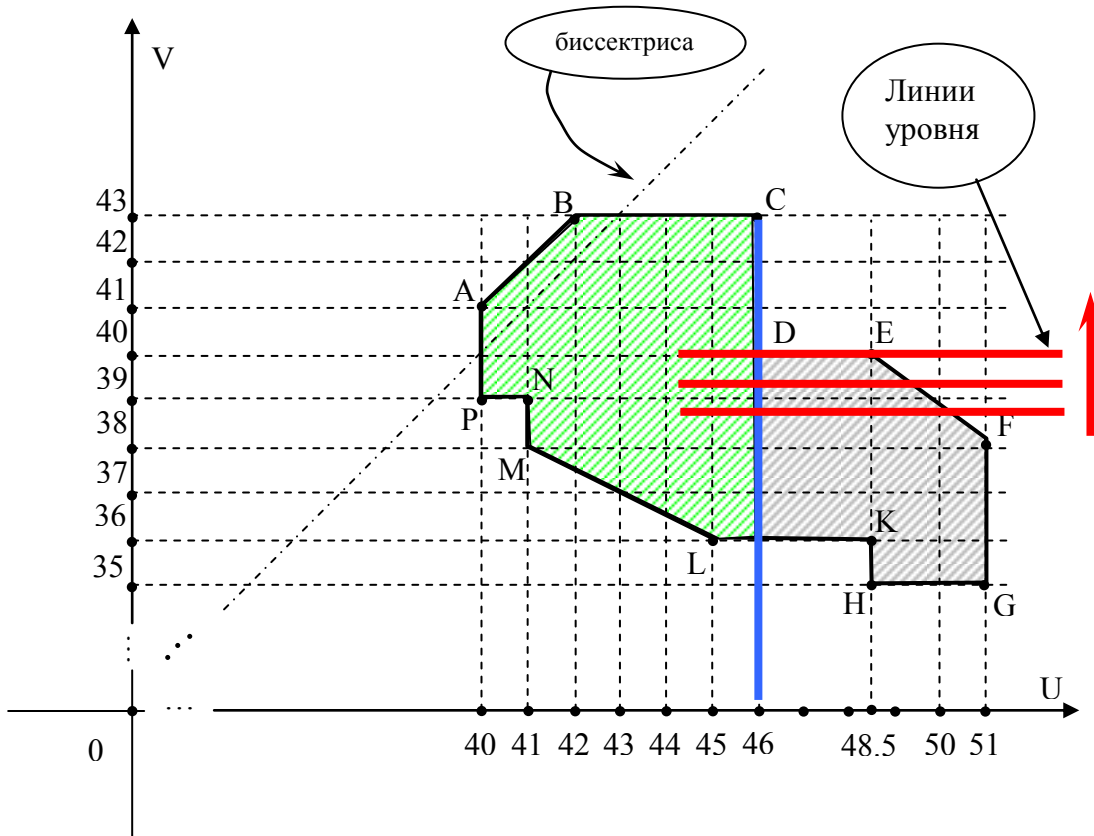


Рис. 2.3. Иллюстрация выбора наилучшего решения при максимизации двух критериев (критерий $g^{(2)}$ - основной).

Соответствующие «веса» принимаются равными между собой. Например, их можно принять равными 1 (т.е. далее принимаем, что $c_1 = c_2 = 1$), что не изменит искомого оптимального решения (x^*, y^*) .

РЕШЕНИЕ. Обратим внимание на то, что при равных весовых коэффициентах исходная задача оптимизации имеет следующую интерпретацию. Минимизируются именно суммарные ожидаемые издержки для обоих частных критериев. В соответствии с методом взвешенной суммы оценок критериев получаем следующую задачу минимизации: $\varphi(x, y) + \psi(x, y) \rightarrow \min$ или задачу

$$5 + x - 3y \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Обычными методами высшей математики легко находим оптимальное решение этой задачи. Его дает точка $x^* = 1$ и $y^* = 1$. Указанная точка принадлежит множеству оптимальных по Парето решений (см. пример 1.2). Как видим, при рассматриваемом подходе к решению исходной многокритериальной задачи оптимизации наилучшее компромиссное решение требует обеспечить максимально возможную надежность агрегата ($y^* = 1$) без планирования запаса его мощности ($x^* = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Соответствующая задача скалярной оптимизации, формализованная на основе критерия выбора (по методу взвешенной суммы частных критериев), к которой привело решение примера 2.4 (кстати, также и других примеров, которые будут рассмотрены ниже) является задачей линейного программирования с двумя переменными. Задачи такого типа можно решать, например, простейшим геометрическим методом. При этом реализуются следующие процедуры.

- В плоскости (x, y) определяется соответствующее множество X допустимых альтернативных решений (применительно к рассмотренным задачам см., в частности, пример 1.2).
- Указанное множество X далее «урезается» с учетом имеющихся ограничений.
- Кроме того, по виду целевой функции формализованного общего критерия выбора $F(x, y)$ находится

так называемый вектор-градиент $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ с координатами $\lambda_1 = dF/dx$ и $\lambda_2 = dF/dy$. В частности, в последнем рассмотренном примере 2.4 это будет следующий вектор $\vec{\lambda} = (1; -3)$.

- После этого в пространстве решений проводится так называемая опорная прямая (она перпендикулярна вектору-градиенту). Для нее ищется такое положение, при котором указанная прямая касается «урезанного» с учетом ограничений множества X . Анализируется именно та точка касания, которая соответствует наилучшему показателю линии уровня критерия выбора.

Точка касания и даст оптимальное решение задачи по методу взвешенной суммы оценок критериев. Обратим внимание на то, что при этом необходимо разделять задачи на минимум и максимум. Кроме того, необходимо учитывать, что направление вектора-градиента показывает именно направление возрастания целевой функции (при сдвиге опорной прямой в указанном направлении). Поэтому в задачах на минимум перемещение указанной опорной прямой в сторону увеличения предпочтений ЛПП соответствует ее перемещению в направлении, противоположном вектору-градиенту.

Указанные процедуры оптимизации графическим методом в формате модели примера 2.4 иллюстрирует рис. 2.4. Иллюстрацию численных процедур оптимизации представим следующим примером.

ПРИМЕР 2.5. Пусть в условиях предыдущего примера оказалось, что весовой коэффициент c_1 для первого частного критерия $g^{(1)}(\vec{x}) = \varphi(x, y)$ должен быть в три раза меньшим, чем соответствующий коэффициент c_2 для второго частного критерия $g^{(2)}(\vec{x}) = \psi(x, y)$. Например, это может быть обусловлено ожидаемыми льготными тарифами на электроэнергию. Тогда весовые коэффициенты можно задать следующим образом: $c_1 = 1$ и $c_2 = 3$. В соответствии с методом взвешенной суммы оценок частных критериев получаем следующую задачу: $\varphi(x, y) + 3\psi(x, y) \rightarrow \min$ или задачу

$$15 - x - 7y \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

В этом случае в качестве наилучшего компромиссного решения исходной многокритериальной задачи получаем точку $x^* = 2$ и $y^* = 1$. Она принадлежит множеству оптимальных по Парето решений (см. пример 1.2). Полученное решение можно прокомментировать следующим образом. Рассматриваемый подход к решению многокритериальной задачи наилучшего выбора типа агрегата требует обеспечить максимально возможную его надежность и максимально возможный запас мощности.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Теперь обратимся к формату задач многокритериальной оптимизации по методу взвешенной суммы оценок частных критериев, которые имеют дискретное множество анализируемых альтернатив. Соответственно процедуры оптимизации в формате рассматриваемого метода будут следующими.

- 1) К таблице, где для всех анализируемых альтернативных решений представлены (вдоль строк) показатели частных критериев, приписывается дополнительный столбец.
- 2) Для каждой альтернативы определяются показатели «линии уровня» критерия: это взвешенная сумма элементов каждой строки (веса определены в формате критерия и соотносятся со столбцами

- таблицы). Указанные показатели критерия выбора для конкретной альтернативы записываются в дополнительный столбец (они соотносятся с соответствующей альтернативой по строке).
- 3) Наконец, по элементам дополнительного столбца находится оптимальное альтернативное решение по методу взвешенной суммы оценок критериев: оно соответствует (по строке) именно наименьшему из всех элементов указанного дополнительного столбца.

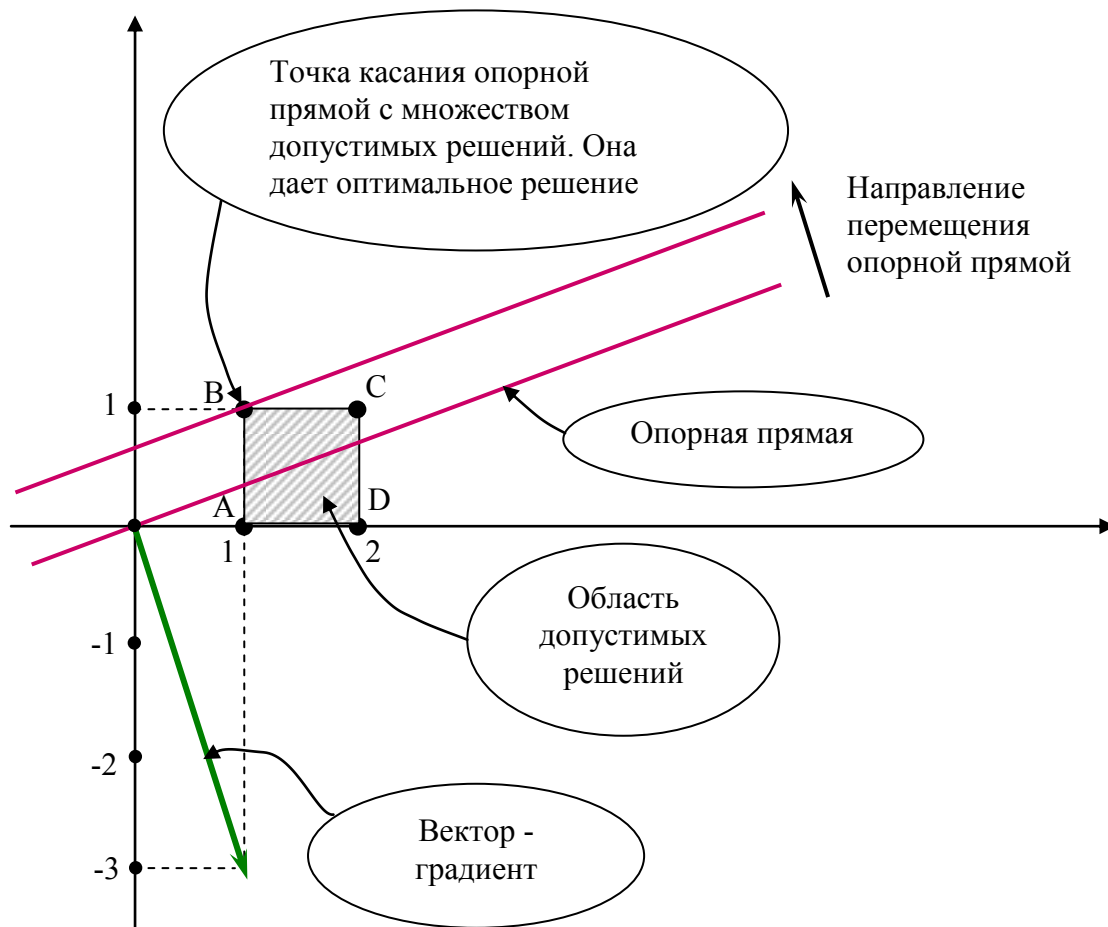


Рис. 2.4. Иллюстрация процедур оптимизации решения в формате примера 2.4.

Приведем иллюстрацию специфики определения оптимальных решений по методу взвешенной суммы оценок частных критериев применительно к задачам управления цепями поставок для случая, когда множество X допустимых альтернатив является дискретным. Вернемся к условному примеру 1.1 из главы 1.

ПРИМЕР 2.6. Анализируется ситуация, связанная с моделированием работы звена цепи поставок, когда нужно выбрать наилучший вариант организации поставок товара, причем, из семи доступных вариантов: A, B, C, D, E, F и G. Множество частных критериев в этой ситуации представлено четырьмя критериями, которые минимизируются. Оценки этих частных критериев в формате анализируемых альтернатив приведены (в тыс. у.е.) в таблице 2.4. Найдем оптимальное решение по методу взвешенной суммы оценок частных критериев. Пусть веса указанных частных критериев выбраны следующими: $c_1=1$; $c_2=1$; $c_3=0,3$ и $c_4=1$.

Таблица 2.4.

Выбор наилучшего решения по методу взвешенной суммы оценок частных критериев.

Альтернативные решения	Значения частных критериев				Показатель общего критерия
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	$\sum_{k=1}^N c_k \cdot g^{(k)}$
	$c_1=1$	$c_2=1$	$c_3=0,3$	$c_4=1$	

A	45	27	159	29	154
B	40	34	148	28	150, (6)
C	42	35	126	24	143
D	41	34	170	28	159, (6)
E	45	35	146	26	154,(3)
F	43	32	147	27	151
G	42	36	122	25	140, (6)

РЕШЕНИЕ. К таблице с показателями частных критериев уже приписан дополнительный столбец. В нем представлены показатели критерия выбора. Для удобства изложения весовые коэффициенты также представлены в ячейках таблицы с обозначениями частных критериев. По минимальному элементу дополнительного столбца (он равен $140\frac{2}{3}$ и выделен в таблице) находим оптимальное решение. Наилучшей (по методу взвешенной суммы оценок частных критериев) является альтернатива G.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Приведем иллюстрацию линий уровня критерия выбора (по методу взвешенной суммы оценок частных критериев) в пространстве издержек /потерь при минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min$, $g^{(2)} \rightarrow \min$. Линии уровня критерия представлены на рис. 2.5. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками A, B, C, D, E, F, G и H);
- весовые коэффициенты для частных критериев принимаются такими, что $c_1:c_2 = 2:1$ (например, $c_1 = 2$ и $c_2 = 1$).

На рис. 2.5 семейство линий уровня для рассматриваемого критерия выбора при многокритериальной оптимизации ($N = 2$) представляет собой семейство прямых линий. Их наклон соответствует заданным предпочтениям ЛПР к важности частных критериев. В этом легко убедиться, если учесть, что линия уровня «K» (см. главу 1) определяется следующим параметрическим ее представлением: $c_1 \cdot u + c_2 \cdot v = K$. Очевидно, что вектор-нормаль для такой линии имеет координаты $(c_1; c_2)$, что и определяет ее наклон. Указанный рисунок иллюстрирует ситуацию, когда показатель частного критерия $g^{(1)}$ принимается более важным (в два раза), чем показатель $g^{(2)}$. Направление предпочтений указано в сторону уменьшения показателя «K» критерия выбора (взвешенной суммы показателей частных критериев) в поле издержек/потерь. Легко видеть, что в ситуации, представленной на рис. 2.6, оптимальной альтернативой по указанному критерию будет альтернативное решение A.

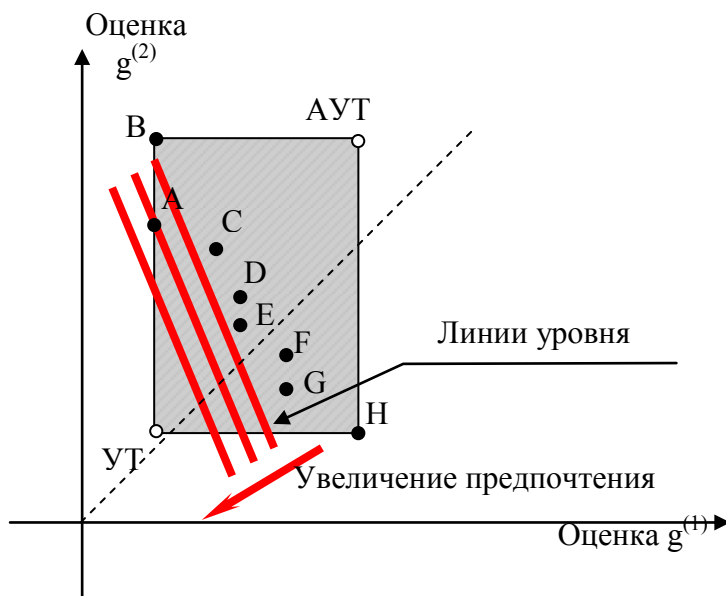


Рис. 2.5. Иллюстрация семейства линий уровня для критерия выбора по методу взвешенной суммы оценок частных критериев ($c_1: c_2 = 2:1$).

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Приведем иллюстрацию для рассмотренного критерия выбора следующим примером.

ПРИМЕР 2.7. Нахождение наилучшего решения по методу взвешенной суммы оценок частных критериев (при минимизации двух критериев). Пусть, как и в примере 2.2, минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Допустимые значения этих критериев в пространстве издержек / потерь $(U \times V)$, где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, задано графически (см. рис. 2.2 и рис. 2.6).

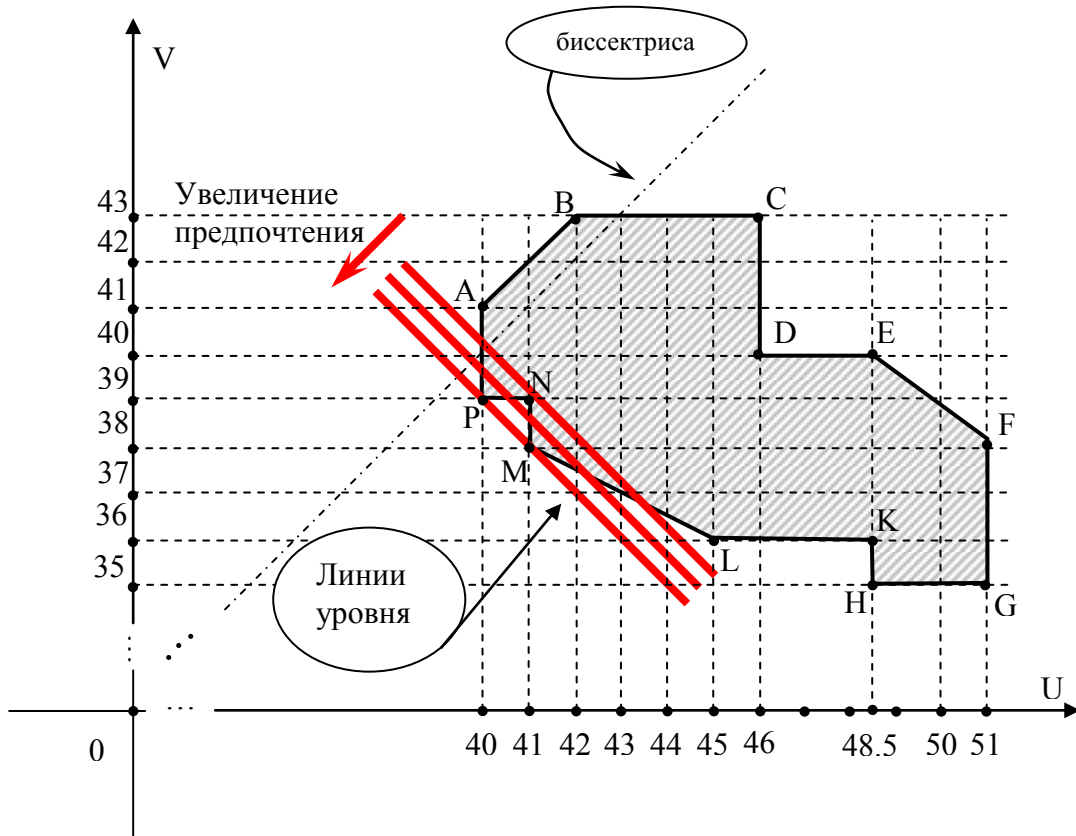


Рис. 2.6. Иллюстрация выбора наилучшего решения при минимизации двух критериев по методу взвешенной суммы оценок частных критериев.

Требуется: найти наилучшее решение по методу взвешенной суммы оценок частных критериев (веса частных критериев принимаются равными между собой).

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора наилучшей альтернативы по методу взвешенной суммы оценок частных критериев представлена на рис. 2.6. Линии уровня для рассматриваемого критерия выбора расположены под одинаковым углом к осям координат. Легко видеть, что в области допустимых альтернативных решений наилучший показатель рассматриваемого критерия выбора соответствует двум альтернативам: P и M. Для альтернативы P показатель линии уровня составляет (при весах $c_1 = c_2 = 1$): $1 \cdot 40 + 1 \cdot 39 = 79 = K_P$. Аналогично для альтернативы M имеем $1 \cdot 41 + 1 \cdot 38 = 79 = K_M$. Итак, $K_P = K_M$.

Подчеркнем, что обе указанные альтернативы являются оптимальными по Парето (иначе и не могло быть, - отметьте почему). Поэтому любая из них может быть выбрана в качестве наилучшего / оптимального решения по рассматриваемому критерию.

2.3. МИНИМАКСНЫЙ КРИТЕРИЙ

При таком подходе на основе заданных частных критериев для исходной многокритериальной задачи формируется критерий выбора $F(\vec{x})$ следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \max_{1 \leq k \leq N} \{g^{(k)}(\vec{x})\}.$$

Соответственно точка минимума этой критериальной функции $F(\vec{x})$ принимается как искомое оптимальное решение. Если найденное минимальное значение достигается при двух или более альтернативных решениях, то требуется проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 2.8. Пусть в условии примера 1.2 требуется найти наилучшее решение из множества Парето по минимаксному критерию. Тогда получаем следующую задачу: $\max \{2x - y; 5 - x - 2y\} \rightarrow \min$ при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку для точек множества Парето, как мы уже знаем, $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2), то исходная задача эквивалентна следующей: $\max \{2x - 1; 3 - x\} \rightarrow \min$ при $x \in [1; 2]$. Дополнительно отметим:

- 1) при $x = 4/3$ значения заданных частных критериев здесь совпадают;
- 2) при этом первый из них дает оценку, возрастающую с ростом x ;
- 3) второй частный критерий дает оценку, убывающую с ростом x ;

Поэтому точкой минимума этой критериальной функции в области допустимых значений будет точка $x^* = 4/3 = 1,33$. Это приводит к выбору решения $x^* = 1,33$ и $y^* = 1$. Указанное решение и будет оптимальным по минимаксному критерию. При таком подходе наилучшее решение требует обеспечить максимальную надежность и 33 % запаса мощности агрегата.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если множество анализируемых альтернатив является дискретным, то удобно использовать табличное представление задачи многокритериальной оптимизации. Соответственно процедуры оптимизации по минимаксному критерию будут следующими (*частные критерии минимизируются*).

- 1) К матрице оценок частных критериев приписывается дополнительный столбец.
- 2) В указанный столбец записывают максимальные из значений оценок частных критериев для каждого из вариантов решений (т.е. максимальные элементы по строкам таблицы).
- 3) Затем из всех элементов этого дополнительного столбца выбирается наименьший (образно говоря, «из всех зол выбирают наименьшее»).
- 4) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации.
- 5) Если наименьший показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативах, то наилучшей может быть любая из них, но только оптимальная по Парето.

ПРИМЕР 2.9. Рассмотрим ситуацию, представленную в примерах 1.1 и 2.2, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (A, B, C, D, E, F и G). Множество частных критериев задано четырьмя критериями: они минимизируются. Показатели оценок указанных частных критериев (в тыс. у.е.) для удобства изложения приведены в таблице 2.5. Требуется: найти наилучшую альтернативу по минимаксному критерию.

Таблица 2.5.

Выбор наилучшего решения по минимаксному критерию.

Альтернативные решения	Значения частных критериев				Max {g ^(k) }
	g ⁽¹⁾	g ⁽²⁾	g ⁽³⁾	g ⁽⁴⁾	
A	45	27	159	29	159
B	40	34	148	28	148
C	42	35	126	24	126
D	41	34	170	28	170
E	45	35	146	26	146
F	43	32	147	27	147
G	42	36	122	25	122

РЕШЕНИЕ. К таблице со значениями оценок частных критериев приписываем дополнительный столбец (в таблице 2.5 это – столбец «max g^(k)»). В нем записываем максимальные из значений оценок частных критериев по строкам такой таблицы (они соответствуют каждому из вариантов альтернативных решений). Среди элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 122 (выделен в таблице жирным шрифтом) и отвечает альтернативе G (по строке матрицы). В рассматриваемом случае альтернатива G принимается в качестве оптимальной по минимаксному критерию.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Приведем иллюстрации семейства линий уровня минимаксного критерия для случая задачи минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Линии уровня представлены на рис. 2.8. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками A, B, C, D, E, F, G и H);
- среди частных критериев нет такого критерия, показатели которого существенно превышали бы показатели другого частного критерия.

На рис. 2.7 семейство линий уровня для минимаксного критерия (при $N = 2$) представляет собой семейство «угловых» линий. Они вплотную загнуты к конусам предпочтений для точек, расположенных вдоль биссектрисы первого координатного угла. Такая биссектриса является направляющей для линий уровня. У линии уровня «K» (см. главу 1) обе координаты вершины соответствующего угла равны числу K. Поэтому число K и используют для идентификации конкретной линии уровня. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите самостоятельно график функции $\max\{u; v\} = K$. Направление предпочтений указано в сторону уменьшения показателя такого критерия. В ситуации, представленной на этом рисунке, оптимальной альтернативой по методу минимаксного критерия будет решение G.

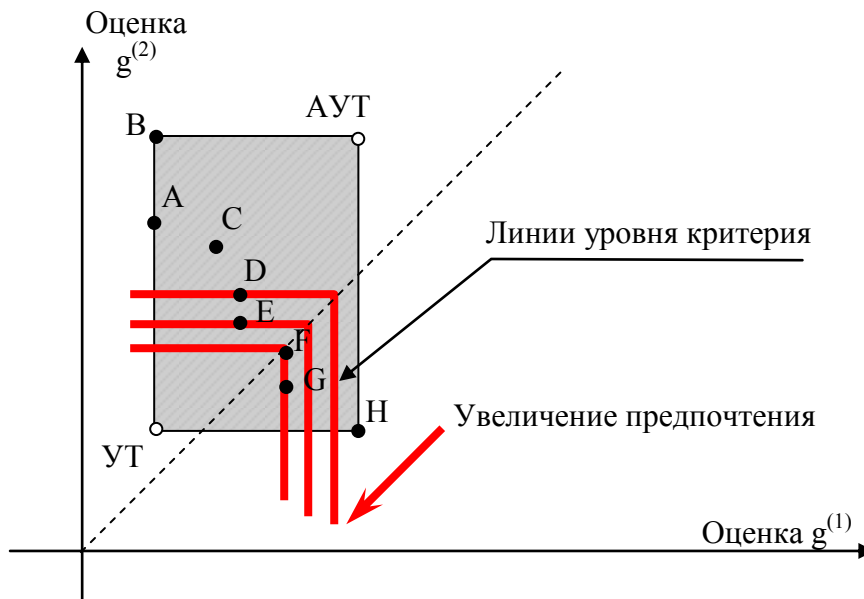


Рис. 2.7. Иллюстрация семейства линий уровня минимаксного критерия (при двух частных критериях)

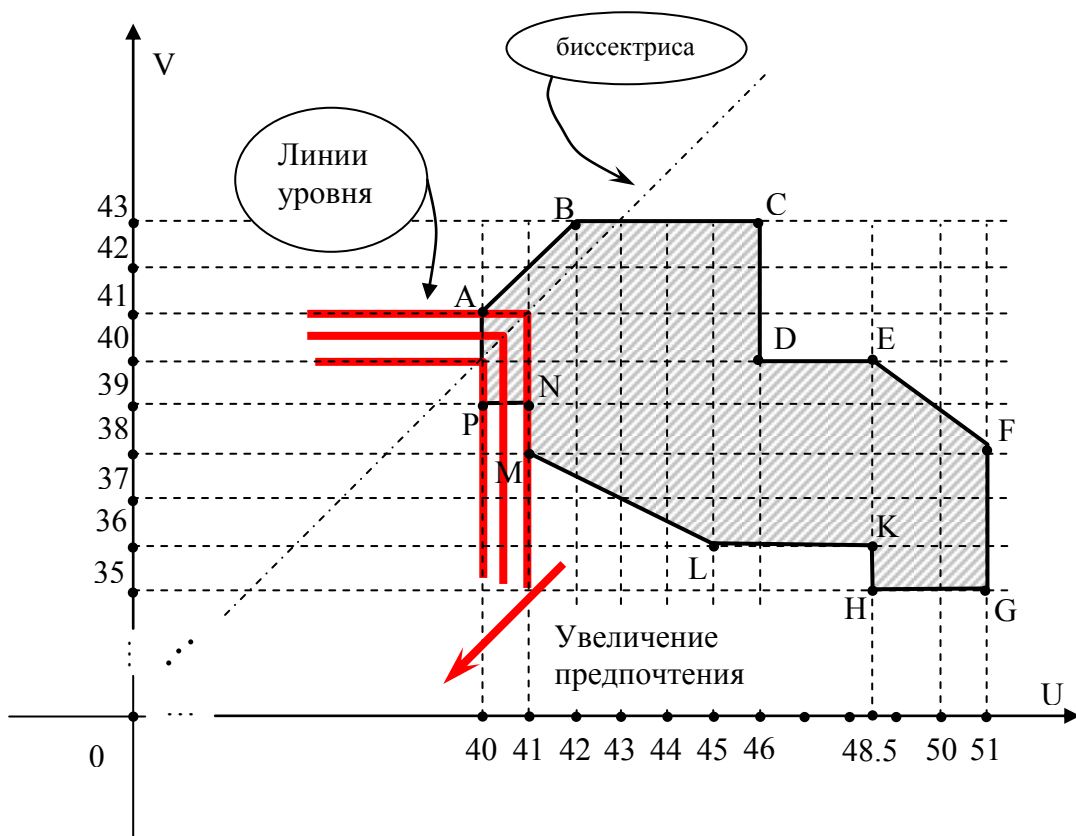


Рис. 2.8. Графическое решение задачи минимизации двух критериев
(в формате метода минимаксного критерия).

Этот рисунок иллюстрирует еще одну особенность процедур оптимизации в рамках указанного подхода. Наилучший показатель по минимаксному критерию может достигаться сразу у нескольких альтернатив (см. альтернативы G и F). Если на последнем шаге не будут учтены процедуры проверки найденного решения на оптимальность по Парето, то возможны нежелательные феномены. В качестве оптимальной альтернативы в таком случае может быть выбрано решение, не оптимальное по Парето.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Проиллюстрируем их следующим примером.

ПРИМЕР 2.10. Нахождение наилучшего решения по методу минимаксного критерия (при минимизации двух критериев). Минимизируются два частных критерия: $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь задано графически (см. рис. 2.8). Требуется: найти наилучшее решение по методу минимаксного критерия.

РЕШЕНИЕ. В рассматриваемом примере решения, оптимальные по Парето, представлены следующими точками: это – точки P, H и отрезок [M,L], включая его концы. Процедура выбора наилучшего решения по методу минимаксного критерия представлена на рис. 2.10. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель минимаксного критерия соответствует альтернативе P. Только она одна имеет лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Поэтому процедуры формализации множества решений, оптимальных по Парето можно было опустить. Итак, альтернатива P является оптимальным решением по указанному критерию.

2.4. Оптимизация в формате подхода критерия Гурвица

При формализации такого критерия выбора используется специальный метод / прием, который был разработан Л.Гурвицем применительно к решению задач другого типа: задач оптимизации решений в условиях неопределенности. В формате такого подхода имеется управляющий параметр, который позволяет менеджеру регулировать положение линий уровня критерия выбора. В этом параграфе будет проиллюстрировано, как такой подход можно использовать, чтобы позволить менеджеру более эффективно адаптировать линии уровня критерия выбора в поле издержек / потерь применительно к условиям бизнеса, специфике решаемой задачи многокритериальной оптимизации и имеющимся у ЛПР предпочтениям к оценкам частных критериев. Подчеркнем, что сегодня любой менеджер должен свободно владеть соответствующими методами и приемами. Это позволит в дальнейшем создавать соответствующие новые модификации, чтобы обеспечить такой выбор альтернативного решения при многих критериях, который действительно будет более эффективным образом соответствовать предпочтениям и требованиям ЛПР. Мы уже познакомились с подходом к решению задач многокритериальной оптимизации, когда конструируемый показатель критерия выбора учитывал для каждой альтернативы только оценку одного частного критерия, причем именно самую худшую из всех оценок (в формате ожидаемых издержек / потерь). Мы также уже познакомились с подходом к решению задач многокритериальной оптимизации, когда конструируемый показатель критерия выбора учитывал для каждой альтернативы все оценки заданных частных критериев. При этом такой учет был реализован на основе взвешенного результата оценок всех частных критериев. В конце 60-х годов прошлого столетия Л.Гурвиц предложил при конструировании показателя критерия выбора использовать / синтезировать именно две оценки особого типа. Применительно к рассматриваемой проблеме решения задач многокритериальной оптимизации (при минимизации частных критериев) это – следующие оценки:

- самая худшая / наибольшая из всех оценок заданных частных критериев (как и в формате рассмотренного выше минимаксного критерия);
- самая лучшая / наименьшая из всех оценок заданных частных критериев.

При этом конструировать результирующий показатель для рассматриваемого здесь критерия выбора по методу Гурвица требуется как взвешенный показатель на основе синтеза указанных выше двух крайних типов оценок. Эти “крайние” (самый неблагоприятный и самый благоприятный) результаты учитываются с определёнными “весами”, выбираемыми непосредственно самим ЛПР. При таком подходе их синтез позволит задавать приемлемый для ЛПР баланс для положения линий уровня в пространстве издержек / потерь (будет проиллюстрировано далее). Другими словами, при этом критерии выбора ЛПР как бы “взвешивает” для каждой альтернативы две крайние ее оценки, которые имеются по всем заданным частным критериям в формате задачи оптимизации при многих критериях. Выбирается решение, применительно к которому такая “взвешенная” или синтезированная оценка будет наименьшей (т.к. она относится к минимизируемым показателям издержек / потерь).

При таком подходе критериальная функция $F(\bar{x})$ для критерия выбора имеет вид:

$$F(\bar{x}) = c \cdot \max \{g^{(k)}(\bar{x})\} + (1-c) \cdot \min \{g^{(k)}\},$$

где максимум и минимум ищутся по всем частным критериям, а $c \in [0;1]$ – параметр, который выбирает ЛПР / менеджер (для адаптации линий уровня критерия к предпочтениям ЛПР). Соответственно точка минимума этой функции принимается как искомое оптимальное решение.

ПРИМЕР 2.11. Пусть в условии примера 1.2 для нахождения наилучшего решения из множества Парето используется модифицированный критерий выбора по методу Гурвица. Заданы два частных критерия. Оба таких критерия минимизируются (напомним их: 1) минимизация ожидаемых годовых затрат на эксплуатацию агрегата в зависимости от выбираемой его мощности и надежности; 2) минимизация ожидаемых годовых издержек на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов). В соответствии с подходом указанного критерия выбора получаем следующую задачу минимизации:

$$c \cdot \max \{2x - y; 5 - x - 2y\} + (1-c) \cdot \min \{2x - y; 5 - x - 2y\} \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Пусть для управляющего параметра «с» ЛПР, например, выбрано значение $c = 0,5$. Поскольку для точек переговорного множества Парето, как мы уже знаем, $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2), то задача минимизации при $x \in [1; 2]$ будет эквивалентна следующей:

$$c \cdot \max \{2x - 1; 3 - x\} + (1-c) \cdot \min \{2x - 1; 3 - x\} \rightarrow \min.$$

Как и при решении примера 2.8 заметим, что:

- 1) при $x = 4/3$ значения заданных частных критериев здесь совпадают;
- 2) при этом первый из них дает оценку, возрастающую с ростом x ;
- 3) второй частный критерий дает оценку, убывающую с ростом x ;

Поэтому в случае, когда $c = 0,5$, точкой минимума указанной критериальной функции в области допустимых значений будет точка $x^* = 1$. Это приводит к выбору решения $x^* = 1$ и $y^* = 1$. Указанное решение и будет оптимальным по критерию выбора на основе метода Гурвица. При таком подходе наилучшее решение требует обеспечить максимальную надежность без запаса мощности агрегата.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. В такой ситуации используют табличное представление задачи многокритериальной оптимизации. Укажем для такого случая требуемые процедуры оптимизации в формате критерия выбора по методу Гурвица.

- 1) К таблице оценок частных критериев приписывается три дополнительных столбца.
- 2) В первый записывают максимальные (наихудшие в формате задачи оптимизации) из значений оценок частных критериев для каждого из вариантов решений (т.е. максимальные элементы по строкам таблицы с оценками частных критериев).
- 3) Во второй записывают наименьшие (наилучшие в формате задачи оптимизации) из значений оценок частных критериев для каждого из вариантов решений (т.е. минимальные элементы по строкам таблицы с оценками частных критериев).
- 4) В третий записывают средневзвешенный результат для элементов первых двух вспомогательных столбцов с «весами» c и $(1 - c)$. Весовой коэффициент c выбирается ЛПР из множества $c \in [0; 1]$; он соотносится именно с тем вспомогательным столбцом, в котором записаны наихудшие из показателей частных критериев (для анализируемых альтернатив).
- 5) Затем из всех элементов указанного третьего дополнительного столбца выбирается наименьший, поскольку показатели оценок относятся к полю издержек/потерь.
- 6) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу третьего дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации частных критериев.

ПРИМЕР 2.12. Вернемся к ситуации примеров 1.1 и 2.2: необходимо выбрать наилучший вариант из семи допустимых альтернативных вариантов (А, В, С, D, E, F и G). При этом множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями: все они минимизируются. Показатели указанных частных критериев заданы (например, в тыс. у.е.) и для удобства изложения приведены в таблице 2.6. Требуется: найти наилучшую альтернативу по методу Гурвица, приняв для «с» значение $c = 0,5$.

Таблица 2.6.
Выбор на основе критерия Гурвица.

Альтернативные решения	Значения частных критериев				Max $\{g^{(k)}\}$	Min $\{g^{(k)}\}$	Показатель критерия выбора
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$			
A	45	27	159	29	159	27	186/2
B	40	34	148	28	148	28	176/2
C	42	35	126	24	126	24	150/2
D	41	34	170	28	170	28	198/2
E	45	35	146	26	146	26	172/2
F	43	32	147	27	147	27	174/2

G	42	36	122	25		122	25	147/2
---	----	----	-----	----	--	-----	----	-------

РЕШЕНИЕ. К матрице значений частных критериев приписываем три дополнительных столбца (в таблице 2.6 это – столбцы « $\max g^{(k)}$ », « $\min g^{(k)}$ » и последний). В первый столбец записываем максимальные из значений оценок частных критериев по строкам таблицы. Во второй записываем минимальные из значений оценок частных критериев по строкам такой таблицы. В последний третий столбец записываем взвешенные показатели первых двух вспомогательных столбцов с заданными весами (0,5 и 0,5). Среди элементов этого дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 147/2 (выделен в таблице) и отвечает альтернативе G (по строке матрицы). Альтернатива G принимается в качестве оптимальной.

Возможность адаптации параметра «С» для конкретного ЛПР в рамках критерия выбора по методу Гурвица. Зная выбор ЛПР применительно к определённой задаче оптимизации при многих критериях, можно оценивать для него допустимые значения параметра «С». Такой подход позволяет уточнять (по результатам имевших место результатов выбора решений) характер линий уровня критерия.

Графическая интерпретация и линии уровня критерия. Специфика линий уровня - следующая. Это - семейство линий, каждая из которых составлена из двух отрезков прямых. Эти отрезки соединены на биссектрисе первого координатного угла. Они либо «загнуты» под одинаковым острым углом к границе конуса предпочтения (случай, когда ЛПР выбирает значение $0,5 < c < 1$), либо «загнуты» под одинаковым острым углом к границе антиконуса (случай, когда ЛПР выбирает значение $0 < c < 0,5$). При этом направляющая для системы указанных линий совпадает с биссектрисой первого координатного угла. Кроме того, для линии уровня «К» обе координаты соответствующей «угловой» точки равны К («угловая» точка, т.е. вершина соответствующего угла, лежит на указанной биссектрисе). Поэтому число К может использоваться для идентификации такой линии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите график функции

$$c \cdot \text{Max} \{u, v\} + (1-c) \cdot \text{Min} \{u, v\} = K$$

(при различных значениях c из интервала $[0; 1]$).

Приведем иллюстрации семейства линий уровня минимаксного критерия в пространстве издержек / потерь для случая задачи минимизации двух критериев ($N = 2$): $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Соответствующие линии уровня указанного критерия представлены на рис. 2.9 - 2.10 при разных значениях управляющего параметра «С». Эти рисунки соотносятся со случаями, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и H);
- для параметра c выбираются различные значения: $c = 0,7$; $c = 0,2$.

Указанные рисунки иллюстрируют, что решение задачи нахождения оптимального решения на основе указанного критерия в ситуации $N = 2$ имеет следующую графическую интерпретацию.

Пусть вдоль биссектрисы первого координатного угла передвигается специальный инструмент. Этот инструмент представляет собой угол, вершина которого лежит на указанной биссектрисе, а стороны идут под одинаковым углом к границам конуса предпочтений. Движение осуществляется в направлении увеличения показателя критерия выбора, т.е. от начала системы координат в сторону поля потерь. Тогда первая (из анализируемых) точка в поле потерь, которую «захватит» этот инструмент при указанном движении, как раз и будет соответствовать оптимальному выбору по этому методу.

ЗАМЕЧАНИЕ. В рамках рассматриваемого модифицированного критерия выбора никаких теоретических рекомендаций по выбору «весов» c и $(1-c)$ не даётся. Этот выбор остаётся непосредственно за ЛПР, позволяя ему реализовать своё отношение к результатам оценок альтернатив по частным критериям исходя из своих собственных предпочтений. Указанную особенность следует относить к достоинствам этого критерия. Возможность выбора «с» даёт менеджеру дополнительный управляющий параметр для адаптации линий уровня критерия выбора применительно к предпочтениям ЛПР.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Представленный аппарат линий уровня для модифицированного критерия выбора по Гурвицу также можно использовать для нахождения наилучших решений (по указанному критерию), если они формализованы в графическом представлении. Проиллюстрируем это на примерах, которые уже были использованы ранее, при различных вариантах выбора весовых коэффициентов «С».

ПРИМЕР 2.13. Нахождение наилучшего решения по методу Гурвица при $c = 0,8$ (для минимизация двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь $(U \times V)$, где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, задано графически (см. рис. 2.11). Требуется: найти наилучшее решение по методу минимаксного критерия, выбрав $c = 0,8$.

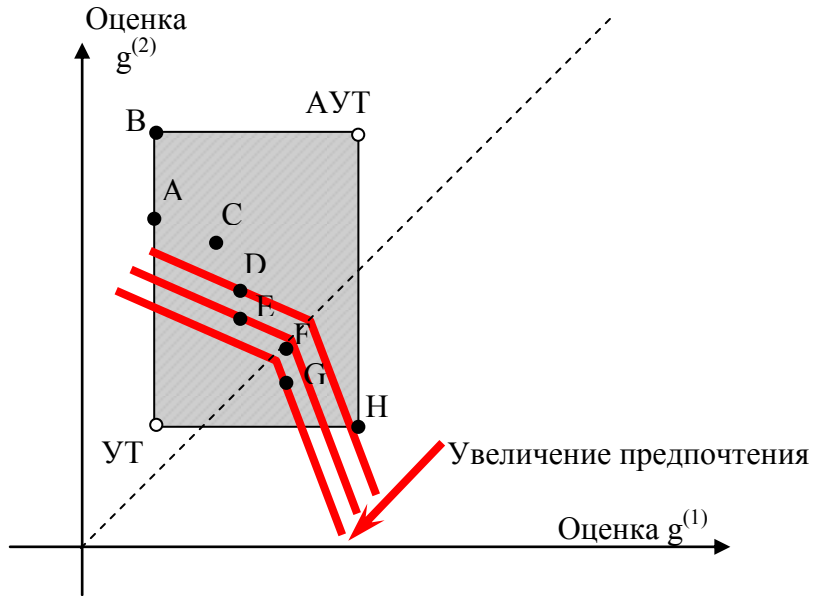


Рис. 2.9. Иллюстрация семейства линий уровня модифицированного критерия выбора по Гурвицу (при $c = 0,7$ выбирается альтернатива G).

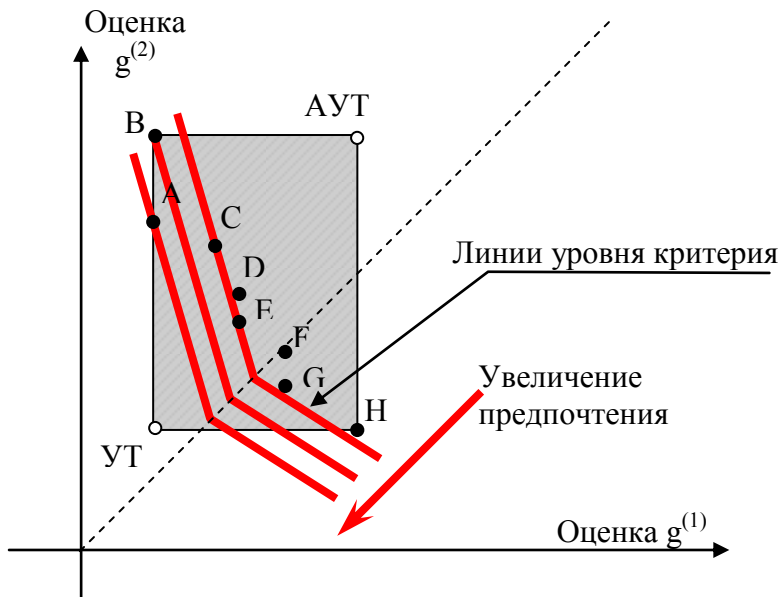


Рис. 2.10. Иллюстрация семейства линий уровня модифицированного критерия выбора по Гурвицу (при $c = 0,2$ выбирается альтернатива A).

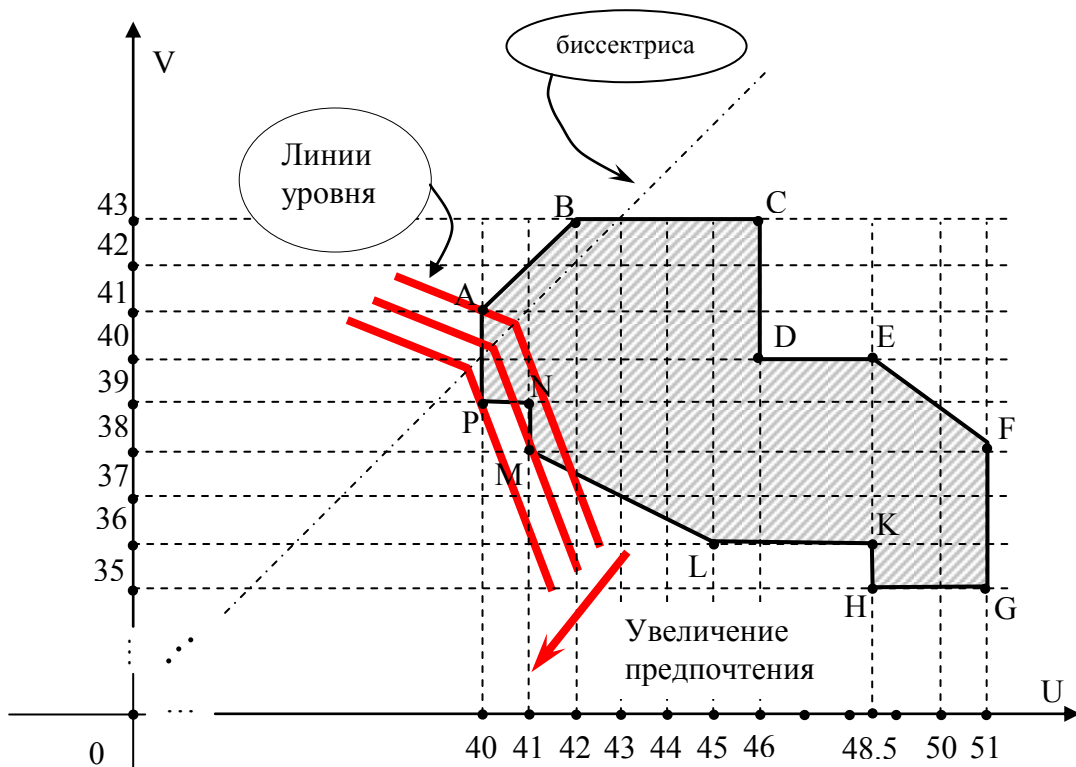


Рис. 2.11. Графическое представление задачи минимизации двух критериев (в формате метода Гурвица при $c = 0,8$).

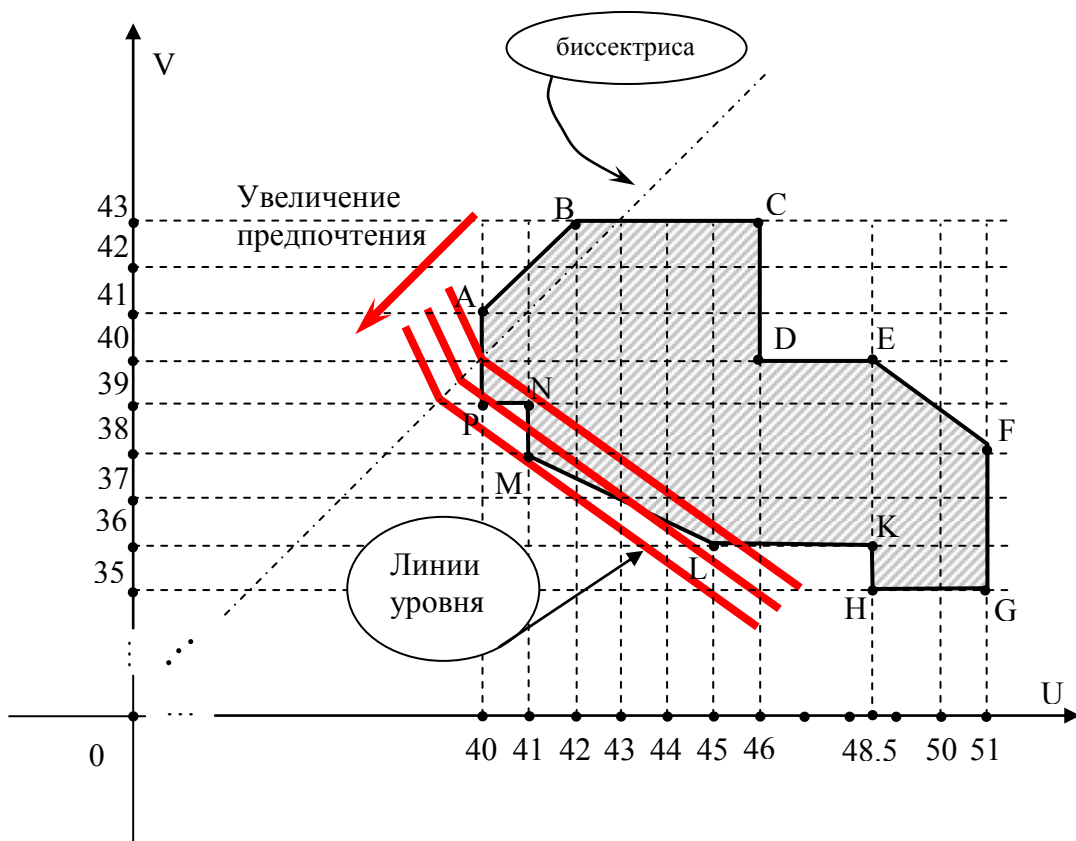


Рис. 2.12. Графическое представление задачи минимизации двух критериев (в формате метода Гурвица при $c = 0,4$).

РЕШЕНИЕ. Напомним, что в рассматриваемом примере множество решений, оптимальных по Парето, представлено в пространстве издержек / потерь следующими точками: это – точки Р, Н и отрезок [М, L], включая его концы. Процедура выбора наилучшего решения по методу Гурвица при $c = 0,8$ представлена на рис. 2.11. В области допустимых решений наилучший показатель критерия выбора соответствует альтернативе Р. Кстати, только она одна имеет лучший показатель. Поэтому процедуры идентификации на оптимальность по Парето можно опустить. При $c = 0,8$ альтернатива Р является оптимальным решением по методу Гурвица.

ПРИМЕР 2.14. Нахождение наилучшего решения по методу Гурвица при $c = 0,4$ (для минимизации двух критериев). Пусть, как и в предыдущем примере, снова минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев, задано, как и в предыдущем примере, на рис. 2.12. Требуется: найти наилучшее решение по методу минимаксного критерия при $c = 0,4$.

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора наилучшего решения по методу Гурвица при $c = 0,4$ представлена на рис. 2.13. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель критерия выбора по Гурвицу соответствует альтернативе М. В этой ситуации, только она одна имеет лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Поэтому процедуры формализации множества решений, оптимальных по Парето также можно опустить. При $c = 0,4$ альтернатива М является оптимальным решением по указанному критерию.

Обратим внимание на то, что в случае $c = 0,25$ оптимальным решением по указанному критерию является альтернатива L. В такой ситуации незначительное отклонение наклона линий уровня может изменить выбор. Поэтому следует уточнять показатели «К» линий уровня для альтернатив, представленных точками М, L и Н. В формате рассматриваемого критерия эти показатели надо определять по следующей формуле: $c \cdot \max\{u; v\} + (1-c) \cdot \min\{u; v\}$. Для точки М при $c = 0,25$ этот показатель равен $K_M = 41 \cdot 0,25 + 38 \cdot 0,75 = 38,75$. Для точки L этот показатель равен $K_L = 45 \cdot 0,25 + 36 \cdot 0,75 = 38,25$. Для точки Н этот показатель равен $K_H = 48,5 \cdot 0,25 + 35 \cdot 0,75 = 38,375$. Поскольку показатель для точки L является наименьшим, то она и представляет оптимальную альтернативу в формате метода Гурвица при $c = 0,25$.

ВОПРОСЫ (по материалам главы 2).

1. Какие специфические особенности присущи методу оптимизации по основному частному критерию? В частности, отметьте: всегда ли в формате такого критерия гарантируется выбор оптимальной по Парето альтернативы; какие параметры необходимо задать менеджеру для реализации этого метода.
2. Укажите атрибуты соответствующих процедур решения задач многокритериальной оптимизации для систем логистики по методу взвешенной суммы оценок частных критериев. Какие параметры требуется знать менеджеру для реализации такого подхода к оптимизации?
3. Требуется ли идентификация выбираемого по этому методу (взвешенной суммы оценок частных критериев) решения на оптимальность по Парето?
4. Каким образом формализуется критериальная функция выбора оптимального решения при многих критериях в формате минимаксного критерия?
5. Какова специфика линий уровня минимаксного критерия в соответствующем поле издержек/потерь при минимизации частных критериев (минимизации логистических издержек)?
6. Всегда ли выбираемое по этому критерию решение будет оптимальным по Парето? Какие процедуры должны быть завершающими в формате указанного критерия выбора?
7. Уточните атрибуты процедур оптимизации многокритериальных решений по методу Гурвица. Кто задает или выбирает значения управляющего параметра «с» в формате такого подхода к оптимизации? Как можно интерпретировать значение этого параметра?
8. Какие возможности имеются у менеджера для адаптации параметра «с» к предпочтениям ЛПР? Как можно ими воспользоваться для реализации более адекватного выбора?
9. Какие особенности линий уровня критерия выбора по методу Гурвица в пространстве издержек/потерь присущи только этому критерию?
10. При каких значениях параметра «с» можно утверждать, что выбираемое (в формате процедур многокритериальной оптимизации по методу Гурвица) решение всегда будет оптимальным по Парето?

ГЛАВА 3

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ В ФОРМАТЕ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ЛОГИСТИКИ

3.1. Метод последовательных уступок

Суть такого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации можно представить следующим образом. Прежде всего, отметим, что метод последовательных уступок применяется при решении многокритериальных задач оптимизации в случае, когда заданные частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывающей важности. Пусть $g^{(1)}(\vec{x})$ – наиболее важный, ..., $g^{(N)}(\vec{x})$ – наименее важный среди всех N рассматриваемых частных критериев. Считаем, что такое упорядочение частных критериев в задаче многокритериальной оптимизации уже имеет место. Тогда реализация указанного метода (при минимизации частных критериев) предполагает выполнение следующих этапов.

I. На первом этапе решается однокритериальная задача для первого наиболее важного частного критерия:

$$g^{(1)}(\vec{x}) \rightarrow \min$$

при условии $\vec{x} \in X$.

Пусть $g_{\min}^{(1)}$ – минимальное значение целевой функции для такой однокритериальной задачи скалярной оптимизации, которая будет решена на первом этапе. Чтобы перейти ко второму этапу, предварительно, исходя из практических соображений и специфики задачи, исходя из имеющегося опыта бизнеса и отношения ЛПР к важности частных критериев, им назначается некоторая уступка Δ_1 ($\Delta_1 > 0$). Это – уступка, которую ЛПР считает возможным допустить в рамках процедур оптимизации по этому методу применительно к оценке по первому частному критерию $g^{(1)}(\vec{x})$ (т.е. по отношению к уже найденному значению $g_{\min}^{(1)}$). Учет такой уступки позволит перейти ко второму этапу – минимизации следующего по важности частного критерия. В формате процедур следующего шага на допустимые оценки по частному критерию $g^{(1)}(\vec{x})$ будет наложено ограничение: можно будет рассматривать только те альтернативы, для которых такая оценка не будет превышать допустимой предельной величины $g_{\min}^{(1)} + \Delta_1$ (здесь и только здесь учитывается назначенная уступка Δ_1).

II. На втором этапе метода последовательных уступок ищется решение, которое минимизирует второй (по важности) частный критерий $g^{(2)}(\vec{x})$, причем с учетом указанного ограничения на $g^{(1)}(\vec{x})$ и с учетом исходно заданного множества X допустимых решений. Другими словами, решается следующая однокритериальная (скалярная) задача:

$$g^{(2)}(\vec{x}) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g^{(1)}(\vec{x}) \leq g_{\min}^{(1)} + \Delta_1, \\ \vec{x} \in X \end{cases}$$

Пусть $g_{\min}^{(2)}$ – минимальное значение целевой функции для такой однокритериальной задачи, которая будет решена на втором этапе. Чтобы перейти к третьему этапу, предварительно, исходя из специфики задачи, исходя из имеющегося опыта бизнеса и отношения ЛПР к важности частных критериев, им снова назначается некоторая уступка Δ_2 ($\Delta_2 > 0$). Это – уступка, которую можно допустить в рамках процедур оптимизации по этому методу применительно к оценке по второму частному критерию $g^{(2)}(\vec{x})$ (т.е. по отношению к уже найденному значению $g_{\min}^{(2)}$). Учет такой уступки позволит перейти к третьему этапу – минимизации следующего по важности частного критерия. В формате процедур второго шага на допустимые оценки по частному критерию $g^{(2)}(\vec{x})$ будет дополнительно наложено ограничение, согласно которому можно будет рассматривать только те альтернативные решения, для которых такая оценка не будет превышать допустимой предельной величины с учетом сделанной уступки на этом шаге (в формате задач минимизации): $g_{\min}^{(2)} + \Delta_2$ (именно здесь и только здесь учитывается назначенная уступка Δ_2 ; она фактически устанавливает верхний предел для допустимых значений оценок по второму частному критерию в формате процедур оптимизации).

Подчеркнем, что на следующем этапе метода будет решаться однокритериальная задача

$$g^{(2)}(\vec{x}) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g^{(1)}(\bar{x}) \leq g_{\min}^1 + \Delta_1, \\ g^{(2)}(\bar{x}) \leq g_{\min}^2 + \Delta_2, \\ \bar{x} \in X \end{cases}$$

И т.д.

III. Аналогичные процедуры реализуются на всех последующих этапах этого метода. В частности, на k-ом этапе решается соответствующая однокритериальная задача для k-го по важности частного критерия с учетом заданного множества X допустимых решений и всех ранее наложенных ограничений. К таким ограничениям на этом шаге добавляется еще одно. Это - требование, согласно которому оценка для частного критерия $g^{(k-1)}$, который исследовался на минимум на предыдущем (k-1)-ом этапе, не должна превышать максимально допустимой величины $g_{\min}^{(k-1)} + \Delta_{k-1}$. Здесь $g_{\min}^{(k-1)}$ - минимальное значение целевой функции предыдущего (k-1)-го этапа, а Δ_{k-1} - соответствующая уступка ($\Delta_{k-1} > 0$), которую задает ЛПР в качестве допустимой по отношению к найденному значению $g_{\min}^{(k-1)}$, чтобы перейти к следующему k-му этапу реализации метода. Соответственно на k-ом этапе, решается задача минимизации:

$$g^{(k)}(\bar{x}) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g^{(1)}(\bar{x}) \leq g_{\min}^{(1)} + \Delta_1, \\ g^{(2)}(\bar{x}) \leq g_{\min}^{(2)} + \Delta_2, \\ \dots\dots\dots \\ g^{(k-1)}(\bar{x}) \leq g_{\min}^{(k-1)} + \Delta_{k-1}, \\ \bar{x} \in X \end{cases}$$

IV. Если на последнем этапе метода окажется, что минимальное значение критериальной функции достигается при двух или более альтернативах, то в качестве оптимальной может быть выбрана любая из них, но которая будет оптимальной по Парето.

Для многокритериальной задачи с N частными критериями требуется последовательно реализовать N указанных этапов. Решение, получаемое на последнем этапе, принимается в качестве наилучшего решения исходной многокритериальной задачи оптимизации в рамках этого метода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод последовательных уступок может приводить к решениям, не принадлежащим множеству решений, оптимальных по Парето. Менеджер должен понимать, что процедуры метода необходимо завершать проверкой выбранного решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 3.1. Пусть в условии примера 1.2 для нахождения наилучшего решения используется метод последовательных уступок. В качестве наиболее важного критерия принят критерий $g^{(1)}$, для которого $g^{(1)}(x, y) = \varphi(x, y) = 2x - y$. Вторым по важности - критерий $g^{(2)}$, для которого $g^{(2)}(x, y) = \psi(x, y) = 5 - x - 2y$. Уступка Δ_1 будет оговорена в процессе решения. Требуется реализовать процедуры метода.

РЕШЕНИЕ. I. На первом этапе решаем задачу минимизации наиболее важного критерия:

$$2x - y \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Точкой минимума (x_0, y_0) функции $\varphi(x, y)$ в области $X = \{x \in [1; 2] \cap y \in [0; 1]\}$ является точка $x_0=1$ и $y_0=1$. Минимальное значение для показателя первого частного критерия в заданной области решений составляет $g_{\min}^{(1)} = \varphi(1, 1) = 1$. Чтобы перейти к следующему шагу учтем требуемую уступку. Пусть допустимая уступка Δ_1 по первому критерию принята равной 0,3 (уступка в 30 %). Тогда при переходе к следующему этапу метода на критерий $g^{(1)}(x, y) = \varphi(x, y)$ будет наложено ограничение: $\varphi(x, y) \leq 1,3$ (т.е. оценка по этому критерию не должна превышать $\varphi(1, 1) + \Delta_1 = 1,3$). Теперь можно перейти к следующему этапу метода. Процедуры оптимизации представлены на рис. 3.1.

II. На втором этапе ищем решение, которое минимизирует второй частный критерий с учетом исходного ограничения и ограничения, заданного на первом шаге: $5 - x - 2y \rightarrow \min$ при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y \leq 1,3; \\ x \in [1;2]; y \in [0;1] \end{array} \right\}.$$

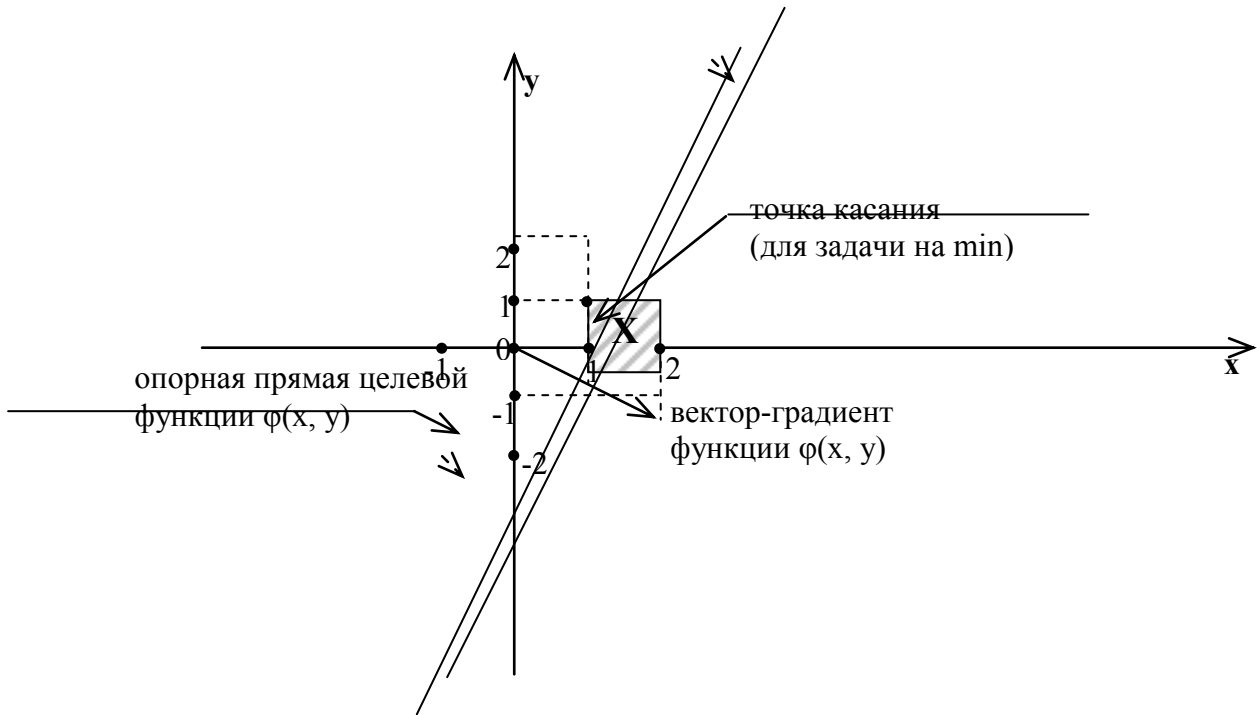


Рис. 3.1. Иллюстрация оптимизации первого частного критерия (формат процедур метода уступок)

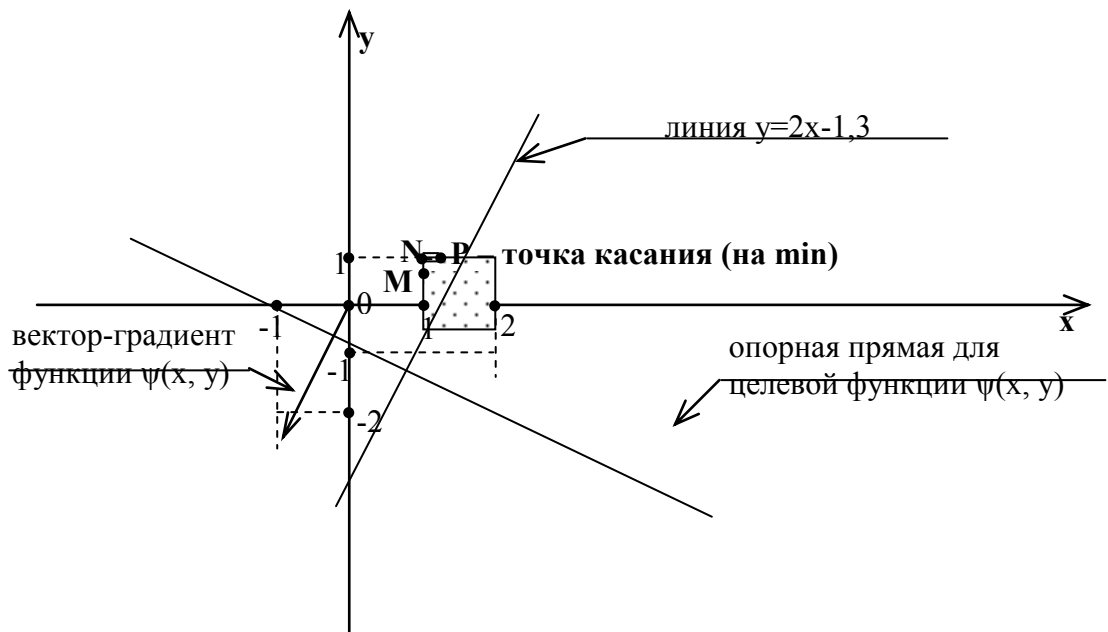


Рис. 3.2. Иллюстрация процедур выбора оптимального решения по методу уступок.

Преобразуем систему ограничений:

$$\begin{cases} y \geq 2x - 1,3; \\ x \in [1;2]; y \in [0;1] \end{cases}$$

Соответствующая область ограничений и графическая интерпретация процедур оптимизации для этой задачи скалярной оптимизации представлена на рис. 3.2. Область ограничений в этой задаче линейного программирования представляет собой треугольник MNP (он заштрихован на указанном рисунке). При этом

вектор-градиент для функции $\Psi(x, y)$ определяется равенством $\vec{\lambda} = (-1; -2)$. Он представлен на указанном рисунке. Представлена и опорная прямая (она перпендикулярна вектору-градиенту). Точкой касания опорной прямой с треугольником MNP (при движении такой прямой в направлении, противоположном вектору-градиенту) будет точка P. Ее координаты дают решение системы уравнений:

а) уравнения линии $y=2x-1,3$;

б) уравнения линии $y=1$.

Решая указанную систему находим оптимальное решение: это - точка P с координатами $x_p=1,15$ и $y_p=1$. Метод последовательных уступок в данной ситуации приводит к решению $x^*=1,15$ и $y^*=1$, которое применительно к постановке задачи означает, что при выборе агрегата необходимо обеспечить именно максимальную его надежность и соответственно 15%-ый запас мощности агрегата. Отметим, кстати, что в данном случае метод последовательных уступок привел к решению из множества Парето.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Теперь обратимся к формату задач многокритериальной оптимизации по методу уступок, которые имеют дискретное множество анализируемых альтернатив. В этом случае при реализации процедур метода менеджеру удобнее использовать табличный подход. Соответственно процедуры оптимизации будут следующими.

- 4) Сначала в формате таблицы, где для всех анализируемых альтернативных решений представлены (вдоль строк) оценки частных критериев, выделяется столбец, который соответствует оценкам наиболее важного критерия. Пусть это будет, например, первый столбец.
- 5) Затем в соответствии с первым шагом алгоритма формализованного критерия выбора по методу уступок находится минимальный элемент такого выделенного (первого) столбца.
- 6) Далее, чтобы перейти ко второму шагу процедур оптимизации, ЛПР формализует требуемую форматом метода уступку Δ_1 и тем самым устанавливает максимально допустимое значение оценки по первому частному критерию для анализируемых альтернативных решений.
- 7) На следующем шаге метода из таблицы удаляются все альтернативы, для которых оценка по первому частному критерию не удовлетворяет установленным ограничениям (это обеспечивает выполнение системы ограничений на втором шаге процедур оптимизации).
- 8) Далее на этом втором шаге в соответствии с требованиями алгоритма формализованного критерия выбора по методу уступок находится минимальный элемент следующего по важности (например, второго) частного критерия - элемент соответствующего столбца.
- 9) Чтобы перейти к следующему (третьему) шагу процедур оптимизации, ЛПР формализует требуемую форматом метода уступку Δ_2 и тем самым устанавливает максимально допустимое значение оценок по второму частному критерию для анализируемых альтернативных решений. При переходе к следующему шагу метода из таблицы удаляются все такие альтернативы, для которых оценка по второму частному критерию не удовлетворяет установленным ЛПР ограничениям (это обеспечивает выполнение системы ограничений на следующем шаге процедур оптимизации). И т.д.
- 10) Наконец, на последнем шаге по элементам последнего рассмотренного столбца находится оптимальное альтернативное решение по методу уступок: оно соответствует (по строке) именно наименьшему из всех элементов указанного столбца.

Для иллюстрации метода уступок вернемся к условному примеру 1.1 из главы 1.

ПРИМЕР 3.2. Анализируется ситуация, когда нужно выбрать наилучший вариант организации поставок товара, причем, из семи доступных вариантов: А, В, С, D, E, F и G. Множество частных критериев представлено четырьмя критериями. Их оценки (в тыс. у.е.) приведены в таблице 3.1. Найдем оптимальное решение по методу уступок. Считаем, что критерии уже упорядочены в порядке убывания их важности для ЛПР. Уступки будем уточнять и комментировать по ходу решения.

Таблица 3.1.
Оценки частных критериев (для процедур оптимизации первого этапа).

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

РЕШЕНИЕ. Из таблицы 3.1 видим, что в столбце с показателями первого частного критерия минимальный элемент составляет 40: $g_{\min}^{(1)} = 40$. Пусть на первом этапе назначена уступка $\Delta_1 = 3$. Тогда на втором этапе будут рассматриваться только те альтернативные решения, для которых оценка первого частного критерия не будет превосходить показателя 43 ($g_{\min}^{(1)} + \Delta_1 = 43$). Поэтому для реализации второго этапа метода сначала будут удалены альтернативы А и Е (их оценки по первому частному критерию не удовлетворяют требуемым ограничениям). Результат представлен в таблице 3.2.

Таблица 3.2.

Оценки частных критериев (процедуры оптимизации второго этапа).
Значения частных критериев

Альтернативные решения	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
В	40	34	148	28
С	42	35	126	24
Д	41	34	170	28
Е	43	32	147	27
Г	42	36	122	25

Для «урезанной» таблицы 3.2 (после удаления альтернатив А и Е) в столбце с показателями второго частного критерия (он принят вторым по важности) минимальный элемент составляет 32: $g_{\min}^{(2)} = 32$. Пусть на этом этапе назначена уступка $\Delta_2 = 3$. Соответственно на третьем этапе будут рассматриваться только те альтернативы, для которых:

- оценка первого частного критерия не будет превосходить 43 ($g_{\min}^{(1)} + \Delta_1 = 43$);
- оценка второго частного критерия не будет превосходить 35 ($g_{\min}^{(2)} + \Delta_2 = 35$).

Поэтому для реализации третьего этапа сначала будет удалена альтернатива Г (ее показатель по второму частному критерию не удовлетворяет требуемым ограничениям). Результат представлен в таблице 3.3.

Таблица 3.3.

Оценки частных критериев (процедуры оптимизации третьего этапа).
Значения частных критериев

Альтернативные решения	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
В	40	34	148	28
С	42	35	126	24
Д	41	34	170	28
Е	43	32	147	27

Для новой «урезанной» таблицы 3.3 в столбце с показателями третьего частного критерия минимальный элемент составляет 126: $g_{\min}^{(3)} = 126$. Пусть на этом шаге назначена уступка $\Delta_3 = 14$ (чтобы перейти к процедурам оптимизации на четвертом этапе). Соответственно на последнем этапе будут рассматриваться только те альтернативные решения, для которых:

- оценка первого частного критерия не будет превосходить 43 ($g_{\min}^{(1)} + \Delta_1 = 43$);
- оценка второго частного критерия не будет превосходить 35 ($g_{\min}^{(2)} + \Delta_2 = 35$);
- оценка третьего частного критерия не будет превосходить 140 ($g_{\min}^{(3)} + \Delta_3 = 140$).

На четвертом этапе будут удалены альтернативы В, Д и Е (их показатели по третьему частному критерию не удовлетворяют ограничениям). Останется одна альтернатива С. Она и будет принята в качестве наилучшей альтернативы по методу уступок.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Приведем иллюстрацию семейства линий уровня рассматриваемого критерия (по методу уступок) в пространстве издержек/потерь при минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min$, $g^{(2)} \rightarrow \min$. Линии уровня указанного критерия представлены на рис. 3.3. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество альтернатив является дискретным (точки А, В, С, D, E, F, G и Н);
- в качестве наиболее важного частного критерия принят критерий $g^{(2)}$;
- уступка Δ_2 не позволяет рассматривать на втором шаге оптимизации альтернативы А, В и С.

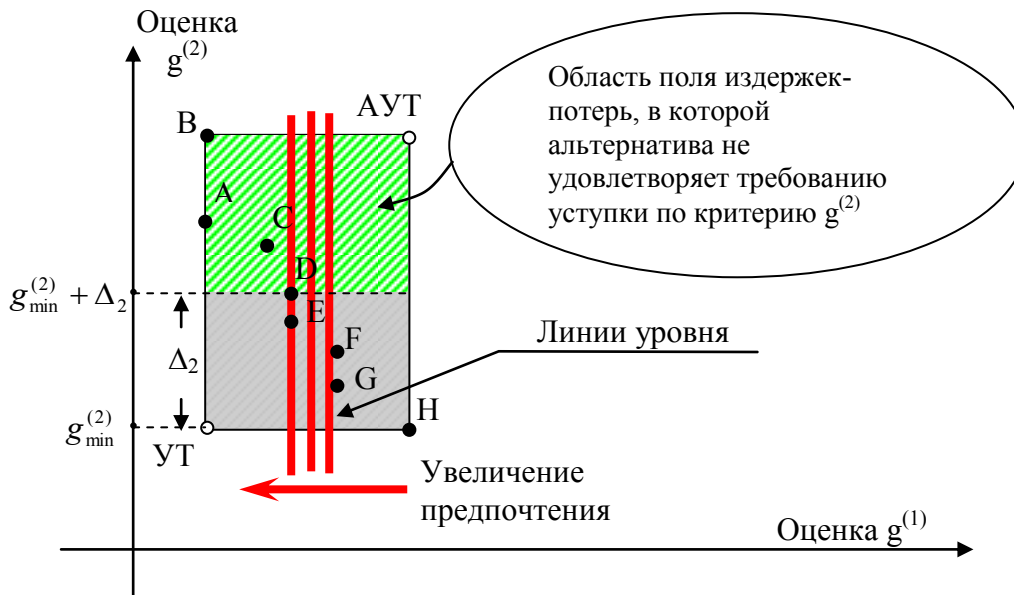


Рис. 3.3. Иллюстрация семейства линий уровня для критерия выбора по методу уступок.

На рис. 3.3 семейство линий уровня представляет собой семейство прямых линий, параллельных оси ординат. В указанном случае линия уровня «К» (см. главу 1) определяется на основе следующего ее представления: $u = K$, где u обозначает оценку показателя $g^{(1)}$, который минимизируется на втором шаге. Направление предпочтений указано в сторону уменьшения показателя частного критерия $g^{(1)}$. Выбор на основе такого семейства линий уровня распространяется только на допустимые альтернативные решения. Они должны удовлетворять системе ограничений по второму частному критерию (не затемненная область поля издержек/потерь). В ситуации, представленной на этом рисунке, оптимальной альтернативой по методу уступок в данной ситуации (когда в качестве наиболее важного частного критерия принят критерий $g^{(2)}$ и назначена указанная уступка Δ_2) будет альтернатива Е.

Этот рисунок иллюстрирует еще одну особенность процедур оптимизации в рамках указанного подхода. Если в формате указанного подхода к оптимизации не будут учтены процедуры проверки найденного решения на оптимальность по Парето, то возможны нежелательные феномены. Может случиться, что будет выбрана не оптимальная по Парето альтернатива D (ее показатель на втором шаге процедур оптимизации по методу уступок также является наилучшим), а не альтернатива Е.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Проиллюстрируем, как можно решать задачи выбора наилучшего решения при двух критериях (если они формализованы в графическом представлении) на основе использования аппарата линий уровня.

ПРИМЕР 3.3. Нахождение наилучшего решения по методу уступок (при минимизации двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Частный критерий $g^{(1)}$ является наиболее важным. Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь ($U \times V$), где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, задано графически (см. рис. 3.4). На этом же рисунке уже представлены процедуры оптимизации по методу уступок. Требуется: найти наилучшее решение по методу уступок (уступка Δ_1 составляет $\Delta_1=1$).

РЕШЕНИЕ.

- 1) Множество альтернатив, оптимальных по Парето, представлено в пространстве издержек / потерь точками Р, Н и отрезком $[M, L]$, включая его концы.

2) Процедуры оптимизации по методу уступок представлены на рис. 3.4. Наилучшая оценка по наиболее важному частному критерию соответствует альтернативам А и Р. Она составляет 40. Учитывая, что уступка на первом этапе $\Delta_1=1$, получаем следующее. На втором этапе процедур оптимизации *не будут рассматриваться* те альтернативы, для которых оценка по первому критерию превышает допустимый предел $40 + 1 = 41$ (такое множество альтернатив затенено на рис. 3.4).

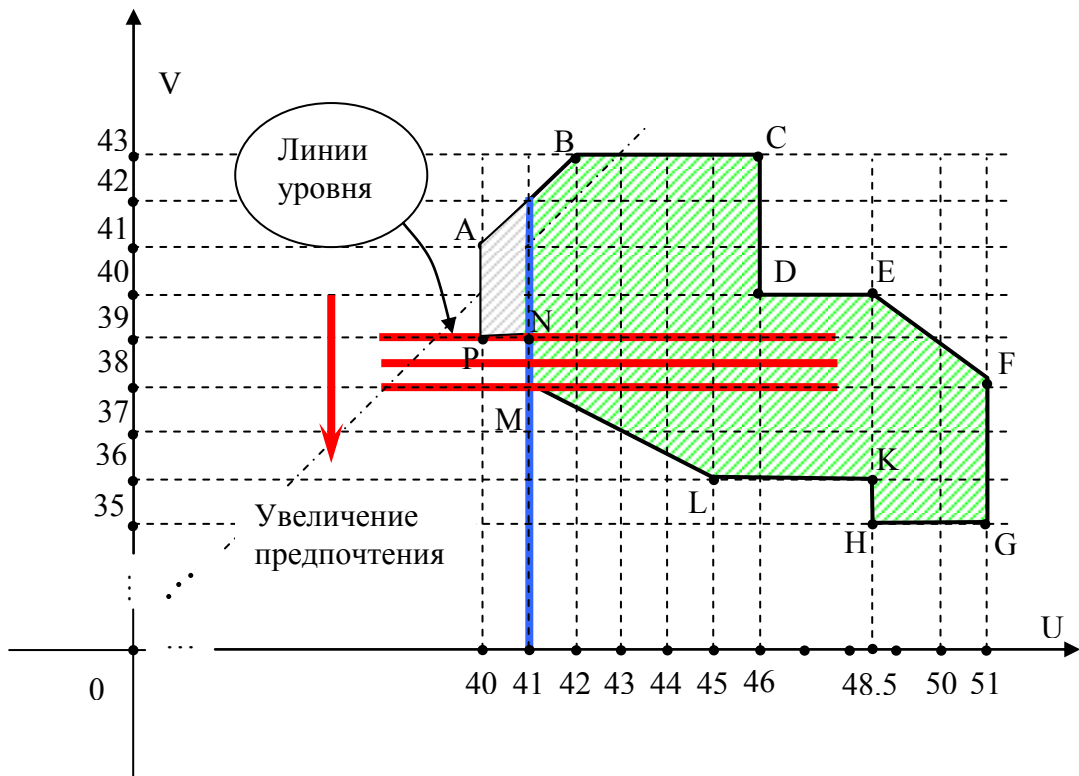


Рис. 3.4. Иллюстрация выбора наилучшего решения по методу уступок при минимизации двух критериев (критерий $g^{(1)}$ – наиболее важный).

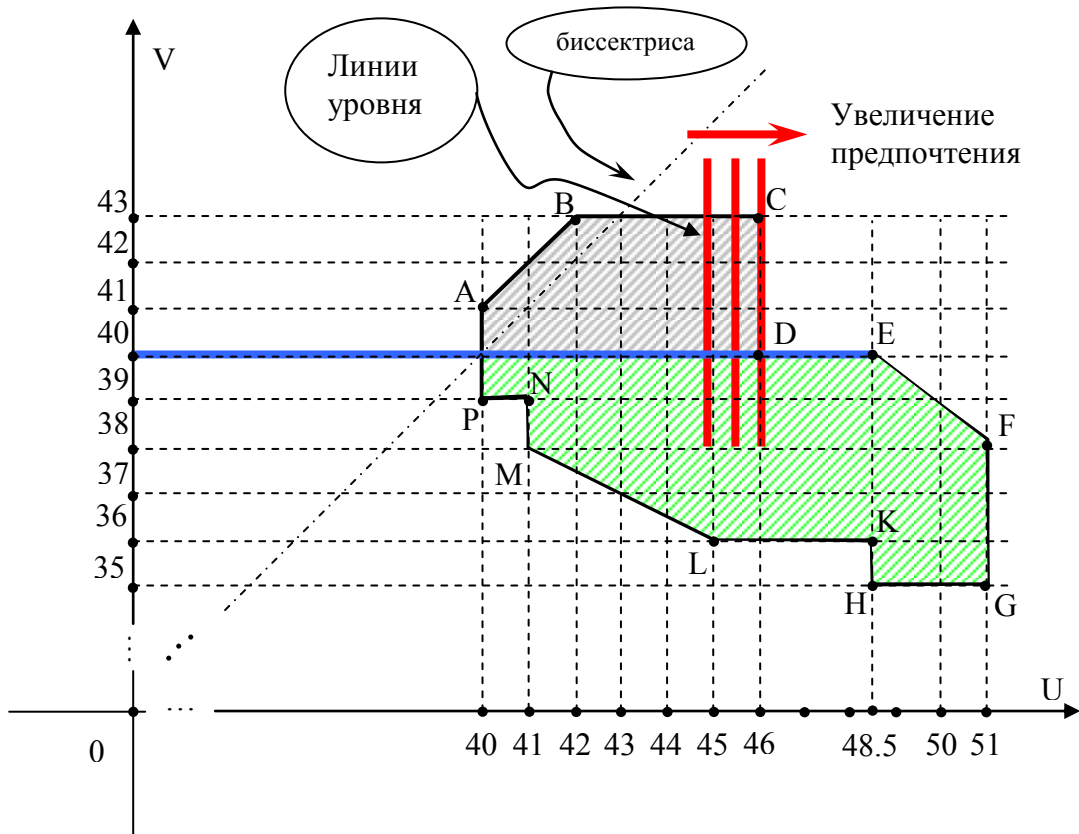


Рис. 3.5. Иллюстрация выбора наилучшего решения по методу уступок при максимизации двух критериев (критерий $g^{(2)}$ – наиболее важный).

- 3) Наилучшая оценка по второму частному критерию для «урезанного» множества альтернатив (после реализации процедур первого шага) составляет 38. Она принадлежит альтернативе М. Итак, альтернатива М является оптимальным решением по указанному критерию.

ПРИМЕР 3.3 (продолжение). Нахождение наилучшего решения по методу оптимизации основного частного критерия (при максимизации двух критериев). Пусть в условии примера 3.3 оба частных критерия максимизируются:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \max, \\ g^{(2)} &\rightarrow \max \end{aligned}$$

(например, максимизируется показатель ожидаемой экономии за счет снижения штрафов, обусловливаемых срывами сроков поставок, и показатель прибыли). Множество допустимых значений этих критериев уже будет представлено не в пространстве издержек, а в пространстве доходов. Оставим для этого пространства прежние обозначения: $(U \times V)$, где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$ (но они относятся уже к пространству доходов). Пусть такого же типа рисунок, как и рис. 3.4, представляет графически задачу оптимизации. Для удобства иллюстрации процедур метода в этом случае указанный рисунок модифицирован применительно к формату этой задачи многокритериальной оптимизации (см. рис.3.5). Указанная модификация учитывает следующее. В отличие от предыдущей ситуации, именно частный критерий $g^{(2)}$ является основным. Требуется: найти наилучшее решение по методу уступок (уступка Δ_2 составляет $\Delta_2 = 3$).

РЕШЕНИЕ.

- 1) Если оба частных критерия максимизируются, оптимальные по Парето решения будут представлены следующим образом: $\{C \cup [E,F]\}$ (т.е. это – точка С и отрезок [E,F], включая его концы).
- 2) Процедура выбора наилучшего решения по методу уступок для случая, когда $g^{(2)}$ - наиболее важный частный критерий, иллюстрируется на рис. 3.5. Наилучшее значение для оценок этого частного критерия составляет 43 (оно достигается на решениях, представленных точками отрезка [B; C]). С учетом заданной уступки $\Delta_2 = 3$ на первом этапе процедур оптимизации находим минимально допустимые оценки доходов по критерию $g^{(2)}$ в формате дальнейших процедур метода: $43 - 3 = 40$.
- 3) На указанном рисунке множество альтернатив, которые не соответствуют требованиям первого этапа, заштриховано. Среди оставшихся альтернативных решений ищется наилучшее по частному критерию $g^{(1)}$. Наилучшим решением в такой ситуации по методу уступок будет альтернатива С.

3.2. Метод идеальной точки

На содержательном уровне подход многокритериальной оптимизации, называемый методом идеальной точки, состоит в нахождении решения, которому в пространстве значений частных критериев соответствует точка, ближайшая к той, которую задает лицо, принимающее решение (ЛПР), в виде *желаемых значений для показателей частных критериев*. При этом, как правило, ЛПР выбирает на практике сочетание *наилучших значений всех имеющихся частных критериев*. Поэтому такая точка (называемая в указанном случае *утопической точкой - УТ*) не может быть реализована при заданных ограничениях для допустимых решений. Отсюда и соответствующее ее название. Кстати, если ЛПР не уточняет желаемые значения для показателей частных критериев, то считается, что выбор ориентируется именно на УТ. Найденное решение с указанным свойством и принимают в качестве наилучшего решения по методу идеальной точки. Приведем формальное представление этого метода. Пусть

$$U = g^{(1)}(\vec{x}), V = g^{(2)}(\vec{x}), \dots, W = g^{(N)}(\vec{x}),$$

где $g^{(k)}(\vec{x})$, $k = \overline{1, N}$, - частные критерии соответствующей задачи многокритериальной оптимизации. Кроме того, обозначим через $U_{\min}, V_{\min}, \dots, W_{\min}$ - наилучшие (минимальные – в задачах минимизации частных критериев) значения этих критериев в заданной области допустимых решений $\vec{x} \in X$. Тогда в пространстве (U, V, \dots, W) точку с координатами

$$(U_{\min}, V_{\min}, \dots, W_{\min})$$

называют *утопической точкой – УТ*.

На основе показателя расстояния (в некоторой метрике соответствующего пространства значений частных критериев), вводят понятие *идеальной точки – ИТ*. Это - ближайшая к УТ точка в пространстве значений частных критериев. Ей соответствует некоторое решение из допустимой области $\vec{x} \in X$. При этом альтернатива $\vec{x} = (x, y, \dots, z)$ в области $\vec{x} \in X$, которая дает решение, соответствующее в пространстве значений частных критериев указанной идеальной точке, как раз и выбирается в качестве оптимальной.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод ИТ может приводить к решениям, не оптимальным по Парето. Его процедуры оптимизации необходимо дополнить идентификацией выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 3.4. Пусть в условиях примера 1.2 требуется найти наилучшее решение по методу идеальной точки. Напомним, (см. пример 1.2 или пример 3.1), что для первого частного критерия $g^{(1)}(\vec{x}) = \varphi(x, y) = 2x - y$ минимальное значение в области $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$ составляет $g_{\min}^{(1)} = U_{\min} = \varphi(1, 1) = 1$. Для второго частного критерия $g^{(2)}(\vec{x}) = \psi(x, y) = 5 - x - 2y$ минимальное значение в области $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$ составляет $g_{\min}^{(2)} = V_{\min} = \psi(1, 1) = 1$. Утопическая точка УТ в пространстве (U, V) задана координатами УТ=(1; 1). Пусть в рамках метода идеальной точки ЛПР задает (в качестве желаемых показателей частных критериев) именно координаты УТ.

РЕШЕНИЕ. На рис. 3.6 отмечена УТ, а также все возможные значения частных критериев (четыреугольник $A^*B^*C^*D^*$ с границей Парето, представляющей собой отрезок B^*C^*) в пространстве (U, V) . Обычными методами нетрудно найти и соответствующую ИТ. Она является точкой отрезка B^*C^* (ближайшей к УТ) с координатами $U_{ит} = 7/5$ и $V_{ит} = 9/5$.

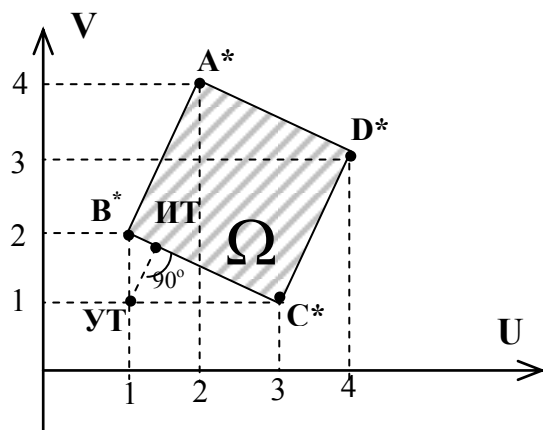


Рис. 3.6. Иллюстрация идеальной точки (ИТ).

Для определения наилучшего решения, которое соответствует найденной в пространстве значений частных критериев идеальной точке (ИТ) с указанными выше координатами, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = U_{ит}; \\ \psi(x, y) = V_{ит}; \\ (x, y) \in X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 7/5; \\ 5 - x - 2y = 9/5 \\ x \in [1; 2]; y \in [0; 1] \end{cases}$$

Решая эту систему, находим оптимальное решение по методу идеальной точки: $x^*=1,2$ и $y^*=1$. Найденное решение в данном случае является оптимальным по Парето.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метрику в пространстве значений частных критериев, на основе которой определяются «расстояния» от УТ до точек, представляющих в этом пространстве анализируемые решения, ЛПР вводит произвольным образом с учетом специфики рассматриваемой задачи. Обычно, расстояние L от УТ до некоторой точки «К» с координатами $K = K(g_{K}^{(1)}; g_{K}^{(2)}; \dots; g_{K}^{(N)})$ формально определяется в соответствии с метрикой N -мерного Евклидова пространства:

$$L = \sqrt{\sum (g_{\min}^{(i)} - g_K^{(i)})^2}.$$

Такое определение было использовано в рассмотренном примере. Другой подход будет представлен ниже.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если множество альтернатив является дискретным, то используют табличное представление задачи многокритериальной оптимизации. Процедуры оптимизации по методу идеальной точки будут следующими.

- 1) К таблице с оценками частных критериев приписывается дополнительная строка. В ней указываются координаты утопической точки (или другой точки, которую ЛПР предпочитает вместо УТ).
- 2) К матрице с оценками частных критериев приписывается дополнительный столбец.
- 3) В указанный столбец для каждой соответствующей (по строкам таблицы) альтернативы записывают значения следующего показателя. Это – расстояния от точки, представляющей альтернативу в пространстве значений частных критериев, до УТ (или другой точки, заданной в дополнительной строке, которую ЛПР предпочитает вместо УТ) в этом же пространстве. Такое расстояние ищут по формулам векторной алгебры. Это – корень квадратный из суммы квадратов разностей координат для указанных точек.
- 4) Из всех элементов этого дополнительного столбца выбирается наименьший.
- 5) Соответствующая (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернатива, принимается в качестве оптимальной.

- б) Если такой показатель дополнительно столбца достигается при нескольких альтернативах решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, но только после реализации процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 3.5. Для удобства сравнения результатов выбора, рассмотрим ситуацию, представленную ранее в примерах 1.1 и 2.2, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (А, В, С, D, E, F и G). Множество частных критериев задано четырьмя критериями: все они минимизируются. Оценки указанных частных критериев (в тыс. у.е.) приведены в таблице 3.4. В формате этой таблицы уже приписана дополнительная строка. В ней указаны координаты утопической точки (минимальные элементы по столбцам таблицы). К таблице приписан дополнительный столбец. В нем представлены показатели критерия выбора, т.е. расстояния от точек, представляющих альтернативы до УТ. Требуется: найти наилучшую альтернативу по методу идеальной точки.

Таблица 3.4.
Выбор наилучшего решения по критерию идеальной точки.

Решения	Значения частных критериев				Показатель расстояния
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	
А	45	27	159	29	$\sqrt{5^2 + 0 + 37^2 + 5^2} = \sqrt{1419}$
В	40	34	148	28	$\sqrt{0 + 7^2 + 26^2 + 4^2} = \sqrt{741}$
С	42	35	126	24	$\sqrt{2^2 + 8^2 + 4^2 + 0} = \sqrt{84}$
Д	41	34	170	28	$\sqrt{1^2 + 7^2 + 48^2 + 4^2} = \sqrt{2370}$
Е	45	35	146	26	$\sqrt{5^2 + 8^2 + 24^2 + 2^2} = \sqrt{669}$
F	43	32	147	27	$\sqrt{3^2 + 5^2 + 25^2 + 3^2} = \sqrt{668}$
G	42	36	122	25	$\sqrt{2^2 + 9^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{86}$
У	40	27	122	24	
Т					

РЕШЕНИЕ. Для реализации процедур этого критерия выбора поступаем следующим образом. К таблице значений оценок частных критериев приписываем дополнительный столбец (см. таблицу 3.4). В нем записываем показатели критерия выбора (это - расстояния, которые найдены по указанным выше формулам). Например, для альтернативы А указанный показатель определяем следующим образом:

$$\sqrt{(45 - 40)^2 + (27 - 27)^2 + (159 - 122)^2 + (29 - 24)^2} = \sqrt{5^2 + 0 + 37^2 + 5^2} = \sqrt{1419}$$

Среди элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен $\sqrt{84}$ (выделен в таблице) и отвечает альтернативе С (по строке). В рассматриваемом случае альтернатива С принимается в качестве оптимальной по методу идеальной точки.

ПРИМЕР 3.5 (продолжение). Пусть в условиях предыдущей ситуации оказалось, что ЛПР для определения «расстояния» между точками в пространстве значений частных критериев задает в этом пространстве метрику следующим образом: $L = \sum(g^{(i)} - g^{(i)}_{УТ})$, т.е. как сумму потерь по всем частным критериям (по сравнению с «желаемыми» им результатами в рамках УТ). Процедуры оптимизации по методу идеальной точки представлены в табл. 3.5.

Таблица 3.5.
Выбор наилучшего решения по критерию идеальной точки (специальная метрика).

Решения	Значения частных критериев				Показатель «расстояния»
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	
А	45	27	159	29	$5+0+37+5 = 47$
В	40	34	148	28	$0+7+26+4 = 37$

C	42	35	126	24	$2+8+4+0=14$
D	41	34	170	28	$1+7+48+4=60$
E	45	35	146	26	$5+8+24+2=39$
F	43	32	147	27	$3+5+25+3=36$
G	42	36	122	25	$2+9+0+1=12$
УТ	40	27	122	24	

РЕШЕНИЕ. Дополнительный столбец таблицы 3.5 заполняем по требуемой метрике исчисления расстояния в пространстве издержек/потерь. Затем из всех элементов такого дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 12 (выделен в таблице) и отвечает альтернативе G (по строке матрицы). Идеальной точкой в пространстве значений частных критериев при таком подходе к определению «расстояния» в этом пространстве оказалась точка, представляющая альтернативу G. В этом случае наилучшим решением для ЛПР по методу идеальной точки является выбор альтернативы G. В формате такой метрики нельзя исключать процедуры идентификации выбираемого решения на оптимальность по Парето. Проверка на оптимальность по Парето оставляет указанный выбор. Поэтому в рассматриваемом случае альтернатива G и принимается в качестве оптимальной по методу идеальной точки.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Приведем иллюстрации семейства линий уровня для критерия идеальной точки в пространстве издержек/потерь для случая задачи минимизации двух частных критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Линии уровня указанного критерия представлены на рис. 3.7. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками A, B, C, D, E, F, G и H);
- среди частных критериев нет такого критерия, показатели которого существенно превышали бы показатели другого частного критерия.

На рис. 3.7 семейство линий уровня для критерия выбора по методу идеальной точки (при $N = 2$) представляет собой семейство окружностей. Их центр расположен в утопической точке. У линии уровня «K» (см. главу 1) обе координаты любой ее точки сбалансированы таким образом, что расстояние от такой точки до УТ равны числу K. Поэтому число K и используют для идентификации конкретной линии уровня.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрите самостоятельно график функции $\sqrt{(u - u_{УТ})^2 + (v - v_{УТ})^2} = K$.

Направление предпочтений указано в сторону уменьшения показателя такого критерия, т.е. по направлению к УТ. В ситуации, представленной на этом рисунке, оптимальным решением по методу критерия идеальной точки будут альтернативы E и G.

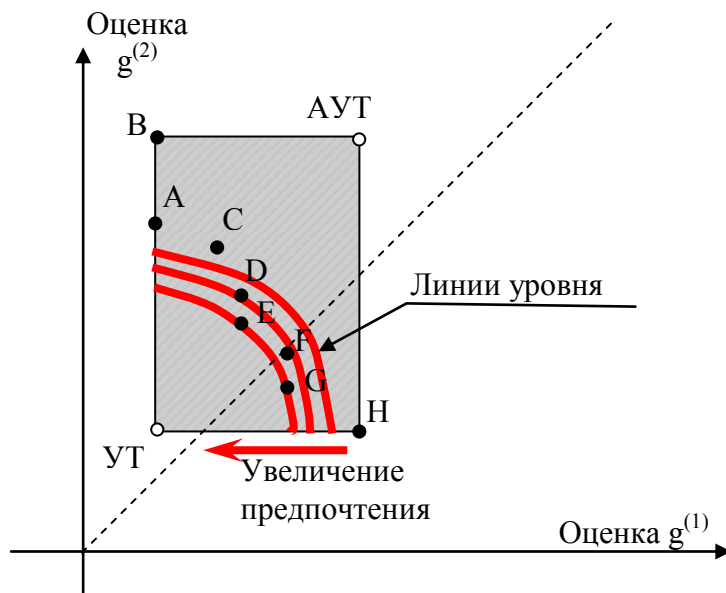


Рис. 3.7. Иллюстрация семейства линий уровня для задачи минимизации по критерию идеальной точки (при двух частных критериях)

В анализируемой ситуации (ориентир на УТ) наилучший показатель по критерию идеальной точки может достигаться сразу у нескольких анализируемых альтернатив. Тем не менее, все они будут оптимальными по Парето. Поэтому, в формате указанного подхода к оптимизации можно не задействовать процедуры проверки найденного решения на оптимальность по Парето.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Проиллюстрируем их примерами.

ПРИМЕР 3.6. Нахождение наилучшего решения по методу идеальной точки (при минимизации двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$g^{(1)} \rightarrow \min, \quad g^{(2)} \rightarrow \min.$$

Множество допустимых значений этих критериев ($U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$) задано графически (см. рис. 3.8). Требуется: найти наилучшее решение по методу идеальной точки.

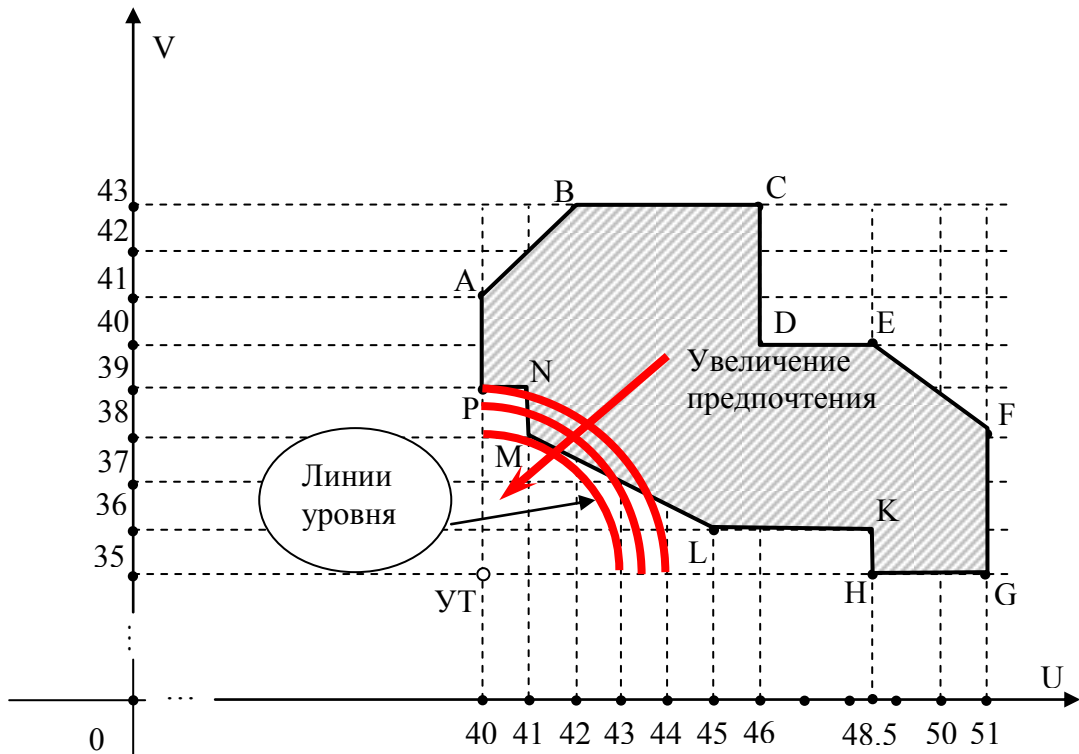


Рис. 3.8. Графическое решение задачи минимизации двух критериев (в формате метода идеальной точки).

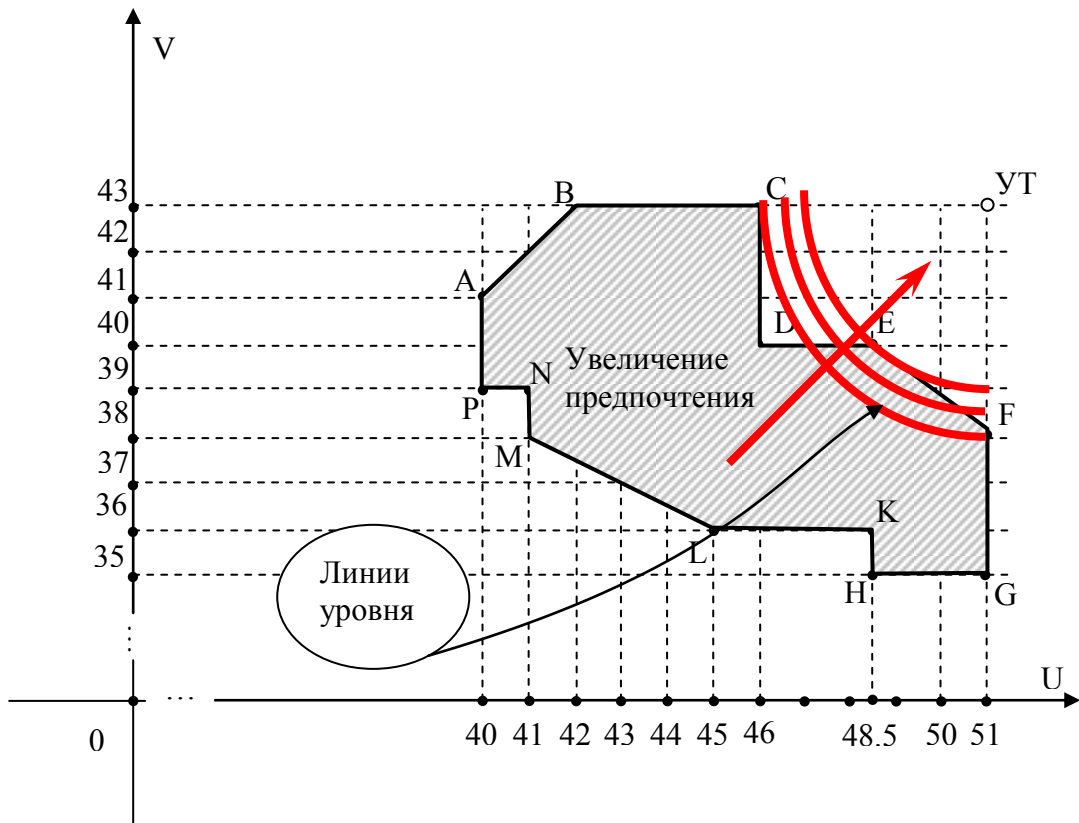


Рис. 3.9. Иллюстрация выбора наилучшего решения по методу идеальной точки при максимизации двух критериев

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора представлена на рис. 3.8. Утопическая точка представлена координатами (40; 35). В области значений частных критериев ближайшей к УТ будет точка, которая представляет альтернативу М. Итак, идеальной точкой будет точка М. Кстати, только она одна имеет лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Поэтому альтернатива М является оптимальным решением по указанному критерию.

ПРИМЕР 3.6 (продолжение). Нахождение наилучшего решения по методу идеальной точки (при максимизации двух критериев). Пусть в условии примера 3.6 частные критерии максимизируются:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \max, \\ g^{(2)} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Множество значений этих критериев уже будет представлено в пространстве доходов (рис. 3.9). Оставим для этого пространства прежние обозначения: $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$ (но в этом примере они относятся к пространству доходов). Рисунок 3.9 модифицирован применительно к формату этой задачи многокритериальной оптимизации. Указанная модификация учитывает следующее. В отличие от предыдущей ситуации, утопическая точка теперь будет представлена координатами (51; 43). Требуется: найти наилучшее решение по методу идеальной точки.

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора наилучшего решения по методу идеальной точки для случая максимизации частных критериев представлена на рис. 3.9. В области значений частных критериев наилучший показатель первого частного критерия соответствует альтернативам отрезка [F; G]. Наилучший показатель второго частного критерия соответствует альтернативам отрезка [B; C]. Поэтому координаты утопической точки составляют (51; 43). Ближайшей к ней является точка Е. В формате такой задачи оптимизации альтернатива Е будет оптимальным решением по методу идеальной точки.

3.3. Формат метода Гермейера

При формализации представленного здесь критерия используется специальный подход, который был разработан Ю.Б. Гермейером применительно к решению задач, относящихся к оптимизации решений в условиях неопределенности. В формате такого подхода применительно к задачам многокритериальной оптимизации имеются управляющие параметры. Их задает ЛПР с учетом имеющейся системы предпочтений в пространстве значений частных критериев и специфики многокритериальной задачи оптимизации. Наличие таких параметров позволяет менеджеру регулировать наклон направляющей для линий уровня критерия выбора в указанном пространстве. Подчеркнем, что это единственный критерий выбора, который дает менеджеру такие возможности. В этом параграфе будет проиллюстрировано, как такой подход можно использовать, чтобы более эффективно адаптировать линии уровня критерия выбора в поле издержек / потерь применительно к условиям бизнеса, специфике решаемой задачи многокритериальной оптимизации и имеющимся у ЛПР предпочтениям к оценкам частных критериев. Если менеджер будет владеть специфическими приемами в формате такого подхода, то в дальнейшем он сможет создавать новые модификации для уже известных критериев выбора (с указанным выше свойством).

При таком подходе на основе заданных частных критериев в рамках исходной многокритериальной задачи формируется критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \max \{ c_k \cdot g^{(k)}(\vec{x}) \} .$$

Здесь максимум ищется по всем доступным альтернативным решениям, а $c_k > 0$ – параметры, которые задает ЛПР / менеджер (для адаптации линий уровня критерия к предпочтениям ЛПР). Соответственно точка минимума этой синтезированной критериальной функции выбора $F(\vec{x})$ принимается как искомое оптимальное решение. Если найденное минимальное значение достигается при двух или более альтернативных решениях, то требуется проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето.

В формате указанного подхода, но применительно к задачам оптимизации решений в условиях неопределенности, параметры c_k представляют субъективные вероятности случайных событий, влияющих на конечный экономический результат. Поэтому дополнительно накладывается условие $\sum c_k = 1$. В формате задач многокритериальной оптимизации такое условие нормировки не требуется. Более того, соответствующие параметры ЛПР может задавать и в более удобном для себя виде, например, в виде некоторых пропорций, характеризующих его отношение к оценкам частных критериев.

ЗАМЕЧАНИЕ. Представленный подход к формированию функции выбора также называют обобщенным минимаксным критерием. Термин «обобщенный минимаксный критерий» обычно подразумевает специальный выбор управляющих параметров c_k , при которых наклон направляющей для линий уровня будет ориентирован на утопическую точку (см. следующую главу).

ПРИМЕР 3.7. Пусть в условии примера 1.2 для нахождения наилучшего решения используется модифицированный критерий выбора по методу Гермейера. Заданы два частных критерия. Оба таких

критерия минимизируются. В соответствии с подходом указанного критерия выбора получаем задачу: $\max \{c_1 \cdot (2x - y); c_2 \cdot (5 - x - 2y)\} \rightarrow \min$ при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

РЕШЕНИЕ. Пусть для параметров « c_1 » и « c_2 » выбраны следующие значения (они характеризуют важность для ЛПП таких оценок): $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$. Поскольку для точек множества Парето, как мы уже знаем, $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2), то при $x \in [1; 2]$ получаем:

$$\max \{1 \cdot (2x - 1); 2 \cdot (3 - x)\} \rightarrow \min.$$

Заметим, что:

- 4) при $x = 7/4$ значения оценок заданных частных критериев здесь совпадают;
- 5) при этом первый из них дает оценку, возрастающую с ростом x ;
- 6) второй частный критерий дает оценку, убывающую с ростом x ;

В указанном случае (при заданных значениях параметров « c_1 » и « c_2 ») точкой минимума указанной критериальной функции в области допустимых значений будет точка $x^* = 1,75$. Это приводит к выбору решения $x^* = 1,75$ и $y^* = 1$. Это решение является оптимальным по Парето и будет оптимальным по критерию выбора на основе метода Гермейера. Как видим, при таком подходе наилучшее компромиссное решение требует обеспечить максимальную надежность и 75% запаса мощности агрегата.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Укажем требуемые процедуры оптимизации для случая, когда множество альтернатив является дискретным.

- 1) К таблице оценок частных критериев приписывается дополнительный столбец.
- 2) В нем для каждой альтернативы записываются максимальные (наихудшие по соответствующей строке в формате задачи минимизации всех частных критериев) из значений показателей специального вида. Речь идет о показателях, каждый из которых представляет собой результат произведения отдельного элемента строки на соответствующий управляющий параметр для частного критерия (соотносимого со столбцом таблицы, в котором такой элемент расположен).
- 3) Затем из всех элементов указанного дополнительного столбца выбирается наименьший, поскольку указанные показатели критерия выбора представляют (некоторым специальным образом) именно потери (образно говоря, минимизируется указанный показатель «потерь»).
- 4) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации.
- 5) Если наименьший показатель дополнительно столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, но только после реализации процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 3.8. Для иллюстрации рассмотрим ситуацию, представленную в примерах 1.1 и 2.2, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых альтернативных вариантов (А, В, С, D, E, F и G). Множество частных критериев задано четырьмя критериями: все они минимизируются. Оценки для указанных частных критериев (в тыс. у.е.) приведены в таблице 3.6. Управляющие параметры в формате процедур критерия выбора ЛПП задает следующим образом: $c_1 = 4$; $c_1 = 3$; $c_1 = 1$; $c_1 = 2$. Для удобства иллюстрации процедур выбора эти параметры приведены в таблице 3.6 (в ячейках с наименованием частного критерия). Требуется: найти наилучшую альтернативу по критерию Гермейера.

Таблица 3.6.

Оптимальный выбор в формате метода Гермейера.

Решения	Значения частных критериев				Показатель критерия выбора
	$g^{(1)}$ $c_l = 4$	$g^{(2)}$ $c_l = 3$	$g^{(3)}$ $c_l = 1$	$g^{(4)}$ $c_l = 2$	
А	45	27	159	29	$\text{Max}\{4 \cdot 45; 3 \cdot 27; 1 \cdot 159; 2 \cdot 29\} = 180$
В	40	34	148	28	$\text{Max}\{4 \cdot 40; 3 \cdot 34; 1 \cdot 148; 2 \cdot 28\} = 160$
С	42	35	126	24	$\text{Max}\{4 \cdot 42; 3 \cdot 35; 1 \cdot 126; 2 \cdot 24\} = 168$
D	41	34	170	28	$\text{Max}\{4 \cdot 41; 3 \cdot 34; 1 \cdot 170; 2 \cdot 28\} = 170$
E	45	35	146	26	$\text{Max}\{4 \cdot 45; 3 \cdot 35; 1 \cdot 146; 2 \cdot 26\} = 180$
F	43	32	147	27	$\text{Max}\{4 \cdot 43; 3 \cdot 32; 1 \cdot 147; 2 \cdot 27\} = 172$
G	42	36	122	25	$\text{Max}\{4 \cdot 42; 3 \cdot 36; 1 \cdot 122; 2 \cdot 25\} = 168$

РЕШЕНИЕ. К таблице с оценками частных критериев приписываем дополнительный столбец (такая процедура уже формализована в таблице 3.6: это – последний столбец). В этот столбец записываем максимальный (по строке таблицы) из показателей требуемого (в формате этого критерия) типа. Указанный максимальный показатель ищется среди произведений элементов строки на соответствующий (для конкретного элемента по столбцу) параметр « c_k ». Например, для альтернативы А такой показатель составит $\text{Max}\{4 \cdot 45; 3 \cdot 27; 1 \cdot 159; 2 \cdot 29\} = 180$. Он и будет записан в дополнительный столбец. Наконец,

из всех элементов указанного дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 160 (выделен в таблице жирным шрифтом) и соответствует альтернативе В (по строке матрицы). Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива В и принимается в качестве оптимальной для организации соответствующих поставок сырья применительно к анализируемому звену цепи поставок в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Приведем иллюстрации семейства линий уровня критерия Гермейера в пространстве издержек / потерь для случая задачи минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Соответствующие линии уровня указанного критерия представлены на рис. 3.10. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и H);
- параметры « c_1 » и « c_2 » заданы ЛПР следующим образом:
 - а) $c_1 = 2$ и $c_2 = 1$; б) $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$.

На рис. 3.10 семейство линий уровня для критерия Гермейера (при $N = 2$) представляет собой семейство линий, «загнутых» вплотную (как и у минимаксного критерия) к границе соответствующих конусов предпочтений. Точки, где соединяются стороны угла для соответствующей линии уровня, расположены следующим образом. Они расположены вдоль некоторой прямой (далее называем ее *направляющей* прямой). Такая направляющая прямая находится внутри первого координатного угла. Критерий Гермейера позволяет учитывать следующую специфику применительно к линиям уровня критерия выбора в поле издержек/потерь. Угол наклона направляющей прямой зависит именно от того, какой из коэффициентов c_1 или c_2 будет большим (и насколько большим). На содержательном уровне обратите внимание на следующее.

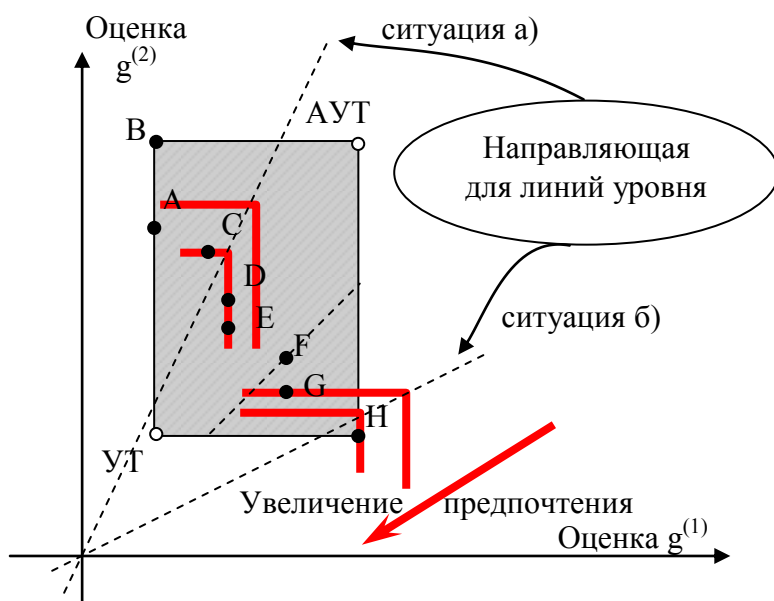


Рис. 3.10 Иллюстрация семейства линий уровня критерия Гермейера (при минимизации двух частных критериев)

Если $c_1 \gg c_2$ (ситуация (а) на рис. 3.10), то для ЛПР более важно не допустить таких альтернативных решений, для которых оценка по частному критерию $g^{(1)}$ будет значительной. Соответственно в указанном случае угол наклона направляющей прямой должен быть таким, чтобы приблизить эту линию к оси «OV» (см. рис. 3.10). Это, как раз, и установит требуемый баланс для решений в поле потерь в формате указанного критерия. В противном случае, когда $c_2 \gg c_1$ (ситуация (б) на рис. 3.10), для ЛПР более важно не допустить таких альтернативных решений, для которых оценка по частному критерию $g^{(2)}$ будет значительной. В указанном случае угол наклона направляющей прямой должен быть таким, чтобы соответственно приблизить эту линию к оси «OU» (см. рис. 3.10). Это приведет к своему конкретному балансу для решений в поле издержек/потерь.

Применяя представленный критерий, менеджер может не задумываться о проблемах технической реализации указанной особенности, которая связана: с установлением конкретного баланса для решений в поле полезностей; с установлением конкретного угла наклона для направляющей прямой. Все указанные

процедуры будут реализованы автоматически при выполнении указанных выше процедур критерия выбора в формате исходно заданной таблицы со значениями оценок по частным критериям. Приведенные здесь интерпретации лишь помогают менеджеру и ЛПР понять соответствующие отличительные и специфические особенности выбора оптимального альтернативного решения, свойственные только технологиям выбора по указанному критерию (они нужны для более эффективной адаптации выбора к предпочтениям ЛПР). Чтобы убедиться в этом, рассмотрите самостоятельно график функции $\max\{u \cdot c_1; v \cdot c_2\} = K$ в области $u > 0$ и $v > 0$ при $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$.

Решение задачи нахождения оптимального решения на основе критерия Гермейера в ситуации $N = 2$ имеет следующую графическую интерпретацию. Пусть вдоль указанной выше направляющей прямой в первом координатном угле передвигается специальный инструмент. Этот инструмент представляет собой угол, вершина которого лежит на указанной направляющей прямой, а стороны угла идут по границе соответствующего конуса предпочтений. При этом движение осуществляется в направлении уменьшения показателя «К» этого критерия (в первом квадранте это соответствует направлению к началу координат, - см. рис. 3.10). Тогда последняя (из анализируемых) точка в поле полезностей, которую «захватит» этот инструмент при указанном движении, как раз и будет соответствовать выбору по рассматриваемому критерию. В ситуации (а) будет выбрана альтернатива Е, а в ситуации (б) – альтернатива Н.

Вид указанного семейства линий уровня обуславливается тем, что ориентация на показатель, формализованный в рамках рассматриваемого подхода (для учёта отношения ЛПР к оценкам частных критериев), приводит к следующей функции, задающей семейство “линий уровня” в «поле издержек / потерь» (в обозначениях главы 1): $f(u, v, \dots; z) = \max\{c_1 \cdot u; c_2 \cdot v, \dots; c_n \cdot z\}$.

Рисунок 3.10 иллюстрирует следующую особенность указанных процедур оптимизации. Наилучший показатель по критерию Гермейера может достигаться сразу у нескольких анализируемых альтернатив (см. альтернативы С, Е и D). Поэтому, если в формате указанного подхода к оптимизации не будут учтены процедуры проверки найденного решения на оптимальность по Парето, то возможны нежелательные феномены: в качестве оптимальной альтернативы в таком случае может быть выбрано решение, не оптимальное по Парето.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Проиллюстрируем их следующими примерами.

ПРИМЕР 3.9. Нахождение наилучшего решения по критерию Гермейера (при минимизации двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min.$$

Множество значений этих критериев в пространстве издержек/потерь $(U \times V)$, где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, задано графически (см. рис. 3.11). Требуется: найти наилучшее решение по критерию Гермейера, зная, что ЛПР задает параметры в формате этого критерия следующим образом: $c_1 : c_2 = 3:4$ (оценки по второму частному критерию более важны, чем оценки по первому частному критерию).

РЕШЕНИЕ. В рассматриваемом примере множество решений, оптимальных по Парето, представлено в пространстве издержек / потерь следующими точками: это – точки Р, Н и отрезок [М, L], включая его концы. Процедуры выбора наилучшего решения по методу критерия Гермейера представлены на рис. 3.11. При заданном балансе для параметров c_1 и c_2 направляющая для семейства линий уровня критерия проходит через точку с координатами (48; 36). Это обусловлено тем, что $48:36 = 4:3 = c_2 : c_1$. В области допустимых альтернатив наилучший показатель критерия Гермейера соответствует альтернативе L. Не одна только альтернатива L имеет лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Процедуры формализации множества решений, оптимальных по Парето, в данной ситуации опускать нельзя. Легко видеть, что альтернатива L является оптимальным решением по указанному критерию.

ПРИМЕР 3.9 (продолжение). Нахождение наилучшего решения по критерию Гермейера (при максимизации двух критериев). Пусть в условиях предыдущего примера оба частных критерия максимизируются:

$$g^{(1)} \rightarrow \max, \\ g^{(2)} \rightarrow \max.$$

Соответственно считаем, что множество допустимых значений этих критериев уже представлено не в пространстве издержек, а в пространстве доходов. Оставим прежние обозначения: $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$ (в этом примере они соотносятся с пространством доходов). Пусть рис. 3.12, представляет графически рассматриваемую задачу оптимизации. Указанный рисунок модифицирован применительно к формату этой задачи многокритериальной оптимизации. Такая модификация учитывает следующее. 1) Параметры c_1 и c_2 в формате этого критерия ЛПР теперь задает следующим образом: $c_1 : c_2 = 5:6$ (показатель второго критерия снова является для ЛПР более важным). 2) Утопическая точка представлена координатами (51; 43). 3) Это меняет расположение конусов предпочтения и направление предпочтений. Требуется: найти наилучшее решение по критерию Гермейера (при заданных параметрах c_1 и c_2).

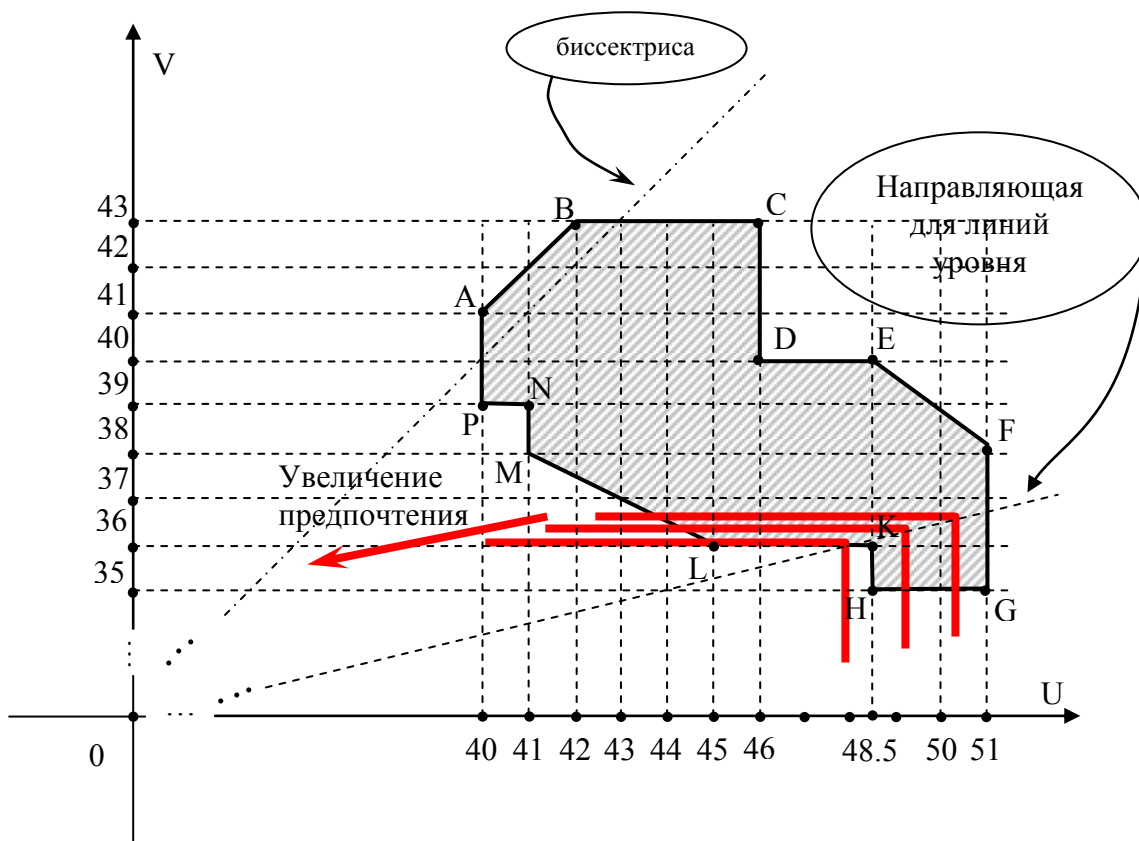


Рис. 3.11. Графическое решение задачи минимизации двух критериев (в формате процедур критерия Гермейера).

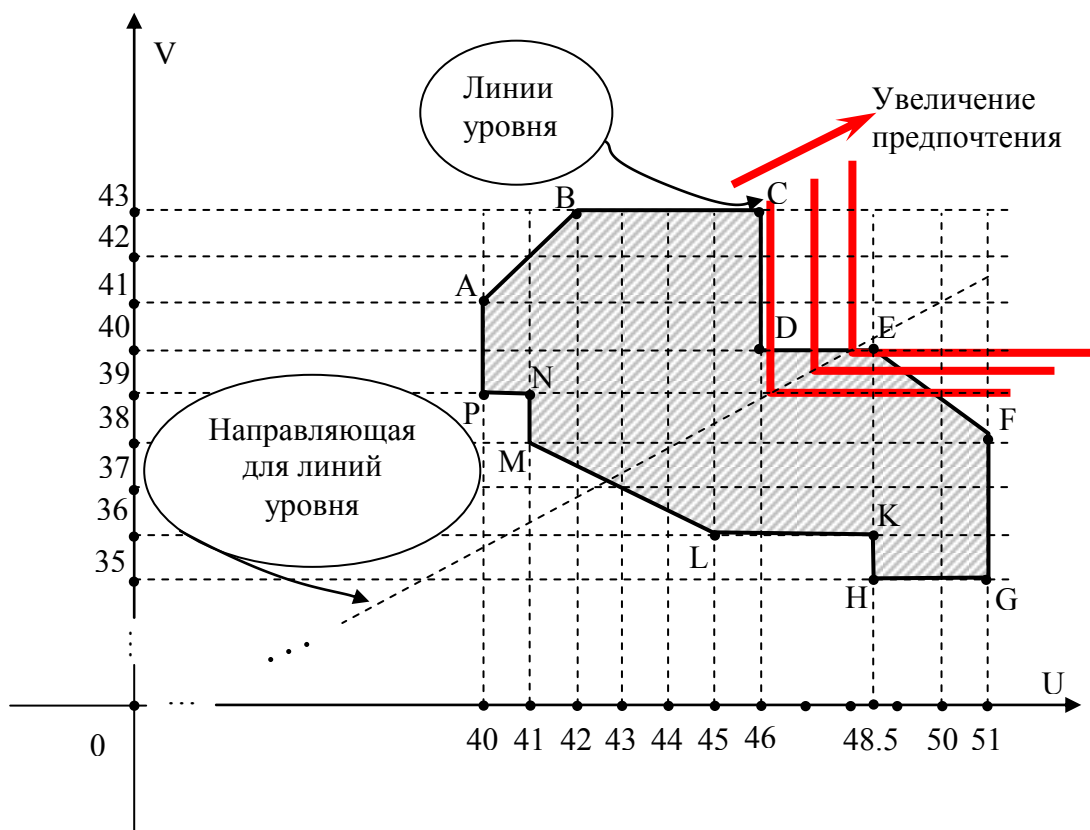


Рис. 3.12. Иллюстрация выбора наилучшего решения при максимизации двух критериев (формат процедур критерия Гермейера).

РЕШЕНИЕ. 1) Если частные критерии максимизируются, то оптимальные по Парето решения будут представлены точками: $\{C \cup [E, F]\}$ (т.е. это – точка C и отрезок $[E, F]$, включая его концы).

2) Процедура выбора наилучшего решения по методу Гермейера (при максимизации критериев) представлена на рис. 3.12. При заданном балансе для параметров c_1 и c_2 направляющая для линий уровня критерия проходит через точку с координатами (48; 40). Это обусловлено тем, что $48:40 = 6:5 = c_2 : c_1$. Направление предпочтения соответствует «перемещению» линии уровня от начала координат к УТ. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель соответствует альтернативе E и, кроме того, некоторым точкам отрезка $[D; E]$. Среди указанных точек только точка E представляет оптимальную по Парето альтернативу. Соответственно альтернатива E и является оптимальным решением.

В заключение этого пункта подчеркнем еще раз, что структура линий уровня критерия Гермейера позволяет на основе полученной от ЛПР дополнительной информации изменять угол наклона «направляющей» прямой, вдоль которой систематизируются линии уровня этого критерия выбора. Рассмотренные ранее критерии выбора такой особенностью не обладали и таких возможностей для адаптации линий уровня применительно к предпочтениям конкретного ЛПР не предоставляли. Понимание этой особенности дает менеджеру специальный инструмент для более гибкой адаптации линий уровня критерия выбора к предпочтениям ЛПР. Его атрибуты будут приведены в главе 7.

3.4. Формат метода среднего геометрического

Прежде, чем будут представлены процедуры этого метода, обратим внимание на специфику «баланса предпочтений» для линий уровня рассмотренных ранее критериев выбора. Например, использование критерия выбора по методу взвешенной суммы оценок частных критериев (показатель которого учитывает результаты по всем частным критериям), приводит к следующему. Семейство линий уровня такого критерия формализует простейший линейный «баланс» между потерями по одним из частных критериев и соответствующей компенсацией – по другим. В частности, в формате моделей оптимизации с двумя частными критериями, для которых весовые коэффициенты приняты, например, равными, в соответствии с линиями уровня указанного критерия при сравнении некоторого решения X_0 с иным, например, с решением X_1 , устанавливается и принимается в качестве приемлемого для ЛПР следующий баланс. Если по одному из частных критериев (например, $g^{(1)}$) для альтернативного решения X_1 потери будут большими (чем у X_0), а по другому – меньшими, причем именно на такую же величину, то соответствующее альтернативное решение X_1 принимается эквивалентным решению X_0 . Аналогичный баланс линейного типа устанавливают и другие критерии выбора (когда семейство линий уровня представлено прямыми линиями или отрезками прямых линий).

Для многих ЛПР такой простейший линейный «баланс» может оказаться неприемлемым. Требуемый ими «баланс» в формате линий уровня критерия выбора может устанавливаться с учетом более сложных рассуждений. Например, рассуждений такого типа: «каким бы ни было ухудшение для значения оценки по одному из критериев, соответствующая требуемая ЛПР «компенсация» в формате оценки по другому критерию, должна быть более значительной».

Указанную особенность в предпочтениях ЛПР позволяет учитывать (в некоторой степени) критерий выбора, который далее будем называть критерием среднего геометрического (аналог критерия произведений в теории принятия решений в условиях неопределенности). Такой критерий (как и критерий Гурвица) сначала получил распространение при оптимизации решений в условиях неопределенности. Специфика его линий уровня может быть использована и при оптимизации решений при многих критериях, прежде всего, применительно к задачам максимизации частных критериев. Кроме того, после специальной его модификации, - и применительно к задачам минимизации частных критериев. Согласно этому критерию при нахождении параметра K_i , характеризующего «линии уровня» для альтернативного решения X_i , на основе оценок частных критериев (элементы соответствующей строки таблицы) находятся соответствующие показатели среднего геометрического. Напомним, что для этого указанные оценки *перемножаются* (а не суммируются, как в формате критерия выбора по методу взвешенной суммы оценок частных критериев). После этого извлекается корень N -ой степени (по числу частных критериев). Естественно, при этом предполагается, что все оценки для частных критериев являются положительными.

При формальном определении такого критерия можно было бы ограничиться формализацией процедур выбора именно на основе показателя произведений оценок частных критериев. Однако, будем учитывать контекст соответствующих правил представления линий уровня в пространстве потерь, относящихся к интерпретации показателя « K » для линии уровня. Это требует иного определения процедур оптимизации. При теоретическом представлении этого критерия выбора процедуры нахождения параметра « K_i » (для альтернативы X_i), характеризующие его аппарат «линий уровня», требуется определять не через произведение оценок всех частных критериев для отдельной альтернативы X_i , а на основе *среднего*

геометрического показателя для таких оценок (среднее геометрическое для элементов соответствующей строки таблицы с оценками частных критериев). Поскольку затем выбирается решение, для которого такой показатель будет минимальным (при минимизации всех частных критериев), то переход к использованию (на практике) именно показателя произведения указанных элементов не изменит выбора. Тем не менее, теоретический материал, связанный с представлением аппарата линий уровня для такого критерия выбора, удобно представлять на основе среднего геометрического показателя. Далее используется именно такой подход для представления аппарата линий уровня критерия. Это отражено и в названии критерия выбора.

При таком подходе на основе частных критериев формируется критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N g^{(k)}(\vec{x})}.$$

Точка минимума этой функции $F(\vec{x})$ принимается как искомое оптимальное решение (в формате задач минимизации частных критериев). Если минимальное значение указанной критериальной функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения может быть выбрано любое из решений, представленных такими точками. Все они будут оптимальными по Парето. Обоснование этого получим при графической интерпретации семейства линий уровня критерия.

ПРИМЕР 3.10. Пусть в условии примера 1.2 для нахождения наилучшего решения используется критерий выбора по методу среднего геометрического. Заданы два частных критерия. Оба таких критерия минимизируются. В соответствии с подходом рассматриваемого здесь критерия выбора получаем следующую задачу минимизации: $\sqrt{(2x - y) \cdot (5 - x - 2y)} \rightarrow \min$ при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Эта задача эквивалентна следующей: $(2x - y) \cdot (5 - x - 2y) \rightarrow \min$ при том же условии. Поскольку для точек множества Парето, как мы уже знаем, $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2), то исходная задача принимает вид:

$$2(2x - 1) \cdot (3 - x) \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$. Заметим, что:

- 1) оптимизируемая здесь функция представляет собой параболу (ветви вниз);
- 2) ее ось симметрии проходит через точку $x=1,75$;
- 3) соответственно минимальное значение в заданной области $x \in [1; 2]$ будет достигаться на границе указанной области, причем в точке $x=1$.

Поэтому точкой минимума представленной критериальной функции в области допустимых значений будет точка $x^* = 1$. Это приводит к выбору решения $x^* = 1$ и $y^* = 1$: требуется обеспечить максимальную надежность без запаса мощности агрегата.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если менеджер использует табличное представление задачи многокритериальной оптимизации, то процедуры оптимизации в формате метода оптимизации по критерию среднего геометрического будут следующими.

- 1) К таблице с оценками частных критериев приписывается дополнительный столбец.
- 2) В указанный столбец для каждой альтернативы (т.е. по строкам таблицы) записывают значения среднего геометрического показателя для элементов соответствующей строки.
- 3) Затем в задачах на минимум из всех элементов этого дополнительного столбца выбирается наименьший такой показатель (в задачах, когда все частные критерии максимизируются ищется наибольший из показателей).
- 4) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации.
- 5) Если выбранный показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, т.к. в формате этого критерия такие альтернативы будут оптимальными по Парето (в этом легко убедиться на основе представленной ниже геометрической интерпретации).

ПРИМЕР 3.11. Рассмотрим ситуацию, представленную ранее в примерах 1.1 и 2.2. Выбирается наилучший вариант из семи альтернатив (A, B, C, D, E, F и G). Множество частных критериев задано четырьмя критериями (они минимизируются). Оценки частных критериев (в тыс. у.е.) приведены в таблице 3.7. Там уже приписан дополнительный столбец. В нем представлены показатели среднего геометрического для оценок частных критериев (по строкам) в формате каждой альтернативы. Требуется: найти наилучшую альтернативу по методу среднего геометрического.

Таблица 3.7.

Выбор наилучшего решения по критерию среднего геометрического.

Решения	Значения частных критериев				Показатель среднего геометрического
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	

A	45	27	159	29	$\sqrt[4]{45 \cdot 27 \cdot 159 \cdot 29} = 48,65$
B	40	34	148	28	$\sqrt[4]{40 \cdot 34 \cdot 148 \cdot 28} = 48,72$
C	42	35	126	24	$\sqrt[4]{42 \cdot 35 \cdot 126 \cdot 24} = 45,92$
D	41	34	170	28	$\sqrt[4]{41 \cdot 34 \cdot 170 \cdot 28} = 50,75$
E	45	35	146	26	$\sqrt[4]{45 \cdot 35 \cdot 146 \cdot 26} = 49,45$
F	43	32	147	27	$\sqrt[4]{43 \cdot 32 \cdot 147 \cdot 27} = 48,34$
G	42	36	122	25	$\sqrt[4]{42 \cdot 36 \cdot 122 \cdot 25} = 46,34$

РЕШЕНИЕ. В дополнительный столбец таблицы 3.7 записываем показатели критерия выбора (они найдены по формулам для среднего геометрического). Среди элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 45,92 (выделен в таблице) и отвечает альтернативе С (по строке таблицы). Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива С и принимается в качестве оптимальной по методу среднего геометрического.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Линии уровня критерия выбора по методу среднего геометрического в ситуации $N = 2$, как показывает рис. 3.13, представляют собой семейство гипербол. Их центры симметрии расположены на биссектрисе первого координатного угла. Число «К» может использоваться для идентификации такой линии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите в пространстве $(U; V)$ график функции $\sqrt{u \cdot v} = K$. В рамках указанного подхода к решению задачи многокритериальной оптимизации учитываются все оценки частных критериев. При этом в общем случае (случай произвольного числа N частных критериев) функция, задающая семейство «линий уровня» в пространстве издержек / потерь (см. главу 1) определяется равенством: $f(u; v; \dots; z) = \sqrt[N]{u \cdot v \cdot \dots \cdot z}$.

Вернемся к случаю $N = 2$. Приведем соответствующие иллюстрации семейства линий уровня для критерия по методу среднего геометрического в пространстве издержек / потерь сначала для случая задачи минимизации двух частных критериев, когда $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Соответствующие линии уровня указанного критерия представлены на рис. 3.13. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и H);
- среди частных критериев нет такого критерия, показатели которого существенно превышали бы показатели другого частного критерия.

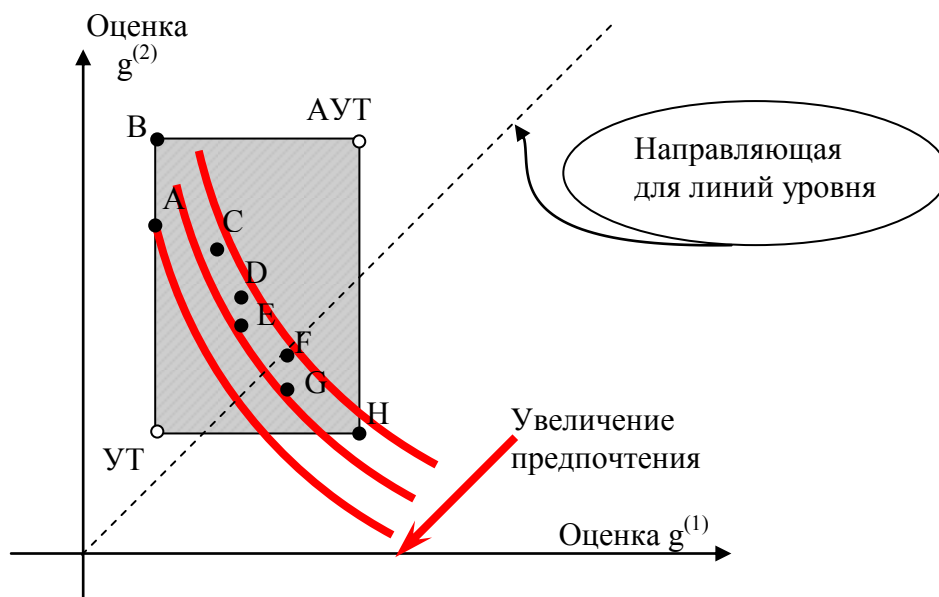


Рис. 3.13. Иллюстрация семейства линий уровня для критерия среднего геометрического (при минимизации двух частных критериев)

На рис. 3.13 семейство линий уровня для критерия выбора по методу среднего геометрического (при $N = 2$) представляет собой семейство гипербол. Их ось симметрии совпадает с биссектрисой первого

координатного угла. У линии уровня «K» (см. главу 1) обе координаты любой ее точки сбалансированы таким образом, что их показатель среднего геометрического равен числу K. Поэтому число K и используют для идентификации конкретной линии уровня.

Направление предпочтений указано в сторону уменьшения показателя такого критерия (для задач минимизации обоих частных критериев). Указанный рисунок иллюстрирует, что решение многокритериальной задачи минимизации на основе указанного критерия в ситуации $N = 2$ имеет следующую графическую интерпретацию.

Пусть вдоль биссектрисы первого координатного угла «передвигается» специальный инструмент. Это - соответствующие гиперболы. При этом «движение» осуществляется в направлении улучшения / уменьшения показателя критерия выбора, т.е. к началу системы координат. Тогда последняя (из анализируемых) точка в поле потерь, которую «захватит» этот инструмент при указанном движении, будет соответствовать оптимальному выбору по этому методу. Легко видеть, что в ситуации, представленной на этом рисунке, оптимальной альтернативой по методу критерия среднего геометрического будет альтернативное решение A.

Если наилучший показатель по критерию среднего геометрического будет достигаться сразу у нескольких анализируемых альтернативных решений, то все они будут оптимальными по Парето. Поэтому, в формате указанного подхода к оптимизации можно не задействовать процедуры проверки найденного решения на оптимальность по Парето.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Представленный аппарат линий уровня для критерия выбора по методу среднего геометрического позволяет весьма просто находить наилучшее решение по указанному критерию, если задача оптимизации формализована в графическом представлении. Проиллюстрируем это следующими примерами.

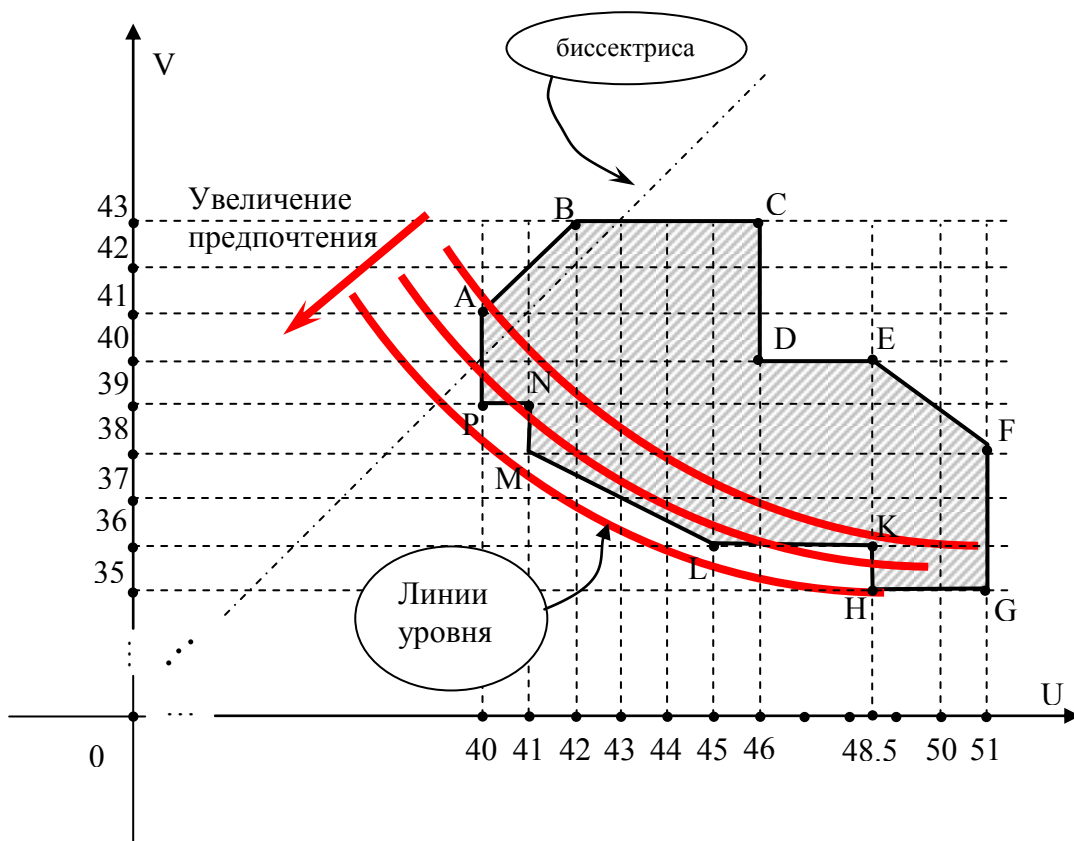


Рис. 3.14. Графическое решение задачи минимизации двух критериев (в формате метода среднего геометрического).

ПРИМЕР 3.12. Нахождение наилучшего решения по методу среднего геометрического (при минимизации двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек/потерь $(U \times V)$, где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, задано графически (рис. 3.14). Требуется: найти наилучшее решение по методу среднего геометрического.

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора наилучшего решения по методу среднего геометрического при минимизации заданных частных критериев представлена на рис. 3.14. Последняя точка (в соответствии с указанным направлением предпочтений), которую «захватит» семейство линий уровня в виде представленных гипербол, это - точка Н. Поэтому альтернатива Н является оптимальным решением по указанному критерию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание на то, что линии уровня представленного здесь критерия выбора имеют выпуклость, которая, вообще говоря, может не устраивать многих ЛПР. Семейство линий уровня этого критерия является выпуклым вниз. Рис. 3.13 – 3.14 вполне отчетливо иллюстрируют эту особенность. Некоторых ЛПР это может не устраивать. Например, они могут явно или неявно требовать, чтобы в задачах минимизации частных критериев линии уровня были бы выпуклыми именно вверх. Такое несоответствие (формата выпуклости для семейства линий уровня) предпочтениям ЛПР может устранить модификация критерия среднего геометрического, которая рассматривается в следующем параграфе.

3.5. Модификация метода среднего геометрического

Чтобы в пространстве значений частных критериев изменить выпуклость для семейства линий уровня критерия выбора по методу среднего геометрического, надо изменить формат анализируемых оценок. Применительно к задачам минимизации частных критериев это можно сделать следующим образом. От оценок частных критериев перейдем к оценкам следующего типа. Каждой альтернативе сопоставим оценку для выигрыша, который она обеспечивает (по каждому частному критерию) относительно антиутопической точки АУТ в поле издержек/потерь. Напомним, что координаты указанной АУТ определяются равенством

$$АУТ = (g_{\max}^{(1)} ; g_{\max}^{(2)} ; \dots ; g_{\max}^{(N)}),$$

где $g_{\max}^{(k)}$ обозначает наихудшее (наибольшее) значение из всех оценок для анализируемых альтернатив по частному критерию $g^{(k)}$, т.е. $g_{\max}^{(k)} = \max\{g^{(k)}(\vec{x})\}$. Для конкретного решения \vec{x} из области допустимых решений выигрыш по k -му частному критерию (относительно указанной АУТ) составляет $g_{\max}^{(k)} - g^{(k)}(\vec{x})$. Оценки указанного типа будем использовать для нахождения среднего геометрического показателя, определяющего критериальную функцию выбора. Предварительно реализуем требуемую модификацию. Для того, чтобы ни одна из таких оценок для указанных «выигрышей» не была равна нулю, введем понятие модифицированной антиутопической точки (АУТ_{mod}). Ее координаты определим на единицу большими, чем координаты АУТ:

$$АУТ_{\text{mod}} = (1 + g_{\max}^{(1)} ; 1 + g_{\max}^{(2)} ; \dots ; 1 + g_{\max}^{(N)}).$$

Для решения \vec{x} из области допустимых решений выигрыш по k -му частному критерию (относительно указанной АУТ_{mod}) составляет $1 + g_{\max}^{(k)} - g^{(k)}(\vec{x})$. Для таких параметров выигрышей можно определять показатель среднего геометрического. При этом, чем большим будет такой показатель, тем более предпочтительной будет альтернатива (в формате задач минимизации частных критериев).

При таком подходе на основе заданных частных критериев в рамках исходной многокритериальной задачи минимизации частных критериев формируется критерий выбора $F(\vec{x})$ следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N (1 + g_{\max}^{(k)} - g^{(k)}(\vec{x}))}.$$

Точка максимума этой критериальной функции выбора $F(\vec{x})$ принимается как искомое оптимальное решение (в формате задач минимизации частных критериев). Если максимальное значение функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения может быть выбрано любое из них. Все они будут оптимальными по Парето. Обоснование этого получим при графической интерпретации семейства линий уровня критерия.

ПРИМЕР 3.13. Пусть в условии примера 1.2 для оптимизации используется критерий выбора по модифицированному методу среднего геометрического. Заданы два частных критерия. Оба они минимизируются: 1) минимизация ожидаемых годовых затрат на эксплуатацию агрегата в зависимости от выбираемой его мощности и надежности; 2) минимизация ожидаемых годовых издержек на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов. Наихудшие (наибольшие) значения оценок по частным критериям для допустимых решений составляют (см. например, рис. 3.6): $g_{\max}^{(1)} = 4$ и $g_{\max}^{(2)} = 4$. Поэтому рассматриваем задачу минимизации: $\sqrt{(5 - 2x + y) \cdot (x + 2y)} \rightarrow \max$ при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

РЕШЕНИЕ. Указанная задача эквивалентна следующей: $(5 - 2x + y) \cdot (x + 2y) \rightarrow \max$ при том же условии. Для точек множества Парето, как мы уже знаем, $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2). Поэтому имеем:

$$(6 - 2x) \cdot (2 + x) \rightarrow \max \quad \text{при условии } x \in [1; 2].$$

Оптимизируемая здесь функция представляет собой параболу (ветви вниз). Ее ось симметрии проходит через точку $x=0,5$. Соответственно минимальное значение в заданной области $x \in [1; 2]$ будет

достигаться на границе указанной области, причем в точке $x=1$. Точкой минимума представленной функции в области допустимых значений будет точка $x^* = 1$. Это приводит к выбору решения $x^* = 1$ и $y^* = 1$: требуется обеспечить максимальную надежность без запаса мощности агрегата.

Вернемся к процедурам модификации оценок частных критериев, в формате которых можно строить показатель критерия выбора на основе среднего геометрического, причем таким образом, чтобы семейство линий уровня (семейство гипербол) оказалось бы выпуклым вверх. Предложенные выше процедуры «привязывают» направляющую семейства линий уровня (для соответствующих гипербол) к АУТ. Некоторых менеджеров или ЛПР такая специфика аппарата линий уровня может не устраивать. Чтобы направляющая линий уровня такого критерия не была «привязана» к АУТ понятие модифицированной антиутопической точки следует вводить иным образом. Обозначим такую точку через АУТ(mod). Ее координаты в пространстве издержек/потерь определим равными между собой и совпадающими с максимальной из координат для введенной ранее точки АУТ_{mod} :

$$\text{АУТ(mod)} = (1 + \max\{g_{\max}^{(k)}\}; 1 + \max\{g_{\max}^{(k)}\}; \dots; 1 + \max\{g_{\max}^{(k)}\}).$$

Указанный прием модификации АУТ обеспечит следующую особенность в формате интересующих нас линий уровня. Направляющая семейства гипербол теперь будет «привязана» к началу координат, а не к АУТ. При этом для решения \vec{x} из области допустимых решений выигрыш по k -му частному критерию (но уже относительно указанной АУТ(mod)) составляет $1 + \max\{g_{\max}^{(k)}\} - g^{(k)}(\vec{x})$. Для указанных параметров выигрышей по каждому частному критерию аналогичным образом (как и в предыдущем случае) можно определять средний геометрический показатель применительно к анализируемым альтернативным решениям $\vec{x} \in X$. При этом, чем большим будет такой показатель, тем более предпочтительной принимается анализируемая альтернатива (в формате задач минимизации частных критериев).

При таком подходе в рамках исходной многокритериальной задачи минимизации частных критериев формируется критериальная функция выбора $F(\vec{x})$:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N (1 + \max\{g_{\max}^{(k)}\} - g^{(k)}(\vec{x}))}.$$

Точка максимума такой функции принимается в качестве оптимального решения. Если максимальное значение указанной критериальной функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения и в этом случае может быть выбрано любое из решений, представленных такими точками. Все они будут оптимальными по Парето. Обоснование этого получим при графической интерпретации семейства линий уровня критерия.

ПРИМЕР 3.13 (продолжение). Пусть в условии предыдущего примера для нахождения наилучшего решения из множества Парето используется критерий выбора по модифицированному методу среднего геометрического. При этом ЛПР требует, чтобы реализуемая менеджером модификация «привязала» направляющую линий уровня (семейства гипербол) к началу координат, а не к АУТ. Напомним, что наихудшие / наибольшие значения для оценок по частным критериям в области допустимых решений составляют (см. например, рис. 3.6): $g_{\max}^{(1)} = 4$ и $g_{\max}^{(2)} = 4$.

Координаты АУТ совпадают между собой. Это означает, что «привязка» направляющей для семейства линий уровня к АУТ автоматически обеспечивает ее «привязку» и к началу системы координат. Соответственно, требуемая адаптация системы линий уровня оказалась выполненной автоматически. Найденное в примере 3.13 решение соответствует указанным требованиям ЛПР.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Процедуры оптимизации (при табличном представлении задачи многокритериальной оптимизации) по модифицированному критерию среднего геометрического будут следующими.

- 1) От таблицы с оценками частных критериев переходим к таблице, которая представляет указанные выше параметры «выигрышей» для таких оценок относительно модифицированной антиутопической точки (точка АУТ_{mod} или точка АУТ(mod) в поле издержек / потерь).
- 2) К такой таблице с указанными параметрами «выигрышей» приписывается дополнительный столбец.
- 3) В дополнительный столбец для каждой альтернативы (т.е. по строкам таблицы) записывают значения среднего геометрического показателя для элементов соответствующей строки.
- 4) Затем в задачах многокритериальной оптимизации, когда все частные критерии минимизируются, из элементов этого дополнительного столбца выбирается наибольший такой показатель (в задачах, когда все частные критерии максимизируются можно искать наименьший из показателей).
- 5) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации.
- 6) Если выбранный показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, т.к. в формате этого критерия такие альтернативы будут оптимальными по Парето (в этом легко убедиться на основе представленной ниже геометрической интерпретации).

ПРИМЕР 3.14. Рассмотрим ситуацию, представленную в примерах 1.1 и 2.2, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (A, B, C, D, E, F и G). Множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями: они минимизируются. Оценки частных критериев заданы в таблице 3.8 (в тыс. у.е.). В дополнительных строках таблицы представлены координаты антиутопической точки и координаты соответствующих модифицированных антиутопических точек. Требуется: найти наилучшую альтернативу по модифицированному методу среднего геометрического.

Таблица 3.8.

Атрибуты задачи минимизации частных критериев.

Альтернативы	Оценки частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25
AУТ	45	36	170	29
AУТ _{mod}	46	37	171	30
AУТ(mod)	171	171	171	171

Таблица 3.9.

Выбор наилучшего решения по модифицированному критерию среднего геометрического (формат AУТ_{mod}).

Решения	«Выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к AУТ _{mod}				Средний геометрический показатель «выигрыша»
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	
A	1	10	12	1	$\sqrt[4]{1 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 1} = \sqrt[4]{120}$
B	6	3	23	2	$\sqrt[4]{6 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 2} = \sqrt[4]{828}$
C	4	2	45	6	$\sqrt[4]{4 \cdot 2 \cdot 45 \cdot 6} = \sqrt[4]{2160}$
D	5	3	1	2	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt[4]{30}$
E	1	2	25	4	$\sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 4} = \sqrt[4]{200}$
F	3	5	24	3	$\sqrt[4]{3 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 3} = \sqrt[4]{1080}$
G	4	1	49	5	$\sqrt[4]{4 \cdot 1 \cdot 49 \cdot 5} = \sqrt[4]{980}$

Таблица 3.10.

Выбор наилучшего решения по модифицированному критерию среднего геометрического (формат AУТ(mod)).

Решения	«Выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к AУТ _{mod}				Средний геометрический показатель «выигрыша»
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	
A	126	144	12	142	$\sqrt[4]{126 \cdot 144 \cdot 12 \cdot 142} = 74,57$
B	131	137	23	143	$\sqrt[4]{131 \cdot 137 \cdot 23 \cdot 143} = 87,65$

C	129	136	45	147	$\sqrt[4]{129 \cdot 136 \cdot 45 \cdot 147} = 103,79$
D	130	137	1	143	$\sqrt[4]{130 \cdot 137 \cdot 1 \cdot 143} = 39,95$
E	126	136	25	145	$\sqrt[4]{126 \cdot 136 \cdot 25 \cdot 145} = 88,78$
F	128	139	24	144	$\sqrt[4]{128 \cdot 139 \cdot 24 \cdot 144} = 88,55$
G	129	135	49	146	$\sqrt[4]{129 \cdot 135 \cdot 49 \cdot 146} = 105,65$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим формат модификации АУТ_{mod}. В таблице 3.9 представлены «выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к АУТ_{mod}. К ней приписываем дополнительный столбец с показателями среднего геометрического (по строке). Из элементов дополнительного столбца выбираем наибольший. Он равен $\sqrt[4]{2160}$ и отвечает альтернативе С (по строке). Альтернатива С принимается в качестве оптимальной по модифицированному методу среднего геометрического. Проиллюстрируем процедуры оптимизации в формате модификации АУТ(mod). От оценок частных критериев, представленных в таблице 3.8, переходим к новому формату таких оценок. А именно, переходим к таблице 3.10, в которой уже представлены «выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к АУТ(mod). Затем в дополнительном столбце записываем показатели критерия выбора: среднеегеометрические показатели указанных «выигрышей» в требуемом формате. Среди элементов дополнительного столбца выбираем наибольший. Он равен 105,65 (выделен в таблице 3.10) и отвечает альтернативе G (по строке таблицы). Она принимается в качестве оптимальной по модифицированному методу среднего геометрического (формат модификации АУТ(mod)). В этой ситуации отказ от «привязки» направляющей для линий уровня к АУТ (требование ее «привязки» к началу координат) изменил выбор.

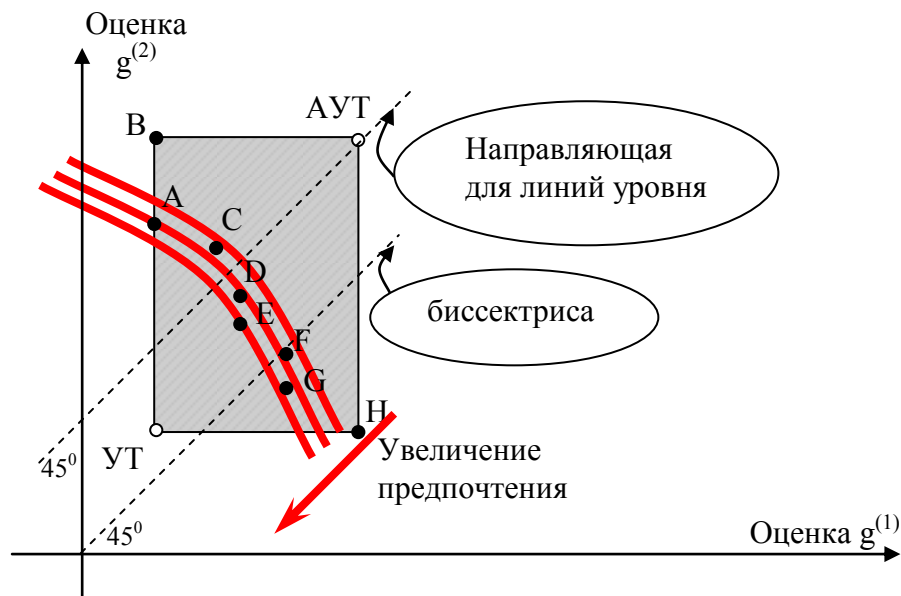


Рис. 3.15. Иллюстрация семейства линий уровня для модифицированного критерия среднего геометрического (формат АУТ_{mod} при минимизации частных критериев выбирается альтернатива Е).

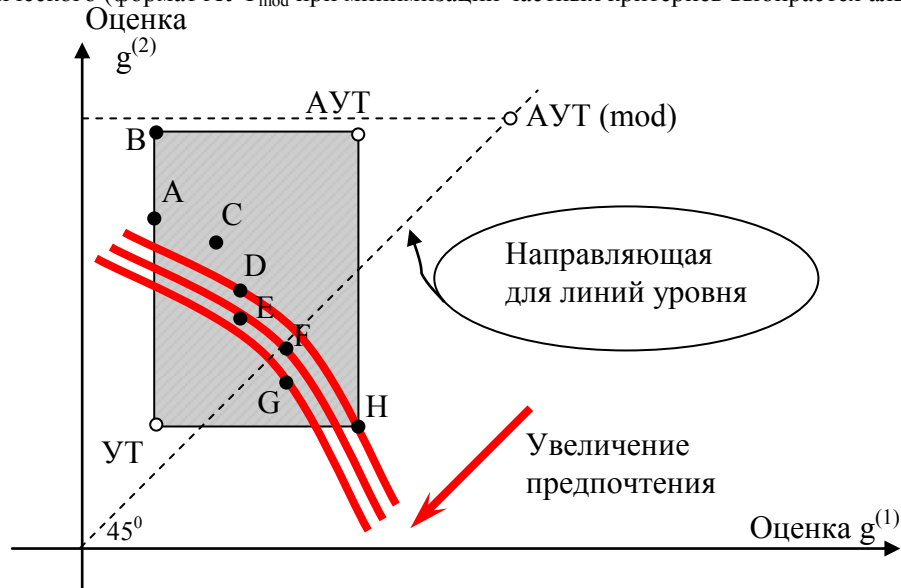


Рис. 3.16. Иллюстрация семейства линий уровня для модифицированного критерия среднего геометрического (формат АУТ(mod) при минимизации частных критериев выбирается альтернатива G).

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Аппарат линий уровня для критерия выбора по модифицированному методу среднего геометрического в ситуации $N = 2$, представлен на рис. 3.15 и 3.16. На рис. 3.15 семейство линий уровня критерия выбора представлено для случая, когда ЛПР устраивает формат модификации, который был обозначен через АУТ_{mod}. Это - семейство гипербол, для которых их центры симметрии расположены на линии, проходящей через АУТ параллельно биссектрисе первого координатного угла, а асимптоты соответствуют координатам АУТ_{mod}. На рис. 3.16 линии уровня представлены для случая, когда ЛПР требует обеспечить другой формат модификации: АУТ(mod). Это – снова семейство гипербол. Но в этом случае их центры симметрии расположены на биссектрисе первого координатного угла, а асимптоты соответствуют координатам АУТ(mod). Отметим, что линии уровня представленного критерия выбора, вообще говоря, не «нацелены» на утопическую точку поля полезностей. Некоторых ЛПР это может не устраивать. Например, потому, что применительно к рассмотренному здесь критерию может оказаться, что альтернативное решение, которое предпочитает ЛПР, не будет выбрано критерием такого типа. Такое несоответствие предпочтениям ЛПР может устранить соответствующая дополнительная модификация критерия, позволяющая «нацелить» его линии уровня на утопическую точку поля полезностей. Соответствующие процедуры будут представлены в следующем разделе (главы 6 и 7).

ВОПРОСЫ (по материалам главы 3).

11. Какова специфика метода последовательных уступок в формате задач многокритериальной оптимизации систем логистики?
12. Как реализуются процедуры этого метода при табличном представлении задач оптимизации систем логистики?
13. Уточните атрибуты процедур оптимизации многокритериальных решений по методу идеальной точки. В каком пространстве, и каким образом определяется понятие идеальной точки?
14. Какова специфика линий уровня для критерия выбора по методу идеальной точки?
15. Какие возможности дает менеджеру метод Гермейера в задачах оптимизации решений при многих критериях (в отличие от других методов такой оптимизации)?
16. Какова специфика линий уровня для этого критерия выбора? В частности, уточните, всегда ли в формате такого критерия гарантируется выбор оптимальной по Парето альтернативы.
17. Какие исключительные возможности дает менеджеру формат метода среднего геометрического? Всегда ли выбор по методу среднего геометрического будет оптимальным по Парето?
18. Почему формат метода среднего геометрического может оказаться неприемлемым для ЛПР? Как изменить выпуклость линий уровня такого критерия выбора в пространстве издержек/потерь?
19. Уточните атрибуты метода среднего геометрического, обусловливаемые «привязкой» направляющей к АУТ_{mod} и АУТ(mod). Как определяются координаты точек АУТ_{mod} и АУТ(mod)?
20. Уточните атрибуты процедур оптимизации для модифицированного метода среднего геометрического?

ГЛАВА 4

ОБОБЩЕННЫЕ КРИТЕРИИ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ. ОСОБЕННОСТИ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В СИСТЕМАХ ЛОГИСТИКИ

4.1. Возможность обобщения подхода Гермейера к оптимизации многокритериальных задач логистики.

Термин «обобщенный» применительно к критерию выбора в формате задач многокритериальной оптимизации логистических систем характеризует следующую его особенность. Подразумевается, что управляющие параметры («весовые» коэффициенты) применительно к указанному критерию выбраны специальным образом. А именно, они выбираются так, чтобы (см. главу 1) *направляющая для линий уровня такого критерия выбора была «нацелена» на соответствующую утопическую точку*. Утопическая точка – это точка в пространстве значений частных критериев, координаты которой представляют наилучшие значения среди оценок частных критериев для анализируемых альтернатив. В формате представленного в главе 3 подхода критерия Гермейера применительно к задачам многокритериальной оптимизации имеются такие управляющие параметры. Их в общем случае задает ЛПП с учетом имеющейся системы предпочтений в пространстве значений частных критериев и специфики многокритериальной задачи оптимизации. Выбор указанных параметров позволяет менеджеру регулировать наклон направляющей для линий уровня критерия выбора в указанном пространстве. В этом параграфе отмечается, как такой подход можно использовать, чтобы позволить менеджеру «нацелить» выбор на утопическую точку поля издержек/потерь. Такой критерий выбора соответствует обобщенному критерию Гермейера. Если менеджер будет владеть таким приемом в формате подхода критерия Гермейера, то он сможет создавать новые модификации и для других критериев выбора (на основе синтеза указанных выше специальных свойств).

Как уже отмечалось в главе 3, в формате подхода критерия Гермейера (если все частные критерии минимизируются) формализуется критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ следующим образом: $F(\vec{x}) = \max \{ c_k \cdot g^{(k)}(\vec{x}) \}$. Максимум здесь ищется по всем доступным альтернативам, а $c_k > 0$ – параметры, которые задает менеджер (для адаптации линий уровня критерия к предпочтениям ЛПП).

Чтобы «нацелить» выбор на утопическую точку поля издержек/потерь, надо параметры $c_k > 0$ выбрать специальным образом. Их надо выбрать так, чтобы направляющая для линий уровня критерия проходила через начало системы координат и через УТ. Представим координаты утопической точки в пространстве издержек/потерь: $УТ = (g_{\min}^{(1)} ; g_{\min}^{(2)} ; \dots ; g_{\min}^{(N)})$. Если параметры $c_k > 0$ выбрать так, чтобы:

$$c_1 = 1/g_{\min}^{(1)}, c_2 = 1/g_{\min}^{(2)}, \dots, c_N = 1/g_{\min}^{(N)},$$

то это обеспечит требуемый наклон направляющей для линий уровня критерия. В этом случае семейство линий уровня рассматриваемого критерия будет определяться (см. главу 1) следующим его параметрическим представлением (« K » – показатель уровня):

$$\max \left\{ \frac{u}{g_{\min}^{(1)}} ; \frac{v}{g_{\min}^{(2)}} ; \dots ; \frac{z}{g_{\min}^{(N)}} \right\} = K.$$

Сама утопическая точка будет непосредственно представлять в указанном семействе линию уровня «1» (т.е. линию уровня при $K = 1$). Точка минимума синтезированной таким образом (при указанных значениях «весовых» коэффициентов) критериальной функции выбора $F(\vec{x})$ принимается как оптимальное решение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Представленный подход к формализации функции выбора полностью соответствует подходу, который в теории многокритериальной оптимизации также называют обобщенным минимаксным критерием. Термин «обобщенный минимаксный критерий» обычно подразумевает уже специальный конкретный выбор коэффициентов важности для частных критериев, при которых наклон направляющей для линий уровня будет ориентирован на утопическую точку. Линии уровня минимаксного обобщенного критерия и линии уровня обобщенного (в указанном выше смысле) критерия Гермейера совпадают. Все свойства указанных критериев также совпадают, как совпадает и оптимальный выбор на основе таких критериев. Поэтому все атрибуты обобщенного критерия Гермейера и их иллюстрации будут представлены ниже в параграфе, где анализируются такие атрибуты для минимаксного обобщенного критерия.

4.2. Минимизация обобщенного скалярного критерия

При таком подходе к решению многокритериальной задачи минимизации частных критериев $g^{(k)}(\vec{x}) \rightarrow \min$ ($k = 1, 2, \dots, N$) формализуется скалярная критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ следующим образом

$$F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N \frac{g^{(k)}(\vec{x}) - g_{\min}^{(k)}}{g_{\min}^{(k)}},$$

где $g_{\min}^{(k)}$, $k=1, \dots, N$, снова обозначает минимальное значение соответствующего k -го частного критерия на допустимой области решений. Точка минимума функции $F(\vec{x})$ принимается как оптимальное решение. Найденное в формате указанного метода оптимальное решение всегда будет принадлежать множеству решений, оптимальных по Парето.

УПРАЖНЕНИЕ. Данный подход можно рассматривать как *частный/специальный случай* метода взвешенной суммы оценок частных критериев. Делая такое сравнение, обратите внимание на возможность следующего способа задания критериальной функции:

$$F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot g^{(k)}(\vec{x}),$$

причем «весовые» коэффициенты c_k (здесь они определены равенствами $c_k = 1/g_{\min}^{(k)}$) для оценок частных критериев выбираются уже не произвольным образом по желанию менеджера или ЛПР. Они заданы таким образом, чтобы направляющая для линий уровня критерия выбора оказалась нацеленной на утопическую точку поля издержек/потерь (сравните с коэффициентами, представленными в предыдущем параграфе).

ПРИМЕР 4.1. Пусть в условиях примера 1.2 (см. гл.1) требуется найти наилучшее решение используя обобщенный скалярный критерий.

РЕШЕНИЕ. Реализуются следующие процедуры.

1) Для первого частного критерия $g^{(1)}(\vec{x}) = \varphi(x, y) = 2x - y$ находим его минимальное значение $g_{\min}^{(1)}$. А именно: $g_{\min}^{(1)} = 1$ (см. рис. 1.6 главы 1).

2) Для частного критерия $g^{(2)}(\vec{x}) = \psi(x, y) = 5 - x - 2y$ аналогично находим соответствующее минимальное значение в допустимой области: $g_{\min}^{(2)} = 1$ (рис. 1.6 главы 1).

Критериальная функция $F(\vec{x})$ имеет вид: $F(\vec{x}) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) - 2$. Соответственно получаем задачу минимизации:

$$3 + x - 3y \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$. Она полностью аналогична задаче из примера 2.4 (см. главу 2). Можно воспользоваться ее решением. Наилучшее решение из множества решений, оптимальных по Парето, дает точка $x^* = 1$ и $y^* = 1$: необходимо обеспечить максимальную надежность агрегата без запаса его мощности.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Процедуры оптимизации в формате рассматриваемого метода будут следующими.

- 11) В формате таблицы, где для всех анализируемых альтернативных решений представлены (в виде строк) показатели частных критериев, приписывается дополнительный столбец.
- 12) Чтобы заполнить такой дополнительный столбец, сначала определяются «весовые» коэффициенты для каждого частного критерия. Это - числа, обратные минимальному значению среди оценок, которые приведены в соответствующем столбце таблицы.
- 13) В соответствии с алгоритмом обобщенного скалярного критерия для каждой альтернативы определяются показатели «линии уровня» такого критерия: это взвешенная сумма элементов каждой строки (причем веса определены по правилу предыдущего пункта и соотносятся со столбцами таблицы). Указанные показатели для конкретной альтернативы записываются в дополнительный столбец (они соотносятся с соответствующей альтернативой по строке).
- 14) По элементам дополнительного столбца находится оптимальное альтернативное решение по методу обобщенного скалярного критерия: оно соответствует (по строке) именно наименьшему из всех элементов указанного дополнительного столбца.

Приведем иллюстрацию для случая, когда множество X допустимых альтернатив является дискретным. Вернемся к условному примеру 1.1 из главы 1.

ПРИМЕР 4.2. Анализируется ситуация, связанная с моделированием работы звена цепи поставок, когда нужно выбрать наилучший вариант организации поставок товара, причем, из семи доступных вариантов: А, В, С, D, Е, F и G. Множество частных критериев в этой ситуации представлено четырьмя критериями: они минимизируются. Для удобства изложения показатели этих частных критериев приведены (в тыс. у.е.) в таблице 4.1. Найдем оптимальное решение по методу обобщенного скалярного критерия.

РЕШЕНИЕ. Выбираем веса частных критериев:

$$c_1=1/40; \quad c_2=1/27; \quad c_3=1/122 \quad \text{и} \quad c_4=1/24$$

(предварительно надо найти минимальные элементы по столбцам таблицы 4.1). К указанной таблице с показателями частных критериев для анализируемых альтернатив уже приписан дополнительный

столбец. В этом столбце представлены показатели рассматриваемого обобщенного скалярного критерия применительно к каждой альтернативе. Для удобства изложения, требуемые в формате метода весовые коэффициенты, также представлены в ячейках таблицы с обозначениями частных критериев.

По минимальному элементу дополнительного столбца (он равен 4,4250 и выделен в таблице) находим оптимальное решение. Наилучшей альтернативой по методу обобщенного скалярного критерия является альтернатива G.

Таблица 4.1.

Значения оценок частных критериев для примера 4.2.

Решения	Значения частных критериев				Показатель обобщенного скалярного критерия $\sum_{k=1}^N c_k \cdot g^{(k)}$
	$g^{(1)}$ $c_1=1/40$	$g^{(2)}$ $c_2=1/27$	$g^{(3)}$ $c_3=1/122$	$g^{(4)}$ $c_4=1/24$	
A	45	27	159	29	4,6366
B	40	34	148	28	4,6390
C	42	35	126	24	4,3791
D	41	34	170	28	4,8444
E	45	35	146	26	4,4624
F	43	32	147	27	4,5901
G	42	36	122	25	4,4250

ЗАМЕЧАНИЕ. Найденное оптимальное решение по методу обобщенного скалярного критерия является оптимальным по Парето. Это будет иметь место всегда, даже если предварительно не отбрасывать альтернативы (D и E), которые не являются оптимальными по Парето.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Приведем иллюстрацию семейства линий уровня рассматриваемого обобщенного скалярного критерия в пространстве издержек / потерь для случая задачи минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Линии уровня критерия представлены на рис. 4.1. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками A, B, C, D, E, F, G и H);
- весовые коэффициенты для частных критериев определены в формате критерия так, что направляющая для линий уровня проходит через утопическую точку поля издержек/потерь.

На рис. 4.1 семейство линий уровня для рассматриваемого критерия выбора (при $N = 2$) представляет собой семейство прямых линий. Они являются перпендикулярными к направляющей, которая проходит через начало системы координат и соответствующую утопическую точку поля издержек/потерь. В этом легко убедиться, если учесть, что линия уровня «K» (см. главу 1) определяется в рассматриваемом пространстве следующим параметрическим ее представлением: $c_1 \cdot u + c_2 \cdot v = K$ (причем здесь $c_1=1/u_{min}$ и $c_2=1/v_{min}$). Очевидно, что вектор-нормаль для такой линии имеет координаты $(1/u_{min}; 1/v_{min})$, что и определяет ее наклон.

Указанный рисунок иллюстрирует ситуацию, когда наилучшая оценка для частного критерия $g^{(1)}$ является в два раза меньшей по величине, чем аналогичная оценка для $g^{(2)}$. Направление предпочтений указано в сторону уменьшения показателя «K» общего критерия выбора в поле издержек. В ситуации, представленной на рис. 4.1, оптимальной альтернативой по указанному критерию будет H или G (любая из них, поскольку представляющие их точки расположены на одной линии уровня и являются оптимальными по Парето).

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Проиллюстрируем их для рассматриваемого в этом параграфе критерия следующим примером.

ПРИМЕР 4.3. Нахождение наилучшего решения по методу обобщенного скалярного критерия (при минимизации двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Допустимые значения этих критериев в пространстве издержек ($U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$), заданы графически (см. рис. 4.2). Требуется: найти наилучшее решение по методу обобщенного скалярного критерия.

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора наилучшей альтернативы по методу обобщенного скалярного критерия представлена на рис. 4.2. Линии уровня для рассматриваемого критерия выбора параллельны между собой. Их наклон к осям координат задает направляющая, которая проходит через утопическую точку поля потерь и начало системы координат. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель рассматриваемого общего критерия выбора соответствует альтернативе P. Создается впечатление, что эта линия уровня будет проходить также и через точку M. Такое впечатление – ложное.

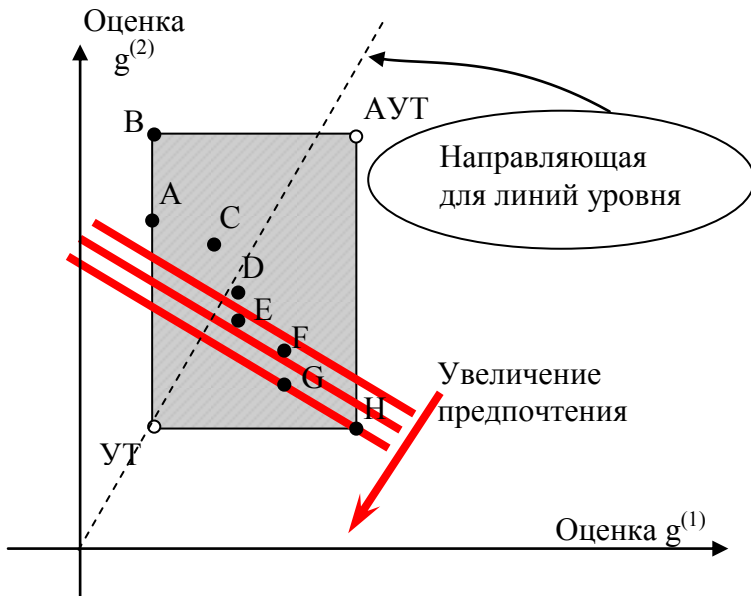


Рис. 4.1. Иллюстрация семейства линий уровня для критерия выбора по методу обобщенного скалярного критерия.

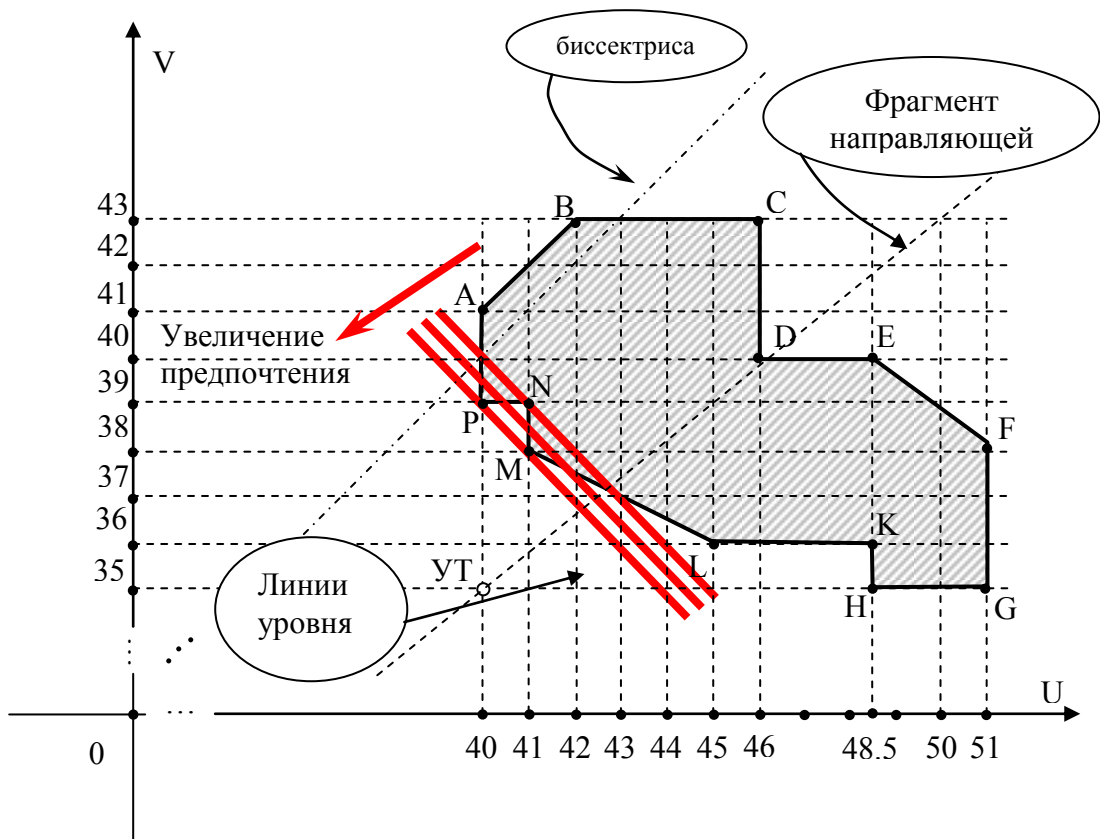


Рис. 4.2. Иллюстрация выбора наилучшего решения при минимизации двух критериев по методу обобщенного скалярного критерия.

Чтобы убедиться в этом, надо дополнить графическую интерпретацию соответствующими расчетами. Для альтернативы Р показатель «К_р» линии уровня составляет (при весах $c_1=1/40$ и $c_2=1/35$): $40/40+39/35= 2,114 = K_r$. Аналогично для альтернативы М имеем $41/40+38/35= 2,1107 = K_M$. Для альтернативы, представленной точкой L имеем: $45/40+36/35= 2,54 = K_L$. Для точки Н имеем: $48,5/40+35/35= 2,21 = K_H$. Как видим, наилучший показатель линии уровня соответствует точке Р.

Альтернатива, представленная точкой Р, является оптимальной по Парето (иначе и не могло быть, - отметьте почему). Она дает оптимальное решение по рассматриваемому критерию.

4.3. Минимаксный обобщенный критерий

При таком подходе на основе частных критериев $g^{(k)}(\bar{x}) \rightarrow \min$ ($k = 1, 2, \dots, N$) исходной многокритериальной задачи формализуется критериальная функция выбора следующим образом:

$$F(\bar{x}) = \max_{1 \leq k \leq N} \{c_k \cdot g^{(k)}(\bar{x})\},$$

где c_k – коэффициент важности каждого частного критерия. Соответственно точка минимума указанной критериальной функции $F(\bar{x})$ принимается в качестве оптимального решения.

Отличие представленного подхода от метода минимаксного критерия (в задачах оптимизации логистических систем при многих критериях) состоит только в использовании «весовых» коэффициентов (или коэффициентов важности) для частных критериев. Как правило, в формате *обобщенного минимаксного критерия* на практике в качестве коэффициента c_k выбирают значение $c_k = 1/g_{\min}^{(k)}$. Здесь $g_{\min}^{(k)}$, $k=1, \overline{N}$, снова обозначает минимальное значение соответствующего k -го частного критерия на допустимой области решений X . Такой выбор управляющих параметров, как уже было отмечено выше, позволяет менеджеру «нацелить» направляющую линий уровня критерия выбора на утопическую точку поля издержек/потерь.

Найденное в формате указанного метода оптимальное решение может не принадлежать множеству эффективных решений, оптимальных по Парето. Поэтому завершающей процедурой в формате этого подхода к оптимизации должна быть процедура проверки найденного решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 4.4. Пусть в условиях примера 1.2 (см. главу 1) для нахождения наилучшего решения используется минимаксный обобщенный критерий. В этой ситуации оба частных критерия должны входить в целевую функцию с одинаковыми весами (т.е. $c_1 = c_2 = 1$). Действительно, в формате этой задачи оптимизации имеем: $g_{\min}^{(1)} = 1$ и $g_{\min}^{(2)} = 1$. (Минимальные значения частных критериев в допустимой области решений представлены на рис. 1.6 главы 1). Поэтому получаем следующую задачу минимизации: $\max \{2x - y; 5 - x - 2y\} \rightarrow \min$ при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Из-за указанных «весовых» коэффициентов $c_1 = c_2 = 1$ (значения которых определялись с учетом наилучших оценок $g_{\min}^{(1)} = 1$ и $g_{\min}^{(2)} = 1$) полученная задача оптимизации полностью соответствует рассмотренной в главе 2 задаче оптимизации по обычному минимаксному критерию. Поэтому в качестве оптимального решения будет выбрано следующее решение: $x^* = 1,3$ и $y^* = 1$. При таком подходе наилучшее решение требует обеспечить максимальную надежность и 33 % запаса мощности агрегата.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если множество анализируемых альтернатив является дискретным, то процедуры оптимизации в формате метода оптимизации по минимаксному обобщенному критерию будут следующими.

- 6) Для каждого частного критерия определяется «весовой» коэффициент по следующей формуле. Это – число, обратное наилучшей/наименьшей оценке по соответствующему столбцу таблицы (со значениями этого частного критерия).
- 7) К матрице оценок частных критериев приписывается дополнительный столбец.
- 8) В указанный столбец по строкам записывают максимальные из значений для показателей следующего типа. Это – произведение оценки частного критерия на соответствующий «весовой» коэффициент. Такая процедура реализуется для каждого из вариантов решений (т.е. максимальные показатели указанного типа по строкам таблицы составят дополнительный столбец).
- 9) Из всех элементов указанного дополнительного столбца выбирается наименьший (образно говоря, «из всех зол выбирают наименьшее»).
- 10) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации.
- 11) Если наименьший показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана та из них (любая), которая будет оптимальной по Парето.

ПРИМЕР 4.5. Рассмотрим ситуацию, представленную в примерах 1.1 и 2.2, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (А, В, С, D, E, F и G). Множество

частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями, которые минимизируются. Оценки частных критериев приведены (в тыс. у.е.) в таблице 4.2. Требуется: найти наилучшую альтернативу по минимаксному обобщенному критерию.

Таблица 4.2.
Выбор по обобщенному минимаксному критерию.

Альтернативные решения	Значения частных критериев				$\text{Max}\{c_k \cdot g^{(k)}\}$
	$g^{(1)}$ $c_1=1/40$	$g^{(2)}$ $c_2=1/27$	$g^{(3)}$ $c_3=1/122$	$g^{(4)}$ $c_4=1/24$	
A	45	27	159	29	159/122
B	40	34	148	28	34/27
C	42	35	126	24	35/27
D	41	34	170	28	170/122
E	45	35	146	26	35/27
F	43	32	147	27	147/122
G	42	36	122	25	36/27

РЕШЕНИЕ. Для реализации процедур минимаксного обобщенного критерия поступаем следующим образом. Сначала определяем «весовые» коэффициенты для оценок частных критериев. Наилучший показатель по первому частному критерию составляет 40. Соответственно «весовой» коэффициент для этого частного критерия выбирается равным $c_1=1/40$. Аналогичным образом находим и остальные «весовые» коэффициенты (они приведены в ячейках табл. 4.2 с обозначениями частных критериев). После этого к таблице значений оценок частных критериев приписываем столбец (такая процедура уже формализована в таблице 4.2: это – столбец « $\text{Max}\{c_k \cdot g^{(k)}\}$ »). В нем по каждой строке записываем максимальный из показателей указанного выше типа. В частности, применительно к альтернативе А просматриваются следующие показатели: 45/40 ; 27/27 ; 159/122 и 29/24. Максимальным из них является 159/122 . Именно этот показатель и записывается в дополнительный столбец напротив альтернативы А. И т.д.

Наконец, из всех элементов полученного дополнительного столбца выбираем *наименьший*. Он равен 147/122 (выделен в таблице жирным шрифтом) и отвечает альтернативе F (по строке таблицы). Указанная альтернатива является оптимальной по Парето. Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива F и принимается в качестве оптимальной по минимаксному критерию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотренный пример 4.5 иллюстрирует следующую особенность процедур оптимизации в формате минимаксного обобщенного критерия. В отличие от обычного минимаксного критерия, если один из частных критериев имеет показатели, которые существенно превосходят показатели других частных критериев, то выбор по минимаксному обобщенному критерию фактически уже не будет превращаться в выбор только по одному частному критерию (с указанными большими показателями).

Рассмотренный пример 4.5 также можно использовать для иллюстрации следующей особенности. Если минимальный показатель дополнительного столбца будет достигаться при двух альтернативах (или при большем их числе), то случайно выбранное из них решение может оказаться не оптимальным по Парето, если будут отсутствовать процедуры отсева не эффективных решений. Проиллюстрируйте это самостоятельно, дополнив таблицу 4.2 еще одной специально сконструированной альтернативой.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Приведем иллюстрации семейства линий уровня минимаксного обобщенного критерия в пространстве издержек / потерь для случая задачи минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Соответствующие линии уровня критерия представлены на рис. 4.3. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернатив является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и Н);
- направляющая для линий уровня критерия выбора проходит через УТ (поля издержек/потерь).

На рис. 4.3 семейство линий уровня для минимаксного критерия (при $N = 2$) представляет собой семейство «угловых» линий. Они вплотную загнуты к конусам предпочтений для точек, расположенных вдоль наклонной направляющей, которая проходит через начало системы координат и через утопическую точку поля издержек/потерь. Направление предпочтений указано в сторону уменьшения показателя критерия. В ситуации, представленной на этом рисунке, оптимальной альтернативой по методу минимаксного обобщенного критерия будет решение E.

Этот рисунок иллюстрирует еще одну особенность процедур оптимизации в рамках указанного подхода. Наилучший показатель по минимаксному обобщенному критерию может достигаться сразу у нескольких альтернатив (альтернативы D и E). Поэтому, если в формате указанного подхода к оптимизации не будут учтены процедуры проверки найденного решения на оптимальность по Парето, то возможны нежелательные феномены: может быть выбрано решение, не оптимальное по Парето.

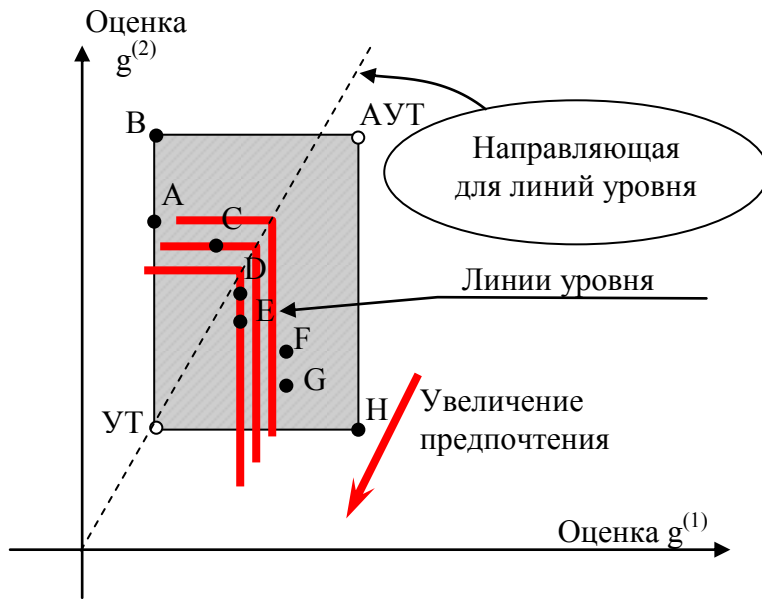


Рис. 4.3. Иллюстрация семейства линий уровня минимаксного обобщенного критерия (при двух частных критериях)

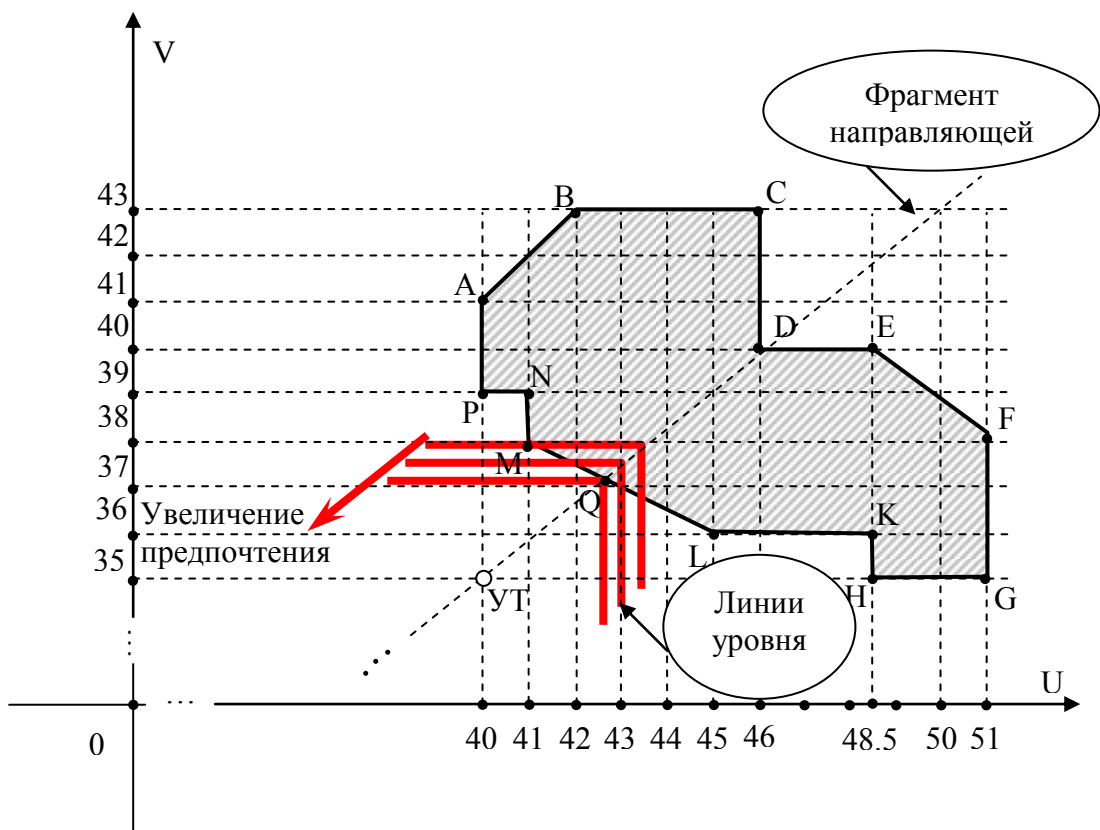


Рис. 4.4. Графическое решение задачи минимизации двух критериев (в формате метода минимаксного обобщенного критерия).

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Представленный аппарат линий уровня для минимаксного обобщенного критерия легко использовать для нахождения наилучших решений по указанному критерию, если они формализованы в графическом представлении. Проиллюстрируем это следующим примером.

ПРИМЕР 4.6. Нахождение наилучшего решения по методу минимаксного обобщенного критерия (при минимизации двух частных критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь $(U \times V)$, где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, задано графически (см. рис. 4.4). Требуется: найти наилучшее решение по методу минимаксного обобщенного критерия.

РЕШЕНИЕ. Множество решений, оптимальных по Парето, представлено в пространстве издержек / потерь следующими точками: это – точки P, H и отрезок [M,L], включая его концы.

Процедура выбора наилучшего решения по методу минимаксного обобщенного критерия представлена на рис. 4.4. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель минимаксного обобщенного критерия соответствует альтернативе Q (ее представляет точка на отрезке [M,L]). Координаты указанной точки – следующие: $Q = (42,55; 37,22)$. Эти координаты легко определяются, как координаты точки пересечения следующих двух линий. 1) Направляющей для линий уровня критерия выбора (ее уравнение в указанном пространстве с учетом координат утопической точки имеет вид $v = 35 \cdot u / 40$); 2) Линии, которая проходит через две точки M и L (зная координаты этих точек, уравнение такой линии может быть представлено соответственно в виде $(v-38)/(36-38) = (u-41)/(45-41)$).

Кстати, только одна указанная точка Q имеет лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Поэтому процедуры идентификации решения на оптимальность по Парето можно опустить. Итак, альтернатива Q является оптимальным решением по минимаксному обобщенному критерию.

4.4. Формат обобщенного критерия Гурвица

Как уже подчеркивалось, термин «обобщенный» применительно к критерию выбора имеет свою специфику для задач многокритериальной оптимизации систем логистики. Формат этого термина в рамках критерия выбора по методу Гурвица будет означать следующее.

- 1) Направляющая для линий уровня должна проходить через начало системы координат и через утопическую точку поля издержек/ потерь. Это означает, что применительно к оценкам частных критериев необходимо ввести «весовые» коэффициенты c_k , которые должны быть определены таким же образом, как и для всех, рассмотренных выше в этой главе критериев:

$$c_k = 1 / g_{\min}^{(k)}.$$

Здесь $g_{\min}^{(k)}$, $k=1, \overline{N}$, снова обозначает минимальное значение k -го частного критерия.

- 2) Критерий выбора должен сохранить особенность подхода к оптимизации по методу Гурвица. Последнее означает, что он должен использовать средневзвешенный результат по двум типам оценок частных критериев (после учета введенных «весовых» коэффициентов):
 - самый худший (с учетом «весовых» коэффициентов) результатов для оценок заданных частных критериев (как и в формате рассмотренного выше минимаксного обобщенного критерия); он будет учитываться со «своей важностью» $c \in [0; 1]$; выбор показателя c реализует ЛПП;
 - самый лучший из всех таких пересмотренных оценок частных критериев; он также будет учитываться со «своей важностью» $(1-c)$.

Результирующий показатель в формате обобщенного критерия Гурвица будет представлять средневзвешенный результат (с указанными «важностями» c и $1-c$) на основе синтеза указанных выше двух типов оценок. При таком подходе к решению многокритериальной задачи $g^{(k)}(\vec{x}) \rightarrow \min$ ($k = 1, 2, \dots, N$) критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ формализуется следующим образом:

$$F(\vec{x}) = c \cdot \max \{c_k \cdot g^{(k)}(\vec{x})\} + (1-c) \cdot \min \{c_k \cdot g^{(k)}\},$$

где максимум и минимум ищутся по всем доступным альтернативным решениям, а $c \in [0; 1]$ – параметр, который выбирает менеджер (для адаптации линий уровня критерия к предпочтениям ЛПП).

Точка минимума этой функции выбора $F(\vec{x})$ принимается как оптимальное решение. В случае, когда $c \neq 0$ и $c \neq 1$, найденное решение будет оптимальным по Парето. В противном случае на завершающем шаге потребуются процедуры проверки найденного решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 4.7. Пусть в условии примера 1.2 требуется найти наилучшее решение используя обобщенный критерий выбора по методу Гурвица. Заданы два частных критерия. Оба они минимизируются. Минимальной оценкой по первому частному критерию для анализируемых альтернатив будет число 1, т.е. $g_{\min}^{(1)} = 1$ (см., например, рис. 1.6 главы 1). Аналогично имеем равенство $g_{\min}^{(2)} = 1$. Поэтому в формате обобщенного критерия Гурвица требуется ввести следующие «весовые» коэффициенты: $c_1 = 1 / g_{\min}^{(1)} = 1$; $c_2 =$

$1 / g_{\min}^{(2)} = 1$. Тогда имеем задачу минимизации:

$$c \cdot \max \{1 \cdot (2x - y); 1 \cdot (5 - x - 2y)\} + (1-c) \cdot \min \{1 \cdot (2x - y); 1 \cdot (5 - x - 2y)\} \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Пусть для параметра «с» выбрано значение $c = 0,1$. Поскольку для точек множества Парето, как мы уже знаем, $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2), то приходим к задаче:

$$0,1 \cdot \max \{(2x - 1); (3 - x)\} + 0,9 \cdot \min \{(2x - 1); (3 - x)\} \rightarrow \min$$

при $x \in [1; 2]$.

Как и при решении примера 2.8 заметим, что:

- 7) при $x = 4/3$ значения заданных частных критериев здесь совпадают;
- 8) при этом первый из них дает оценку, возрастающую с ростом x ;
- 9) второй частный критерий дает оценку, убывающую с ростом x ;

В случае $c=0,1$, точкой минимума критериальной функции в области допустимых значений будет точка $x^* = 1$. Это приводит к выбору решения $x^* = 1$ и $y^* = 1$. Указанное решение и будет оптимальным по обобщенному критерию Гурвица. При таком подходе, как видим, наилучшее решение требует обеспечить максимальную надежность без запаса мощности агрегата.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Пусть при оптимизации системы логистики множество анализируемых альтернатив является дискретным. Укажем для такого случая требуемые процедуры оптимизации в формате обобщенного критерия Гурвица.

- 6) Находятся координаты утопической точки в поле издержек/потерь. Это – лучшие/наименьшие (в задачах минимизации частных критериев) оценки по каждому частному критерию. На основе найденных координат находятся «весовые» коэффициенты c_k для всех частных критериев (по приведенным выше формулам $c_k = 1/g_{\min}^{(k)}$).
- 7) Пересматриваются все оценки частных критериев с учетом найденных для них «весов» c_k (каждая оценка умножается на «вес» соответствующего критерия). Результаты формализуются в виде новой модифицированной таблицы с пересмотренными значениями частных критериев.
- 8) К такой модифицированной таблице с пересмотренными оценками частных критериев приписывается три дополнительных столбца.
- 9) В первый записывают наихудшие (максимальные в формате задач минимизации) из значений пересмотренных оценок частных критериев для каждого из вариантов решений (т.е. максимальные элементы по строкам указанной модифицированной таблицы).
- 10) Во второй записывают наилучшие (наименьшие в формате задач минимизации) из значений пересмотренных оценок частных критериев для каждого из вариантов решений (т.е. минимальные элементы по строкам указанной модифицированной таблицы).
- 11) В третий записывают средневзвешенный результат для элементов первых двух вспомогательных столбцов с «важностями» c и $(1 - c)$. Коэффициент важности «с» выбирается ЛПР из множества $c \in [0; 1]$; он соотносится именно с тем вспомогательным столбцом, в котором записаны наихудшие пересмотренные оценки частных критериев.
- 12) Затем из всех элементов указанного третьего дополнительного столбца выбирается наименьший, поскольку показатели оценок относятся к полю издержек / потерь (образно говоря, снова «из всех зол выбирают наименьшее»).
- 8) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу третьего дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации.
- 9) Если $c \neq 1$ и $c \neq 0$, то найденное решение всегда будет оптимальным по Парето. В противном случае потребуются проверить найденное решение на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 4.8. Для иллюстрации и сравнения результатов выбора, вернемся к ситуации, представленной в примерах 1.1 и 2.2. Выбирается наилучший вариант из семи допустимых альтернативных вариантов (А, В, С, D, Е, F и G) организации поставок сырья. Множество частных критериев задано четырьмя критериями: они минимизируются. Оценки частных критериев приведены (в тыс. у.е.) в таблице 4.3. Требуется: найти наилучшую альтернативу по обобщенному критерию Гурвица, если $c = 0,5$.

Таблица 4.3.

Оценки частных критериев и координаты УТ в формате примера 4.8.

Решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$ $c_1=1/40$	$g^{(2)}$ $c_2=1/27$	$g^{(3)}$ $c_3=1/122$	$g^{(4)}$ $c_4=1/24$
А	45	27	159	29
В	40	34	148	28

C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25
УТ	40	27	122	24

РЕШЕНИЕ. Сначала находим координаты УТ. Они уже приведены в дополнительной строке табл. 4.3. По этим координатам далее определяем «весовые» коэффициенты применительно к каждому частному критерию. Они также приведены в табл. 4.3 (см. ячейки с наименованием критерия). После этого пересматриваем оценки частных критериев с учетом найденных «весовых» коэффициентов для частных критериев. Каждую оценку умножаем на коэффициент, соотносимый со столбцом, в котором находится такая оценка. Результат представлен в модифицированной новой таблице (таблица 4.4).

Таблица 4.4.

Пересмотренные оценки частных критериев и выбор по обобщенному критерию Гурвица.

Решения	Значения частных критериев				Max {g ^(k) }	Min {g ^(k) }	Показатель критерия выбора
	g ⁽¹⁾ c ₁ =1/40	g ⁽²⁾ c ₂ =1/27	g ⁽³⁾ c ₃ =1/122	g ⁽⁴⁾ c ₄ =1/24			
A	45/40	27/27	159/122	29/24	159/122	27/27	1,152
B	40/40	34/27	148/122	28/24	34/27	40/40	1,129
C	42/40	35/27	126/122	24/24	35/27	40/40	1,148
D	41/40	34/27	170/122	28/24	170/122	41/40	1,209
E	45/40	35/27	146/122	26/24	35/27	26/24	1,189
F	43/40	32/27	147/122	27/24	147/122	43/40	1,140
G	42/40	36/27	122/122	25/24	36/27	122/122	1,166

К новой модифицированной таблице с пересмотренными оценками частных критериев приписываем три дополнительных столбца (такая процедура уже формализована в таблице 4.4: это – столбцы «Max g^(k)», «Min g^(k)» и последний). В первый из них по каждой строке записываем максимальное из соответствующих значений пересмотренных оценок частных критериев. Во второй - минимальное из значений пересмотренных оценок частных критериев по строкам такой таблицы. В последний третий столбец записываем взвешенные показатели первых двух вспомогательных столбцов с заданными «важностями» (0,5 и 0,5). Наконец, из всех элементов этого дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 1,129 (выделен в таблице) и соответствует альтернативе В (по строке матрицы). В рассматриваемом случае альтернатива В и принимается в качестве оптимальной.

Графическая интерпретация и линии уровня критерия. Линии уровня этого критерия составлены из двух отрезков прямых. Они соединяются на направляющей (это - не обязательно биссектриса первого координатного угла). Указанная направляющая проходит через следующие две точки. 1) Она проходит через начало системы координат. 2) Она проходит через УТ поля издержек/потерь. Отрезки, о которых шла речь, либо «загнуты» под острым углом к границе конуса предпочтения (случай, когда ЛПР выбирает значение $0,5 < c < 1$), либо «загнуты» под острым углом к границе антиконуса (случай, когда ЛПР выбирает значение $0 < c < 0,5$). Направляющая для указанных линий определяет углы наклона к координатным осям. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите график функции

$$c \cdot \text{Max} \{u/u_{\min}, v/v_{\min}\} + (1-c) \cdot \text{Min} \{u/u_{\min}, v/v_{\min}\} = K,$$

где u_{\min} и v_{\min} - координаты утопической точки поля издержек/ потерь (при различных значениях c из интервала $[0; 1]$).

Приведем иллюстрации линий уровня обобщенного критерия Гурвица при минимизации двух критериев ($N = 2$): $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Они представлены на рис. 4.5 (а-б) при разных значениях параметра « c ». Эти рисунки соотносятся со случаями, когда:

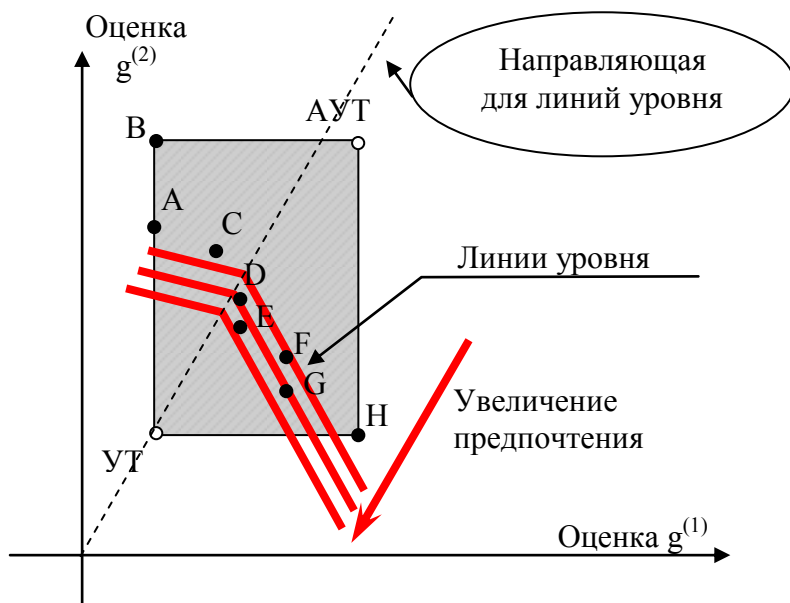


Рис. 4.5-а. Иллюстрация семейства линий уровня обобщенного критерия Гурвица (при $c = 0,7$ выбирается альтернатива Е).

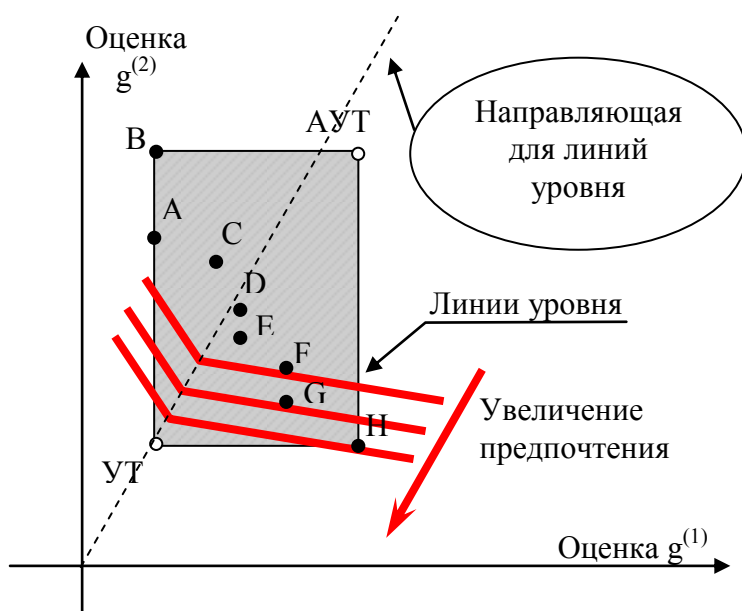


Рис. 4.5-б. Иллюстрация семейства линий уровня обобщенного критерия Гурвица (при $c = 0,2$ выбирается альтернатива Н).

➤ множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и H);

➤ для параметра «с» выбираются различные значения: $c = 0,7$; $c = 0,2$.

Рисунки иллюстрируют, что процедуры оптимизации по указанному критерию при $N = 2$ имеют следующую графическую интерпретацию. От начала системы координат к утопической точке поля издержек/потерь проходит направляющая прямая. Вдоль нее передвигается специальный инструмент. Он представляет собой угол, вершина которого лежит на направляющей, а стороны идут под углом к границе конусов предпочтений. Движение осуществляется от начала системы координат в сторону поля потерь. Тогда первая (из анализируемых) точка в поле потерь, которую «захватит» этот инструмент при указанном движении, как раз и будет соответствовать оптимальному выбору по обобщенному критерию Гурвица.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Проиллюстрируем их на примерах, которые были использованы ранее, рассмотрев различные варианты выбора коэффициентов важности «с».

ПРИМЕР 4.9. Нахождение наилучшего решения по обобщенному критерию Гурвица при $c = 0,6$ (минимизация двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$g^{(1)} \rightarrow \min,$$

$$g^{(2)} \rightarrow \min.$$

Допустимые значения этих критериев в пространстве издержек ($U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$), задано графически (см. рис. 4.6). Требуется: найти наилучшее решение по обобщенному критерию Гурвица, выбрав $c = 0,6$.

РЕШЕНИЕ. Множество решений, оптимальных по Парето, представлено в пространстве издержек / потерь следующими точками: это – точки Р, Н и отрезок [М, L], включая его концы. Процедура выбора наилучшего решения по обобщенному методу Гурвица при $c = 0,6$ представлена графически на рис. 4.6. Из рисунка понятно, что в зависимости от точности изображения (в зависимости от выбранного масштаба в формате указанного рисунка) «подозрительными» на оптимальность являются три альтернативы. Они представлены точками М, Q и Р. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель обобщенного критерия Гурвица соответствует альтернативе М.

Чтобы подтвердить это расчетами, сравним значения показателей обобщенного критерия Гурвица (при $c = 0,6$) соответственно для указанных «подозрительных» (на оптимальность – см. рис. 4.6) точек $M=(41; 38)$, $Q=(42,55; 37,22)$ и $P=(40; 39)$. Процедуры расчетов представлены в таблице 4.5. При этом учтены координаты утопической точки $УТ=(40; 35)$, которые обуславливают следующие «весовые» коэффициенты: - для первого частного критерия $c_1 = 1/40$; для второго частного критерия $c_2 = 1/35$.

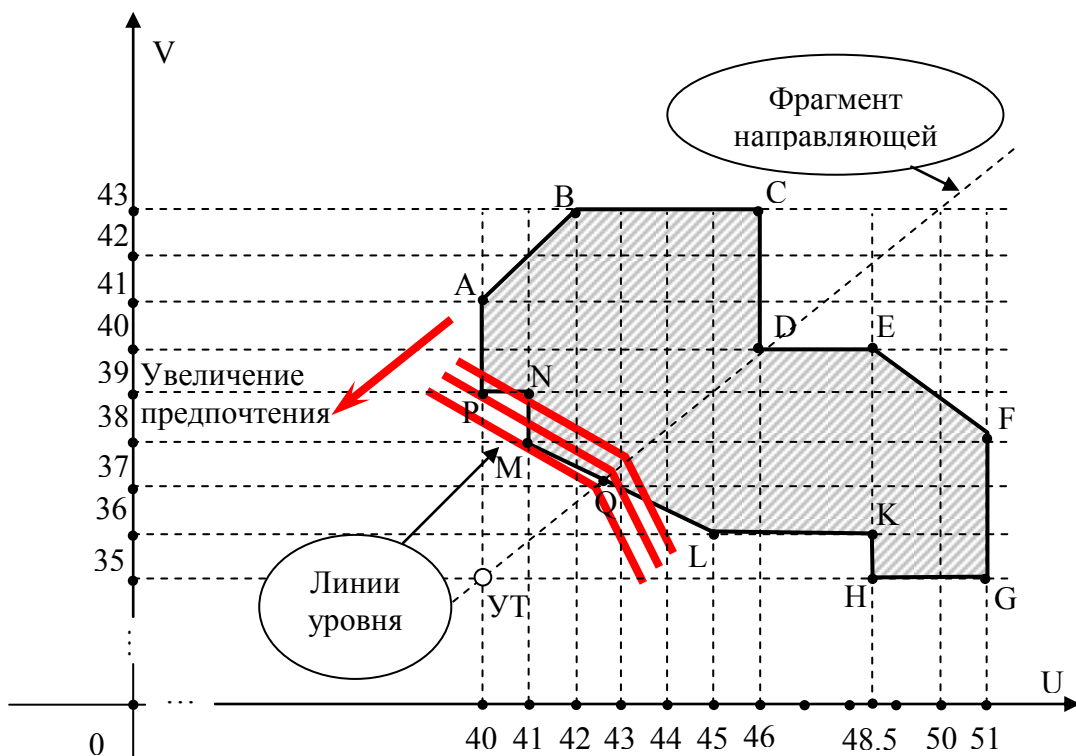


Рис. 4.6. Графическое представление задачи минимизации двух критериев (в формате обобщенного критерия Гурвица при $c = 0,6$).

Таблица 4.5.

Сравнительные расчеты для показателей линий уровня альтернатив М, Q и P ($c = 0,6$).

Точки	$g^{(1)}$ $c_1 = 1/40$	$g^{(2)}$ $c_2 = 1/35$	Модифицированные оценки		Max	Min	Показатель обобщенного критерия Гурвица ($c = 0,6$).
			$g^{(1)}/40$	$g^{(2)}/35$			
М	41	38	$\frac{41}{40}$	$\frac{38}{35}$	$\frac{38}{35}$	$\frac{41}{40}$	$\frac{38}{35} \cdot 0,6 + \frac{41}{40} \cdot 0,4 = 1,061$
Q	42,55	37,22	$\frac{42,55}{40}$	$\frac{37,22}{35}$	$\frac{42,55}{40}$	$\frac{37,22}{35}$	$\frac{42,55}{40} \cdot 0,6 + \frac{37,22}{35} \cdot 0,4 = 1,064$
Р	40	39	$\frac{40}{40}$	$\frac{39}{35}$	$\frac{39}{35}$	$\frac{40}{40}$	$\frac{39}{35} \cdot 0,6 + \frac{40}{40} \cdot 0,4 = 1,069$

Наименьший показатель обобщенного критерия Гурвица соответствует альтернативе М (равен 1,061 и выделен в таблице). Только одна указанная альтернатива имеет наилучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Поэтому процедуры идентификации ее на оптимальность по Парето можно опустить. Итак, при $c=0,6$ альтернатива М является оптимальным решением по указанному критерию.

ПРИМЕР 4.10. Нахождение наилучшего решения по методу Гурвица при $c = 0,2$ (минимизация двух критериев). Пусть, как и в предыдущем примере, минимизируются частные критерии:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь ($U \times V$), где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, задано, как и в предыдущем примере (см. рис. 4.7). Требуется: найти наилучшее решение по методу минимаксного критерия, выбрав $c = 0,2$.

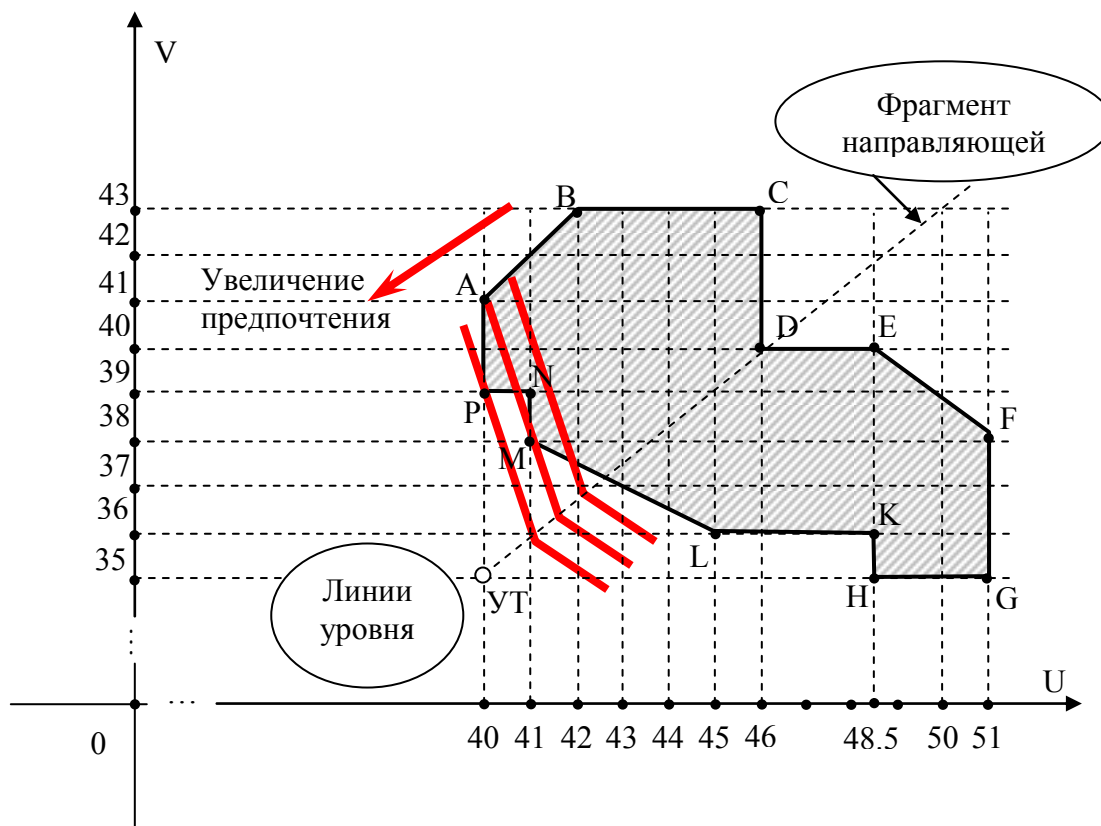


Рис. 4.7. Графическое представление задачи минимизации двух критериев (в формате обобщенного критерия Гурвица при $c = 0,2$).

РЕШЕНИЕ. Процедура оптимизации по методу Гурвица при $c = 0,2$ представлена на рис. 4.7. В зависимости от точности изображения (от масштаба в формате указанного рисунка) «подозрительными» на

оптимальность являются только две альтернативы. Они представлены точками М и Р. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель критерия выбора соответствует альтернативе Р. Чтобы подтвердить это расчетами, сравним значения показателей обобщенного критерия Гурвица (при $c = 0,2$) для точек $M=(41; 38)$ и $P=(40; 39)$. Процедуры расчетов представлены в таблице 4.6. При этом учтены координаты утопической точки $УТ=(40; 35)$. Они обуславливают следующие «весовые» коэффициенты: - для первого частного критерия $c_1 = 1/40$; для второго частного критерия $c_2 = 1/35$.

Таблица 4.6.

Сравнительные расчеты для показателей линий уровня альтернатив М и Р ($c = 0,2$).

Точки	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	Модифицированные оценки		Max	Min	Показатель обобщенного критерия Гурвица ($c = 0,2$).
	$c_1 = 1/40$	$c_2 = 1/35$	$g^{(1)}/40$	$g^{(2)}/35$			
М	41	38	$\frac{41}{40}$	$\frac{38}{35}$	$\frac{38}{35}$	$\frac{41}{40}$	$\frac{38}{35} \cdot 0,2 + \frac{41}{40} \cdot 0,8 = 1,037$
Р	40	39	$\frac{40}{40}$	$\frac{39}{35}$	$\frac{39}{35}$	$\frac{40}{40}$	$\frac{39}{35} \cdot 0,2 + \frac{40}{40} \cdot 0,8 = \mathbf{1,023}$

Наименьший показатель обобщенного критерия Гурвица соответствует альтернативе Р (равен 1,023 и выделен в таблице). Процедуру ее идентификации на оптимальность по Парето можно опустить (она одна имеет наилучший показатель). Итак, при $c=0,2$ альтернатива Р является оптимальным решением по указанному критерию.

4.5. Обобщенные критерии выбора в формате других методов оптимизации

Обобщенный критерий выбора по методу среднего геометрического. Выше было отмечено, что термин «обобщенный» применительно к критерию выбора в формате задач многокритериальной оптимизации систем логистики подразумевает следующее свойство относительно направляющей для линий уровня такого критерия. Она должна проходить через начало системы координат и через утопическую точку поля издержек/ потерь. Поэтому для оценок частных критериев в формате критерия выбора необходимо ввести «весовые» коэффициенты c_k . Такие коэффициенты необходимо определить по тем же формулам, которые были приведены выше: $c_k = 1/g_{\min}^{(k)}$. Здесь $g_{\min}^{(k)}$, $k=1, N$, снова обозначает минимальное значение соответствующего k -го частного критерия на допустимой области решений X .

Для критерия среднего геометрического обобщение такого формата дополнительно подразумевает, что получаемый в результате указанной модификации критерий выбора должен сохранить особенность подхода к оптимизации по методу среднего геометрического. Последнее означает, что надо использовать показатель *среднего геометрического по всем новым/пересмотренным оценкам частных критериев* (после учета введенных «весовых» коэффициентов в формате указанных оценок) для каждой альтернативы. В качестве оптимального решения выбирается та альтернатива, для которой указанный показатель будет наименьшим. Такой выбор всегда будет принадлежать множеству оптимальных по Парето решений.

При таком подходе к решению многокритериальной задачи оптимизации $g^{(k)}(\vec{x}) \rightarrow \min$ ($k = 1, 2, \dots, N$) формализуется критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N \{c_k \cdot g^{(k)}(\vec{x})\}}$$

Ее точка минимума принимается в качестве оптимального решения. Анализ такого решения на оптимальность по Парето не требуется.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формализованную выше критериальную функцию выбора $F(\vec{x})$ можно преобразовать следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N c_k} \times \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N g^{(k)}(\vec{x})}$$

Теперь нетрудно видеть, что задача минимизации критериальной функции выбора $F(\vec{x})$ эквивалентна следующей задаче

$$\sqrt[N]{\prod_{k=1}^N g^{(k)}(\vec{x})} \rightarrow \min.$$

Дальнейшие процедуры оптимизации будут полностью соответствовать процедурам, которые были представлены в главе 3 для оптимизации по методу среднего геометрического. Таким образом, можно сделать следующий вывод. Если представленные в этой главе процедуры модификации использовать в формате критерия по методу среднего геометрического, то это не изменит выбора. Другими словами, применительно к методу среднего геометрического указанные процедуры не являются по существу процедурами модификации: они не отражаются на выборе оптимального решения.

ПРИМЕР 4.11. Пусть в условии примера 1.2 требуется найти оптимальное решение, используя «обобщенный» критерий выбора по методу среднего геометрического.

РЕШЕНИЕ. Заданы два частных критерия. Они минимизируются. Минимальная оценка по первому частному критерию представлена числом 1, т.е. $g_{\min}^{(1)} = 1$ (см., например, рис. 1.6 главы 1). Аналогичное равенство имеет место и для минимальной оценки по второму частному критерию: $g_{\min}^{(2)} = 1$. Поэтому в формате обобщенного критерия по методу среднего геометрического необходимо ввести следующие «весовые» коэффициенты: $c_1 = 1/g_{\min}^{(1)} = 1$; $c_2 = 1/g_{\min}^{(2)} = 1$. В соответствии с подходом рассматриваемого критерия имеем задачу минимизации: $\sqrt{1 \cdot (2x - y) \times 1 \cdot (5 - x - 2y)} \rightarrow \min$ или задачу

$$(2x - y) \times (5 - x - 2y) \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Эта задача, как и ожидалось, оказалась эквивалентной задаче минимизации в формате примера 3.12 главы 3, где иллюстрировался метод среднего геометрического (без процедур его «обобщения»). Поэтому, опуская расчеты, отметим только, что оптимальным решением в этом случае будет выбор $x^* = 1$ и $y^* = 1$ (с максимальным обеспечением надежности агрегата и без запаса его мощности).

Обобщенный критерий выбора по модифицированному методу среднего геометрического. Напомним, что в пространстве значений частных критериев при желании менеджера можно изменить выпуклость для семейства линий уровня критерия выбора по методу среднего геометрического. Для этого изменяют (см. главу 3) формат анализируемых оценок. Анализируются не издержки и потери (по частным критериям), а выигрыши, которые обеспечивают альтернативы относительно так называемой модифицированной антиутопической точки (АУТ_{mod}). Показатели среднего геометрического для каждой альтернативы определяют именно в формате указанных оценок выигрышей (их максимизируют).

Следуя концепции рассматриваемого в этой главе подхода к обобщению критерия выбора (с учетом вводимых специальных весовых коэффициентов c_k), модифицированную утопическую точку в формате обобщенного подхода к оптимизации по модифицированному критерию среднего геометрического определим следующим образом (сравните с определением АУТ_{mod} в главе 3):

$$\text{АУТ}_{\text{mod}} = (c_1 + \hat{g}_{\max}^{(1)}; c_2 + \hat{g}_{\max}^{(2)}; \dots; c_N + \hat{g}_{\max}^{(N)}),$$

где $\hat{g}_{\max}^{(k)}$ обозначает наихудшее/наибольшее значение из всех «пересмотренных» оценок для анализируемых альтернатив по частному критерию $g^{(k)}$. Соответственно имеют место равенства: $\hat{g}_{\max}^{(k)} = \max_{\vec{x} \in X} \{ \hat{g}^{(k)}(\vec{x}) \} =$

$\max_{\vec{x} \in X} \{ c_k \cdot g^{(k)}(\vec{x}) \}$. «Весовые» коэффициенты « c_k » определяются по специальным формулам (они обеспечивают «нацеливание» линий уровня критерия на утопическую точку поля потерь в пространстве значений частных критериев): $c_k = 1/g_{\min}^{(k)}$. Здесь $g_{\min}^{(k)}$, $k=1, N$, как и ранее, обозначает минимальное значение соответствующего k -го частного критерия на допустимой области решений X .

Тогда для решения \vec{x} из области допустимых решений «пересмотренная» оценка для выигрыша по k -му частному критерию (рассматривается формат новых оценок $\hat{g}^{(k)}(\vec{x})$), причем выигрыш оценивается относительно указанной АУТ_{mod}) составляет $c_k + \hat{g}_{\max}^{(k)} - \hat{g}^{(k)}(\vec{x})$. По указанным показателям выигрышей определим их показатели среднего геометрического (для всех анализируемых альтернативных решений $\vec{x} \in X$). При этом, чем большим будет найденный показатель, тем более предпочтительной принимается анализируемая альтернатива (применительно к задачам минимизации исходных частных критериев).

При таком подходе на основе «пересмотренных» оценок для частных критериев функция выбора $F(\vec{x})$ формализуется следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N (c_k + \hat{g}_{\max}^{(k)} - \hat{g}^{(k)}(\vec{x}))}.$$

Точка максимума этой функции принимается в качестве оптимального решения (при минимизации частных критериев $g^{(k)}(\bar{x})$). Если максимальное значение указанной критериальной функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения может быть выбрано любое из решений, представленных такими точками. Все они будут оптимальными по Парето.

ЗАМЕЧАНИЕ. Учитывая равенства $\hat{g}^{(k)}(\bar{x}) = c_k \cdot g^{(k)}(\bar{x})$ легко видеть, что в формате рассматриваемой задачи оптимизации формализованную выше функцию выбора можно преобразовать (к исходно заданным показателям частных критериев) следующим образом:

$$F(\bar{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N c_k} \times \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N (1 + g_{\max}^{(k)} - g^{(k)}(\bar{x}))},$$

где $g_{\max}^{(k)}$ обозначает наибольшее значение из всех оценок для анализируемых альтернатив по исходно заданному частному критерию $g^{(k)}$, т.е. $g_{\max}^{(k)} = \max_{\bar{x} \in X} \{g^{(k)}(\bar{x})\}$.

Задача максимизации введенной здесь критериальной функции выбора $F(\bar{x})$ эквивалентна следующей задаче (сравните с критериальной функцией выбора по модифицированному критерию среднего геометрического, которая была представлена в главе 3):

$$\sqrt[N]{\prod_{k=1}^N (1 + g_{\max}^{(k)} - g^{(k)}(\bar{x}))} \rightarrow \max.$$

Поэтому в соответствии с подходом рассматриваемого здесь критерия дальнейшие процедуры оптимизации будут полностью соответствовать процедурам, которые были представлены в главе 3 для оптимизации по модифицированному методу среднего геометрического (предполагающего изменение формата выпуклости для линий уровня критерия). Таким образом, и в этой ситуации можно сделать следующий вывод. Если представленные в этой главе процедуры модификации использовать в формате критерия выбора по модифицированному методу среднего геометрического, то это не изменит оптимального решения. Другими словами, и применительно к модифицированному методу среднего геометрического указанные процедуры не являются по существу процедурами «обобщения» в требуемом смысле: они не отражаются на выборе оптимального решения.

Обобщенный критерий выбора по методу идеальной точки. Напомним, что термин «обобщенный» подразумевает, что имеет место следующее. Направляющая для линий уровня обсуждаемого критерия должна проходить через утопическую точку поля издержек/потерь (в задачах минимизации частных критериев). Поэтому для оценок частных критериев в формате критерия выбора вводятся «весовые» коэффициенты c_k . Их определяют по указанным выше формулам: $c_k = 1/g_{\min}^{(k)}$. Здесь $g_{\min}^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$, - минимальное значение k -го частного критерия на допустимой области решений.

Для критерия выбора по методу идеальной точки представленное выше обобщение дополнительно также подразумевает, что получаемый в результате модификации критерий выбора должен сохранить особенность подхода к оптимизации частных критериев по методу идеальной точки. Это означает, что критерий выбора должен использовать показатель расстояния в формате новых «пересмотренных» оценок по частным критериям (после учета введенных «весовых» коэффициентов применительно к указанным оценкам) для каждой альтернативы (относительно новой утопической точки). При этом в качестве оптимального решения будет выбрана та альтернатива, для которой указанное расстояние будет наименьшим. Такой выбор всегда будет принадлежать множеству оптимальных по Парето решений.

При указанном подходе к решению многокритериальной задачи минимизации частных критериев сначала «пересматриваются» их оценки. Пусть $\hat{g}^{(k)}(\bar{x})$ ($k = 1, 2, \dots, N$) обозначают такие новые пересмотренные оценки применительно к рассматриваемым альтернативам. Затем на основе полученных модифицированных оценок частных критериев формализуется критериальная функция выбора $F(\bar{x})$:

$$F(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{k=1}^N [\hat{g}^{(k)}(\bar{x}) - \min_{\bar{x} \in X} \{\hat{g}^{(k)}(\bar{x})\}]^2}.$$

Точка минимума $F(\bar{x})$ принимается в качестве оптимального решения. Процедуры идентификации на оптимальность по Парето не требуются. Выбранное решение всегда будет оптимальным по Парето.

ПРИМЕР 4.12. Пусть в условии примера 4.11 для нахождения оптимального решения используется обобщенный критерий выбора по методу идеальной точки.

РЕШЕНИЕ. Напомним, что минимизируются два частных критерия. Минимальная оценка по первому частному критерию составляет $\min_{\bar{x} \in X} \{g^{(1)}(\bar{x})\} = g_{\min}^{(1)} = 1$ (см., в частности, рис. 1.6 главы 1).

Аналогично для минимальной оценки по второму частному критерию имеем: $\min_{\bar{x} \in X} \{g^{(2)}(\bar{x})\} = g_{\min}^{(2)} = 1$.

Поэтому в формате обобщенного критерия по методу идеальной точки далее необходимо (как и в примере 4.11) ввести следующие «весовые» коэффициенты: $c_1 = 1/g_{\min}^{(1)} = 1$; $c_2 = 1/g_{\min}^{(2)} = 1$. Итак, в формате рассматриваемой задачи оптимизации выполняются равенства $\hat{g}^{(k)}(\bar{x}) = g^{(k)}(\bar{x})$. Поэтому дальнейшие процедуры оптимизации будут полностью соответствовать процедурам примера 3.4 главы 3. Для краткости изложения они опускаются. Подчеркнем только, что в качестве оптимального решения будет выбрана следующая альтернатива: $x^* = 1,2$ и $y^* = 1$ (максимальная надежность агрегата и 20% запаса его мощности).

Графическую иллюстрацию процедур оптимизации для обобщенного критерия по методу идеальной точки приведите самостоятельно.

4.6. Проблемные феномены выбора по обобщенным критериям для «смешанных» форматов задач оптимизации частных критериев

Формат задач многокритериальной оптимизации цепей поставок может требовать одновременно как минимизации одних частных критериев (соответствующие издержки, потери, штрафы, риски и т.п.), так и максимизации других (например: выручка, прибыль, качество логистического сервиса и т.п.). Такой формат задач оптимизации указанного типа удобно называть «смешанным». Представляя атрибуты задач многокритериальной оптимизации, в гл. 1 было подчеркнуто, что в рамках моделей, которые рассматриваются в этой книге, всегда принимается, что все частные критерии минимизируются. При этом обращалось внимание на то, что изменением знака функции с оценками частного критерия можно изменять направление ее оптимизации. Указанный подход к изменению направления оптимизации конкретного частного критерия позволил стандартизировать представление задач многокритериальной оптимизации, в частности, таким образом, чтобы все частные критерии минимизировались. Соответственно, при изложении материалов, представленных в этой главе и в предыдущих главах, предполагалось, что у менеджера не должно быть затруднений с использованием на практике излагаемых подходов к оптимизации.

Однако, это общее положение применительно к конкретным ситуациям может создавать проблемы, а также приводить к неожиданным и нежелательным результатам. Оказывается, что для обобщенных критериев выбора при решении задач многокритериальной оптимизации использование указанной процедуры (изменения знака функции частного критерия с целью получения задачи минимизации соответствующего частного критерия) может обусловить нежелательный феномен. Суть такого феномена прокомментируем следующим образом. Соответствующий частный критерий (в формате которого изменили знак на «минус») не окажет никакого влияния на оптимальный выбор. Другими словами, применяя обобщенный критерий выбора в таком случае, менеджер может неосознанно попасть в ситуацию, когда влияние указанного частного критерия будет нивелировано. Образно говоря, критерий выбора станет «слеп» по отношению к показателям указанного частного критерия. Произойдет вот что. Реализуя процедуры выбора на основе конкретного обобщенного критерия, менеджер, как мы уже знаем, будет рассчитывать на использование атрибутов такого критерия, которые позволят ему «нацелить» выбор на утопическую точку (УТ). Указанный факт «нацеливания» выбора на УТ действительно будет иметь место. Однако, при этом будет иметь место дополнительно и следующее. Может быть устранено влияние на выбор того частного критерия, в формате которого изменили направление оптимизации с «максимизации» на «минимизацию». При этом речь идет здесь о ситуации, когда все процедуры выбора будут формально реализованы менеджером без каких либо нарушений. Разумеется, о возможности такого аномального феномена «слепоты» (по отношению к показателям отдельного частного критерия) менеджер должен знать. Он также должен уметь избегать такой феномен. Поэту в данном параграфе рассмотрена модель, иллюстрирующая указанную специфику выбора в формате обобщенных критериев.

Для удобства понимания, для упрощения изложения и большей наглядности иллюстраций рассмотрим оптимизационную модель только с двумя критериальными функциями:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min \\ g^{(2)} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Как видим, формат рассматриваемой модели подразумевает: первый частный критерий минимизируется; второй – максимизируется. Такая исходная задача оптимизации, как уже отмечалось, может быть приведена к следующей задаче минимизации двух частных критериев:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min \\ g^{(2)} \cdot (-1) &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Теперь все частные критерии минимизируются. Это позволяет применять представленные в данной главе подходы к оптимизации с «нацеливанием» выбора на утопическую точку поля издержек/потерь. Аномальный феномен, сопутствующий такому формату задачи оптимизации в случае использования обобщенных критериев сначала представим на примере анализа конкретной / численной ситуации.

Моделирование конкретной ситуации. Среди семи альтернатив {A, B, C, D, E, F, G} выбирается наилучшая. Выбор реализуется по двум частным критериям. Показатель первого частного критерия

минимизируется ($g^{(1)} \rightarrow \min$), а второго – максимизируется ($g^{(2)} \rightarrow \max$). Показатели этих критериев представлены в табл. 4.7.

Таблица 4.7.
Атрибуты моделируемой ситуации

Решения	Показатель $g^{(1)} \rightarrow \min$	Показатель $g^{(2)} \rightarrow \max$
A	20	25
B	25	30
C	30	40
D	40	45
E	50	50
F	25	25
G	60	40

Для моделируемой ситуации найдем наилучшее решение на основе:

- обобщенного минимаксного критерия;
- обобщенного скалярного критерия;
- обобщенного критерия Гурвица.

Предварительно отметим, что альтернативы F и G не являются оптимальными по Парето (сравните, например, альтернативы F и B; а также сравните альтернативы G и C). Их далее можно не рассматривать. Среди анализируемых альтернатив останутся только следующие пять: {A, B, C, D, E}. Любая из них является оптимальной по Парето и, следовательно, может быть выбрана в качестве наилучшей или оптимальной (тем или иным ЛПР). Для реализации процедур выбора по указанным обобщенным критериям сначала изменим знак оценок второго частного критерия. Тогда направление оптимизации будет соответствовать требуемому для задач минимизации: $g^{(2)} \cdot (-1) \rightarrow \min$. С учетом указанной перемены знака для показателя второго частного критерия рассматриваемые альтернативы далее обозначаем через A*, B*, C*, D*, E*. Покажем, что в формате рассматриваемой ситуации менеджер с удивлением обнаружит следующее. Если использовать указанные обобщенные критерии выбора, то в качестве найденной оптимальной альтернативы всегда будет выступать именно та альтернатива, для которой показатель первого частного критерия (оценки которого не помножили на «минус») был наилучшим / минимальным (для моделируемой ситуации это – альтернатива A). Показатель второго частного критерия не окажет влияния на выбор (после удаления альтернатив, не оптимальных по Парето).

Выбор по обобщенному минимаксному критерию. Проиллюстрируем отмеченные положения сначала в формате процедур минимаксного обобщенного критерия. Они представлены в табл. 4.8 (в последней строке этой таблицы выписаны координаты утопической точки УТ* после перемены знака показателей второго частного критерия). В дополнительном столбце этой таблицы приведен показатель рассматриваемого критерия выбора. Напомним, он представляет собой наибольшее из значений (по строке) для отношений специального вида. Отдельное такое отношение есть результат деления оценки конкретного частного критерия на соответствующую координату (по столбцу) утопической точки УТ*. В качестве оптимальной принимается альтернатива с наименьшим показателем указанного типа (в дополнительном столбце). Суть указанных процедур – «нацелить» выбор на утопическую точку.

Таблица 4.8.
Выбор по обобщенному минимаксному критерию

Решения	Показатель $g^{(1)} \rightarrow \min$	Показатель $g^{(2)} \cdot (-1) \rightarrow \min$	Показатель обобщенного минимаксного критерия
A*	20	-25	$\text{Max}\{20/20; 25/50\}=1,00$
B*	25	-30	$\text{Max}\{25/20; 30/50\}=1,25$
C*	30	-40	$\text{Max}\{30/20; 40/50\}=1,50$
D*	40	-45	$\text{Max}\{40/20; 45/50\}=2,00$
E*	50	-50	$\text{Max}\{50/20; 50/50\}=2,50$
УТ*	20	-50	

Наименьший элемент дополнительного столбца в табл. 4.7 равен единице (выделен в таблице). Он соответствует альтернативе A*. Соответственно решение A является оптимальным по обобщенному минимаксному критерию. Представленные процедуры являются обычными для формата рассматриваемого критерия. Менеджеру будет трудно «заподозрить» наличие здесь какого-либо аномального феномена. Тем не менее, такой феномен уже имел место. Далее будет показано, что и в этой, и в аналогичных ситуациях указанный критерий всегда выберет альтернативу только по наилучшей оценке критерия $g^{(1)}$ (в моделируемой ситуации – всегда альтернативу A). Причем это всегда будет иметь место независимо от предлагаемого «баланса» компромиссов, который обеспечивают оценки второго частного критерия и независимо от предпочтений ЛПР, которые должен учитывать менеджер в формате такого баланса.

Геометрическую интерпретацию представленных процедур оптимизации дает рис. 4.8. Исходная задача выбора наилучшего решения (среди альтернатив А, В, С, D, E) будет представлена точками А*, В*, С*, D*, E* четвертого квадранта (после использования формата $g^{(2)} \cdot (-1) \rightarrow \min$). При этом линия уровня «К» для обобщенного минимаксного критерия будет задаваться равенством $\max\{u/20; v/(-50)\} = K$, где $u=g^{(1)}$ и $v=-g^{(2)}$, причем координаты УТ* заданы как УТ* = (20; -50). Такая линия уровня будет составлена из двух отрезков прямых, загнутых под прямым углом (в сторону, содержащую начало системы координат). Вершина угла будет расположена на так называемой направляющей прямой, которая проходит через начало координат и УТ* = (20; -50) в новом формате задачи оптимизации. Это иллюстрирует упомянутый рис. 4.8.

Выбор по обобщенному скалярному критерию. Соответствующие процедуры выбора представлены в табл. 4.9. В дополнительном столбце этой таблицы приведен показатель рассматриваемого критерия выбора. Напомним, он представляет собой сумму значений (по строке) для отношений специального вида. Отдельное такое отношение, как и в предыдущем случае, есть результат деления оценки конкретного частного критерия на соответствующую координату (по столбцу) утопической точки УТ*. В качестве оптимальной принимается альтернатива с наименьшим показателем указанного типа (в дополнительном столбце). Суть указанных процедур – «нацелить» выбор на утопическую точку.

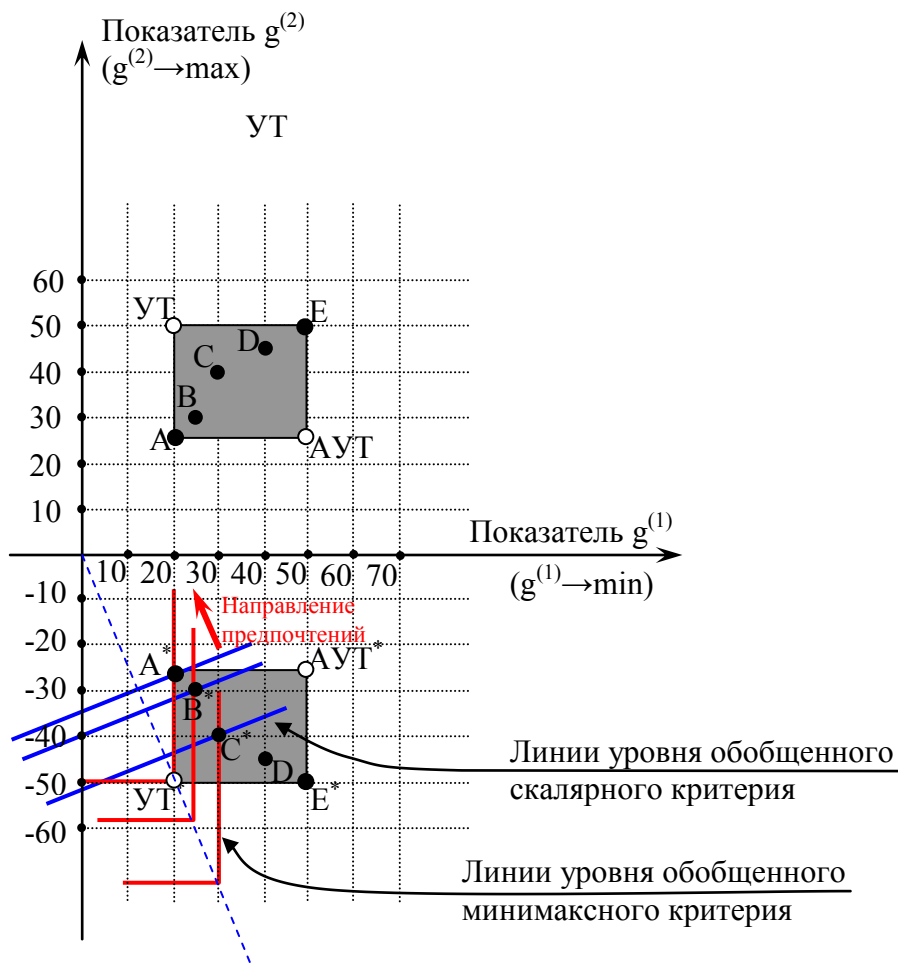


Рис. 4.8. Иллюстрация выбора для задачи $g^{(1)} \rightarrow \min \quad g^{(2)} \rightarrow \max$ (после преобразования $g^{(2)} \cdot (-1) \rightarrow \max$)

Наименьший элемент дополнительного столбца (с показателем обобщенного скалярного критерия, «нацеливающим» выбор на УТ*) в табл. 4.9 равен 1,5 (выделен в таблице). Он снова соответствует альтернативе А*. Соответственно, как и в предыдущем случае, решение А является оптимальным и по обобщенному скалярному критерию. Процедуры это критерия реализованы здесь корректно и менеджеру трудно будет обнаружить или заподозрить, что найденное решение было обусловлено только выбором по первому частному критерию (оценки второго частного критерия не повлияли и не повлияют на результат в формате таких процедур оптимизации).

Тем не менее, и в этом случае указанный выше феномен имел место. Далее будет доказано, что в аналогичных ситуациях и этот критерий всегда выберет альтернативу только по наилучшей оценке частного критерия $g^{(1)}$ (в моделируемой ситуации – всегда альтернативу А). Причем это снова будет иметь место

независимо от предлагаемого «баланса» компромиссов, которые обеспечивают оценки второго частного критерия (какими бы привлекательными для ЛПП они не были).

Таблица 4.9.

Выбор по обобщенному скалярному критерию

Решения	Показатель $g^{(1)} \rightarrow \min$	Показатель $g^{(2)} \cdot (-1) \rightarrow \min$	Показатель обобщенного скалярного критерия
A*	20	-25	$20/20 + 25/50 = \mathbf{1,50}$
B*	25	-30	$25/20 + 30/50 = 1,85$
C*	30	-40	$30/20 + 40/50 = 2,30$
D*	40	-45	$40/20 + 45/50 = 2,90$
E*	50	-50	$50/20 + 50/50 = 3,50$
УТ*	20	-50	

Графическая иллюстрация представлена на рис. 4.8. В четвертом квадранте (после использования формата оптимизации, для которого принято $g^{(2)} \cdot (-1) \rightarrow \min$) линия уровня «К» для обобщенного скалярного критерия определяется равенством $u/20 + v/(-50) = K$. Здесь, как и в предыдущем случае, $u = g^{(1)}$ и $v = -g^{(2)}$, причем координаты УТ* заданы как УТ*=(20; -50). Такая линия уровня представляет собой прямую, перпендикулярную / опорную к направляющей, которая проходит через начало координат и утопическую точку УТ*.

Выбор по обобщенному критерию Гурвица. Соответствующие процедуры выбора представлены в табл. 4.10. В ней первый дополнительный столбец содержит «наихудшие» показатели требуемого формата этого критерия вида: $\max\{u/20; v/(-50)\}$ по строкам таблицы. Второй дополнительный столбец содержит «наилучшие» показатели требуемого вида: $\min\{u/20; v/(-50)\}$ по строкам таблицы. В третьем дополнительном столбце представлены средневзвешенные показатели первых двух указанных дополнительных столбцов с весами $c=0,2$ и $(1-c)=0,8$ соответственно. Наименьший элемент третьего дополнительного столбца (с показателем обобщенного критерия Гурвица, «нацеливающим» выбор на УТ*) в табл. 4.10 равен 0,6 (выделен в таблице). Он снова соответствует альтернативе А*. Соответственно, как и в двух предыдущих случаях, менеджер обнаружит, что решение А является оптимальным и по обобщенному критерию Гурвица (при $c=0,2$).

Таблица 4.10.

Выбор по обобщенному критерию Гурвица

Решения	Показатель $g^{(1)} \rightarrow \min$	Показатель $g^{(2)} \cdot (-1) \rightarrow \min$	$\max\{u/20; v/(-50)\}$	$\min\{u/20; v/(-50)\}$	Показатель обобщенного критерия Гурвица
A*	20	-25	1	0,5	$0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0,5 = \mathbf{0,6}$
B*	25	-30	1,25	0,6	$0,2 \cdot 1,25 + 0,8 \cdot 0,6 = 0,98$
C*	30	-40	1,5	0,8	$0,2 \cdot 1,5 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,94$
D*	40	-45	2,0	0,9	$0,2 \cdot 2 + 0,8 \cdot 0,9 = 1,12$
E*	50	-50	2,5	1	$0,2 \cdot 2,5 + 0,8 \cdot 1 = 1,3$
УТ*	20	-50			

Обратим внимание на то, что выбор не изменится, если менеджер будет менять весовой параметр c в допустимых пределах $c \in [0; 1]$. В этом легко убедиться, если заметить, что показатели первых двух дополнительных столбцов обеспечивают альтернативе А* доминирование над всеми остальными альтернативами по рассматриваемому критерию Гурвица. Графическую иллюстрацию представьте самостоятельно. Подчеркнем, что альтернатива А оказалась выбранной в качестве оптимальной по обобщенному критерию Гурвица не потому, что она обеспечивает наилучший баланс для ЛПП по показателям рассматриваемых двух частных критериев. Здесь, как и в формате рассмотренных ранее обобщенных критериев, выбор альтернативы А был обусловлен только тем, что ее оценка по первому частному критерию (для которого не использовались процедуры перехода к формату минимизации) была наилучшей. Другими словами, критерий выбора будет «слеп» по отношению к оценкам второго частного критерия (для которого были использованы процедуры перехода к формату минимизации): они всегда не повлияют на результат выбора по обобщенному критерию Гурвица. Заметить наличие такого феномена «слепоты» при выборе наилучшего решения менеджеру не просто. Поэтому далее будет приведено соответствующее обоснование.

Феномен «слепоты» по отношению к показателям частного критерия. Рассмотрим модель оптимизации при двух критериях в общей ситуации. Пусть анализируются альтернативы X_i ($i=1, 2, \dots, n$). Их показатели частных критериев $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ обозначим через $(u_i; v_i)$. Наилучший показатель по первому частному критерию (напомним, что в рассматриваемой модели первый частный критерий *минимизируется*) обозначим через $u^* = \min\{u_i\}$. Пусть для удобства изложения указанный наилучший показатель по первому частному критерию достигается у альтернативы X_1 , т.е. имеет место равенство $u_1 = u^*$. Наилучший показатель по второму частному критерию (напомним, он *максимизируется*) обозначим через $v^* = \max\{v_i\}$. Пусть для удобства изложения указанный наилучший показатель по второму частному критерию

достигается у альтернативы X_n , т.е. имеет место равенство $v_n = v^*$. После преобразования показателя второго частного критерия $g^{(2)}$ в показатель $-g^{(2)}$ рассматривается следующая задача минимизации двух частных критериев

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min \\ g^{(2)} \cdot (-1) &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Представим обоснование указанного выше феномена «слепоты» применительно к различным обобщенным критериям выбора для задач многокритериальной оптимизации рассматриваемого типа.

Формат обобщенного минимаксного критерия. При использовании в качестве критерия выбора обобщенного минимаксного критерия для каждой альтернативы X_i рассматривается показатель, который

имеет следующий вид: $\max\left\{\frac{u_i}{u^*}; \frac{-v_i}{-v^*}\right\}$. Значения таких показателей записывают в дополнительном

столбце таблицы с оценками частных критериев. Затем среди них выбирается наименьший элемент. Он и определяет оптимальное решение по обобщенному минимаксному критерию.

Напомним, что для определенности и удобства изложения выше было принято, что $u_1 = u^*$. Поэтому $u_1 / u^* = 1$. Очевидно также, что показатель v_1 / v^* всегда (за исключением тривиальной ситуации, когда имеется абсолютное решение, - она дальше не рассматривается) будет меньше единицы. Соответственно для альтернативы X_1 (наилучшей по первому частному критерию) всегда будет выполнено равенство

$\max\left\{\frac{u_1}{u^*}; \frac{-v_1}{-v^*}\right\} = 1$. Другими словами, в дополнительном столбце таблицы с оценками частных критериев

для альтернативы X_1 всегда будет записано число 1 (см., в частности, табл. 4.8). Аналогичным образом нетрудно показать (оставляем это для самостоятельной проработки), что для всех остальных альтернатив X_i ($i \neq 1$) в формате обобщенного минимаксного критерия дополнительный столбец таблицы с оценками частных критериев всегда будет заполнен числом, большим, чем 1.

Таким образом, наименьший показатель указанного дополнительного столбца всегда (в оптимизационной модели рассматриваемого типа) попадет на альтернативу с наилучшим показателем по первому частному критерию (для которого не изменялось направление оптимизации). К оценкам второго частного критерия (которые помножили на знак «минус», изменив направление оптимизации с \max на \min) критерий выбора оказывается «слеп»: они в формате процедур оптимизации по обобщенному минимаксному критерию не могут повлиять на выбор. Именно это и иллюстрируют процедуры оптимизации, которые представлены в табл. 4.8.

Формат обобщенного скалярного критерия. При использовании в качестве критерия выбора обобщенного скалярного критерия для альтернатив X_i рассматриваются показатели, которые имеют

следующий вид: $\left\{\frac{u_i}{u^*} + \frac{-v_i}{-v^*}\right\}$ или $\left\{\frac{u_i}{u^*} + \frac{v_i}{v^*}\right\}$. Они будут записаны в дополнительном столбце таблицы с

оценками частных критериев. Среди элементов такого дополнительного столбца будет снова выбран наименьший. Он и определит оптимальное решение по обобщенному скалярному критерию.

Напомним, что в анализируемом случае для альтернативы X_1 (наилучшей по первому частному критерию) имеем $u_1 / u^* = 1$. Все остальные показатели вида u_i / u^* при $i > 1$ будут большими, чем 1. Кроме того, если уже отброшены и не участвуют в анализе альтернативы, которые не являются оптимальными по Парето, то для показателя второго частного критерия альтернативы X_1 выполняется равенство $v_1 = \min\{v_i\}$.

Соответственно сумма $\left(\frac{u_1}{u^*} + \frac{v_1}{v^*}\right)$, как раз, и будет наименьшей среди всех выражений типа $\left(\frac{u_i}{u^*} + \frac{v_i}{v^*}\right)$.

Другими словами, формат процедур оптимизации по обобщенному скалярному критерию позволяет утверждать следующее. В таблице с оценками частных критериев для альтернативы X_1 дополнительный столбец всегда будет содержать наилучший показатель этого критерия выбора (см., в частности, табл. 4.9). Как видим, для обобщенного скалярного критерия всегда окажется, что выбор будет определен только по показателю первого частного критерия (для которого исходно рассматривалась задача минимизации). При этом второй частный критерий (для которого задача максимизации была преобразована в задачу минимизации, дописав к его оценкам знак «минус») в выборе наилучшего решения не задействован. Снова можно образно сказать, что и этот критерий выбора оказался «слеп» к показателям второго частного критерия. Таким образом, «баланс компромиссов» при многокритериальном выборе и в этом случае оказался совсем тривиальным: всегда «победит» альтернатива, наилучшая по первому частному критерию. Это случится независимо от того, насколько хорошими будут показатели второго частного критерия у других альтернатив.

Формат обобщенного критерия Гурвица. При использовании в качестве критерия выбора обобщенного критерия Гурвица для каждой альтернативы X_i рассматривается показатель, который является средним арифметическим взвешенным для оценок двух типов (с весами c и $1-c$ соответственно):

1) наибольших/наихудших оценок (по строке матрицы) вида $\max\left\{\frac{u_i}{u^*}; \frac{-v_i}{-v^*}\right\}$;

2) наименьших/наилучших оценок (по строке матрицы) вида $\min\left\{\frac{u_i}{u_*}; \frac{-v_i}{-v_*}\right\}$.

Средневзвешенный результат записывают в специальном дополнительном столбце таблицы с оценками частных критериев. Наименьший из элементов такого специального столбца определяет оптимальное решение по обобщенному критерию Гурвица. Как уже было показано выше (см. формат процедур оптимизации по обобщенному минимаксному критерию), среди всех оценок первого типа, т.е.

наихудших оценок по строке вида $\max\left\{\frac{u_i}{u_*}; \frac{-v_i}{-v_*}\right\}$, наименьший результат (по альтернативам) будет соответствовать показателю альтернативы X_1 :

$$\max\left\{\frac{u_1}{u_*}; \frac{-v_1}{-v_*}\right\} < \max\left\{\frac{u_i}{u_*}; \frac{-v_i}{-v_*}\right\} \text{ для } i \neq 1.$$

Аналогично, учитывая, что $v_1 = \min\{v_i\}$ (см. формат процедур оптимизации по обобщенному скалярному критерию) среди всех оценок второго типа, т.е. оценок вида $\min\left\{\frac{u_i}{u_*}; \frac{-v_i}{-v_*}\right\}$, наименьший результат будет снова соответствовать именно показателю альтернативы X_1 :

$$\min\left\{\frac{u_1}{u_*}; \frac{-v_1}{-v_*}\right\} < \min\left\{\frac{u_i}{u_*}; \frac{-v_i}{-v_*}\right\} \text{ для } i \neq 1.$$

Соответственно при любом допустимом значении весового коэффициента c ($c \in [0; 1]$) показатель обобщенного критерия Гурвица примет наименьшее значение, как раз, применительно к альтернативе X_1 .

Другими словами, в формате процедур оптимизации по обобщенному критерию Гурвица соответствующий дополнительный столбец таблицы с оценками частных критериев всегда будет содержать наилучший показатель этого критерия именно в строке, которая соответствует альтернативе X_1 (см., в частности, табл. 4.10). Как видим, и для обобщенного критерия Гурвица всегда окажется, что выбор будет определен только по показателю первого частного критерия (для которого исходно рассматривалась задача минимизации). Показатели второго частного критерия (их помножили на «минус» единицу) на результат выбора наилучшего решения не влияют. Снова можно образно сказать, что и обобщенный критерий Гурвица оказался «слеп» к показателям второго частного критерия. Как видим, «баланс компромиссов» и в этом случае оказался тривиальным: всегда «победит» альтернатива, наилучшая по первому частному критерию (какими бы предпочтительными не были оценки по второму частному критерию для других альтернатив).

Разумеется, указанный тривиальный «баланс компромиссов», который был проиллюстрирован в формате представленных выше обобщенных критериев для решения задач многокритериальной оптимизации, не может всегда устраивать менеджера. Потому в указанной ситуации (при использовании обобщенных критериев выбора для рассматриваемой оптимизационной модели) надо уметь реализовать другой формат преобразования показателей второго частного критерия, чтобы получать задачу минимизации всех частных критериев без указанного феномена «слепоты». Необходимые атрибуты будут представлены и проиллюстрированы ниже.

Возможность исключить/обойти феномен «слепоты». Вернемся к исходной оптимизационной модели с двумя критериальными функциями:

$$g^{(1)} \rightarrow \min \text{ и } g^{(2)} \rightarrow \max.$$

Такая исходная задача оптимизации может быть приведена к задаче минимизации двух частных критериев также следующим образом:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min \\ 1/g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

В такой постановке все частные критерии минимизируются. Это снова позволяет применять обобщенные критерии выбора к оптимизации с «нацеливанием» выбора на утопическую точку поля издержек/потерь. Аномальный феномен, сопутствующий такому формату задачи оптимизации в случае использования обобщенных критериев будет исключен. Проиллюстрируем это на примере формализованной выше (см. табл. 4.7) конкретной / численной ситуации для: обобщенного минимаксного критерия; обобщенного скалярного критерия; обобщенного критерия Гурвица. Для реализации процедур выбора по указанным обобщенным критериям сначала модифицируем показатель второго частного критерия, чтобы направление оптимизации соответствовало требуемому: $1/g^{(2)} \rightarrow \min$. С учетом указанной модификации для показателя второго частного критерия рассматриваемые альтернативы далее обозначаем через $A^{**}, B^{**}, C^{**}, D^{**}, E^{**}$.

Выбор по обобщенному минимаксному критерию (модификация $1/g^{(2)} \rightarrow \min$). Отмеченные положения иллюстрирует табл. 4.11. В последней строке этой таблицы выписаны координаты утопической точки $УТ^{**}$ после указанной модификации показателей второго частного критерия.

Таблица 4.11.

Выбор по обобщенному минимаксному критерию (при $1/g^{(2)} \rightarrow \min$)

Решения	Показатель $g^{(1)} \rightarrow \min$	Показатель $1/g^{(2)} \rightarrow \min$	Показатель обобщенного минимаксного критерия
A**	20	1/25	$\text{Max}\{20/20; 50/25\}=2,0$
B**	25	1/30	$\text{Max}\{25/20; 50/30\}=1,6$
C**	30	1/40	$\text{Max}\{30/20; 50/40\}=1,5$
D**	40	1/45	$\text{Max}\{40/20; 50/45\}=2,0$
E**	50	1/50	$\text{Max}\{50/20; 50/50\}=2,5$
УТ**	20	1/50	

Наименьший элемент дополнительного столбца в табл. 4.11 равен 1,5 (выделен в таблице). Он соответствует альтернативе С**. Соответственно решение С является оптимальным по обобщенному минимаксному критерию в формате представленных процедур минимизации. Как видим, в этом формате реализации обобщенного минимаксного критерия показатели второго частного критерия (для которого реализована модификация $1/g^{(2)} \rightarrow \min$) уже влияют на результат выбора (сравните с выбором в табл. 4.8).

Выбор по обобщенному скалярному критерию (модификация $1/g^{(2)} \rightarrow \min$). Процедуры выбора с учетом указанной модификации представлены в табл. 4.12. Наименьший элемент дополнительного столбца (с показателем обобщенного скалярного критерия, «нацеливающим» выбор на УТ**) в табл. 4.12 равен 2,75 (выделен в таблице). Он соответствует альтернативе С**. Соответственно, как и в предыдущем случае, решение С является оптимальным и по обобщенному скалярному критерию (при модификации $1/g^{(2)} \rightarrow \min$).

Таблица 4.12.

Выбор по обобщенному скалярному критерию (при $1/g^{(2)} \rightarrow \min$)

Решения	Показатель $g^{(1)} \rightarrow \min$	Показатель $1/g^{(2)} \rightarrow \min$	Показатель обобщенного скалярного критерия
A**	20	1/25	$20/20+ 50/25=3,00$
B**	25	1/30	$25/20+ 50/30=2,85$
C**	30	1/40	$30/20+ 50/40=2,75$
D**	40	1/45	$40/20+ 50/45=3,11$
E**	50	1/50	$50/20+50/50=3,50$
УТ**	20	1/50	

Как видим, в этом формате обобщенного скалярного критерия показатели второго частного критерия (для которого реализована модификация $1/g^{(2)} \rightarrow \min$) влияют на результат выбора (сравните с выбором в табл. 4.9).

Выбор по обобщенному критерию Гурвица (модификация $1/g^{(2)} \rightarrow \min$). Требуемые процедуры представлены в табл. 4.13. В ней первые два дополнительных столбца содержат соответственно «наихудшие» и «наилучшие» показатели требуемого для этого критерия вида (по строкам таблицы). В третьем дополнительном столбце представлены средневзвешенные показатели первых двух указанных дополнительных столбцов. Для удобства сравнения результатов веса выбраны, как и в табл. 4.10, следующими: $c=0,2$ и $(1-c)=0,8$ соответственно. Наименьший элемент третьего дополнительного столбца (с показателем обобщенного критерия Гурвица, чтобы «нацелить» выбор на УТ**) в табл. 4.13 равен 1,29 (выделен в таблице). Он соответствует альтернативе D**. Поэтому решение D является оптимальным по обобщенному критерию Гурвица (при $c=0,2$).

Таблица 4.13.

Выбор по обобщенному критерию Гурвица (при $1/g^{(2)} \rightarrow \min$)

Решения	Показатель $g^{(1)} \rightarrow \min$	Показатель $1/g^{(2)} \rightarrow \min$	$\max\{u/20; v/(1/50)\}$	$\min\{u/20; v/(1/50)\}$	Показатель обобщенного критерия Гурвица
A**	20	1/25	1	2,00	$0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 2 = 1,80$
B**	25	1/30	1,25	1,66	$0,2 \cdot 1,25 + 0,8 \cdot 1,66 = 1,58$
C**	30	1/40	1,5	1,25	$0,2 \cdot 1,5 + 0,8 \cdot 1,25 = 1,30$
D**	40	1/45	2,0	1,10	$0,2 \cdot 2 + 0,8 \cdot 1,1 = 1,29$
E**	50	1/50	2,5	1,00	$0,2 \cdot 2,5 + 0,8 \cdot 1 = 1,30$
УТ**	20	1/50			

Обратим внимание на то, что наилучший выбор теперь зависит и от принятого при оптимизации весового параметра c (в допустимых пределах $c \in [0; 1]$). В этом легко убедиться самостоятельно. В частности, наилучшим/оптимальным решением при этих критериях по обобщенному критерию Гурвица для указанного формата его реализации будет альтернатива А, если при оптимизации весовой параметр «с»

будет находиться в пределах $0 < c < \frac{4}{47}$. Наилучшим/оптимальным решением будет также и альтернатива

В, если при оптимизации весовой параметр « c » будет находиться в пределах $\frac{4}{47} < c < \frac{8}{23}$. Кроме того, наилучшим/оптимальным решением будет также и альтернатива D, если при оптимизации весовой параметр « c » будет находиться в пределах $\frac{8}{23} < c \leq \frac{2}{5}$. Наконец, наилучшим/оптимальным решением будет также и альтернатива E, если при оптимизации весовой параметр « c » будет находиться в пределах $\frac{2}{5} < c \leq 1$.

ВОПРОСЫ (по материалам главы 4).

21. Какая специфика для линий уровня критерия в пространстве значений частных критериев соответствует так называемым «обобщенным» критериям выбора в формате прямых методов оптимизации при многих критериях?

22. Почему и менеджер и ЛПР в большинстве ситуаций будут заинтересованы в использовании формата «обобщенных» критериев выбора при многокритериальной оптимизации цепей поставок и систем логистики?

23. Уточните указанную специфику и дайте соответствующую графическую интерпретацию применительно к подходу обобщенного критерия Гермейера к процедурам оптимизации цепей поставок при многих критериях.

24. Каким образом реализуется соответствующая специфика процедур многокритериальной оптимизации в формате обобщенного скалярного критерия? Уточните атрибуты такого критерия выбора при дискретном множестве альтернатив.

25. Как соотносятся (между собой) результаты оптимального выбора в формате следующих критериев:

- по минимаксному обобщенному критерию;
- по обобщенному критерию Гермейера?

26. Уточните, какой вид имеют линии уровня перечисленных выше обобщенных критериев выбора в пространстве издержек/потерь для задач минимизации частных критериев при оптимизации цепей поставок и систем логистики.

27. Укажите атрибуты процедур оптимизации многокритериальных решений в формате обобщенного критерия выбора по Гурвицу. В частности, отметьте:

- как они реализуются при дискретном множестве альтернатив;
- каким образом и с помощью, каких процедур задается положение направляющей для линий уровня критерия выбора по Гурвицу в пространстве издержек/потерь?

28. Как отражаются на результате выбора процедуры модификации для обобщенного критерия выбора по методу среднего геометрического? Будет ли, выбираемое на основе этого критерия решение, всегда оптимальным по Парето?

29. К каким изменениям для линий уровня критерия выбора приводят процедуры модификации в формате «обобщенного» критерия по методу идеальной точки? Будет ли, выбираемое на основе такого обобщенного критерия решение, всегда оптимальным по Парето?

30. Какие особенности реализации обобщенных критериев выбора для задач многокритериальной оптимизации цепей поставок и систем логистики соотносятся со «смешанным» форматом априори заданных частных критериев? В частности, уточните атрибуты возможного феномена «слепоты» обобщенного критерия выбора к оценкам определенных частных критериев при решении задач такого типа:

- специфику такого феномена;
- к каким обобщенным критериям он относится;
- как менеджер может избежать воздействие указанного феномена при оптимизации цепей поставок и систем логистики.

Раздел II.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДИФИКАЦИИ ПРОЦЕДУР ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ЛОГИСТИКИ ПРИ МНОГИХ КРИТЕРИЯХ

Формат задач системного анализа в логистике сегодня неразрывно связан с принятием решений в условиях риска. Задачи управления рисками при оптимизации звеньев цепей поставок менеджеру часто приходится рассматривать именно в формате моделей задач многокритериальной оптимизации. Это обусловливается тем, что помимо фактора риска в таких моделях одновременно требуется учитывать большое число других специальных факторов, являющихся атрибутами логистических систем (они были отмечены в разделе I). Специфика таких моделей многокритериальной оптимизации рассматривается в этом разделе.

Представленные ниже модели иллюстрируют, что при решении задач оптимизации логистических систем (в частности, и цепей поставок) при многих критериях возможен следующий нежелательный феномен. Может оказаться, что альтернативное решение, которое предпочитает ЛПР, не будет выбрано в качестве оптимального (ни одним из представленных в разделе I критериев оптимизации прямого типа). Указанная особенность представляет феномен «блокировки выбора» или феномен «неадекватного выбора». Здесь такая особенность задач многокритериальной оптимизации впервые обсуждается в учебной литературе. Подчеркнем, что менеджер сегодня должен знать указанную специфику задач многокритериальной оптимизации, присущую формату задач системного анализа в логистике, обусловливаемую учетом фактора риска. Более того, одного только знания указанного факта существования указанного феномена недостаточно для решения практических задач оптимизации цепей поставок. Менеджер должен понимать, какие специальные модификации для изложенных в первом разделе книги критериев выбора могут помочь ему избежать / устранить указанный феномен при анализе и оптимизации системы логистики.

Сразу же обратим внимание на то, что задачи указанного типа имеют следующую специфику. Каждое лицо, принимающее решения (ЛПР), может иметь собственное отношение к рискам (на основе собственного опыта в бизнесе, собственной системы предпочтений, резервных запасов и т.п.). Поэтому в формате одной и той же задачи многокритериальной оптимизации системы логистики или звена цепи поставок с учетом риска наилучшие или оптимальные решения для разных ЛПР могут оказаться совершенно разными. В этом нет никакого противоречия, поскольку каждый участник рынка может и должен уметь реализовать именно свое отношение к риску и специфике решаемой задачи многокритериальной оптимизации. Из материалов раздела I понятно, что указанную специфику менеджер может учитывать на основе аппарата линий уровня критерия выбора.

Какие модели оптимизации систем логистики при многих критериях подвержены воздействию феномена «неадекватного выбора»? В формате, каких моделей указанного типа, можно не опасаться такого феномена? Каким образом, и на основе каких модификаций традиционных критериев можно расширить арсенал инструментов менеджера для реализации более адекватного выбора (к предпочтениям ЛПР), чтобы избежать воздействия указанного феномена? Ответы на эти и другие важные вопросы представлены в этом разделе.

ГЛАВА 5

ФЕНОМЕН НЕАДЕКВАТНОГО ВЫБОРА В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ В ЛОГИСТИКЕ И МОДЕЛИ УЧЕТА РИСКОВ

5.1. Возможность неадекватного выбора наилучшего решения в задачах оптимизации логистических систем при многих критериях

Методы многокритериальной оптимизации становятся все более востребованными при оптимизации логистических систем и, в частности, цепей поставок. Это обуславливается необходимостью одновременного учета большого числа факторов, показателей и оценок. Они будут характеризоваться атрибутами и спецификой логистических систем, например (более подробно см., например, [Сергеев В.И.] и [Сток Д.Р.]): 1) затратами на поставки и хранение; 2) упущенной выгодой из-за «замораживания» в товарах денежных средств; 3) возможными убытками из-за задержек и срывов сроков поставок; 4) возможными убытками из-за хищения/потери части товара; 5) форс-мажорными обстоятельствами (катастрофы, стихийные бедствия и т.п.); 6) требованиями к повышению экономической рентабельности системы; 7) требованиями к повышению качества логистических услуг и т.д.

В отличие от оптимизационных задач с одной критериальной функцией, при оптимизации решения с несколькими критериями (частными критериями) для разных ЛПП оптимальный выбор, как уже отмечалось, может быть (и будет) различным. Теория многокритериальной оптимизации априори принимает и учитывает это. Поэтому найденное менеджером оптимальное решение многокритериальной задачи оптимизации в формате каждой анализируемой ситуации для цепи поставок должно быть наилучшим образом адаптировано к конкретной системе предпочтений лица, принимающего решения. Представленные в разделе I подходы к формализации процедур наилучшего выбора в задачах многокритериальной оптимизации, можно модифицировать применительно к нуждам практики, чтобы обеспечить наиболее эффективную их адаптацию к системе предпочтений ЛПП.

Неявно подразумевается, что применительно к практическим ситуациям имеющиеся в теории методы принятия оптимальных решений при многих критериях, вообще говоря, позволят менеджеру адаптировать выбор к конкретным предпочтениям ЛПП. Можно ли с этим согласиться, в частности, применительно к формату указанных задач оптимизации систем логистики? В этом параграфе обращается внимание на то, что при оптимизации цепей поставок в таких системах может иметь место специфическая особенность, которую сегодня необходимо учитывать любому менеджеру при решении задач многокритериальной оптимизации. Далее будет показано, что в формате указанных задач оптимизации может иметь место следующий аномальный и исключительно нежелательный феномен. Может оказаться, что наилучшая для ЛПП из анализируемых альтернатив (т.е. из анализируемых альтернативных вариантов выбора способа организации работы системы, например, поставки товара) *не будет выбрана традиционно рекомендуемыми теорией критериями.*

Специфика указанного аномального феномена в формате конкретных систем логистики и возможности его учета будут представлены в последующих параграфах. Здесь же акцент делается на сам факт такого феномена. Соответственно станет понятно, что арсенал методов оптимизации решений при многих критериях должен быть расширен, чтобы менеджер уже сегодня мог в задачах многокритериальной оптимизации систем логистики устранять возможность указанного аномального феномена для реализации более полной адаптации выбора к предпочтениям ЛПП.

Атрибуты процедур выбора решений при многих критериях. Как и в предыдущем разделе, далее мы ограничимся форматом разработанного в теории подхода к решению задач оптимизации на основе «прямых методов». Специфика соответствующего подхода предполагает, что решение задачи многокритериальной оптимизации будет сведено к решению задачи/задач скалярной оптимизации. Другими словами, при реализации указанного подхода синтезируется некоторый специальный показатель, минимизация / максимизация которого, как раз, и даст требуемое решение. При этом менеджер может использовать различные подходы для формализации такого преобразования исходной задачи векторной оптимизации в задачу скалярной оптимизации и, кроме того, различные приемы к адаптации выбора применительно к предпочтениям ЛПП. Традиционно используемые подходы к формализации синтезированного показателя указанного типа в формате прямых методов оптимизации схематично представлены на рис.5.1. Они уже были рассмотрены в разделе I. Соответствующие критерии будут далее задействованы в этом параграфе для иллюстрации нежелательного феномена блокировки выбора альтернативы, предпочитаемой ЛПП.



Рис.5.1. Традиционные подходы к формированию синтезированного показателя для решения задач многокритериальной оптимизации

Неявно предполагается, что предлагаемые теорией критерии позволяют менеджеру адаптировать выбор к предпочтениям ЛПП. Отметим основные положения, которые при этом требуется учитывать.

1. В формате соответствующего преобразования в качестве результирующего синтезированного показателя может выступать специальным образом модифицированная оценка только одного из всех частных критериев. Такая оценка и соответствующий критерий могут быть заранее оговорены в формате процедур алгоритма оптимизации (например, как в случае подхода, связанного с оптимизацией основного частного критерия). Либо они будут определяться / уточняться в рамках соответствующего алгоритма оптимизации, причем для разных альтернативных решений они могут быть соотнесены с оценками различных частных критериев (например, как это имеет место в случае минимаксного критерия).

2. В формате соответствующего преобразования в качестве результирующего синтезированного показателя может быть использована и некоторая средневзвешенная сумма оценок всех частных критериев (например, как в случае обобщенного скалярного критерия или метода взвешенных оценок частных критериев). При этом «веса» в такой сумме менеджер может подбирать с учетом предпочтений ЛПП. Это позволяет менеджеру специальным образом «устанавливать прицел» или «ориентировать выбор» в формате конкретных процедур оптимизации. Например, таким образом можно ориентировать направляющую для линий уровня критерия на соответствующую утопическую точку. Указанные процедуры, как раз, и свойственны так называемым обобщенным критериям.

3. В задаче оптимизации каждое отдельное i -ое альтернативное решение представляют точкой с координатами $(a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in})$ в пространстве значений частных критериев (здесь a_{i1} обозначает оценку первого частного критерия $q^{(1)}$ применительно к i -му решению; a_{i2} - оценку второго частного критерия $q^{(2)}$ применительно к i -му решению и т.д.). В указанном пространстве система предпочтений ЛПП может быть представлена на основе аппарата линий уровня. В общем случае указанные линии определяются как некоторые гиперповерхности, которые обладают следующим свойством. На них расположены точки указанного пространства, которые для ЛПП являются эквивалентными: ему безразлично, какую из них выбрать (при соответствующем балансе для оценок частных критериев, которые характеризуют такие точки). Отдельная «линия уровня» характеризуется своим конкретным показателем. Увеличение такого показателя соответствует более предпочтительной альтернативе для ЛПП в задачах на максимизацию частных критериев. Его уменьшение, но уже в задачах на минимизацию частных критериев, также соответствует увеличению предпочтения ЛПП.

4. Для выбора наилучшего решения реализуются конкретные процедуры по алгоритму предлагаемого в теории критерия. Выбор критерия, как будет проиллюстрировано ниже, может оказаться проблемой и для менеджера и для ЛПП. Как уже было показано в предыдущем разделе, теория предлагает весьма широкий арсенал критериев, каждый из которых имеет свой аппарат «линий уровня» в пространстве значений частных критериев. Тем не менее, предлагаемых теорией критериев может оказаться недостаточно (иллюстрируется ниже), поскольку выбранный критерий должен быть таким, чтобы его линии уровня наилучшим образом соответствовали системе предпочтений ЛПП. Выбор критерия (напомним, это - задача менеджера) фактически означает и выбор наилучшего решения, т.к. реализация алгоритма конкретного критерия полностью определит оптимальное решение. Поэтому в распоряжении менеджера должен быть достаточно широкий арсенал таких критериев и методов их модификации.

Иллюстрация аномального феномена блокировки выбора наилучшего для ЛПП решения. Для лучшего понимания и более удобной иллюстрации отмеченного выше феномена обратимся к достаточно

простой модели. А именно, в этом параграфе рассмотрим ситуацию, когда ЛПП считает достаточным представлять множество учитываемых факторов, показателей и оценок тремя частными критериями. Обозначим соответствующие частные критерии через $\{q^{(1)}; q^{(2)}; q^{(3)}\}$. Для определенности далее принимаем, что все частные критерии минимизируются:

$$\begin{aligned} q^{(1)} &\rightarrow \min, \\ q^{(2)} &\rightarrow \min, \\ q^{(3)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Например, пусть речь идет об оптимизации системы управления запасами с учетом следующих трех критериев. Критериальная функция $q^{(1)}$ представляет суммарные годовые издержки на поставки и хранение (понятно, что их можно учитывать совместно, причем требуется минимизировать). Критериальная функция $q^{(2)}$ – возможные штрафы, обуславливаемые рисками потерь из-за нарушений контрактных условий поставок (такие потери также необходимо минимизировать, но их закон распределения часто неизвестен и соответственно неизвестны средние ожидаемые потери; будем считать, что имеются лишь показатели на основе эвристических оценок, доверие к которым малое). Критериальная функция $q^{(3)}$ представляет средний объем замороженных в запасах денежных средств (их также необходимо минимизировать, но при этом ни менеджер, ни ЛПП не станут учитывать такие денежные суммы в качестве потерь и суммировать их с издержками, которые представлены показателями частного критерия $q^{(1)}$).

Пусть при этом анализируются пять альтернативных решений: $\{A; B; C; D; E\}$. Для компактности изложения их содержательный аспект не будем затрагивать. Отметим только, что применительно к конкретной системе логистики частные критерии (их число в реальных ситуациях может оказаться более значительным) будут характеризовать специфику влияния учитываемых факторов и показателей на эффективность работы системы. При этом анализируемые альтернативы (их также может быть значительно больше) будут определяться различными вариантами организации логистических процессов в системе. Например, если анализируется система управления запасами, альтернативы могут определяться такими атрибутами системы, как выбор поставщиков, выбор способа доставки товара (включая выбор маршрута и выбор транспортного средства), выбор или отказ от выбора стратегий диверсификации поставок и т.д. Пусть менеджер уже формализовал конкретные показатели частных критериев применительно к анализируемым альтернативам, - см. табл. 5.1 (в тыс. у.е.). Чтобы проиллюстрировать интересующий нас феномен, концентрируем внимание на формальных шагах соответствующих алгоритмов реализации процедур многокритериальной оптимизации.

Таблица 5.1
Атрибуты задачи многокритериальной оптимизации

Альтернативные решения	Оценки по частным критериям		
	$q^{(1)} \rightarrow \min$	$q^{(2)} \rightarrow \min$	$q^{(3)} \rightarrow \min$
A	75	90	125
B	95	150	50
C	50	60	175
D	60	90	155
E	80	120	105

Требуется выбрать наилучшее для ЛПП решение с учетом заданных оценок по частным критериям $\{q^{(1)}; q^{(2)}; q^{(3)}\}$. Обратим внимание на то, что абсолютного решения (минимизирующего одновременно все критериальные функции) в формате рассматриваемой ситуации нет. Кроме того, все анализируемые решения являются Парето-оптимальными. Таким образом, любое из них может быть выбрано в качестве оптимального.

Уточним также следующее. В этой ситуации (для более эффективной иллюстрации упомянутого аномального феномена) считаем, что нам дополнительно известно следующее. Пусть ЛПП на основе своего опыта априори предпочитает альтернативу D (подчеркнем, что менеджер не знает этого). Такое предпочтение может быть обусловлено рядом обстоятельств. Например, - такими:

- 1) ЛПП считает, что в рассматриваемой ситуации наиболее важными являются оценки двух частных критериев $q^{(1)}$ и $q^{(3)}$, причем оценка первого критерия для ЛПП важнее, чем оценка третьего;
- 2) при этом важность оценки второго частного критерия значительно меньше, чем третьего;
- 3) по известным ему причинам ЛПП предпочитает заведомо избегать решений, которые могут приводить к оценкам по третьему частному критерию, большим, чем 160;
- 4) рассматривая оценки соответствующих частных критериев, ЛПП видит, что альтернатива D является Парето-оптимальной.

Указанные обстоятельства вполне могут определить выбор ЛПП в пользу указанной альтернативы. Далее считаем, что ЛПП уже определился с выбором, причем в пользу альтернативы D, но менеджер этого не знает. Сможет ли менеджер на основе традиционных рекомендаций теории подобрать такой критерий,

чтобы оптимальное решение соответствовало указанным предпочтениям ЛПР? Покажем, что ни один из традиционно рекомендуемых теорией критериев прямого типа не выберет альтернативу D, которую предпочитает ЛПР. Какие при этом должны возникнуть трудности у аналитиков и менеджеров при объяснениях с ЛПР, представьте самостоятельно. Представьте также, как будет чувствовать себя менеджер, если его не подготовить заранее к тому, что такие ситуации возможны в практических ситуациях.

Выбор по классическим критериям на базе «прямых методов». Рассмотрим результаты выбора в этой ситуации на основе традиционно используемых классических подходов, позволяющих свести задачу многокритериальной оптимизации к решению задач скалярной оптимизации.

Начнем с *минимаксного критерия*. В этом случае алгоритм оптимизации предполагает следующее. Дописываем столбец к таблице с оценками частных критериев. В указанном столбце для каждой альтернативы записываем самую худшую из оценок частных критериев, т.е. самый большой из элементов (наибольшие издержки или потери) по строкам таблицы с оценками частных критериев. Из всех элементов дополнительного столбца выбираем наилучший. Поскольку все критерии минимизируются, то на заключительном этапе выбираем наименьший элемент дополнительного столбца. Строка таблицы, соотносимая с выбранным элементом, указывает на оптимальное решение.

Соответствующий алгоритм выбора и его реализация представлены на рис. 5.2. Согласно *минимаксному критерию* в рассматриваемой ситуации оптимальным решением будет выбор альтернативы E. Обратим внимание на то, что альтернативу D, которая интересует ЛПР, этот критерий не выбирает.

Рассмотрим выбор на основе *обобщенного скалярного критерия*. К таблице с оценками частных критериев также дописываем столбец. В нем для каждой альтернативы запишем средневзвешенный результат по оценкам всех частных критериев. При этом «вес» для оценки каждого частного критерия определяется как обратный элемент для наилучшего показателя в формате этого критерия по всем анализируемым альтернативам. Для первого частного критерия наилучший показатель составляет 50 (см. альтернативу C в табл. 5.1), поэтому его «вес» будет равен $1/50$. Для второго частного критерия наилучший показатель составляет 60 (также см. альтернативу C в табл. 5.1), поэтому его «вес» будет равен $1/60$. Для третьего частного критерия наилучший показатель составляет 50 (см. альтернативу B в табл. 5.1), поэтому его «вес» будет равен $1/50$. Наконец, когда средневзвешенные результаты для оценок частных критериев по всем альтернативам найдены и представлены в дополнительном столбце, определяем оптимальное решение в формате указанного критерия: среди элементов указанного дополнительного столбца выбираем наименьший.

Соответствующий алгоритм выбора представлен на рис. 5.3. Обобщенный скалярный критерий (рис.5.3.) указывает на альтернативу B, как наилучшую. Альтернативу D, которая интересует ЛПР, и этот критерий также не выбирает.

Рассмотрим выбор на основе *обобщенного минимаксного критерия*. В этом случае к таблице с оценками частных критериев также дописываем столбец. В соответствующий дополнительный столбец записываем только одно самое плохое (т.е. наибольшее, т.к. все критериальные функции минимизируются) из слагаемых для средневзвешенного результата в формате представленного выше обобщенного скалярного критерия. Из всех элементов такого дополнительного столбца далее выбираем наименьший. Он указывает на оптимальное решение по указанному критерию. В частности, применительно к альтернативе A самый плохой такой показатель (из представленных в качестве слагаемых в формате обобщенного скалярного критерия), равен $\frac{125}{50}$.

Поэтому именно это число и будет записано в качестве показателя критерия выбора для альтернативы A. Аналогично для альтернативы B найденное в качестве показателя критерия выбора

число составит $\frac{150}{60}$ (убедитесь в этом самостоятельно) и т.д. Далее среди указанных найденных

показателей критерия находится наименьший – им будет показатель $\frac{105}{50}$.

Соответствующий алгоритм выбора представлен на рис. 5.4. Использование алгоритма определения наилучшего решения на основе *обобщенного минимаксного критерия* (рис.5.4.) так же демонстрирует выбор не в пользу предпочитаемой ЛПР альтернативы D, указывая на альтернативу E, как наилучшую.

Рассмотрим выбор на основе *метода взвешенной суммы оценок частных критериев*. Как и в формате рассмотренных выше других критериев к таблице с оценками частных критериев дописываем столбец. В дополнительный столбец для каждой альтернативы записываем средневзвешенный результат по заданным оценкам всех частных критериев. При этом «вес» для оценок каждого частного критерия определяется непосредственно самим ЛПР. Указанные веса далее обозначены через $c_i \geq 0$ (применительно к i -му частному критерию). Когда средневзвешенные результаты для оценок частных критериев по всем альтернативам будут найдены и представлены в дополнительном столбце, после этого определяем оптимальное решение в формате указанного критерия. А именно: из всех элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он и укажет на оптимальное решение по методу взвешенных оценок частных критериев. Алгоритм оптимизации на основе метода взвешенной суммы оценок частных критериев представлен на рис.5.5.

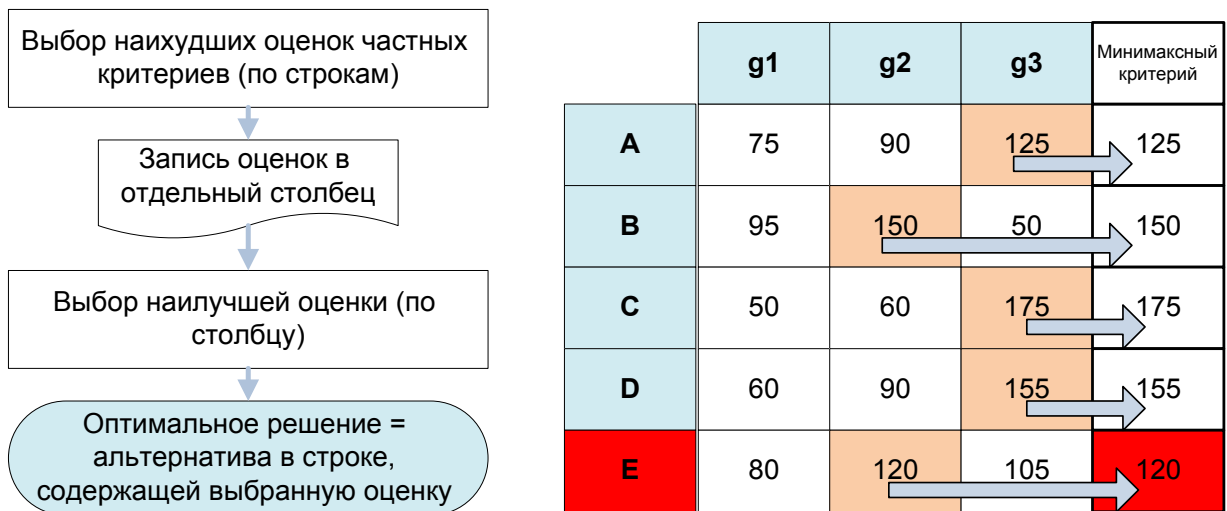


Рис.5.2. Алгоритм принятия решения на основе минимаксного критерия.

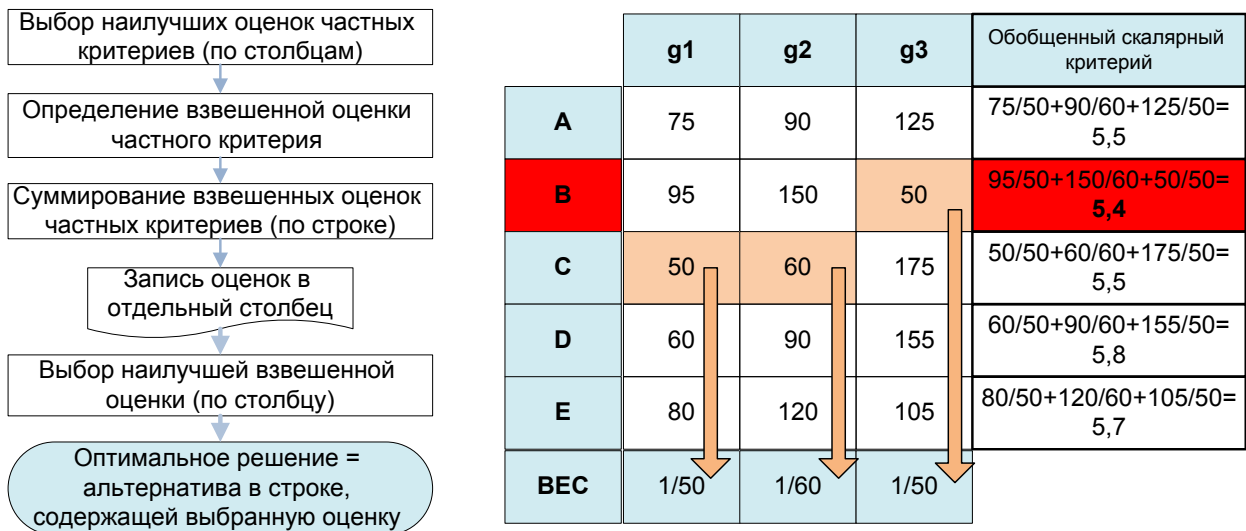


Рис.5.3. Алгоритм принятия решения на основе обобщенного скалярного критерия.

Покажем, что ни при каких значениях «весовых» коэффициентов c_i в качестве оптимального решения по методу взвешенных оценок частных критериев в рассматриваемой ситуации никогда не будет выбрана предпочитаемая ЛПП альтернатива D. Альтернатива D может быть выбрана в качестве наилучшей (по указанному критерию), если показатель этой альтернативы $60c_1 + 90c_2 + 155c_3$ окажется наименьшим (среди всех элементов дополнительного столбца). Это произойдет тогда и только тогда, когда будет выполняться следующая система линейных неравенств:

$$\begin{aligned} 75c_1 + 90c_2 + 125c_3 &> 60c_1 + 90c_2 + 155c_3 \\ 95c_1 + 150c_2 + 50c_3 &> 60c_1 + 90c_2 + 155c_3 \\ 50c_1 + 60c_2 + 175c_3 &> 60c_1 + 90c_2 + 155c_3 \\ 80c_1 + 120c_2 + 105c_3 &> 60c_1 + 90c_2 + 155c_3 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что после упрощения первое и третье неравенства указанной системы можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} c_1 &> 2c_3, \\ c_1 + 3c_2 &< 2c_3. \end{aligned}$$

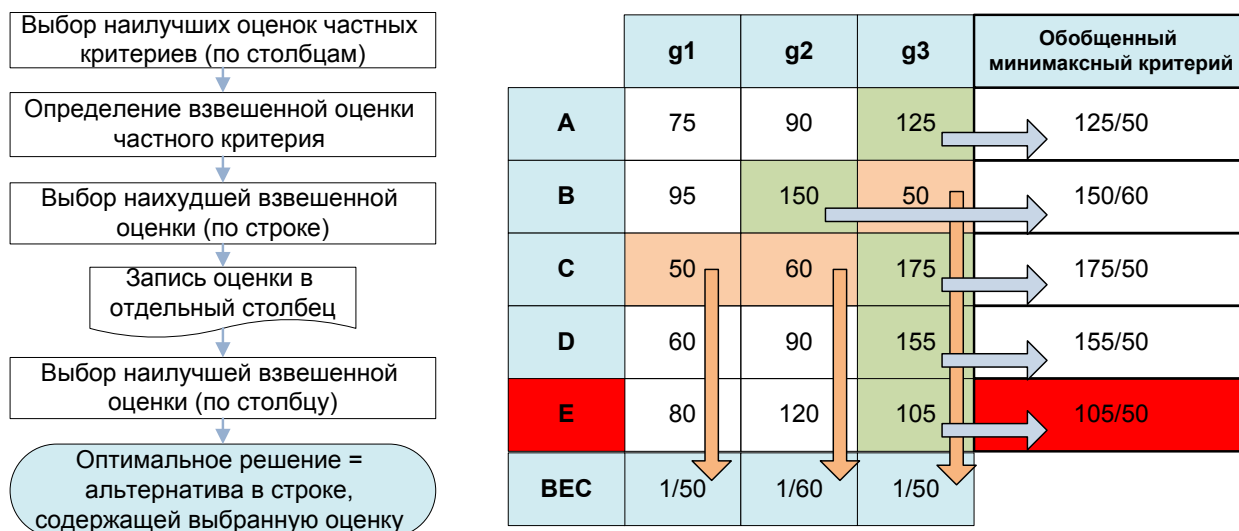


Рис.5.4. Алгоритм принятия решения на основе обобщенного минимаксного критерия.

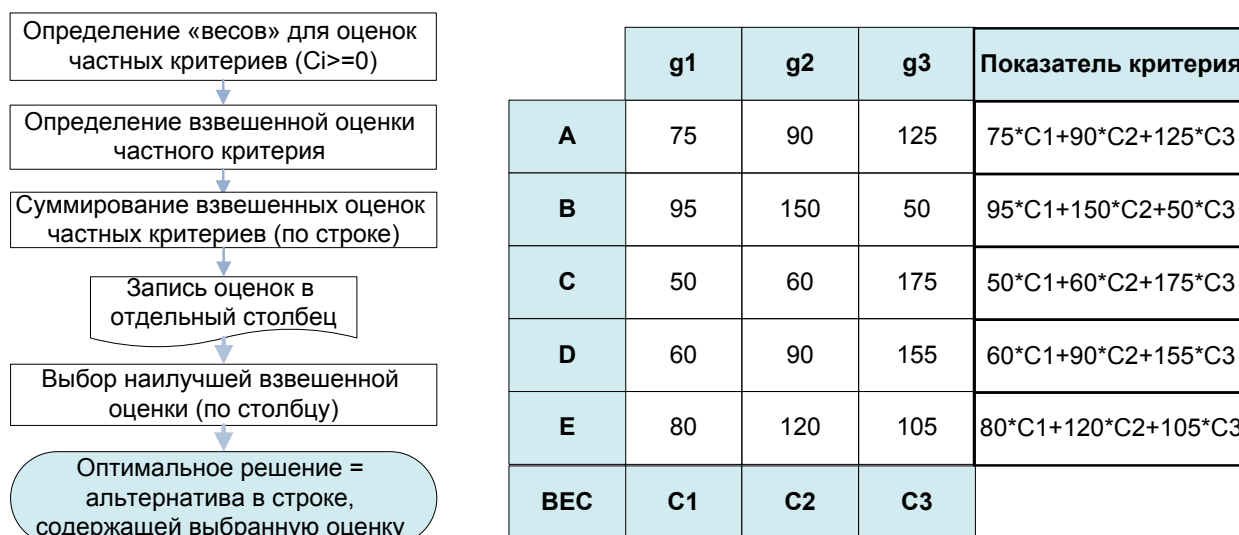


Рис. 5.5. Алгоритм принятия решения на основе метода взвешенной суммы оценок частных критериев.

Учитывая, что $c_i \geq 0$, последние два неравенства являются противоречащими друг другу (если выполняется одно из них, то не может выполняться другое). Таким образом, указанная система неравенств является несовместной при любых $c_1 \geq 0$; $c_2 \geq 0$; $c_3 \geq 0$. Последнее, как раз и означает, что в альтернатива D, которую предпочитает ЛПР, ни при каких значениях «весовых» коэффициентов c_i (в области $c_i \geq 0$) не может быть выбрана в качестве оптимального решения по методу взвешенных оценок частных критериев. Таким образом, ни один из рассмотренных критериев не позволит менеджеру выбрать альтернативу D, которую предпочитает ЛПР.

Иллюстрация для процедур выбора на основе специальных критериев. Продолжим анализ: рассмотрим специальные подходы к решению задач многокритериальной оптимизации. Покажем, что и в формате таких подходов оптимальное решение может не совпадать с альтернативой D, которую предпочитает ЛПР.

Рассмотрим выбор на основе **ИТ-критерия (критерий идеальной точки)**. В формате этого критерия предварительно находится *утопическая точка (УТ)*. Обратим внимание на то, что для первого частного критерия в рассматриваемой ситуации наилучшая оценка (в тыс. у.е., - см. табл. 5.1) составляет 50, для второго частного критерия наилучшая оценка составляет 60, а для третьего частного критерия

наилучшая оценка составляет 50. Поэтому утопическая точка имеет следующие координаты (в тыс. у.е.): УТ = (50; 60; 50). В рамках процедур оптимизации по критерию идеальной точки, как и в формате рассмотренных ранее других критериев выбора оптимального решения, к таблице с оценками частных критериев дописывается дополнительный столбец. В нем для каждой альтернативы записывается следующий показатель. Это – расстояние от УТ до точки, которая представляет в пространстве значений частных критериев анализируемую альтернативу (по строке таблицы).

Соответствующий алгоритм выбора представлен на рис. 5.6. В анализируемой ситуации наилучшим решением по критерию идеальной точки является альтернатива А. Как видим, и этот критерий в формате рассматриваемой задачи многокритериальной оптимизации не позволит менеджеру выбрать альтернативу D, предпочитаемую ЛПР.

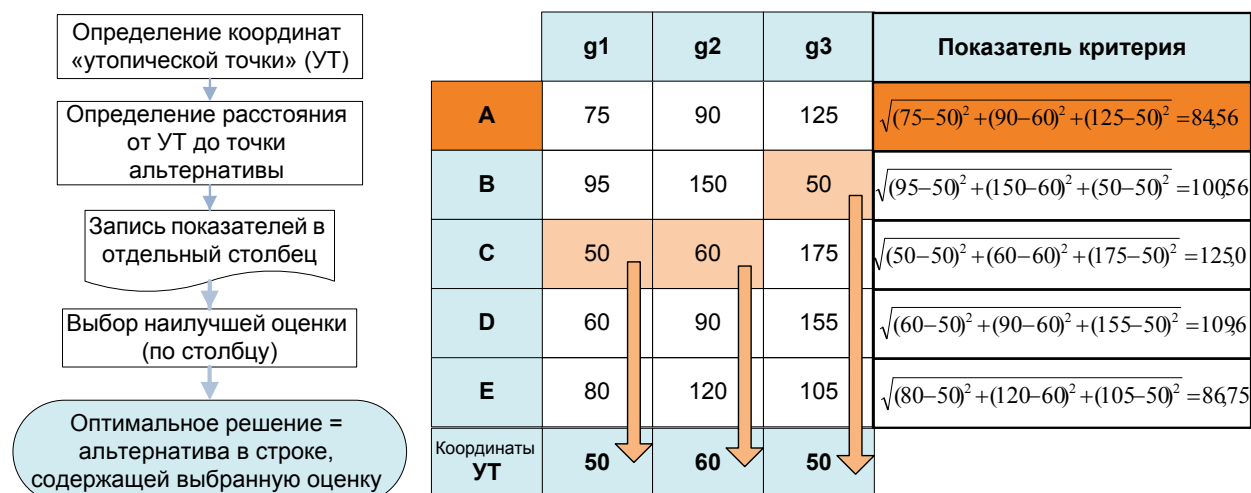


Рис. 5.6. Алгоритм принятия решения на основе метода «идеальной точки».

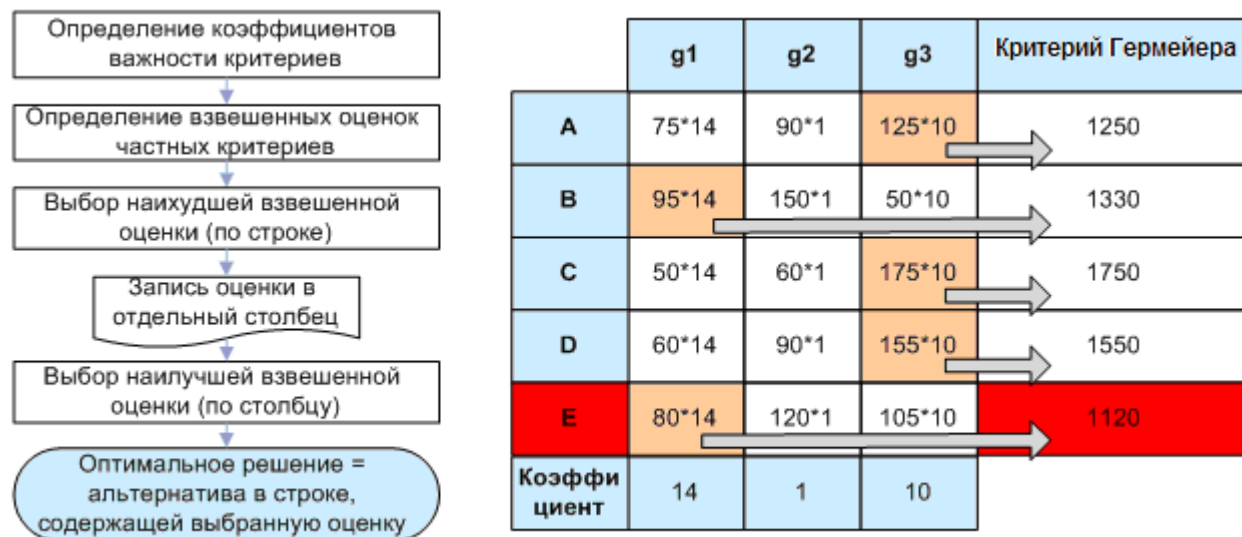


Рис.5.7. Алгоритм выбора по модифицированному $G(mod)$ -критерию с учетом коэффициентов важности для оценок частных критериев, задаваемых ЛПР

Наконец, рассмотрим выбор на основе **модифицированного критерия Гермейера ($G(mod)$ -критерий)**. Формат такого критерия позволяет менеджеру учитывать субъективные показатели / коэффициенты, относящиеся к важности частных критериев с точки зрения ЛПР. Пусть $q_1=0,56$; $q_2=0,04$ и $q_3=0,4$ - такие коэффициенты ЛПР считает целесообразным учитывать для важности оценок по заданным трем частным критериям соответственно (они известны менеджеру). Указанные коэффициенты важности для оценок критериев здесь были заданы таким образом, чтобы в сумме они давали единицу (атрибут подхода для процедур критерия Гермейера при оптимизации решений в условиях неопределенности). Но это

– не обязательное условие, в частности в формате задач многокритериальной оптимизации. Такие коэффициенты могут быть заданы и в виде соответствующих пропорций. Например, вместо заданных чисел $q_1=0,56$; $q_2=0,04$ и $q_3=0,4$ можно было бы указать соответственно пропорцию 56:4:40 или эквивалентную ей пропорцию в виде 14:1:10. Соответственно далее будем использовать в качестве коэффициентов важности именно числа в последнем (более удобном для ЛПР) представлении: $q_1=14$; $q_2=1$ и $q_3=10$.

Элемент строки умножается на коэффициент важности критерия (по столбцу). В дополнительный столбец по каждой строке заносится наибольший из результатов для произведений указанного вида. Наименьший элемент дополнительного столбца указывает на оптимальное решение. Алгоритм данного метода представлен на рис.5.7. В рассматриваемой ситуации выбор с учетом заданных коэффициентов важности попадает на альтернативу Е. Как видим, модификация на основе использования коэффициентов важности для оценок частных критериев в формате подхода, представленного критерием Гермейера, снова не дает менеджеру возможность выбрать альтернативу D в качестве оптимальной (несмотря на полученную им информацию от ЛПР о субъективных коэффициентах важности для оценок частных критериев).

Как видим, формат специальных критериев принятия решений «прямого типа» также иллюстрирует, что указанный феномен неадекватного выбора не дает менеджеру возможность выбрать предпочитаемую ЛПР альтернативу D. Для реализации более адекватного выбора (к предпочтениям ЛПР) оптимального решения при многих критериях менеджеру потребуются специальные модификации алгоритмов оптимизации. Будет нужен более гибкий инструмент для адаптации линий уровня критерия выбора к предпочтениям ЛПР при оптимизации таких логистических систем как системы управления запасами.

Итак, применительно к рассматриваемой ситуации здесь проиллюстрирован следующий феномен. Рекомендуемые в теории подходы к оптимизации при многих критериях, базирующиеся на основе традиционно используемых классических приемов, которые позволяют свести задачу многокритериальной оптимизации к решению задачи / задач скалярной оптимизации, не обеспечили выбор предпочитаемого ЛПР решения. Выбираемые (в качестве оптимальных) на их основе альтернативные решения не соответствовали заданному исходно предпочтению ЛПР. Таким образом, понятно, что применительно к моделям оптимизации логистических систем при многих критериях необходима специальная разработка вопросов по совершенствованию арсенала доступных для менеджера средств, чтобы устранять указанный феномен неадекватного выбора. В частности, менеджеру в области логистики надо понимать следующее:

1) применительно к каким задачам оптимизации логистических систем указанный и проиллюстрированный выше нежелательный феномен является неотъемлемым их атрибутом (а не просто искусственным условным построением) и, следовательно, должен непременно учитываться менеджером;

2) какие доступные методы или приемы позволяют устранять или обходить указанный недостаток для оптимизационных моделей логистических систем при многих критериях.

Эти вопросы обсуждаются в следующих параграфах этой главы и в главах 6 – 7.

5.2. Проблема выбора при многокритериальной оптимизации систем управления запасами: учет производственных рисков

Как уже отмечалось, при оптимизации цепей поставок необходимо учитывать большое число факторов, показателей и оценок, которые характеризуют атрибуты и специфику логистических систем. Поэтому для решения таких задач все более востребованными становятся методы многокритериальной оптимизации. Факторы, показатели и оценки, которые требуется учитывать в формате указанных задач оптимизации, зависят от целей и задач исследования. К ним могут относиться факторы, отмеченные в начале предыдущего параграфа. Даже небольшой представленный там список указанных факторов подчеркивает следующую отличительную особенность задач оптимизации систем логистики: в качестве одного или нескольких из формализованных частных критериев в задачах оптимизации целей поставок зачастую оказывается критерий, обуславливаемый учетом факторов риска. Другими словами, задачи управления рисками при оптимизации звеньев цепей поставок можно рассматривать в формате моделей задач многокритериальной оптимизации.

Найденное менеджером оптимальное решение многокритериальной задачи оптимизации в формате каждой анализируемой ситуации для рассматриваемого звена цепи поставок должно быть наилучшим образом адаптировано к конкретной системе предпочтений ЛПР. Поскольку при формализации задач указанного типа в формате одного или нескольких частных критериев, как уже отмечалось, менеджер может учитывать и требования, связанные с необходимостью оптимизации решений по управлению рисками, то в этом параграфе обращается внимание на специфику таких задач для систем управления запасами.

При оптимизации цепей поставок в таких системах имеет место специфическая особенность, которую сегодня необходимо учитывать любому менеджеру при решении задач многокритериальной оптимизации. Речь идет о следующей особенности. В рамках указанных задач оптимизации, для которых формат частных критериев предполагает дополнительно оптимизацию решений в условиях риска, имеет место следующий аномальный и нежелательный феномен. Если наилучшая для ЛПР из анализируемых альтернатив (т.е. из анализируемых альтернативных вариантов выбора способа организации поставок) подразумевает диверсификацию таких поставок между предложениями поставщиков (например, с целью снижения рисков срыва контрактных условий поставок), то она *априори не будет выбрана ни одним из*

традиционно рекомендуемых теорией критериев. Разумеется, это необходимо знать сегодня любому менеджеру. Специфика указанного аномального феномена в рамках соответствующих задач многокритериальной оптимизации конкретных систем логистики, обоснование его причин и возможности его учета/избегания будут представлены в этом параграфе. Соответственно станет понятно, каким образом и на основе каких методов модификации, арсенал методов оптимизации решений при многих критериях может быть расширен, чтобы менеджер уже сегодня мог в задачах многокритериальной оптимизации систем логистики устранять возможность указанного аномального феномена для реализации более полной адаптации выбора к предпочтениям ЛПР. Как и ранее, ограничимся форматом подхода к решению задач оптимизации при многих критериях на основе «прямых методов».

Модель оптимизации системы управления запасами с учетом риска: параметры оптимизационной модели. Для лучшего понимания и более удобной иллюстрации указанной выше специфики рассматриваемой задачи многокритериальной оптимизации обратимся к следующей модели. Рассмотрим ситуацию, когда при оптимизации поставок в формате модели управления запасами ЛПР считает достаточным учитывать, например, следующие факторы.

1. Фактор соответствующих годовых потерь, которые обуславливаются издержками на поставки и хранение товаров. Понятно, что их можно учитывать совместно (рассматривая суммарные такие издержки), причем требуется минимизировать.
2. Фактор риска в виде случайных потерь, которые обуславливаются штрафными санкциями из-за нарушений/срывов контрактных условий поставок. Такие потери также необходимо минимизировать. Будем считать, что имеются необходимые статистические показатели для основных параметров такой случайной величины.

Указанные показатели (по каждому фактору) требуется минимизировать. Поэтому вводятся следующие частные критерии.

- ✦ Критерий $g^{(1)}$ – минимизация годовых потерь из-за издержек на поставки и хранение товаров.
- ✦ Критерий $g^{(2)}$ – минимизация ожидаемых годовых издержек/потерь из-за нарушений или срывов контрактных условий поставок.

Будем представлять множество учитываемых факторов, показателей и оценок двумя указанными частными критериями. Подчеркнем, что показатели всех частных критериев минимизируются:

$$\begin{aligned} q^{(1)} &\rightarrow \min, \\ q^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество доступных альтернативных решений обуславливается:

- ▶ возможностью выбора поставщика / поставщиков;
- ▶ выбором или отказом от выбора стратегий диверсификации поставок;
- ▶ возможностью выбора размера партии поставок и соответственно интервала повторного заказа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Количество частных критериев может быть произвольным. Можно было бы ввести частный критерий $q^{(3)}$, чтобы представлять показатель для среднего объема замороженных в запасах денежных средств (их необходимо минимизировать). Можно расширить и множество доступных альтернатив, например, включая возможность выбора способа доставки товара (в том числе и выбора маршрута и вида транспортного средства) и т.д. Для простоты изложения и удобства понимания ограничимся указанными выше атрибутами модели.

Требуется выбрать наилучшее для ЛПР решение с учетом имеющихся оценок по частным критериям $\{q^{(1)}; q^{(2)}\}$. Такое решение в формате прямых методов многокритериальной оптимизации должно некоторым образом оптимизировать итоговый показатель по оценкам заданных частных критериев. Абсолютного решения (минимизирующего одновременно все критериальные функции) в формате рассматриваемой ситуации, как правило, не будет. Кроме того, все доступные анализируемые решения так же, как правило, будут Парето-оптимальными. Если среди анализируемых альтернатив все-таки будут решения, не оптимальные по Парето, то их всегда можно предварительно заведомо отбросить. Таким образом, любое из анализируемых в формате такой задачи альтернативных решений может быть воспринято ЛПР в качестве оптимального или наилучшего.

Указанные обстоятельства вполне могут определить выбор ЛПР в пользу какой-либо альтернативы (в том числе и такого типа, которая будет предполагать диверсификацию годового объема поставок между предложениями поставщиков, например, с целью снижения риска срывов поставок). Сможет ли менеджер в формате традиционных рекомендаций теории на основе прямых методов решения задач многокритериальной оптимизации подобрать такой критерий, чтобы оптимальное решение соответствовало предпочтениям ЛПР? Покажем, что формат указанных задач многокритериальной оптимизации приводит к следующему феномену. Может оказаться, что ни один из традиционно рекомендуемых теорией критериев прямого типа не выберет ту альтернативу, которую будет предпочитать ЛПР (в частности, это будет иметь место применительно к указанным выше стратегиям диверсификации поставок).

Для формализации параметров множества доступных альтернатив и формализации оценок по рассматриваемым частным критериям введем необходимые обозначения. А именно, рассмотрим задачу оптимизации поставок применительно к модели управления запасами, для которой:

D	-	объем годовых поставок некоторого вида товара в формате анализируемой модели управления запасами;
C_h	-	затраты на хранение единицы товара;
C_{01}	-	накладные расходы на каждую поставку в формате предложения поставщика I;
C_{01}	-	накладные расходы на каждую поставку в формате предложения поставщика II;
q	-	размер заказа;
T	-	интервал повторного заказа.

Формализация оценок для первого частного критерия (учет потерь на поставки и хранение). Рассмотрим процедуры формализации оценок по первому частному критерию $g^{(1)}$. В случае, когда весь годовой объем поставок D обеспечивает поставщик I, суммарные издержки на поставки и хранения обозначим через C_1 . При этом в формате рассматриваемой оптимизационной модели далее принимается, что такие поставки менеджер, естественно, организует *наилучшим образом* (чтобы минимизировать указанный показатель C_1). Другими словами, предполагается, что размер заказа q (как и период повторного заказа) будет выбран таким образом, чтобы выполнялось равенство:

$$C_1 = \min \left\{ \frac{DC_{01}}{q} + C_h \cdot \frac{q}{2} \right\}$$

Обратим внимание на то, что здесь неявно используется формат понятия экономичного размера заказа. С учетом формулы для экономичного размера заказа, т.е. формулы $q^* = \sqrt{2C_{01}D/C_h}$, для показателя C_1 имеем представление:

$$C_1 = \sqrt{2D \cdot C_{01} \cdot C_h}.$$

Аналогично в случае, когда весь годовой объем поставок D обеспечивает поставщик II, суммарные издержки на поставки и хранение обозначим через C_2 . При этом в формате рассматриваемой оптимизационной модели далее принимается, что такие поставки менеджер также организует *наилучшим образом* (чтобы минимизировать указанный показатель C_2). Другими словами, предполагается, что и в этом случае размер заказа q (как и период повторного заказа) будет выбран наилучшим образом, чтобы выполнялось равенство:

$$C_2 = \min \left\{ \frac{DC_{02}}{q} + C_h \cdot \frac{q}{2} \right\}$$

С учетом формулы для экономичного размера заказа, в этом случае для показателя C_2 имеем аналогичное представление:

$$C_2 = \sqrt{2D \cdot C_{02} \cdot C_h}.$$

Рассмотрим, как изменятся процедуры формализации оценок по первому частному критерию, если *анализируются стратегии диверсификации* годового объема поставок D между поставщиками I и II. Для иллюстрации обратимся к формату простейшей стратегии диверсификации, когда объем D годовых поставок поровну распределяется между поставщиками I и II. В такой ситуации оценки C_1 и C_2 по первому частному критерию соответственно заменятся на следующие оценки (применительно к такой стратегии диверсификации указанные оценки соответственно обозначаем через C_{1d} и C_{2d}):

$$C_{1d} = \min \left\{ \frac{\frac{D}{2} \cdot C_{01}}{q} + C_h \cdot \frac{q}{2} \right\}, \quad C_{2d} = \min \left\{ \frac{\frac{D}{2} \cdot C_{02}}{q} + C_h \cdot \frac{q}{2} \right\}.$$

Предполагаем, что поставки от обоих поставщиков организованы *независимо*, причем *наилучшим образом*, чтобы минимизировать указанные издержки. Тогда для оценок C_{1d} и C_{2d} имеют место равенства:

$$C_{1d} = \sqrt{D \cdot C_{01} \cdot C_h}, \quad C_{2d} = \sqrt{D \cdot C_{02} \cdot C_h}.$$

Суммарные издержки на поставки и хранение (в формате рассматриваемой стратегии диверсификации поставок для поставщиков I и II) обозначим через $C_{d(1:1)}$. Соответствующая оценка по первому частному критерию $g^{(1)}$ при указанной стратегии диверсификации поставок будет определяться по формуле:

$$C_{d(1:1)} = \sqrt{D \cdot C_{01} \cdot C_h} + \sqrt{D \cdot C_{02} \cdot C_h}.$$

После упрощения имеем:

$$C_{d(1:1)} = \sqrt{D \cdot C_h} (\sqrt{C_{01}} + \sqrt{C_{02}}).$$

Таким образом, полученные выше формулы для оценок $g^{(1)}$ по первому частному критерию можно окончательно представить следующим образом:

$$g^{(1)} = \begin{cases} C_1, & \text{если весь годовой объем поставок обеспечивает поставщик I;} \\ C_2, & \text{если весь годовой объем поставок обеспечивает поставщик II;} \\ C_{d(1:1)}, & \text{если годовой объем поставок поровну распределен между поставщиками I и II.} \end{cases}$$

Формализация оценок для второго частного критерия (учет фактора риска). В формате второго частного критерия будем учитывать следующее. Ориентация только на первого поставщика I при реализации годового объема поставок обуславливает некоторые «свои» случайные издержки из-за возможных нарушений контрактных условий поставок. Обозначим указанные случайные издержки через ξ_1 . Здесь ξ_1 - случайная величина с известными параметрами (m_1 ; σ_1), где

- m_1 - математическое ожидание для ξ_1 ;
- σ_1 - соответствующее среднеквадратическое отклонение.

Аналогично, ориентация только на второго поставщика II при реализации годового объема поставок также обуславливает «свои» случайные издержки из-за возможных нарушений контрактных условий поставок. Обозначим такие случайные издержки через ξ_2 . Здесь ξ_2 - случайная величина с известными параметрами (m_2 ; σ_2), где

- m_2 - математическое ожидание для ξ_2 ;
- σ_2 - соответствующее среднеквадратическое отклонение.

Подчеркнем, что указанные издержки (учет фактора риска) для поставщиков I и II далее в рассматриваемой оптимизационной модели принимаем независимыми между собой. Кроме того, будем учитывать, что сокращение объема поставок (для любого из поставщиков) повлечет соответствующее сокращение ожидаемых потерь в формате задач анализа фактора риска. В частности, если отношение объема поставок от поставщика I ко всему годовому объему таких поставок будет составлять $\Delta:1$ (здесь $0 \leq \Delta \leq 1$), то издержки по фактору риска, соотносимые с поставщиком I, составят $\Delta \cdot \xi_1$. При этом их параметры окажутся следующими (учитываются соответствующие положения теории вероятностей):

- $\Delta \cdot m_1$ - соответствующее математическое ожидание;
- $\Delta \cdot \sigma_1$ - соответствующее среднеквадратическое отклонение.

Аналогичные соотношений будут также иметь место и для поставщика II.

Рассмотрим, как потребуются учесть указанные параметры в формате частного критерия $g^{(2)}$ (минимизация последствий фактора риска), если анализируются стратегии диверсификации годового объема поставок. В случае простейшей стратегии диверсификации (обозначим ее через (1:1), чтобы отличать от других стратегий такого типа) объем годовых поставок будет поровну распределен между поставщиками I и II. Соответственно получим:

- $m_1/2$ - математическое ожидание для ξ_1 ;
- $\sigma_1/2$ - соответствующее среднеквадратическое отклонение.
- $m_2/2$ - математическое ожидание для ξ_2 ;
- $\sigma_2/2$ - соответствующее среднеквадратическое отклонение.

Поэтому для суммарных случайных издержек в формате анализируемого фактора риска при указанной стратегии диверсификации поставок типа (1:1) соответствующие параметры изменятся. Обозначим такие параметры для суммарных издержек через ($m_{d(1:1)}$; $\sigma_{d(1:1)}$). Они будут определяться равенствами (учитывается независимость организации таких поставок от поставщиков I и II):

$$m_{d(1:1)} = \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 = \frac{m_1 + m_2}{2};$$

$$\sigma_{d(1:1)} = \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_1^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{2}.$$

Представленные формулы позволяют формализовать оценки по второму частному критерию. Соответствующую формализацию представим применительно к случаю, когда оценка риска реализуется на основе модели производственных рисков.

Анализ в формате концепции производственных рисков. В представленной здесь модели ограничимся случаем, когда учет фактора риска реализуется в формате концепции чистых или производственных рисков. Напомним, что при таком подходе к учету риска ЛПП считает приемлемым

ограничиться анализом только одного параметра: средних ожидаемых потерь, обусловливаемых соответствующим риском. Другими словами, в рассматриваемой модели принимается, что при управлении рисками ЛПР ориентируется на так называемый критерий EVC (expected value criterion – критерий ожидаемого значения) [Бродецкий Г.Л., 2006].

В формате рассматриваемой модели это означает следующее. Оценка для показателя второго частного критерия будет представлять собой именно средние ожидаемые потери из-за нарушений/срывов контрактных условий поставок. Поэтому оценки $g^{(2)}$ по указанному критерию будут определяться равенствами:

$$g^{(2)} = \begin{cases} m_1, & \text{если весь годовой объем поставок} \\ & \text{обеспечивает} \\ & \text{поставщик I;} \\ m_2, & \text{если весь годовой объем поставок} \\ & \text{обеспечивает} \\ & \text{поставщик II;} \\ m_{d(l)}, & \text{если годовой объем поставок поровну} \\ l), & \text{распределен} \\ & \text{между поставщиками I и II.} \end{cases}$$

Атрибуты стратегии диверсификации поставок (k:l). Рассмотрим здесь формат более общей стратегии диверсификации годового объема поставок между поставщиками I и II. Обозначим стратегию диверсификации в общем случае через (k:l). Такая стратегия предполагает, что годовой объем D поставок будет перераспределен между поставщиками I и II в пропорции k:l. Соответственно объем поставок от поставщика I составит $Dk/(k+l)$, а объем поставок от поставщика II составит $lD/(k+l)$. При этом изменятся формулы, определяющие оценки для такой стратегии диверсификации применительно к обоим частным критериям.

Для процедур формализации оценок по первому частному критерию, если анализируются стратегии диверсификации годового объема поставок D между поставщиками I и II типа (k:l), имеем следующие соотношения:

$$C_{1d} = \min \left\{ \frac{Dk}{(k+l)} \cdot \frac{C_{01}}{q} + C_h \cdot \frac{q}{2} \right\},$$

$$C_{2d} = \min \left\{ \frac{lD}{(k+l)} \cdot \frac{C_{02}}{q} + C_h \cdot \frac{q}{2} \right\}.$$

Поэтому, если указанные поставки от поставщиков будут организованы *независимо* и *наилучшим образом* (с целью минимизации указанных издержек C_{1d} и C_{2d}), то будут иметь место равенства

$$C_{1d} = \sqrt{2D \cdot k \cdot C_{01} \cdot C_h / (k+l)},$$

$$C_{2d} = \sqrt{2D \cdot l \cdot C_{02} \cdot C_h / (k+l)}.$$

Суммарные издержки на поставки и хранение (в формате рассматриваемой стратегии типа (k:l) для диверсификации поставок для поставщиков I и II) обозначим через $C_{d(k:l)}$. Суммарная оценка по первому частному критерию $g^{(1)}$ при указанной стратегии диверсификации поставок будет определяться по формуле:

$$C_{d(k:l)} = \sqrt{2D \cdot C_h} \left(\sqrt{\frac{k \cdot C_{01}}{(k+l)}} + \sqrt{\frac{l \cdot C_{02}}{(k+l)}} \right).$$

Для процедур формализации оценок по второму частному критерию, если анализируется стратегия диверсификации годового объема поставок типа (k:l), имеем соотношения:

$$m_{d(k:l)} = \frac{k}{(k+l)} m_1 + \frac{l}{(k+l)} m_2 = \frac{km_1 + lm_2}{(k+l)}$$

$$\sigma_{d(k:l)} = \sqrt{\frac{k^2}{(k+l)^2} \sigma_1^2 + \frac{l^2}{(k+l)^2} \sigma_2^2} = \frac{\sqrt{k^2 \sigma_1^2 + l^2 \sigma_2^2}}{(k+l)}.$$

В формате концепции производственных рисков понадобится только первое из приведенных соотношений; в формате классического подхода теории риска – оба эти соотношения. Здесь, ограничимся анализом первой ситуации. Приведенные формулы позволяют выявить отличительные особенности задач

многокритериальной оптимизации систем управления запасами с учетом риска: они относятся к возможности выбора (точнее, - к блокировке такой возможности) стратегий диверсификации поставок в качестве оптимальных решений.

5.3. Феномен блокировки выбора стратегий диверсификации при многокритериальной оптимизации цепей поставок

Чтобы прокомментировать представленные выше (в п. 5.2) результаты, сначала, применительно к формату стратегии диверсификации типа (1:1), введем следующие обозначения для средних арифметических значений показателей:

$$m_{\text{сред}} = \frac{m_1 + m_2}{2} \quad \text{и} \quad C_{\text{сред}} = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

Полученные выше формулы для оценок $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ по частным критериям показывают, что оценки $m_{d(1:1)}$ и $C_{d(1:1)}$, которые соотносятся со стратегией диверсификации типа (1:1), удовлетворяют следующим соотношениям:

$$m_{d(1:1)} = m_{\text{сред}} \quad \text{и} \quad C_{d(1:1)} > C_{\text{сред}}.$$

Первое равенство здесь является очевидным (см. полученные выше оценки по критерию $g^{(2)}$). В справедливости второго неравенства также легко убедиться. Действительно, по определению оно имеет вид:

$$\sqrt{D \cdot C_h} (\sqrt{C_{01}} + \sqrt{C_{02}}) > (\sqrt{2D \cdot C_{01} \cdot C_h} + \sqrt{2D \cdot C_{02} \cdot C_h})/2.$$

После упрощения правой части это неравенство становится также очевидным.

Аналогичные соотношения выполняются и формате стратегии диверсификации типа ($k : l$). В частности, приведенные выше формулы для $m_{d(k:l)}$ показывают, что соответствующая оценка делит отрезок $[m_1; m_2]$ в отношении $k : l$. При этом оценка $C_{d(k:l)}$ оказывается большей, чем показатель, который определяет точку деления отрезка $[C_1; C_2]$ в таком же отношении $k : l$. Действительно, имеет место неравенство

$$C_{d(k:l)} > (kC_1 + lC_2)/(k + l)$$

(доказательство вполне аналогично доказательству неравенства $C_{d(1:1)} > C_{\text{сред}}$ и поэтому опускается).

Специфика представления стратегий диверсификации поставок в пространстве значений частных критериев. Приведенные соотношения помогают понять особенность «расположения» точек, которые представляют стратегии диверсификации поставок в пространстве значений частных критериев. Эту особенность иллюстрирует рис. 5.8. На указанном рисунке ось абсцисс соответствует оценкам $U=g^{(1)}$ рассматриваемых альтернатив по первому частному критерию, а ось ординат – по второму (т.е. оценкам $V=g^{(2)}$). Обратите внимание на следующее. Точки, которые соотносятся со стратегиями диверсификации годового объема поставок между предложениями поставщиков (т.е. точки, обозначенные через (1:1), (1:3) и (3:1)), оказываются расположенными по одну сторону от прямой, соединяющей те точки, которые представляют именно «чистые» альтернативные предложения поставщиков I и II, т.е. стратегии без диверсификации поставок. При этом они расположены именно с худшей ее стороны в формате задач минимизации частных критериев. Другими словами, для каждой их указанных альтернатив/точек найдется доминирующая ее альтернатива, представленная точкой отрезка, который соединяет «чистые предложения» поставщиков I и II. Указанная особенность расположения таких точек обусловлена установленными выше неравенствами для оценок $C_{d(1:1)}$ и $C_{d(k:l)}$ по первому частному критерию.

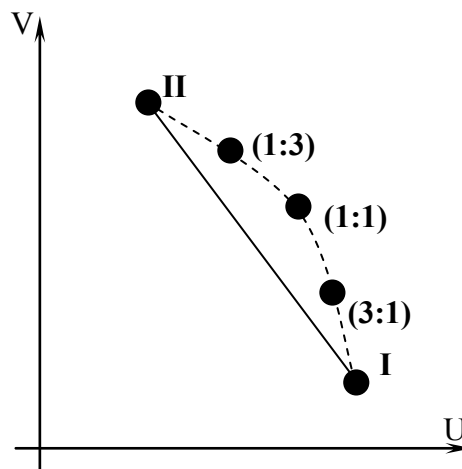


Рис. 5.8. Представление стратегий диверсификации годовых объемов поставок между поставщиками I и II соответствующими точками в пространстве значений частных критериев.

Здесь:

- I - точка, представляющая в пространстве значений частных критериев альтернативу, когда диверсификация поставок не реализуется, причем для поставок выбирается поставщик I;
- II - точка, представляющая в пространстве значений частных критериев альтернативу, когда диверсификация поставок не реализуется, причем для поставок выбирается поставщик II;
- (1:1) - точка, представляющая в пространстве значений частных критериев альтернативу, когда реализуется диверсификация поставок, причем годовой объем поставок диверсифицируется между поставщиками I и II в равных долях;
- (3:1) - точка, представляющая в пространстве значений частных критериев альтернативу, когда реализуется диверсификация поставок, причем 3/4 годового объема поставок достанется поставщику I, а остальные 1/4 - поставщику II;
- (1:3) - точка, представляющая в пространстве значений частных критериев альтернативу, когда реализуется диверсификация поставок, причем 3/4 годового объема поставок достанется поставщику II, а остальные 1/4 - поставщику I.

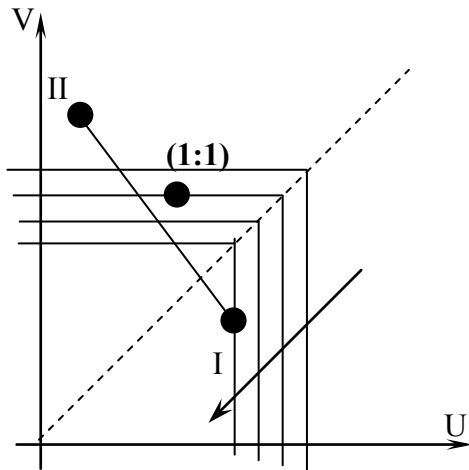


Рис.5.9а. Минимаксный критерий: выбор альтернативы I; при этом альтернатива (1:1) заблокирована

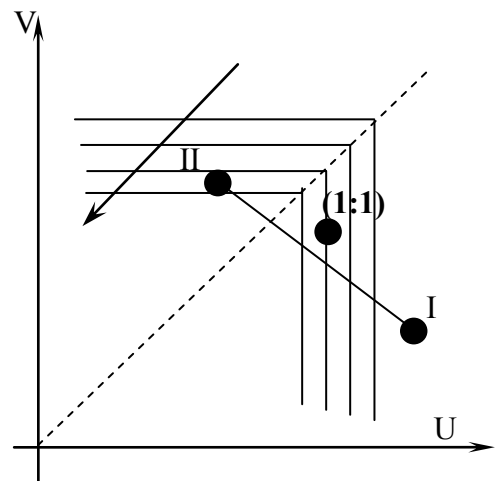


Рис. 5.9б. Минимаксный критерий: выбор альтернативы II; при этом альтернатива (1:1) заблокирована

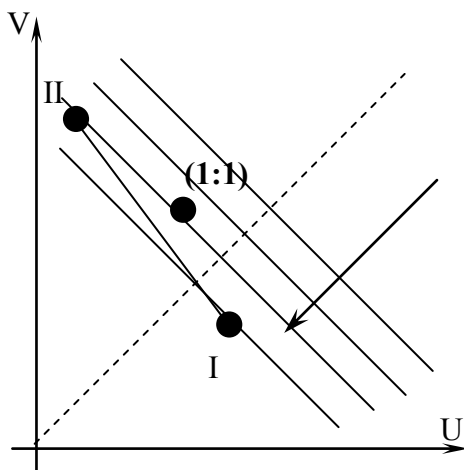


Рис. 5.10а. Скалярный критерий: выбор альтернативы I; при этом альтернатива (1:1) заблокирована

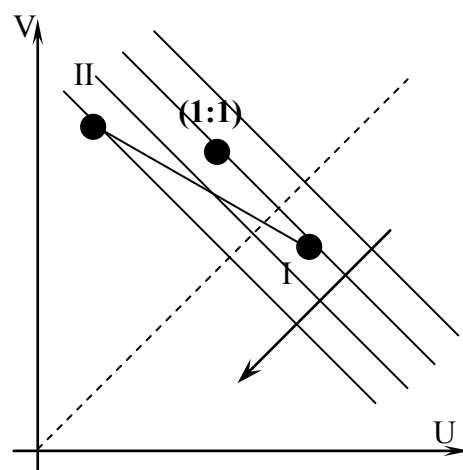


Рис. 5.10б. Скалярный критерий: выбор альтернативы II; при этом альтернатива (1:1) заблокирована

Соответствующая специфика расположения точек, которые представляют в пространстве значений частных критериев анализируемые стратегии диверсификации поставок, позволяет утверждать следующее. При оптимизации цепей поставок с учетом рисков возможен *нежелательный феномен*. Если в формате такой задачи многокритериальной оптимизации линии уровня для критерия выбора будут прямыми линиями (например, как для обобщенного скалярного критерия) или будут составлены из отрезков прямых (что имеет место для большинства критериев выбора, формализованных на основе прямых методов), то

стратегии диверсификации поставок могут оказаться априори заблокированными для выбора их в качестве оптимальных. Такую блокировку обусловит наличие «чистых» предложений поставщиков, несмотря на то, что ни одно из них не будет доминировать стратегию диверсификации поставок. Менеджер в области логистики должен понимать это. Иллюстрацию возможности такого феномена дают рисунки 5.9 – 5.11. Представим комментарий в формате некоторых критериев выбора прямого типа.

Формат минимаксного критерия. Рисунки 5.9(а-б) иллюстрируют, почему такая ситуация может возникнуть в формате минимаксного критерия. Семейство его линий уровня представлено на рисунке «угловыми» линиями. Они составлены из отрезков прямых, загнутых непосредственно к границам соответствующих конусов предпочтения. При этом направляющая, где сосредоточены вершины таких углов, в случае минимаксного критерия является биссектрисой первого координатного угла. Напомним, что в задачах минимизации частных критериев точки, представляющие более предпочтительные альтернативы «лежат» на линии уровня, которая будет более близкой к началу системы координат (в системе линий уровня критерия выбора). Направление увеличения предпочтения ЛПР в формате соответствующего семейства линий уровня задано стрелочкой (на этих рисунках и на последующих).

Формат метода взвешенной суммы оценок частных критериев и обобщенного скалярного критерия. Рисунки 5.10(а-б) иллюстрируют, что такая ситуация всегда будет иметь место и в формате метода взвешенных оценок частных критериев, и в формате обобщенного скалярного критерия. В таких ситуациях семейство линий уровня будет представлено параллельными линиями. Их наклон к осям координат будет обусловлен атрибутами метода. Однако, каким бы ни был такой наклон, в любом случае выбор стратегий диверсификации всегда будет априори заблокирован. В частности, из-за «чистых» альтернатив поставщиков I и II: одна из них всегда будет блокировать выбор всех стратегий диверсификации. Еще раз обратим внимание на то, что стратегия диверсификации (1:1) является оптимальной по Парето и, следовательно, может быть наилучшей в системе предпочтений некоторого ЛПР. Тем не менее, как было показано выше, она никогда не будет выбрана в качестве оптимальной (ни одним из критериев указанного типа).

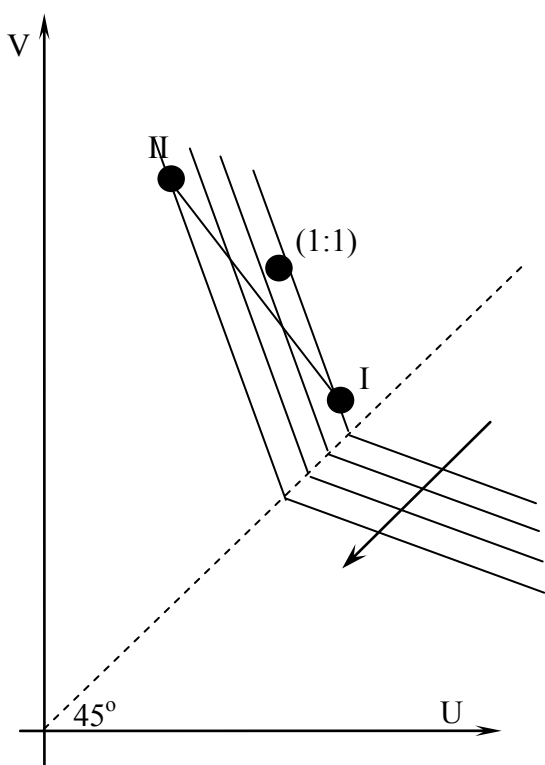


Рис. 5.11а. Критерий Гурвица ($c < 0,5$):
выбор альтернативы II;
альтернатива (1:1) «заблокирована»

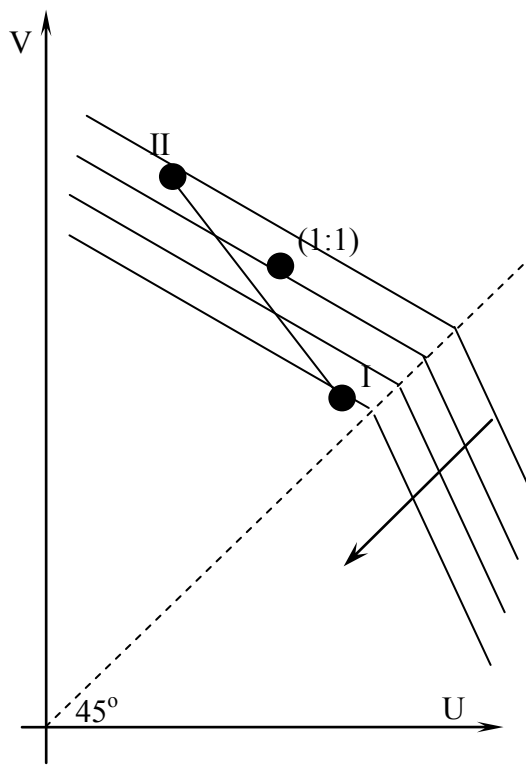


Рис. 5.11б. Критерий Гурвица ($c > 0,5$):
выбор альтернативы II;
альтернатива (1:1) заблокирована

Формат критерия Гурвица. Рисунки 5.11(а-б) иллюстрируют, что аналогичная ситуация может иметь место и применительно к процедурам оптимизации по методу Гурвица. В этой ситуации семейство линий уровня снова будет представлено линиями «углового» типа. Такие линии будут составлены из отрезков прямых, загнутых под одинаковым углом: 1) либо к границам соответствующих конусов предпочтения ($c > 0,5$); 2) либо к границам соответствующих антиконусов ($c < 0,5$). При этом направляющая, где сосредоточены вершины соответствующих углов, является биссектрисой первого координатного угла.

Как видно из рис. 5.11(а-б), в такой ситуации одна из «чистых» альтернатив по предложениям поставщиков I и II всегда будет блокировать выбор любой стратегии диверсификации.

Указанные особенности представления стратегий диверсификации поставок при анализе систем управления запасами с учетом риска в формате задач многокритериальной оптимизации на основе «прямых методов» выявили следующую специфику оптимизационной модели. Выбор предпочитаемой ЛПР альтернативы (речь идет о стратегиях диверсификации поставок) может оказаться априори заблокированным. Для реализации более адекватного (к системе предпочтений ЛПР) выбора оптимального решения при многих критериях менеджеру нужны модификации разработанных в теории алгоритмов оптимизации, которые позволят ему устранять такой феномен. Другими словами, в указанных ситуациях менеджеру будет нужен более гибкий инструмент для адаптации линий уровня критерия выбора к предпочтениям ЛПР при оптимизации указанных логистических систем. Соответствующие модификации могут быть реализованы на основе методов, которые будут предложены в главах 6 и 7:

- 1) на основе сдвига такой направляющей к утопической точке поля издержек/потерь;
- 2) на основе изменения наклона направляющей для линий уровня критерия выбора в пространстве издержек/потерь.

5.4. Модели задач многокритериальной оптимизации при учете коммерческих рисков

В предыдущем параграфе была выявлена специфика задач многокритериальной оптимизации поставок с учетом риска. В частности, было показано, что в формате таких оптимизационных моделей, для которых риск представляется на основе *концепции производственных рисков*, имеет место следующий аномальный феномен (для задач выбора наилучших решений). Если наилучшая для ЛПР альтернатива (среди вариантов способа организации поставок) подразумевает диверсификацию таких поставок между предложениями поставщиков (например, с целью снижения рисков срыва контрактных условий поставок), то при использовании «прямых» методов оптимизации она априори может *не быть выбрана (как оптимальное решение) ни одним из традиционно рекомендуемых теорией критериев*. Указанный феномен обращает внимание на следующую проблему, связанную с задачами оптимизации поставок: «оптимальный» выбор при многих критериях в формате прямых методов оптимизации поставок с учетом риска может не соответствовать имеющимся предпочтениям у ЛПР. Разумеется, это должен понимать сегодня любой менеджер. При анализе рисков в цепях поставок менеджер может использовать и другие концепции определения меры риска. Будет ли и в таких случаях иметь место указанный выше аномальный феномен (для задач выбора наилучших решений при многих критериях)?

В данном параграфе указанная проблема анализируется применительно к задачам учета риска в формате оптимизационной модели при многих критериях, в которой риск представляется на основе концепции коммерческих рисков. Отличительная особенность таких моделей представления риска подразумевает следующее. Для таких моделей отношение ЛПР к риску формализуется не только на основе среднего ожидаемого показателя издержек/потерь, которые обуславливают фактор риска. Для более полной адаптации выбора к предпочтениям ЛПР будет учтен и возможный «разброс/отклонения» для такого показателя. Другими словами, при выборе наилучшего решения в условиях риска будут учитываться как средние ожидаемые издержки/потери, так и их среднее квадратическое отклонение. В этом параграфе, как и выше, мы ограничимся форматом разработанного в теории подхода к решению задач оптимизации при многих критериях на основе «прямых методов». Будет показано, что менеджеру нет оснований опасаться феномена блокировки выбора стратегий диверсификации поставок, если при многокритериальной оптимизации цепей поставок учет риска реализуется на основе концепции коммерческих рисков.

Модель оптимизации поставок с учетом коммерческого риска. Для лучшего понимания и более удобной иллюстрации указанной выше специфики соответствующей задачи многокритериальной оптимизации, в формате которой будут синтезированы и процедуры управления риском, обратимся к следующей модели выбора способа организации поставок. А именно, в этом параграфе снова, как и в предыдущем, рассмотрим ситуацию, когда при оптимизации поставок используется модель управления запасами, причем ЛПР считает достаточным учитывать следующие факторы.

1. Фактор годовых потерь, которые обуславливаются издержками на поставки и хранение товаров (понятно, что их можно учитывать совместно, причем требуется минимизировать).
2. Фактор риска в виде случайных потерь, которые обуславливаются издержками из-за нарушений или срывов контрактных условий поставок (для таких потерь будет учтен разброс их значений в формате концепции коммерческих рисков).

Показатели потерь (по каждому фактору) требуется минимизировать. Поэтому для представления задачи многокритериальной оптимизации на содержательном уровне далее вводятся два частных критерия.

- ✦ Критерий $g^{(1)}$ – минимизация ожидаемых годовых потерь из-за издержек на поставки и хранение товаров (формализация представлена ниже).
- ✦ Критерий $g^{(2)}$ – минимизация годовых издержек/потерь, обуславливаемых риском нарушений или срывов контрактных условий поставок: атрибуты этого критерия на формальном уровне потребуют уточнений в соответствии с принимаемой концепцией учета риска, поскольку

указанные издержки/потери являются случайными величинами (формализация также представлена ниже).

Эти частные критерии *минимизируются*. Множество доступных альтернатив обуславливается:

- ✦ возможностью выбора поставщика / поставщиков;
- ✦ выбором или отказом от выбора стратегий диверсификации поставок;
- ✦ возможностью выбора размера партии поставок и соответственно интервала повторного заказа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и для модели п. 5.2, в общем случае количество частных критериев может быть произвольным. Далее ограничимся только указанными выше атрибутами оптимизационной модели.

Требуется выбрать наилучшее для ЛПР решение с учетом имеющихся оценок по указанным частным критериям. Абсолютного решения (минимизирующего одновременно все критериальные функции) в формате рассматриваемой ситуации, как правило, не будет. Кроме того, среди всех доступных анализируемых решений можно оставить только оптимальные по Парето. Соответственно, любое из анализируемых в формате такой задачи решений может быть воспринято ЛПР в качестве оптимального.

Для формализации параметров указанного множества доступных альтернатив и формализации оценок по рассматриваемым частным критериям введем необходимые обозначения. Вернемся к задаче оптимальной организации поставок применительно к модели управления запасами, для которой:

D	-	объем годовых поставок некоторого вида товара в формате анализируемой модели управления запасами;
C_h	-	затраты на хранение единицы товара;
C_{01}	-	накладные расходы на каждую поставку в формате предложения поставщика I;
C_{02}	-	накладные расходы на каждую поставку в формате предложения поставщика II;
q	-	размер заказа;
T	-	интервал повторного заказа.

Выше (п. 5.2) были представлены процедуры формализации оценок $g^{(1)}$ по первому частному критерию для такой оптимизационной модели. В частности, были рассмотрены две «крайние» ситуации, когда весь годовой объем поставок D обеспечивается: 1) поставщиком I; 2) поставщиком II. Кроме того, была рассмотрена «промежуточная» ситуация, когда поставки обеспечиваются обоими поставщиками I и II в формате произвольной стратегии диверсификации годового объема поставок между ними, которая обозначается через $(k : l)$. Напомним, такая стратегия предполагает, что годовой объем D поставок будет перераспределен между поставщиками I и II в пропорции $k:l$.

В формате рассматриваемой здесь оптимизационной модели снова принимается, что указанные поставки в любом из указанных случаев будут организованы *наилучшим образом* (чтобы минимизировать показатель первого частного критерия). Кроме того, при использовании стратегии диверсификации поставок предполагается, что соответствующие поставки от обоих поставщиков будут организованы *независимо*. Другими словами, предполагается, что размер заказа q (как и период повторного заказа) будет выбран таким образом, чтобы минимизировать указанные выше издержки. Соответственно, как уже было показано ранее в п. 5.2 (с учетом формулы для экономичного размера заказа), интересующие нас оценки $g^{(1)}$ по первому частному критерию можно формализовать следующим образом:

$$g^{(1)} = \begin{cases} C_1 = \sqrt{2D \cdot C_{01} \cdot C_h} & \text{если весь годовой объем поставок} \\ & \text{обеспечивает поставщик I;} \\ C_2 = \sqrt{2D \cdot C_{02} \cdot C_h} & \text{если весь годовой объем поставок} \\ & \text{обеспечивает} \\ & \text{поставщик II;} \\ C_{d(k:l)} & \text{если годовой объем поставок} \\ & \text{распределен между} \\ & \text{поставщиками I и II в пропорции } k:l. \end{cases}$$

Здесь

$$C_{d(k:l)} = \sqrt{2D \cdot C_h} \left(\sqrt{\frac{k \cdot C_{01}}{(k+l)}} + \sqrt{\frac{l \cdot C_{02}}{(k+l)}} \right).$$

Учет фактора риска: коммерческие риски. Фактор риска в формате рассматриваемой здесь оптимизационной модели будем учитывать следующим образом. Ориентация только на первого поставщика I при реализации годового объема поставок обуславливает некоторые «свои» случайные издержки из-за возможных нарушений контрактных условий поставок: они обозначаются через ξ_1 . Здесь ξ_1 - случайная

величина с известными параметрами $(m_1; \sigma_1)$, где параметр m_1 обозначает математическое ожидание для ξ_1 ; а параметр σ_1 - соответствующее среднее квадратическое отклонение.

Аналогично, ориентация только на второго поставщика II при реализации годового объема поставок также обуславливает «свои» случайные издержки из-за возможных нарушений контрактных условий поставок. Обозначим такие случайные издержки через ξ_2 . Здесь ξ_2 - случайная величина с известными параметрами $(m_2; \sigma_2)$, где m_2 обозначает математическое ожидание для ξ_2 ; σ_2 - соответствующее среднее квадратическое отклонение. Напомним, в модели принимается, что указанные издержки для поставщиков I и II являются независимыми.

Кроме того, в модели будет учтено, что сокращение объема поставок (для любого из поставщиков) повлечет соответствующее сокращение потерь, обуславливаемых фактором риска. В частности, если отношение объема поставок от поставщика I ко всему годовому объему таких поставок будет составлять $\Delta:1$ (здесь $0 \leq \Delta \leq 1$), то издержки по фактору риска, соотносимые с поставщиком I, составят $\Delta \cdot \xi_1$. Соответственно их параметры составят: $\Delta \cdot m_1$ - математическое ожидание; $\Delta \cdot \sigma_1$ - среднее квадратическое отклонение. Аналогичные соотношения будут также иметь место и для поставщика II.

Отметим, как потребуется учесть указанные параметры в формате частного критерия, обуславливаемого учетом фактора риска, если анализируются стратегии диверсификации годового объема поставок. В случае стратегии диверсификации, которую мы обозначаем через $(k:l)$ объем годовых поставок будет распределен между поставщиками I и II в отношении $k:l$. Соответственно параметры суммарных случайных издержек в формате анализируемого фактора риска при указанной стратегии диверсификации поставок изменятся. Обозначим такие параметры для суммарных издержек через $(m_{d(k:l)}; \sigma_{d(k:l)})$. Как уже было показано ранее (см. п. 5.2), они будут определяться следующими равенствами (учитывается независимость организации таких поставок от поставщиков I и II):

$$m_{d(k:l)} = \frac{k}{k+l} m_1 + \frac{l}{k+l} m_2 = \frac{km_1 + lm_2}{k+l}$$

$$\sigma_{d(k:l)} = \sqrt{\frac{k^2}{(k+l)^2} \sigma_1^2 + \frac{l^2}{(k+l)^2} \sigma_2^2} = \frac{\sqrt{k^2 \sigma_1^2 + l^2 \sigma_2^2}}{k+l}.$$

В частном случае, когда $k=l=1$ (т.е. в случае, когда годовой объем поставок поровну распределен между предложениями поставщиков I и II), имеем следующие формулы для параметров указанных суммарных издержек:

$$m_{d(1:1)} = \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

$$\sigma_{d(1:1)} = \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_1^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{2}.$$

Представленные формулы позволяют формализовать оценки по второму частному критерию. Как уже отмечалось, в этом параграфе соответствующая формализация будет представлена применительно к случаю, когда оценка риска реализуется на основе модели коммерческих рисков в соответствии с классическим подходом теории риска.

Анализ в формате концепции коммерческих рисков. В представленной здесь модели, в отличие от модели п. 5.2, рассматриваем случай, когда учет фактора риска реализуется на основе концепции коммерческих рисков. При таком подходе к учету риска ЛПР будет выбирать наилучшее решение на основе двух параметров:

- 1) средних ожидаемых потерь, обуславливаемых соответствующим фактором риска;
- 2) среднего квадратического отклонения для таких потерь.

Другими словами, в рассматриваемой модели принимается, что при управлении рисками ЛПР ориентируется на так называемый критерий MVC (mean variance criterion – критерий значимой дисперсии) принятия решений в условиях риска [Бродецкий Г.Л., 2006].

В формате рассматриваемой модели это означает следующее. Оценка $g^{(2)}$ для показателя второго частного критерия будет представлять собой синтезированный показатель так называемой линии уровня в пространстве $(m \times \sigma)$. Указанный показатель может быть найден для каждой анализируемой альтернативы при известных конкретных значениях параметров m (средние ожидаемые потери из-за нарушений/срывов контрактных условий поставок) и σ (соответствующее среднее квадратическое отклонение). Значение такого показателя синтезируется на основе задаваемой критериальной функции $f(m; \sigma)$. Таким образом, формат классического подхода теории риска позволяет формализовать показатель второго частного критерия в виде:

$$g^{(2)} = f(m; \sigma) \rightarrow \min.$$

Определяя вид указанной выше критериальной функции $f(m; \sigma)$ в пространстве $(m \times \sigma)$, менеджер может адаптировать выбор к системе предпочтений ЛПР. Соответствующие процедуры представлены, например, в [Бродецкий Г.Л., 2006]. Для определенности далее формализуем второй частный критерий на основе следующей функции с одним параметром, позволяющим менеджеру адаптировать выбор в условиях риска к предпочтениям ЛПР. Пусть

$$f(m; \sigma) = m + \lambda \cdot \sigma^2,$$

где параметр λ обозначает коэффициент индивидуальной осторожности к риску. Напомним [Бродецкий Г.Л., 2006], что коэффициент индивидуальной осторожности к риску (λ) можно определить по следующей формуле: $\lambda = (m_B - m_A) / (\sigma_A^2 - \sigma_B^2)$. Здесь точки $(m_A; \sigma_A)$ и $(m_B; \sigma_B)$ представляют в пространстве $(m \times \sigma)$ эквивалентные для ЛПР соотношения в формате приемлемого для него баланса при изменении меры ожидаемых потерь m и меры риска их отклонения σ в пространстве $(m \times \sigma)$. Для нахождения λ требуется, чтобы ЛПР задало эквивалентные для него предложения А и Б в указанном пространстве. Например, если эквивалентными являются варианты предложений А и Б, для которых случайные издержки будут иметь следующие наборы параметров

$$(m_A = 10\,000; \sigma_A = 3\,000) \quad \text{и} \quad (m_B = 12\,000; \sigma_B = 1\,000),$$

тогда получим: $\lambda = (12000 - 10000) / (3000^2 - 1000^2) = 0,00025$. Соответственно, функция выбора будет иметь вид: $f(m; \sigma) = m - 0,00025 \cdot \sigma^2$.

Когда коэффициент индивидуального неприятия риска (а следовательно и вид указанной критериальной функции $f(m; \sigma)$) установлен, оценки второго частного критерия при использовании стратегии диверсификации поставок типа $(k : l)$ можно находить по формуле:

$$g^{(2)}_{(k:l)} = \frac{km_1 + lm_2}{(k+l)} + \lambda \cdot \frac{k^2 \cdot \sigma_1^2 + l^2 \cdot \sigma_2^2}{(k+l)^2}.$$

Соответственно оценки $g^{(2)} = g^{(2)}_{(k:l)}$ по указанному критерию в зависимости от типа анализируемой стратегии при организации поставок будут определяться следующими равенствами:

$$g^{(2)} = \begin{cases} g^{(2)}_{(1:0)}, & \text{если весь годовой объем поставок обеспечивает} \\ & \text{поставщик I;} \\ g^{(2)}_{(0:1)}, & \text{если весь годовой объем поставок обеспечивает} \\ & \text{поставщик II;} \\ g^{(2)}_{(k:l)}, & \text{если годовой объем поставок распределен между} \\ & \text{поставщиками I и II в пропорции } k : l. \end{cases}$$

В частном случае, когда $k=l=1$ (т.е. если годовой объем поставок поровну распределен между предложениями поставщиков I и II), имеем следующие формулы

$$g^{(2)} = g^{(2)}_{(1:1)} = \frac{m_1 + m_2}{2} + \lambda \cdot \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}.$$

Приведенные формулы позволяют, как и в случае модели анализа чистых рисков, выявить специфику задач многокритериальной оптимизации для звеньев цепей поставок с учетом риска. Она относится к возможности выбора стратегий диверсификации поставок в качестве оптимальных решений и представлена ниже.

Особенность представления стратегий диверсификации поставок в пространстве значений частных критериев. Чтобы прокомментировать представленные результаты сначала применительно к формату стратегии диверсификации типа $(1:1)$, введем дополнительно следующие обозначения для средних арифметических значений, интересующих нас показателей.

$$g_{\text{сред}}^{(1)} = C_{\text{сред}} = \frac{C_1 + C_2}{2}; \quad m_{\text{сред}} = \frac{m_1 + m_2}{2}; \quad \sigma_{\text{сред}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{и} \quad g_{\text{сред}}^{(2)} = \frac{g_I^{(2)} + g_{II}^{(2)}}{2}.$$

Полученные выше формулы для оценок по частным критериям $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ показывают, что найденные и представленные выше оценки $m_{d(1:1)}$ и $C_{d(1:1)}$, которые соотносятся со стратегией диверсификации типа $(1:1)$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$m_{d(1:1)} = m_{\text{сред}}; \quad C_{d(1:1)} > C_{\text{сред}} \quad \text{и} \quad \sigma_{d(1:1)} < \sigma_{\text{сред}}.$$

Первое равенство является очевидным. В справедливости второго и третьего неравенств легко убедиться. Действительно, по определению они соответственно могут быть записаны в виде:

$$\sqrt{D \cdot C_h} (\sqrt{C_{01}} + \sqrt{C_{02}}) > (\sqrt{2D \cdot C_{01} \cdot C_h} + \sqrt{2D \cdot C_{02} \cdot C_h})/2$$

и

$$\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{2} < \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

После упрощения эти неравенства также становятся очевидными. Представленные соотношения позволяют сделать некоторые заключения (они касаются места расположения точки, представляющей стратегию организации поставок в пространстве значений частных критериев относительно условной «эталонной» точки со *средними арифметическими показателями частных критериев*). Представим эти выводы.

I. Можно выбрать «чистое» предложение одного из поставщиков (без диверсификации поставок) так, что показатель первого частного критерия станет лучшим (относительно указанной «эталонной» точки), но при этом окажется, что показатель второго частного критерия ухудшится.

II. Можно выбрать «чистое» предложение одного из поставщиков (без диверсификации поставок) так, что показатель второго частного критерия станет лучшим, но при этом окажется, что показатель первого частного критерия ухудшился (изменения указаны относительно «эталонной» точки).

III. Можно выбрать стратегию диверсификации годового объема поставок (1:1) в равных долях по предложениям поставщиков I и II. При этом *всегда окажется*, что показатель первого частного критерия станет худшим (относительно указанной «эталонной» точки), а показатель второго частного критерия станет лучшим (относительно такой точки). Соответствующий баланс между изменениями указанных оценок (одна ухудшается, а другая улучшается) частных критериев, как раз, и определит расположение точки, которая будет представлять стратегию диверсификации поставок (1:1) в пространстве значений частных критериев (см. рис. 5.12(а-б)).

5.4. Специфика выбора оптимального решения

Приведенные соотношения и заключения помогают понять особенность «расположения» точек, которые представляют стратегии диверсификации поставок в пространстве значений частных критериев. Эту особенность иллюстрируют рис. 5.12 (а-б). На указанных рисунках ось абсцисс соответствует оценкам $U = g^{(1)}$ рассматриваемых альтернатив по первому частному критерию, а ось ординат – по второму (т.е. оценкам $V = g^{(2)}$). Обратите внимание на следующее. Если оценка риска дается в формате концепции коммерческих рисков, то точка, которая соотносится со стратегией диверсификации годового объема поставок в равных долях между предложениями поставщиков (т.е. точка, обозначенная через (1:1)), может оказаться расположенной по любую сторону от прямой, соединяющей те точки, которые представляют именно «чистые» альтернативные предложения поставщиков I и II (т.е. стратегии без диверсификации поставок). А именно, если указанный выше баланс изменений для оценок частных критериев даст большее смещение в сторону увеличения показателя $U = g^{(1)}$, чем в сторону уменьшения показателя $V = g^{(2)}$, то такая стратегия диверсификации будет представлена точкой с «худшей» стороны отрезка, соединяющего точки I и II. Такую ситуацию иллюстрирует рис. 5.12(а). Если указанный выше баланс изменений для оценок частных критериев даст меньшее смещение в сторону увеличения показателя $U = g^{(1)}$, чем смещение в сторону уменьшения показателя $V = g^{(2)}$, то такая стратегия диверсификации будет представлена точкой с «лучшей» стороны отрезка, соединяющего точки I и II. Такую ситуацию иллюстрирует рис. 5.12(б).

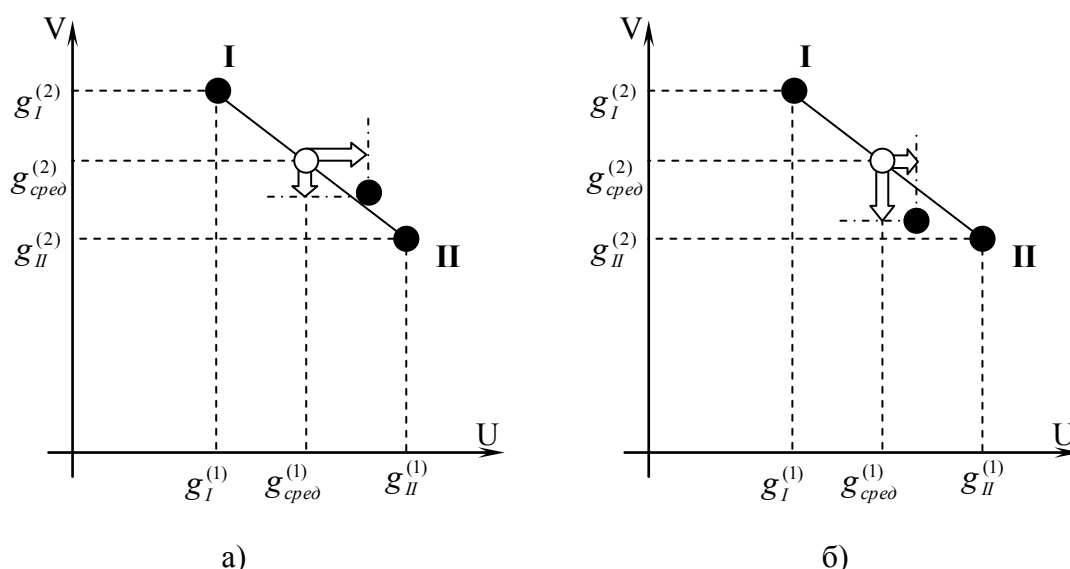


Рис. 5.12(а-б). Представление стратегий диверсификации годового объема поставок в равных долях между поставщиками I и II соответствующими точками в пространстве значений частных критериев.

Здесь:

- I - точка, представляющая в пространстве значений частных критериев альтернативу, когда диверсификация поставок не реализуется, причем для поставок выбирается поставщик I;
- II - точка, представляющая в пространстве значений частных критериев альтернативу, когда диверсификация поставок не реализуется, причем для поставок выбирается поставщик II;

- (1:1) - точка, представляющая в пространстве значений частных критериев альтернативу, когда реализуется диверсификация поставок, причем годовой объем поставок диверсифицируется между поставщиками I и II в равных долях. Ситуация (а) показывает, что выбор стратегии диверсификации может все-таки оказаться заблокированным (но это произойдет только из-за малого выигрыша для оценки риска). Ситуация (б) иллюстрирует, что не исключается случай, когда стратегия диверсификации будет выбрана в качестве оптимальной (при достаточном выигрыше для оценки риска).

Другими словами, в отличие от модели чистых или производственных рисков теперь для указанной альтернативы/точки, характеризующей стратегию (1 : 1), уже нельзя всегда утверждать, что найдется доминирующая ее альтернатива, которая будет представлена точкой отрезка, соединяющего «чистые предложения» поставщиков I и II. Соответственно, менеджеру нет оснований опасаться феномена блокировки выбора такой стратегией диверсификации, выявленного для модели учета производственных рисков. Указанная особенность расположения таких точек применительно к рассматриваемой здесь задаче учета коммерческих рисков обусловлена установленными выше неравенствами для оценок по частным критериям.

Обратим внимание на то, что аналогичные соотношения выполняются и формате стратегий диверсификации типа ($k : l$). Действительно, приведенные выше формулы для $m_{d(k:l)}$ показывают, что указанная оценка приводит к точке, которая делит отрезок $[m_1; m_2]$ в отношении $k : l$. При этом оценка $C_{d(k:l)}$ оказывается большей, чем показатель, который определяет точку деления отрезка $[C_1; C_2]$ в таком же отношении $k : l$. Кроме того, оценка $\sigma_{d(k:l)}$ оказывается меньшей, чем показатель, который определяет точку деления отрезка $[\sigma_1; \sigma_2]$ в таком же отношении $k : l$. Действительно, имеют место неравенства

$$C_{d(k:l)} > (kC_1 + lC_2)/(k + l)$$

$$\sigma_{d(k:l)} < (k\sigma_1 + l\sigma_2)/(k + l)$$

(их доказательства вполне аналогичны доказательству неравенств $C_{d(1:1)} > C_{\text{сред}}$ и $\sigma_{d(1:1)} < \sigma_{\text{сред}}$; поэтому опускаются). Применительно к любой точке, которая на рис. 5.12(а-б) будет делить отрезок, соединяющий точки I и II, в отношении $k : l$, можно сделать заключения, вполне аналогичные сделанным для точки, лежащей на середине такого отрезка.

Таким образом, для задач многокритериальной оптимизации поставок с учетом риска (в качестве частного критерия на основе классического подхода теории риска) имеет место следующее. При учете риска с использованием концепции коммерческих рисков, разработанные в теории подходы к решению многокритериальных задач (базирующиеся на основе традиционно используемых классических приемов для «прямых методов оптимизации», которые позволяют свести задачу многокритериальной оптимизации к решению задачи/задач скалярной оптимизации), могут быть использованы менеджером без опасений относительно аномального феномена блокировки выбора предпочитаемого ЛПР решения. Выбор таких стратегий может быть заблокирован только в случае, когда диверсификация поставок не обеспечивает достаточного снижения оценки риска. Указанная специфика соответствующих задач оптимизации позволяет в формате таких задач использовать известные в теории риска методы и приемы нахождения наилучших решений. В частности, становится понятно, что применительно к моделям оптимизации логистических систем при многих критериях, причем в условиях риска, менеджер может использовать метод дерева решений без дополнительных модификаций процедур сверки на основе специальных модификаций критериев выбора. Специфика такого подхода к оптимизации систем логистики будет представлена в следующем параграфе этой главы.

5.5. Особенности процедур свертки и блокировки в формате метода дерева решений при многих критериях

Управление рисками в формате задач оптимизации цепей поставок предполагает использование различных методов и подходов для нахождения наилучших решений. Они должны дать возможность менеджеру находить оптимальное решение с учетом специфики отношения лица, принимающего решения (ЛПР) к риску. При этом в рамках классического подхода теории риска оптимальность понимается в контексте наилучшего для ЛПР баланса между риском и ожидаемым доходом (как случайной величиной). При управлении рисками в логистике одним из наиболее эффективных методов выбора наилучших решений является *метод дерева решений*. Он позволяет: 1) в простом и удобном, наглядном и доступном для понимания виде формализовать задачу выбора наилучшего решения; 2) синтезировать в одной схеме все случайные факторы, которые ЛПР требует учесть в формате оптимизационной модели; 3) синтезировать в одной схеме все варианты и специфические особенности альтернативных решений, которые ЛПР планирует анализировать в формате оптимизационной модели; 4) выбрать концепцию, в формате которой будет учитываться отношение ЛПР к риску при нахождении наилучшего решения.

Решение задач управления рисками для конкретных систем логистики зачастую осложняется тем, что, как правило, оптимизационные модели в логистике представляют собой именно задачи многокритериальной оптимизации. Это обуславливается тем, что помимо фактора риска при оптимизации цепей поставок необходимо также учитывать большое число других факторов, показателей и оценок, которые характеризуют атрибуты и специфику соответствующих логистических систем. Таким образом, при

оптимизации цепей поставок у менеджера по логистике часто возникает необходимость синтезировать процедуры выбора по методу дерева решений с процедурами оптимизации при многих критериях. Специфика реализации такого синтеза в задачах оптимизации систем логистики будет рассмотрена в этом параграфе.

Атрибуты метода дерева решений. Отметим основные положения, относящиеся к методу дерева решений. Он реализуется на основе использования специального инструмента, позволяющего представить структуру анализируемых альтернатив и специфику внешних воздействий в виде графа, который является «деревом», т.е. не имеет циклов. Такое дерево представляют набором вершин и ребер/дуг (циклы, как уже отмечалось, отсутствуют). Для удобства интерпретации выделяют три типа вершин – «прямоугольные», «круглые» и концевые. *Вершинами «прямоугольного» типа* представляют ситуации, в формате которых решения принимаются непосредственно самим ЛПР для выбора одной из доступных альтернатив (они будут представлены исходящими из такой вершины ребрами). *Вершинами «круглого» типа* представляют ситуации, в формате которых требуется учесть возможные *случайные сценарии*, соотносенные с такой вершиной и влияющие на траекторию процесса реализации конечного экономического результата. *Концевыми вершинами* представляют события или ситуации, для которых конечный результат представляется конкретным числовым значением или вероятностным распределением.

Анализ и выбор наилучшего решения на основе указанного метода подразумевает предварительную реализацию процедур параметризации дерева решений. Они реализуются именно для ребер, выходящих из вершин «круглого» типа. Таким ребрам ставятся в соответствие априори известные вероятности для учитываемых в рамках рассматриваемой модели сценариев возможного вмешательства случая: развития траектории процесса реализации конечного экономического результата. На дереве решений соответствующие вероятности соотносятся с указанными ребрами. При использовании метода дерева решений ЛПР само может указывать, какие факторы риска и какие сценарии должны быть учтены, а какими можно пренебречь. Такие решения определяют структуру графа. После этого граф легко может быть представлен в виде рисунка. Далее процедуры оптимизации решения в условиях риска оформляется в виде чередующихся процедур двух типов: *процедур свертки* и *процедур блокировки*.

При этом процедуры свертки реализуются именно для вершин «круглого» типа. Они реализуются сначала для концевых вершин «круглого» типа соответствующего дерева решений, а также для «круглых» вершин, за которыми следуют концевые вершины с конкретным численным результатом. Суть указанных процедур свертки – заменить заданные распределения вероятностей случайного конечного результата анализируемой альтернативы (применительно к соответствующей «круглой» вершине) на соотносимый с этой вершиной набор параметров, который должен быть достаточным для принятия решения. Например, при нейтральном отношении к риску используется один параметр. В задачах управления рисками в логистике это – средние ожидаемые потери из-за фактора риска. Соответствующий критерий называют EVC-критерием (*expected value criterion*). Соответствующую концепцию (подход к учету риска) в теории рисков относят к оптимизации «производственных» рисков. В общем случае, потребуется учет показателя среднеквадратического отклонения для анализируемых случайных потерь (в формате классического подхода теории риска этот показатель выступает мерой измерения риска). Соответствующий критерий учета фактора риска называют MVC-критерием (*mean variance criterion*), а соответствующую концепцию (подход к учету риска) в теории рисков называют «коммерческими» рисками. В формате такого подхода учитываются не только средние ожидаемые потери, но и возможный разброс их значений. Требуемые в соответствии с принятым критерием (концепцией учета риска) параметры, должны быть найдены и «приписаны» к каждой «круглой» вершине дерева решений.

Процедуры блокировки в рамках метода дерева решений реализуются для вершин «прямоугольного» типа. При этом они реализуются пошагово: на каждом отдельном шаге – только для тех вершин «прямоугольного» типа, для которых каждой имеющейся альтернативной возможности развития траектории процесса реализации конечного результата (исходя из такой вершины) уже сопоставлен соответствующий набор параметров и показателей, характеризующих такую альтернативную возможность. Незаблокированной остается только альтернатива с наилучшим показателем баланса между риском и ожидаемым доходом. Соответствующий баланс формализуется на основе конкретного критерия выбора. В частности, при нейтральном отношении к риску (критерий EVC) будет выбрана альтернатива с наибольшим средним ожидаемым доходом/прибылью (несмотря на величину возможно и очень больших отклонений для конечного результата издержек/потерь).

Особенности процедур метода дерева решений в формате задач многокритериальной оптимизации. Рассмотрим особенности реализации *метода дерева решений* в формате задач *многокритериальной оптимизации*. Подчеркнем, что при формализации оптимизационной модели далее принимается, что в качестве одного из частных критериев будет формализован критерий *оптимизации решения в условиях риска* (критерий Дале уточняется). Если задача анализа и выбора наилучшего решения будет формализована как задача многокритериальной оптимизации с использованием нескольких частных критериев, то для процедур метода дерева решений потребуются специальные корректировки. Прежде всего, это относится к процедурам параметризации самого дерева решений. Действительно, рассмотрим ситуацию, когда ищется наилучшее решение при N заданных частных критериях $g^{(k)}$, где $k=1, \dots, N$. Пусть для определенности оценки по указанным частным критериям представляют собой различные виды

издержек/потерь (например, годовые издержки поставок, хранения, потери из-за нарушений сроков или срыва поставок и т.п.). Тогда наилучшее решение ищется в формате следующей задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min \\ g^{(2)} &\rightarrow \min \\ &\dots\dots\dots \\ g^{(N)} &\rightarrow \min \end{aligned}$$

При этом для каждого альтернативного решения A_j конечный результат следует представлять вектором издержек/потерь с координатами $(\Pi_{j1}; \Pi_{j2}; \Pi_{j3}; \dots; \Pi_{jN})$. Здесь $\Pi_{jk} = g^{(k)}(A_j)$ представляет потери (вообще говоря, они могут быть случайными величинами) по k -му частному критерию в случае, когда будет реализована альтернатива A_j . Таким образом, в пространстве значений частных критериев (пространство издержек/потерь) каждая альтернатива будет характеризоваться вектором указанного типа. Аналогичные особенности для процедур параметризации дерева решений должны быть учтены при формализации случайных сценариев и соответствующих вероятностных распределений применительно к вершинам круглого типа. А именно, каждому сценарию развития событий должен быть сопоставлен «свой» N -мерный вектор с оценками частных критериев (или «свой» N - мерный закон распределения вероятностей его компонент).

Процедуры свертки при многих критериях. Отметим теперь, как отразится специфика задач многокритериальной оптимизации на процедурах свертки в рамках метода дерева решений. Процедуры свертки в рамках метода дерева решений реализуются для вершин «круглого» типа. Такие вершины отражают специфику воздействия конкретного случайного фактора и подчеркивают следующую особенность дальнейшей траектории реализации конечного экономического результата в формате такого фактора: она зависит не от ЛППР, а от случая. Указанные процедуры сначала реализуются для конечных вершин «круглого» типа, а также для таких «круглых» вершин, за которыми следуют конечные. В формате задач многокритериальной оптимизации суть процедур свертки состоит в следующем. Необходимо заменить заданные N - мерные распределения вероятностей случайного конечного результата (по частным критериям) применительно к соответствующей «круглой» вершине на требуемый набор параметров (в соответствии с используемой концепцией учета таких оценок в условиях риска). Найденный набор параметров будет сопоставлен соответствующей вершине дерева решений. Он должен содержать всю необходимую информацию для сравнения альтернатив как с учетом внешних воздействий (рисков), так и с учетом всех оценок частных критериев (в рамках дальнейшего синтеза наилучшего решения при многих критериях). Отметим, что применительно к критериям EVC и MVC учета фактора внешних воздействий (риска) такими параметрами являются:

- для критерия EVC – параметр ожидаемых потерь « m » из-за фактора риска;
- для критерия MVC – соответственно параметры « m » и « σ_m ».

Таким образом, цель реализации процедур свертки для любой «круглой» вершины – синтезировать требуемые по каждому частному критерию показатели, характеризующие такую «круглую» вершину с учетом рисков. На основе найденных или «синтезированных» оценок частных критериев может быть определен соответствующий показатель критерия выбора (обозначим его далее через F) в формате рассматриваемой задачи многокритериальной оптимизации. Найденные параметры и показатели критерия записываются внутри соответствующей «круглой» вершины (или рядом с ней). Они понадобятся при реализации последующих процедур свертки или блокировки, т.е. на следующих шагах или этапах реализации метода дерева решений. После того, как указанные процедуры будут выполнены, дальнейшую траекторию процесса реализации конечного экономического результата (т.е. после такой «круглой» вершины по направлению к конечным вершинам дерева) можно не «замечать». Действительно, все необходимые данные для продолжения процедур выбора наилучшего решения (в том числе и с учетом частного критерия, связанного с управлением рисками) будут уже синтезированы и представлены непосредственно в формате самой такой вершины «круглого» типа.

Приведем формулы, на основе которых реализуется синтез требуемых параметров применительно к критерию MVC. Напомним, что критерий EVC является частным случаем критерия MVC: в его формате потребуются только те из приведенных ниже формул, которые относятся к математическим ожиданиям издержек/потерь из-за вмешательства случая (фактора риска). Рассмотрим различные ситуации для реализации процедур свертки в зависимости от расположения «круглой» вершины на ветвях дерева решений.

Свертка для конечных фрагментов дерева решений. Рассмотрим указанные процедуры в формате так называемого сценарного подхода. Пусть при анализе воздействия некоторого случайного фактора « S » известно следующее. Оценки частных критериев после «воздействия» такого фактора будут зависеть от реализованного сценария. При этом пусть:

- n - число сценариев, учет которых ЛППР считает достаточным в формате оптимизационной модели для анализируемой системы логистики;

- p_1, p_2, \dots, p_n – вероятности соответствующих сценариев (принимается, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$);

- $\Pi_{Si1}; \Pi_{Si2}; \dots; \Pi_{SiN}$ – значения оценок частных критериев в формате i -го сценария для конечного результата (издержек/потерь) применительно к соответствующей круглой вершине дерева решений (см. рис. 5.13);

В такой ситуации синтез требуемых в рамках критерия MVC оценок по каждому k -му частному критерию (концепция коммерческих рисков) реализуется с учетом следующих формул теории вероятностей для математического ожидания и дисперсии:

- 1) средние показатели для оценок частных критериев -

$$\Pi_{Sk} = \Pi_{Sk}^{(1)} = \sum_{i=1}^n p_i \Pi_{Sik};$$

- 2) показатели разброса их значений -

$$\Pi_{Sk}^{(2)} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \Pi_{Sik}^2 \quad \text{и} \quad \sigma_{ISk}^2 = \Pi_{Sk}^{(2)} - (\Pi_{Sk})^2$$

(это значения второго момента и дисперсии).

В общем случае вместо представленного сценарного подхода, формат оптимизационной модели может потребовать учета N - мерных законов распределения вероятностей для конечного результата (как N - мерного вектора с показателями частных критериев). После этого (при необходимости сравнения с другими альтернативами) может быть синтезировано значение соответствующего требуемого показателя критерия выбора F для линии уровня соответствующего семейства в пространстве издержек/потерь. Другими словами, зная набор $\{\Pi_{Sk}\}$ средних ожидаемых «оценок» частных критериев и набор $\{\Pi_{Sk}^{(2)}\}$ их вторых моментов или соответствующий набор их дисперсий, после процедуры свертки, можно в формате конкретного критерия выбора для задачи многокритериальной оптимизации определить его результирующий показатель (показатель линии уровня критерия выбора) применительно к дальнейшей траектории дерева решений. Графическая иллюстрация представлена на рис. 5.13.

Свертка для «промежуточных» фрагментов дерева решений. Как и в предыдущей ситуации ограничимся сценарным подходом. Пусть в формате некоторого случайного фактора « S » известно следующее. Оценки частных критериев после «воздействия» такого фактора будут зависеть от реализованного сценария. При этом пусть:

- n - число сценариев, учет которых ЛППР считает достаточным в формате оптимизационной модели для анализируемой системы логистики;
- p_1, p_2, \dots, p_n – вероятности соответствующих сценариев ($\sum_{i=1}^n p_i = 1$);
- $(\Pi_{Si1}; \Pi_{Si2}; \dots; \Pi_{SiN})$ и $(\Pi_{Si1}^{(2)}; \Pi_{Si2}^{(2)}; \dots; \Pi_{SiN}^{(2)})$ – уже найденные на предыдущих этапах метода средние ожидаемые показатели для оценок частных критериев и их вторые моменты в формате i -го сценария для возможных издержек/потерь применительно к соответствующей ветви дерева решений (в направлении к конечным вершинам).

В такой ситуации (в формате сценарного подхода) синтез требуемых для рассматриваемой «круглой» вершины параметров при свертке в рамках критерия MVC реализуется снова по аналогичным формулам:

- 1) средний показатель для оценки частного критерия -

$$\Pi_{Sk} = \Pi_{Sk}^{(1)} = \sum_{i=1}^n p_i \Pi_{Sik};$$

- 2) показатели разброса ее значений -

$$\Pi_{Sk}^{(2)} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \Pi_{Sik}^2 \quad \text{и} \quad \sigma_{ISk}^2 = \Pi_{Sk}^{(2)} - (\Pi_{Sk})^2.$$

Далее, по найденным параметрам синтезируется значение показателя линии уровня критерия выбора для соответствующей вершины.

Процедуры блокировки при многих критериях. Процедуры блокировки в рамках метода дерева решений реализуются для вершин «прямоугольного» типа. Напомним, в формате таких вершин выбор, относящийся к дальнейшей реализации конечного экономического результата, зависит от ЛППР. Процедуры блокировки реализуются пошагово, причем оценки всех частных критериев будут учтены в формате критерия выбора. На каждом отдельном шаге указанные процедуры будут реализованы только для тех вершин «прямоугольного» типа, для которых каждой имеющейся альтернативной возможности развития траектории анализируемого процесса уже сопоставлен соответствующий набор оценок частных критериев.

Другими словами, процедуры блокировки выполняются для таких вершин прямоугольного типа, для которых применительно к каждой альтернативной возможности продолжения цепи (по направлению к конечным вершинам дерева) оказывается, что для всех последующих вершин дерева, расположенных на

таких цепях, уже реализованы процедуры свертки / процедуры блокировки (на предыдущих шагах метода). Суть процедур блокировки состоит в следующем. Для имеющихся альтернативных возможностей продолжения процесса реализации конечного экономического результата (зависящих от ЛПР) “заблокировать” для реализации все те альтернативные возможности, которые заведомо не приведут к оптимальному решению.

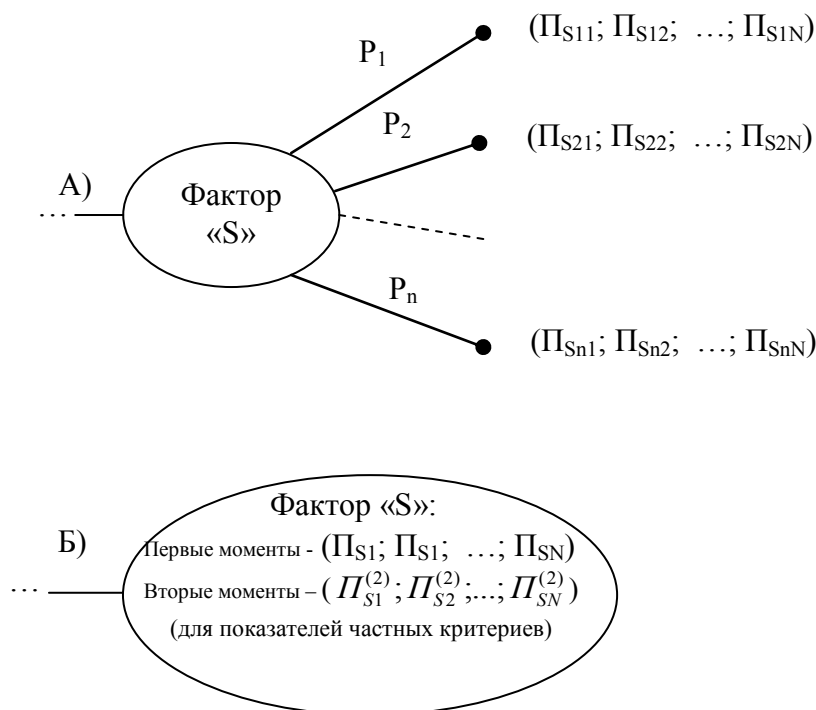


Рис. 5.13. Иллюстрация процедур свертки для концевых вершин дерева круглого типа:

А) фрагмент дерева решений до реализации процедур свертки;

Б) этот фрагмент после реализации процедур свертки.

Формально такие процедуры для задач многокритериальной оптимизации можно реализовать следующим образом. Сначала для всех альтернатив, соотносимых с анализируемой вершиной, определяется показатель критерия выбора (обозначим его через F). Для каждой анализируемой альтернативы он укажет конкретное значение в соответствии с принятым алгоритмом оптимизации при заданных частных критериях. Напомним, что в задачах минимизации частных критериев, лучшей альтернативе будет соответствовать меньшее значение такого показателя.

Затем применительно к каждой альтернативной возможности дальнейшего развития процесса следует «перечеркнуть» ребра дерева, исходящие из этой вершины (по направлению к концевым вершинам дерева), для которых значения показателя такого критерия не являются наилучшими. Траектории возможного развития процесса реализации конечного экономического результата, включающие такие «перечеркнутые» ребра, из последующего анализа далее «выбрасываются» (т.к. они заведомо не могут привести к оптимальному для ЛПР решению). При этом набор параметров, характеризующий наилучший возможный результат применительно к рассматриваемой вершине прямоугольного типа (по критерию выбора), «приписывается» к этой вершине и будет участвовать в дальнейшем анализе при нахождении наилучшего решения.

Иллюстрация применительно к условной вершине прямоугольного типа (в качестве фрагмента дерева решений), когда риск учитывается по MVC критерию, приведена на рис. 5.14. При этом:

- ситуация А) на этом рисунке представляет фрагмент дерева решений с вершиной прямоугольного типа до реализации процедуры блокировки;

- ситуация Б) представляет тот же фрагмент, но уже после реализации процедуры блокировки, причем для случая, когда показатели критерия выбора для имеющихся альтернативных возможностей у ЛПР связаны неравенствами $F_2 < F_1$ и $F_2 < F_3$ (соответственно рассматриваемой вершине прямоугольного типа будут сопоставлены и приписаны оценки частных критериев, характеризующие именно альтернативу 2).

Процедуры свертки и блокировки для дерева решений в рамках анализируемого звена/звеньев цепи поставок применительно к некоторой системе логистики реализуются, чередуясь с учетом имеющейся структуры такого дерева, причем в направлении от концевых вершин дерева решений к его корневой вершине. Как правило, корневой вершиной дерева решений является вершина прямоугольного типа.

Поэтому реализация таких процедур закончится именно процедурой блокировки для соответствующей корневой вершины дерева решений. Наилучшее или оптимальное решение будет найдено на последнем этапе метода.

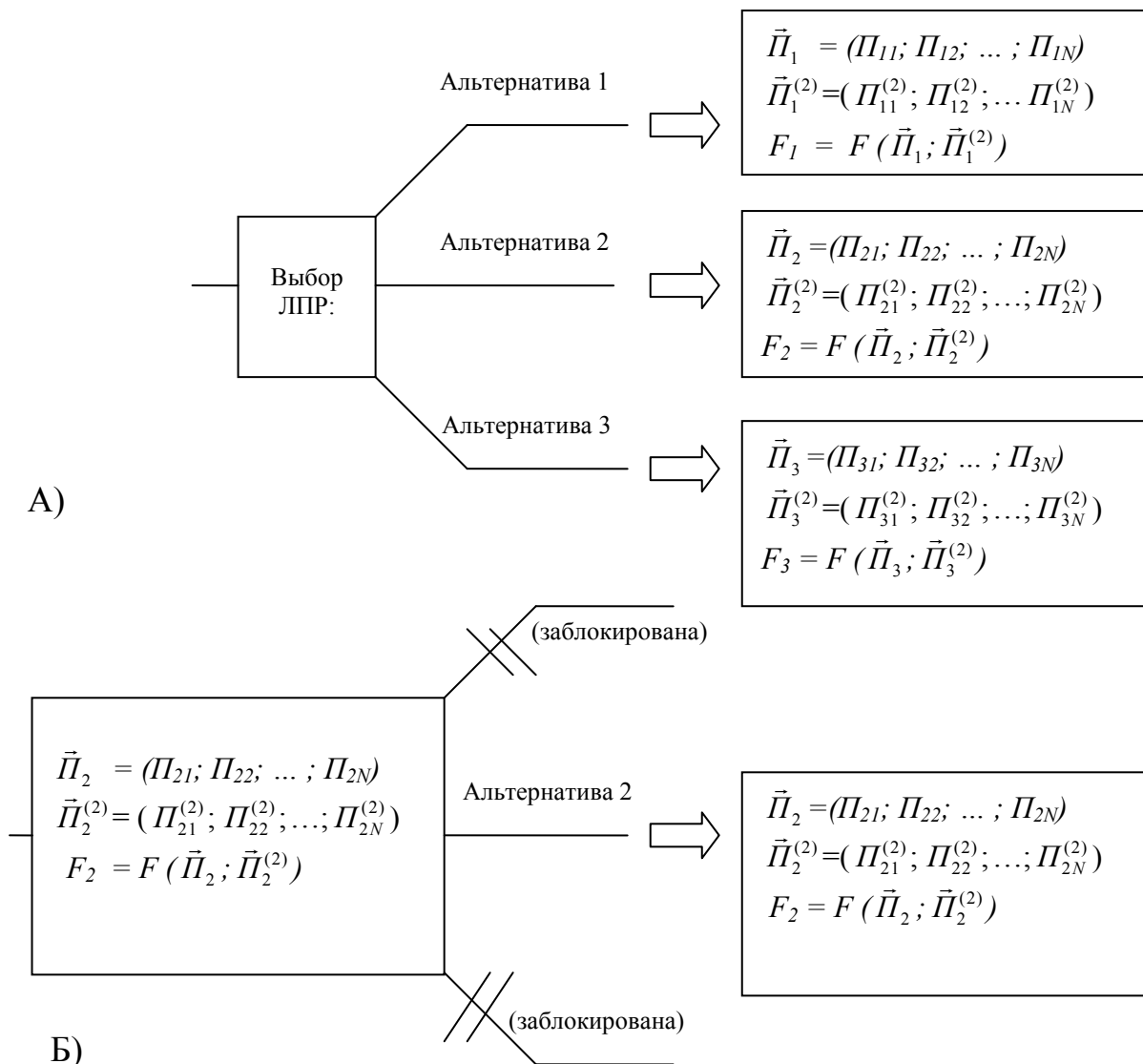


Рис. 5.14. Иллюстрация процедуры блокировки для вершины «прямоугольного» типа: А) – до ее реализации; Б) – после (здесь $F_2 < F_1$ и $F_2 < F_3$).

Выбор наилучшего решения. Соответствующий заключительный этап в рамках общей схемы рассматриваемого «метода дерева решений» реализуется после того, как будут выполнены все процедуры свертки и блокировки на предыдущих этапах его реализации применительно к выбранной концепции учета риска и функции выбора для оптимизации решений при многих критериях в пространстве издержек/потерь. Все необходимые данные для определения наилучшей стратегии по имеющимся альтернативным возможностям ЛПР применительно к анализируемой модели для рассматриваемой системы логистики с учетом заданного отношения к риску уже будут получены. А именно, синтез наилучшей (оптимальной) стратегии реализуется по соответствующему дереву решений следующим образом (уже в направлении *от корневой вершины дерева к его конечным вершинам*). Применительно к корневой вершине дерева решений (как правило, это будет вершина прямоугольного типа) выбирается ребро, соответствующее незаблокированной альтернативной возможности, которая представляет наилучший выбор для ЛПР на этом шаге метода. Для наглядности такое ребро специально окрашивают или выделяют «жирной» линией.

Оно приводит соответственно к следующей вершине дерева решений, которую (при желании и для наглядности) также можно «окрасить» или выделить «жирной» линией. В зависимости от типа вершины, которой заканчивается начальное ребро цепи, синтезирующей наилучший выбор для ЛПР, следующее ребро (или ребра) соответствующей искомой цепи дерева (или цепей) строится следующим образом.

- 1) Если указанное ребро «привело» снова к вершине прямоугольного типа, то на очередном шаге будет выбрано следующее ребро, соответствующее незаблокированной альтернативной возможности для ЛПР в формате указанной вершины. Его опять-таки для наглядности окрашивают или выделяют «жирной» линией, как и очередную вершину дерева решений, к которой такое ребро «приводит».
- 2) Если начальное ребро «привело» к вершине круглого типа, то синтезируемое для ЛПР наилучшее решение должно учитывать все случайные сценарии в рамках анализируемой модели. Поэтому все исходящие из такой круглой вершины ребра (по направлению к концевым вершинам дерева) для наглядности следует окрасить (как и очередные вершины дерева решений, к которым они «приводят»). Траектория развития процесса (после события, представленного указанной вершиной) будет развиваться по какому-то из таких «направлений» продолжения цепи в рамках соответствующей задачи многокритериальной оптимизации с учетом рисков.

Далее, указанные выше процедуры заключительного этапа метода дерева решений реализуются каждый раз применительно к очередной новой «окрашиваемой» вершине, продолжая идентификацию наилучшего для ЛПР решения по направлению к концевым вершинам дерева. Окончательно, фрагмент дерева решений из окрашенных его ребер и окрашенных вершин как раз и представляет найденное наилучшее решение. Оно будет учитывать имеющиеся у ЛПР альтернативные возможности, оценки всех частных критериев, заданный критерий выбора, а также концепцию, на основе которой был формализован учет внешних воздействий и в том числе факторов риска.

Окончательно, можно подчеркнуть следующее. Метод дерева решений может быть использован в контексте задач многокритериальной оптимизации систем логистики, когда один из частных критериев связан с управлением рисками в цепях поставок. В этом случае этот метод подразумевает реализацию следующих операций.

1. Построение дерева решений для задачи управления рисками анализируемой цепи поставок (на основе учета воздействия соответствующих случайных факторов).
2. Соотнесение параметров исходной задачи и оценок всех частных критериев с параметрами и оценками, приписываемыми к ветвям и к вершинам дерева решений (процедуры параметризации для построенного дерева решений). При этом каждая анализируемая альтернатива будет представлена вектором оценок/параметров в пространстве издержек/потерь (пространство значений частных критериев).
3. Реализация процедур «свертки» и «блокировки». Они позволяют учитывать отношение ЛПР к риску отклонения оценок частных критериев и важность таких оценок. При этом процедуры свертки реализуются применительно к оценкам каждого частного критерия, а процедуры блокировки реализуются с учетом критерия выбора решений в пространстве издержек/потерь.
4. Выбор наилучшего (оптимального) решения для анализируемого звена / звеньев цепи поставок с учетом: а) заданного отношения к риску изменения оценок частных критериев; б) предпочтений ЛПР в пространстве значений частных критериев.

ВОПРОСЫ (по материалам главы 5).

1. В чем заключается проблема неадекватного выбора для задач оптимизации систем логистики при многих критериях (на основе прямых методов оптимизации)?
2. Каким образом, такая проблема связана с задачей управления запасами в условиях риска? Какие факторы можно учитывать в формате такой оптимизационной модели?
3. Как в такой оптимизационной модели формализуются оценки частного критерия, обусловливаемые минимизацией издержек на поставки и хранение?
4. Уточните особенности формализации оценок частного критерия, обусловливаемые требованиями минимизации производственных рисков в таких моделях.
5. Чем обусловлен феномен блокировок выбора стратегий диверсификации поставок в моделях оптимизации систем управления запасами при многих критериях?
6. Может ли изменить ситуацию (в формате указанного феномена блокировки выбора) выбор специальных пропорций для диверсификации годовых объемов поставок?
7. Уточните особенности формализации оценок частного критерия, обусловливаемые требованиями минимизации производственных рисков в моделях указанного выше типа.
8. Какие модификации критериев выбора могут помочь менеджеру устранить или обойти феномен блокировки выбора стратегий диверсификации поставок при анализе систем управления запасами?
9. Какие особенности многокритериальной задачи оптимизации системы управления запасами позволяют использовать метод дерева решений (для нахождения наилучшей альтернативы)?
10. Какие особенности процедур свертки и блокировки необходимо учитывать менеджеру при реализации метода дерева решений в формате задач многокритериальной оптимизации систем логистики?

ГЛАВА 6

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ СДВИГА ЛИНИЙ УРОВНЯ КРИТЕРИЯ К УТОПИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ АДАПТАЦИИ ВЫБОРА К ПРЕДПОЧТЕНИЯМ ЛПР

6.1. Специфика процедур модификации с использованием сдвига линий уровня критерия к утопической точке

В предыдущей главе была подчеркнута необходимость разработки новых подходов к решению задач оптимизации логистических систем при многих критериях, чтобы дать менеджеру возможность более эффективной адаптации семейства линий уровня для критерия выбора к системе предпочтений ЛПР. Один из подходов к такой модификации критерия выбора предполагает параллельный сдвиг его линий уровня в пространстве значений частных критериев. Было отмечено, что соответствующие модификации потребуют от менеджера умения формализовать такие процедуры в формате выбираемого критерия. Направление указанного сдвига менеджер может соотносить с направлением к утопической точке поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев. Подходы, которые позволяют формализовать и реализовать такие модификации, как раз, и будут представлены в этом параграфе.

Такая возможность расширит арсенал методов адаптации линий уровня применительно к предпочтениям ЛПР и будет интересна многим менеджерам по логистике. Как уже было подчеркнуто, модификации указанного типа сохраняют специфику линий уровня самого модифицируемого критерия выбора. При этом они позволят обеспечить параллельное смещение таких линий по направлению к утопической точке поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев. Далее предполагается, что *все частные критерии минимизируются*.

Напомним, как формализуется понятие семейства линий уровня в общем случае, когда модель задачи оптимизации при многих критериях предполагает наличие произвольного числа частных критериев $\{g^{(k)}, k = \overline{1, N}\}$, которые требуется одновременно минимизировать. В этом случае линии уровня критерия выбора в пространстве значений частных критериев могут быть представлены в следующем виде $f(u; v; \dots; z) = K$. Здесь

- параметр K характеризует конкретную линию из соответствующего их семейства, причем меньшим значениям параметра K соответствует «линия», точнее гиперповерхность, в пространстве значений частных критериев, точки которой будут представлять более предпочтительные альтернативы (имеется ввиду формат задач минимизации частных критериев);
- $(u; v; \dots; z)$ - точки соответствующего N -мерного пространства оценок/значений частных критериев, например, $u = g^{(1)}; v = g^{(2)}$; и т.д.;
- $f(u; v; \dots; z)$ - функция N переменных, аргументами которой являются оценки соответствующих заданных частных критериев; другими словами, функция $f(u; v; \dots; z)$ задает правило, которое позволяет по оценкам частных критериев находить соотносимый с альтернативным решением показатель в формате конкретного критерия выбора;

Указанное равенство представляет в параметрической форме множество точек указанного пространства, которые расположены именно на «гиперповерхности» уровня « K » (образно называем ее линией уровня). Сравнение альтернативных решений в формате прямых методов оптимизации при многих критериях реализуется на основе сравнения показателей уровня « K », соотносимых с альтернативами.

После формализации задачи принятия решений при многих критериях (см. главу 1) анализируемые альтернативы будут представлены некоторыми точками соответствующего N -мерного пространства оценок/значений частных критериев. Каждое альтернативное решение X_i из заданного анализируемого множества альтернатив $\{X_i, i = \overline{1, m}\}$ будет представлено конкретной точкой (для удобства ее также обозначаем через X_i). Указанная точка может быть записана в виде вектора следующим образом: $X_i = (a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{iN})$. Другими словами, X_i - точка в пространстве издержек/потерь, для которой имеют место равенства:

$$u = g^{(1)}(X_i) = a_{i1}$$

$$v = g^{(2)}(X_i) = a_{i2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$z = g^{(N)}(X_i) = a_{iN}$$

Минимальный (по размерам) «параллелепипед» в N -мерном пространстве значений частных критериев, включающий в себя все анализируемые альтернативы $\{X_i, i = \overline{1, m}\}$, называют «полем издержек/потерь» (в формате задач минимизации частных критериев, как задач минимизации потерь). В поле издержек/потерь вводится понятие утопической точки. Это - условное решение (его обозначаем $UT = X_Y$): $UT = X_Y = (a_{Y1}; a_{Y2}; \dots; a_{YN})$. Координаты утопической точки определяются (при минимизации частных критериев) равенствами $a_{Yk} = \min_i \{g^{(k)}(X_i)\}$. Здесь координата a_{Yk} является наилучшей (наименьшей) оценкой по частному критерию $g^{(k)}$ среди всех анализируемых альтернатив.

Представим на формальном уровне процедуру сдвига линий уровня критерия выбора по направлению к утопической точке поля потерь. Имеется в виду параллельный сдвиг линий уровня, который не нарушит соответствующей структуры таких линий. Из курса высшей математики известно следующее. Преобразование замены переменной, которое имеет вид

$$"u" \rightarrow "u + \Delta_u",$$

где $\Delta_u \geq 0$, реализованное применительно к соотношению, определяющему семейство линий уровня критерия выбора (т.е. формализация такого семейства в виде $f(u + \Delta_u; v; \dots; z) = K$), приведет к сдвигу их влево по оси OU . При этом величина указанного сдвига по такой оси составит именно Δ_u ($\Delta_u \geq 0$). Подчеркнем, что замена знака «+» на знак «-» в указанном преобразовании приведет к аналогичному сдвигу, но вправо.

Аналогично, одновременная реализация преобразований замены переменных типа

$$"u" \rightarrow "u + \Delta_u"$$

$$"v" \rightarrow "v + \Delta_v"$$

$$\dots\dots\dots$$

$$"z" \rightarrow "z + \Delta_z"$$

(где $\Delta_u \geq 0$; $\Delta_v \geq 0$; ... ; $\Delta_z \geq 0$) применительно к указанному параметрическому представлению семейства линий уровня (т.е. формализация его в виде $f(u + \Delta_u; v + \Delta_v; \dots; z + \Delta_z) = K$), приведет к следующему сдвигу линий уровня указанного семейства. Это будет сдвиг влево одновременно по каждой из координатных осей соответствующего пространства потерь. При этом по оси OU сдвиг составит Δ_u , по оси OV сдвиг составит Δ_v , ..., по оси OZ сдвиг составит Δ_z .

Как уже отмечалось, указанные процедуры (преобразования типа замены переменных) можно использовать для «нацеливания» семейства линий уровня критерия на утопическую точку поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев. При этом будет сохраняться их структура. Более того, можно реализовать такой сдвиг именно частично, т.е. не в полной мере (например, на 20%, на 50%, на 80% и т.д.). Представим соответствующую формализацию для процедур такого типа. Пусть далее a_{Yk}^* обозначает минимальную из координат соответствующей утопической точки ($UT = X_Y$) в рамках решаемой задачи минимизации частных критериев. Другими словами, пусть $a_{Yk}^* = \min_k \{a_{Yk}\}$

(применительно к таблице со значениями частных критериев a_{Yk}^* - наименьший ее элемент). Указанные процедуры «нацеливания» семейства линий уровня критерия на утопическую точку удобно представить следующим образом. Сначала определим показатели/параметры сдвигов по каждой координатной оси применительно к случаю 100% -го формата реализации сдвига в интересующей нас модификации:

$$\Delta_u^* = a_{Y1} - a_{Y1}^*$$

$$\Delta_v^* = a_{Y2} - a_{Y2}^*$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta_z^* = a_{YN} - a_{YN}^*$$

$$(6.1)$$

Соответствующие сдвиги в компактной форме можно задать вектором $\vec{\Delta}^* = (\Delta_u^*; \Delta_v^*; \dots; \Delta_z^*)$. Тогда формализация семейства линий уровня критерия в следующем новом виде (используется подстановка в формате указанной выше замены переменных):

$$f(u - \Delta_u^*; v - \Delta_v^*; \dots; z - \Delta_z^*) = K,$$

как раз, и дает требуемый сдвиг семейства линий уровня критерия и его направляющей к соответствующей утопической точке поля издержек/потерь (в 100%-м формате его реализации). При этом направляющая будет проходить через указанную точку.

ЗАМЕЧАНИЕ. Переход от задания семейства линий уровня критерия в виде $f(u; v; \dots; z) = K$ к его заданию в представленном выше модифицированном виде можно также интерпретировать следующим образом. В указанном представлении то же самое поле потерь в пространстве значений частных критериев уже как бы рассматривается с новой «точки зрения». А именно, начало системы координат соответствующего N-мерного пространства в таком представлении смещено таким образом, что утопическая точка поля потерь (точка $UT = X_U$) будет уже «видна» под одинаковым углом к любой из координатных осей.

В формате задач многокритериальной оптимизации при минимизации частных критериев последнее означает следующее. После такого преобразования семейство линий уровня минимаксного критерия в новой системе координат будет иметь следующую особенность. Линии уровня будут уже «автоматически» нацелены (в указанном выше смысле) на утопическую точку поля издержек/потерь. Направляющая для такого семейства в новой системе координат будет проходить через UT , а это уже может изменить выбор наилучшего решения. Разумеется, указанная особенность относится и к процедурам оптимизации на основе других подходов к решению задач многокритериальной оптимизации. Подчеркнем, что для метода взвешенной суммы оценок частных критериев, и метода идеальной точки это не изменит выбора (наилучшего решения).

Здесь нас интересуют преобразования, которые в формате задач многокритериальной оптимизации систем логистики позволяют реализовать именно частичный сдвиг семейства линий уровня для критерия выбора по направлению к утопической точке поля потерь, не изменяя структуру таких линий. Представим требуемую формализацию для интересующих нас процедур указанного типа. Термин «частичный» сдвиг семейства линий уровня критерия по направлению к утопической точке будем далее понимать в следующем контексте. Подразумевается реализация представленных выше процедур, но уже в следующем модифицированном виде. А именно, пусть γ - некоторое число, причем $\gamma \in [0;1]$. Формат требуемых процедур сдвига координатных осей в пространстве значений частных критериев определим вектором $\vec{\Delta}^*(\gamma) = \gamma \cdot \vec{\Delta}^*$. В координатной форме этот вектор можно записать следующим образом:

$$\vec{\Delta}^*(\gamma) = (\Delta_u^*(\gamma), \Delta_v^*(\gamma), \dots, \Delta_z^*(\gamma)),$$

причем компоненты этого вектора определяются соответственно по следующим формулам -

$$\begin{aligned} \Delta_u^*(\gamma) &= \gamma \cdot \Delta_u^* \\ \Delta_v^*(\gamma) &= \gamma \cdot \Delta_v^* \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_z^*(\gamma) &= \gamma \cdot \Delta_z^* \end{aligned} \quad (6.2)$$

При этом в новой системе координат пространства значений частных критериев новыми переменными являются:

$$\begin{aligned} u - \Delta_u^*(\gamma); \\ v - \Delta_v^*(\gamma); \\ \dots\dots\dots \\ z - \Delta_z^*(\gamma). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Указанный вектор, как раз, и формализует понятие «частичного» сдвига семейства линий уровня критерия по направлению к утопической точке соответствующего поля издержек/потерь (в контексте рассматриваемой здесь модификации). А именно, переход от представления семейства линий уровня критерия в виде $f(u; v; \dots; z) = K$ к его модифицированному представлению типа

$$f(u - \Delta_u^*(\gamma); v - \Delta_v^*(\gamma); \dots; z - \Delta_z^*(\gamma)) = K$$

мы и будем далее называть «частичным» сдвигом линий уровня соответствующего семейства по направлению к утопической точке поля издержек/потерь в рамках задачи оптимизации при многих

критериях. Подчеркнем, что в частных случаях конкретного выбора параметра γ можно получать различные результаты такого «частичного» сдвига линий уровня критерия. В частности,

- при $\gamma = 0$ никакого сдвига для семейства линий уровня критерия выбора в пространстве значений частных критериев не будет;
- при $\gamma = 1$ указанный сдвиг реализуется на все 100% (по направлению к утопической точке);
- при $\gamma = 0,4$ указанный сдвиг реализуется только на 40% (по направлению к утопической точке поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев);
- при $\gamma = 0,8$ указанный сдвиг реализуется на 80% и т.д.

Геометрическая интерпретация преобразований типа (6.3) при $\gamma = 0$, при $\gamma = 0,5$ и при $\gamma = 1$ в применительно к минимальному критерию для случая $N = 2$ (два частных критерия, причем оба минимизируются) представлена на рис. 6.1. Особенности и специфика выбора по этому критерию для таких преобразований представлена на рис. 6.2.

Обратим внимание на то, что при больших значениях γ соответствующий выбор (как иллюстрирует рис. 6.2) будет в большей степени «нацелен» на такие альтернативные решения, которые в пространстве доходов представлены точками, расположенными, более близко к утопической точке поля потерь.

ЗАМЕЧАНИЕ. Еще раз подчеркнем, что указанное преобразование для семейства линий уровня критерия выбора реализуется «автоматически» в рамках соответствующей модификации. Никаких линий уровня и, тем более, гиперповерхностей в пространстве издержек/потерь (до и после представленных преобразований) менеджеру, естественно, «рисовать» или изображать в рамках процедур оптимизации не требуется. Необходимо только реализовать требуемые шаги (они формализованы ниже) в рамках соответствующего алгоритма модификации. Естественно, при этом необходимо также понимать: 1) какие возможности дает указанная модификация; 2) как ими воспользоваться для реализации более адекватного выбора применительно к предпочтениям ЛПП в задачах многокритериальной оптимизации.

Процедуры модификации в формате табличного представления оценок частных критериев.

Обратим внимание на следующую особенность. Указанные выше процедуры модификации (речь идет именно о модификации критерия выбора на основе частичного сдвига линий уровня критерия по направлению к утопической точке поля потерь) реализуются только применительно к значениям оценок частных критериев (атрибуты самого критерия выбора остаются прежними). В формате задач многокритериальной оптимизации при дискретном множестве альтернатив они легко иллюстрируются на основе табличного представления задачи оптимизации. Пусть исходная таблица с оценками частных критериев имеет вид, представленный в табл. 6.1.

Таблица 6.1.

Исходные значения оценок частных критериев

Альтернативы	Оценки по частным критериям			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$...	$g^{(N)}$
X_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1N}
X_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2N}
...
X_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mN}

Если менеджер решает использовать преобразование по формулам (6.1) - (6.3) для семейства линий уровня критерия (при некотором конкретном значении коэффициента γ), то это означает следующее. Требуется реализовать процедуры соответствующего критерия выбора, но не применительно к указанной исходной таблице со значениями оценок по частным критериям, а применительно к новой модифицированной таблице. При этом указанная модификация таблицы делается на основе преобразований, определяемых формулами (6.1) - (6.3). Можно образно сказать, что при этом «пересматриваются» оценки частных критериев. Такие «пересмотренные» оценки обозначаем далее через $\hat{g}^{(k)}$ (применительно к k-му частному критерию). Тогда в формате процедур выбора оптимальной альтернативы для задачи многокритериальной оптимизации менеджер в такой ситуации будет уже иметь дело с таблицей, вид которой представлен в табл. 6.2.

Образно говоря, формат представленных процедур модификации предполагает возможность следующей интерпретации применительно к новым значениям оценок в модифицированной таблице значений частных критериев.

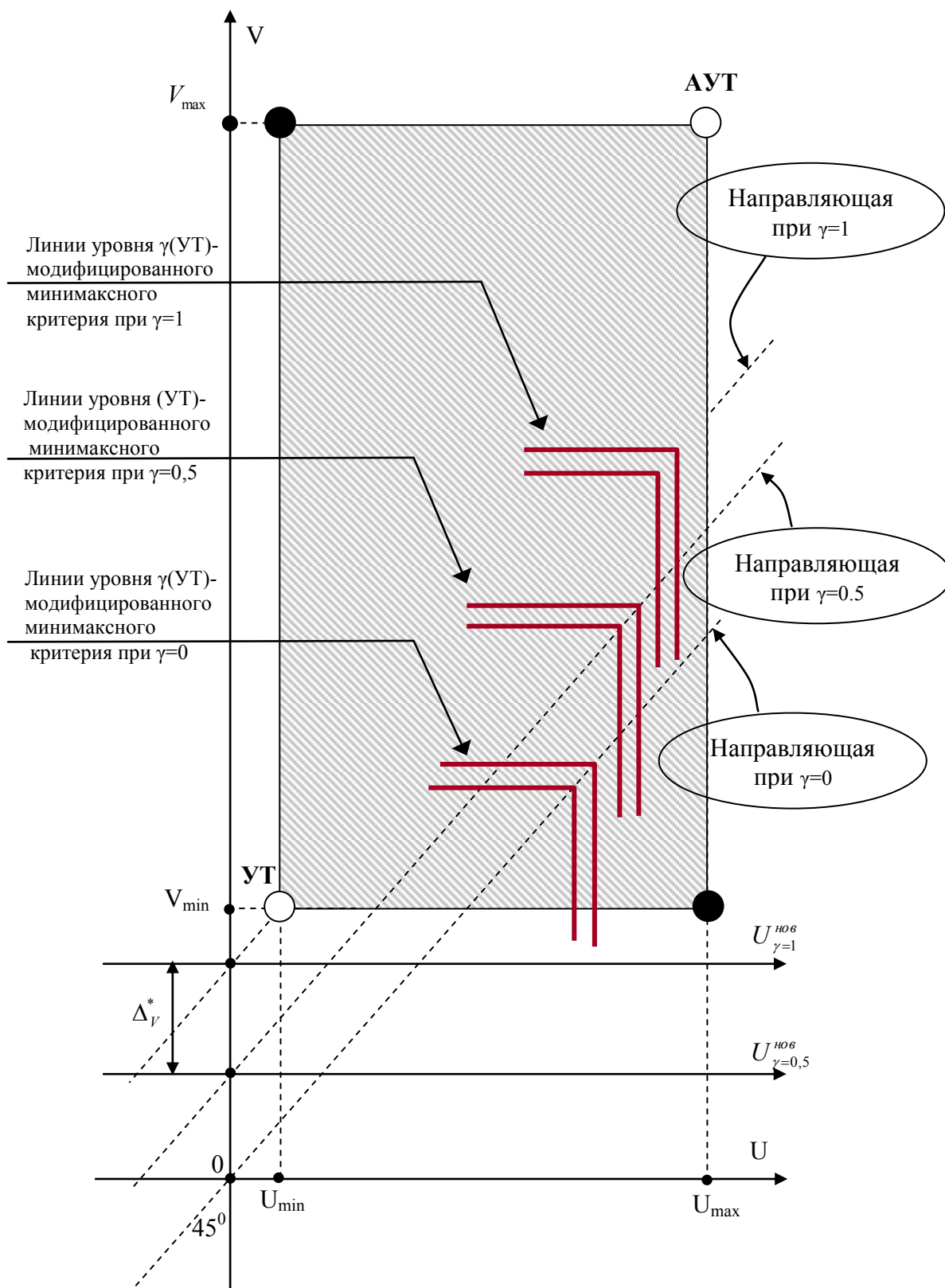


Рис. 6.1. Иллюстрация частичного сдвига линий уровня минимаксного критерия в формате $\gamma(\text{УТ})$ -модификации

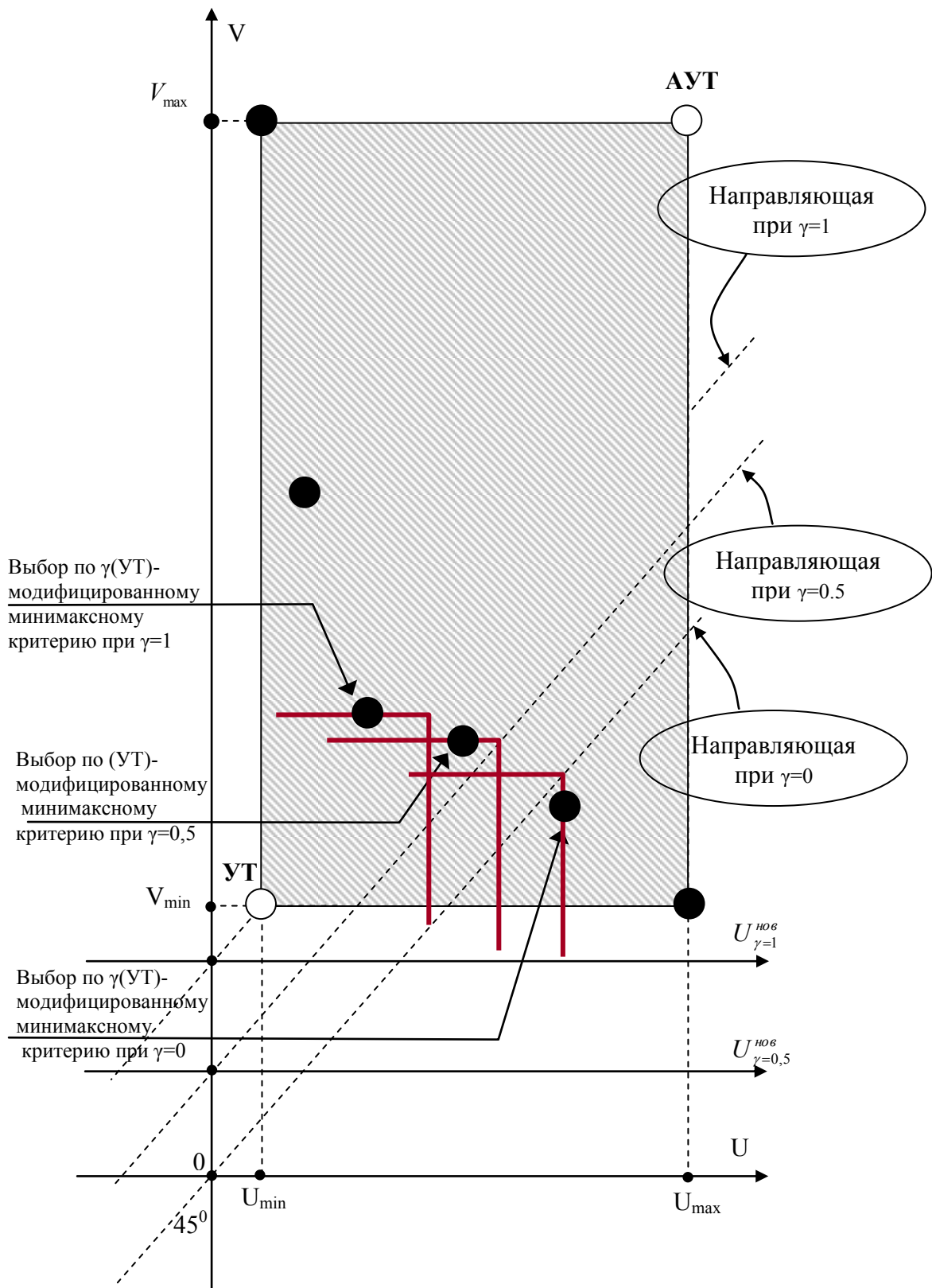


Рис. 6.2. Иллюстрация оптимального выбора по модифицированному минимаксному критерию при сдвиге его линий уровня

Таблица 6.2.

«Пересмотренные» оценки частных критериев.

Альтернативы	Модифицированные оценки по частным критериям			
	$\hat{g}^{(1)}$	$\hat{g}^{(2)}$...	$\hat{g}^{(N)}$
X_1	$a_{11} - \Delta_1^*(\gamma)$	$a_{12} - \Delta_2^*(\gamma)$...	$a_{1N} - \Delta_N^*(\gamma)$
X_2	$a_{21} - \Delta_1^*(\gamma)$	$a_{22} - \Delta_2^*(\gamma)$...	$a_{2N} - \Delta_N^*(\gamma)$
...
X_m	$a_{m1} - \Delta_1^*(\gamma)$	$a_{m2} - \Delta_2^*(\gamma)$...	$a_{mN} - \Delta_N^*(\gamma)$

Менеджер или ЛПП, как бы, «пересматривает» такие оценки, причем с новой «точки зрения» в пространстве издержек/потерь. Такая точка зрения обуславливается выбором новой системы координат в формате указанных процедур. Она получается после реализации процедур модификации из-за сдвига координатных осей в пространстве потерь (для адаптации к предпочтениям ЛПП).

Процедуры модификации, которые были представлены в этом параграфе, далее для краткости будем называть процедурами $\gamma(UT)$ -модификации или $\gamma(UT)$ -преобразованиями. Рассмотрим специфику реализации таких процедур применительно к интересующим нас критериям выбора при решении задач многокритериальной оптимизации. Иллюстрация их приложений к оптимизации конкретных логистических систем будет представлена в главе 8.

6.2.Алгоритм $\gamma(UT)$ -модификации для минимаксного критерия

Представим особенности реализации процедур $\gamma(UT)$ -модификации, которые обусловлены сдвигом семейства линий уровня критерия выбора (к утопической точке поля потерь) применительно к минимаксному критерию. Получаемый в результате такой модификации новый критерий принятия решений при многих критериях обозначаем как $\gamma(UT)$ -модифицированный минимаксный критерий.

Подчеркнем, что алгоритм оптимизации по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию предполагает реализацию следующих процедур (при минимизации частных критериев). Сначала уточняется конкретное значение коэффициента γ ($\gamma \in [0;1]$), выбор которого должен быть реализован ЛПП в соответствии со своей системой предпочтений. Далее применительно к заданным частным критериям и их оценкам для анализируемых альтернатив по формулам (6.1) - (6.3) реализуются процедуры $\gamma(UT)$ -модификации. В результате получают новые «пересмотренные» или модифицированные оценки частных критериев, обусловленные переходом к новой системе координат в пространстве значений частных критериев. После этого для новых «пересмотренных» оценок реализуются процедуры минимаксного критерия.

Если $\hat{g}^{(k)}(\bar{x})$ обозначают специальным образом модифицированные частные критерии, оценки которых соответствуют новым «пересмотренным» оценкам для исходно заданных частных критериев, то указанный подход к решению многокритериальной задачи минимизации формализуется следующим образом. Критериальная функция выбора $F(\bar{x})$ определяется равенством:

$$F(\bar{x}) = \min_{1 \leq k \leq N} \{ \hat{g}^{(k)}(\bar{x}) \} = \min_{1 \leq k \leq N} \{ g^{(k)}(\bar{x}) - \Delta_k^*(\gamma) \},$$

причем $\Delta_k^*(\gamma)$ определяются равенствами (6.1) – (6.3). Точка минимума этой критериальной функции принимается в качестве оптимального решения. Если таких точек несколько, то выбирается любая из них, но оптимальная по Парето.

ПРИМЕР 6.1. Пусть в условии примера 1.2 для нахождения наилучшего решения используется $\gamma(UT)$ -модифицированный минимаксный критерий. Оба рассматриваемых частных критерия минимизируются (напомним их: 1) минимизация ожидаемых годовых затрат на эксплуатацию агрегата в зависимости от выбираемой его мощности и надежности; 2) минимизация ожидаемых годовых издержек на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов). Показатель γ для формата процедур этого критерия, например, выбран равным $\gamma = 0,5$. Реализуем процедуры $\gamma(UT)$ -модификации.

Координаты утопической точки UT уже известны нам: $UT = (1; 1)$. Действительно, $a_{y1} = 1$ и $a_{y2} = 1$, т.к. $\min\{g^{(1)}(\bar{x})\} = 1$ и $\min\{g^{(2)}(\bar{x})\} = 1$ (см. пример 1.2 главы 1). Наименьшая из координат указанной утопической точки равна $a_y^* = 1$. Поэтому, в соответствии с формулами (6.1), имеем: $\Delta_u^* = 0$ и $\Delta_v^* = 0$. Таким образом, при любом $\gamma \in [0;1]$ (и в частности, при $\gamma=0,5$) по формулам (6.2) находим следующие параметры требуемого сдвига координатных осей в пространстве значений частных критериев: $\Delta_u^*(\gamma) = 0$

и $\Delta_{\gamma}^*(\gamma) = 0$. Это означает, что сдвиги (по координатным осям) для направляющей линии уровня минимаксного критерия в рамках этой задачи не требуются: она априори была нацелена на утопическую точку соответствующего поля потерь. Поэтому в данной ситуации имеем: $\hat{g}^{(k)}(\bar{x}) = g^{(k)}(\bar{x})$. Дальнейшие процедуры оптимизации полностью соответствуют процедурам традиционного минимаксного критерия. Они опускаются, поскольку были приведены в примере 2.8 главы 2.

Процедуры $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия в формате дискретного множества альтернатив. Такие процедуры будут представлены следующими шагами.

Шаг 1. На начальном шаге уточняется конкретное значение коэффициента γ ($\gamma \in [0;1]$), выбор которого должен быть реализован ЛПР в соответствии со своей системой предпочтений.

Шаг 2. Применительно к частным критериям и их оценкам для анализируемых альтернативных решений по формулам (6.1) - (6.3) реализуются процедуры требуемой $\gamma(UT)$ -модификации. В результате получаются новые «пересмотренные» оценки частных критериев, обусловленные новой системой координат в пространстве значений частных критериев. Для них удобно выписать новую модифицированную таблицу с указанными «пересмотренными» оценками частных критериев (см. формат табл. 6.2).

Шаг 3. В формате указанных новых «пересмотренных» оценок для частных критериев (для новой модифицированной таблицы) реализуются процедуры минимаксного критерия. Это означает, что к такой таблице дописывается дополнительный столбец. Его элементы определяются как самые плохие (самые большие) элементы по соответствующим строкам указанной модифицированной таблицы.

Шаг 4. По элементам дополнительного столбца модифицированной таблицы определяется оптимальное решение. Ему соответствует наименьший показатель в указанном дополнительном столбце.

Шаг 5. Если наименьший показатель дополнительно столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, но только после реализации процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 6.2. Для продолжения иллюстрации рассмотрим ситуацию, когда множество X состоит из дискретных точек, для которых заданы оценки частных критериев. Пусть, как и в примерах 1.1 и 2.2, необходимо выбрать наилучший вариант из семи допустимых альтернатив (A, B, C, D, E, F и G) по организации поставок сырья. Множество частных критериев задано четырьмя критериями. В качестве них выступают следующие критерии: $g^{(1)}$ - минимизация оценки годовых издержек, из-за затрат на перевозки; $g^{(2)}$ - минимизация оценки годовых издержек, из-за затрат на хранение; $g^{(3)}$ - минимизация оценки для суммарных денежных средств, замороженных в запасах; $g^{(4)}$ - минимизация оценки годовых издержек, обусловливаемых штрафными санкциями из-за срывов сроков поставки.

Показатели оценок частных критериев заданы (в тыс. у.е.) и для удобства изложения приведены в таблице 6.3. В дополнительной строке этой таблицы уже приведены координаты утопической точки UT . Найдем наилучшую альтернативу по $\gamma(UT)$ -модифицированному минимаксному критерию.

Таблица 6.3.
Оценки частных критериев и координаты UT .

Альтернативы	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25
UT	40	27	122	24

РЕШЕНИЕ. Для реализации процедур $\gamma(UT)$ -модификации в формате минимаксного критерия поступаем следующим образом.

Шаг 1. Уточняем значение параметра $\gamma \in [0;1]$. Пусть в этой ситуации ЛПР для параметра γ (в рамках указанной модификации) выбирает, например, значение $\gamma = 1$ (100%-ый формат сдвига).

Шаг 2. Предварительно подчеркнем, что соответствующая утопическая точка в поле потерь применительно к этой задаче имеет координаты: $UT = X_Y = (40; 27; 122; 24)$ – см. табл. 6.3. Действительно, $a_{y1} = 40, a_{y2} = 27, a_{y3} = 122$ и $a_{y4} = 24$, т.к. $\min\{g^{(1)}\}=40, \min\{g^{(2)}\}=27, \min\{g^{(3)}\}=122$ и $\min\{g^{(4)}\}=24$.

Наименьшая координата указанной утопической точки составляет $a_{y4}^* = 24$. Соответственно далее по формулам (6.1) определяем показатели Δ_j^* для величин «сдвигов» по j -ой координатной оси в пространстве издержек/потерь (формат 100%-ой реализации таких сдвигов):

$$\begin{aligned} \Delta_1^* &= 40 - 24 = \mathbf{16}; & \Delta_2^* &= 27 - 24 = \mathbf{3}; \\ \Delta_3^* &= 122 - 24 = \mathbf{98}; & \Delta_4^* &= 24 - 24 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

После этого определяем показатели $\Delta_j^*(\gamma)$ с учетом требований ЛПП применительно к частичной реализации соответствующего сдвига (в данной ситуации имеет место 100% формат такого сдвига при найденных выше значениях Δ_j^*):

$$\begin{aligned} \Delta_1^*(\gamma) &= 1 \cdot 16 = \mathbf{16}; & \Delta_2^*(\gamma) &= 1 \cdot 3 = \mathbf{3}; \\ \Delta_3^*(\gamma) &= 1 \cdot 98 = \mathbf{98}; & \Delta_4^*(\gamma) &= 1 \cdot 0 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Наконец, с учетом формул (6.1) - (6.3) для перехода к новым «пересмотренным» оценкам частных критериев выписываем новую модифицированную таблицу с такими новыми оценками (табл. 6.4).

Таблица 6.4.

Модифицированные оценки частных критериев при $\gamma=1$.

Альтернативы	Модифицированные оценки частных критериев				Max $\{\hat{g}^{(k)}\}$
	$\hat{g}^{(1)}$	$\hat{g}^{(2)}$	$\hat{g}^{(3)}$	$\hat{g}^{(4)}$	
A	45-16=29	27-3=24	159-98=61	29-0=29	61
B	40-16=24	34-3=31	148-98=50	28-0=28	50
C	42-16=26	35-3=32	126-98=28	24-0=24	32
D	41-16=25	34-3=31	170-98=72	28-0=28	72
E	45-16=29	35-3=32	146-98=48	26-0=26	48
F	43-16=27	32-3=29	147-98=49	27-0=27	49
G	42-16=26	36-3=33	122-98=24	25-0=25	33

К таблице 6.4 приписан дополнительный столбец (столбец «max $\hat{g}^{(k)}$ »). В нем записаны максимальные из значений модифицированных оценок частных критериев по строкам таблицы (они соответствуют наихудшим «пересмотренным» оценкам для каждой из альтернатив). Из всех элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 32 (выделен в таблице) и соответствует альтернативе С (по строке таблицы). Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива С и принимается в качестве оптимальной для организации поставок сырья применительно к анализируемому звену цепи поставок в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации по $\gamma(UT)$ -модифицированному минимаксному критерию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пример 6.2 иллюстрирует также следующую особенность процедур оптимизации в формате $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия. Если один из частных критериев имеет показатели, которые существенно превосходят показатели других частных критериев, то выбор по указанному критерию уже не превращается автоматически в выбор только по одному частному критерию (с указанными большими показателями), как это могло быть в формате традиционного минимаксного критерия.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Графическая интерпретация для семейства линий уровня этого критерия уже была представлена выше на рис. 6.1 и 6.2. Подчеркнем, что в рамках рассматриваемого здесь $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия семейство линий уровня будет определяться равенствами типа:

$$\min\{u - \gamma \cdot \Delta_u^*; v - \gamma \cdot \Delta_v^*; \dots; z - \gamma \cdot \Delta_z^*\} = K.$$

Здесь

- K – показатель линии уровня в пространстве значений частных критериев;
- γ – выбранный ЛПП показатель коэффициента частичного сдвига для линий уровня традиционного минимаксного критерия к утопической точке поля полезностей;

- Δ_α - соответствующие показатели (применительно к каждой координатной оси), вычитание которых из аргументов критериальной функции, обеспечивает именно 100%-ый формат сдвига направляющей для семейства линий уровня критерия к утопической точке поля потерь ($\alpha \in \{u, v, \dots, z\}$).

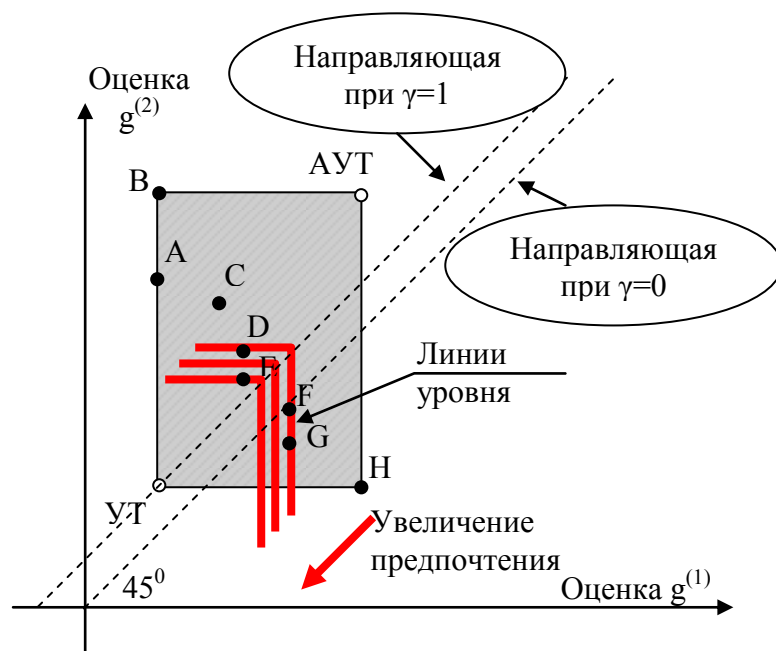


Рис. 6.3а. Иллюстрация линий уровня $\gamma(УТ)$ -модифицированного минимаксного критерия: в формате сдвига при $\gamma = 1$ выбирается альтернатива Е.

Для удобств сравнения представленных процедур оптимизации и выбора с соответствующими процедурами в формате других критериев приведем иллюстрации семейства линий уровня $\gamma(УТ)$ -модифицированного минимаксного критерия в пространстве издержек/потерь для рассмотренного в предыдущих главах случая задачи минимизации двух критериев:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Соответствующие линии уровня указанного критерия представлены на рис. 6.3(а-б). Эти рисунки соотносятся со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и H);
- среди частных критериев рассматриваются ситуации, когда: 1) нет такого критерия, показатели которого существенно превышали бы показатели другого частного критерия; 2) такой критерий имеется – это критерий $g^{(2)}$.

Возможность оценки и выбора параметра γ в формате $\gamma(УТ)$ -модифицированного минимаксного критерия. Отметим ещё одну особенность, связанную с возможностями использования представленного $\gamma(УТ)$ -модифицированного минимаксного критерия. Зная выбор конкретного ЛПР, который был реализован в соответствии с его предпочтениями в рамках некоторой многокритериальной задачи оптимизации, можно получать оценки для допустимых значений параметра γ применительно к системе предпочтений этого ЛПР в формате соответствующих частных критериев.

Другими словами, можно определять, в каком формате следует реализовать «сдвиг» линий уровня к утопической точке с учетом имеющейся системы предпочтений ЛПР. Такой подход позволяет оценивать и уточнять для ЛПР (по результатам выборов предпочитаемых им решений) соответствующий характер его линий уровня. Для иллюстрации подхода к оценке « γ » снова вернемся к условиям предыдущего примера.

ПРИМЕР 6.2 (Дополнение: иллюстрация процедур оценки коэффициента γ в формате предпочтений ЛПР для минимаксного критерия). Рассмотрим ситуацию, которая обсуждалась в примере 6.2, когда задача многокритериальной оптимизации привела к минимизации четырех частных критериев. Наилучшее решение выбирается из 6 альтернатив, которые были представлены в таблице 6.3. Дополнительные особенности – следующие. Пусть, например, известно, что некоторое ЛПР в рамках этой ситуации предпочитает альтернативу С. Требуется оценить возможный диапазон значений для параметра γ применительно к такому ЛПР.

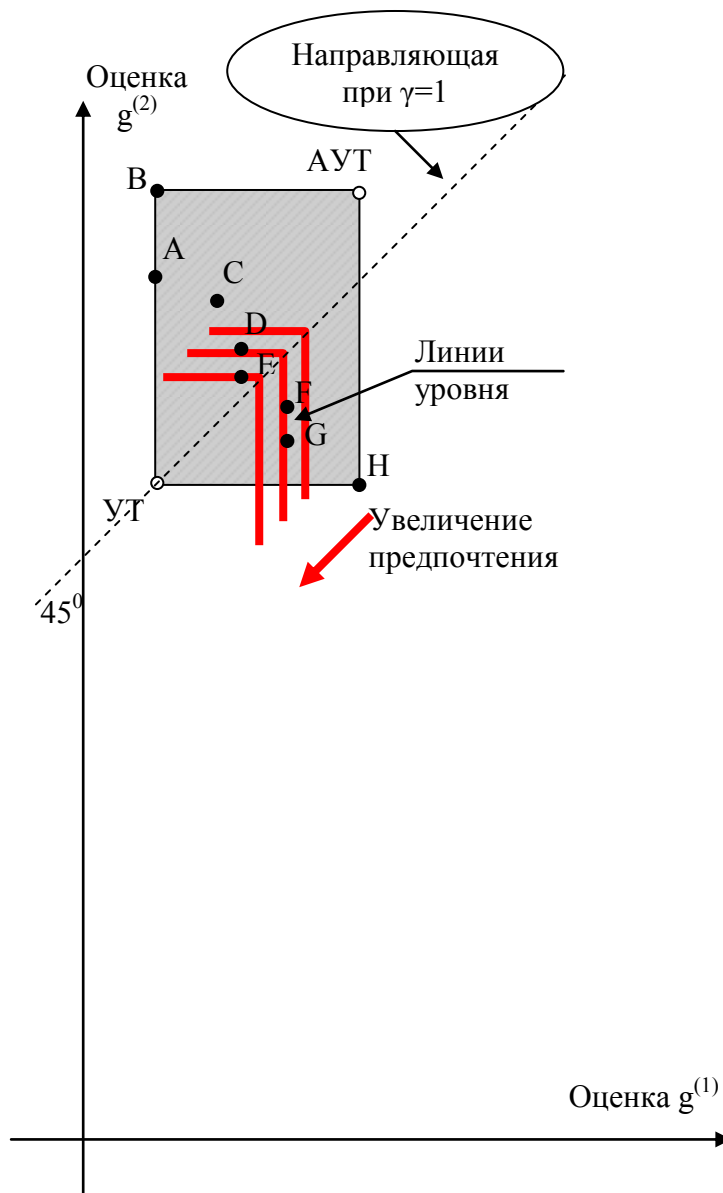


Рис. 6.36. Иллюстрация линий уровня $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия: в формате сдвига при $\gamma = 1$, когда оценки по критерию $g^{(2)}$ значительно превышают оценки по критерию $g^{(1)}$, снова выбирается альтернатива Е.

РЕШЕНИЕ. Дополним исходную таблицу в рамках этого примера одним столбцом, в котором представим показатели $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия как функции переменной γ в области $\gamma \in [0;1]$. Соответствующие процедуры представлены в таблице 6.5.

Таблица 6.5.
Модифицированная таблица с показателями частных критериев

Решения	Модифицированные оценки частных критериев				Показатель модифицированного минимаксного критерия как функция от γ
	$\hat{g}^{(1)}$	$\hat{g}^{(2)}$	$\hat{g}^{(3)}$	$\hat{g}^{(4)}$	

A	45-16·γ	27-3·γ	159-98·γ	29-0·γ	159 - 98·γ
B	40-16·γ	34-3·γ	148-98·γ	28-0·γ	148 - 98·γ
C	42-16·γ	35-3·γ	126-98·γ	24-0·γ	Max{35 - 3·γ ; 126 - 98·γ}
D	41-16·γ	34-3·γ	170-98·γ	28-0·γ	170 - 98·γ
E	45-16·γ	35-3·γ	146-98·γ	26-0·γ	146 - 98·γ
F	43-16·γ	32-3·γ	147-98·γ	27-0·γ	147 - 98·γ
G	42-16·γ	36-3·γ	122-98·γ	25-0·γ	Max{36 - 3·γ ; 122 - 98·γ}

Воспользуемся тем, что согласно условию, ЛПР выбрало альтернативу С. В контексте рассматриваемого модифицированного минимаксного критерия это означает, что показатель $\text{Max}\{35 - 3\cdot\gamma ; 126 - 98\cdot\gamma\}$ (см. строку, соответствующую альтернативе С) оказался самым малым из всех показателей дополнительного столбца. Следовательно, можно выписать следующую систему линейных неравенств относительно неизвестного значения γ :

$$\begin{aligned} \text{Max}\{35 - 3\cdot\gamma ; 126 - 98\cdot\gamma\} &< 159 - 98\cdot\gamma; \\ \text{Max}\{35 - 3\cdot\gamma ; 126 - 98\cdot\gamma\} &< 148 - 98\cdot\gamma; \\ \text{Max}\{35 - 3\cdot\gamma ; 126 - 98\cdot\gamma\} &< 170 - 98\cdot\gamma; \\ \text{Max}\{35 - 3\cdot\gamma ; 126 - 98\cdot\gamma\} &< 146 - 98\cdot\gamma; \\ \text{Max}\{35 - 3\cdot\gamma ; 126 - 98\cdot\gamma\} &< 147 - 98\cdot\gamma; \\ \text{Max}\{35 - 3\cdot\gamma ; 126 - 98\cdot\gamma\} &< \text{Max}\{36 - 3\cdot\gamma ; 122 - 98\cdot\gamma\}. \end{aligned}$$

Все первые пять неравенств будут выполнены, если будет выполнено именно последнее неравенство. Поэтому решение системы сводится к решению последнего неравенства: $\text{Max}\{35 - 3\cdot\gamma ; 126 - 98\cdot\gamma\} < \text{Max}\{36 - 3\cdot\gamma ; 122 - 98\cdot\gamma\}$. Обычными методами элементарной математики находим, что

$\gamma \in \left(\frac{18}{19}; 1\right]$. Итак, приемлемым для такого ЛПР будет некоторое значение γ из указанной области (т.к. в

рассматриваемой ситуации оптимальный выбор по модифицированному минимаксному критерию будет давать именно альтернативу С).

Продолжая аналогичные процедуры, но уже применительно к другим ситуациям бизнеса, можно уточнять для этого ЛПР соответствующую оценку неизвестного параметра γ .

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Представленный аппарат линий уровня для модифицированного минимаксного критерия можно использовать для нахождения наилучших решений по указанному критерию, если задача оптимизации формализована в графическом представлении. Проиллюстрируем это следующими примерами.

ПРИМЕР 6.3. Нахождение наилучшего решения по методу $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия (при минимизации двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь ($U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$), задано графически (см. рис. 6.4). Требуется: найти наилучшее компромиссное решение по методу $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия.

РЕШЕНИЕ. Напомним, что в рассматриваемом примере множество решений, оптимальных по Парето, представлено в пространстве издержек / потерь следующими точками: это – точки Р, Н и отрезок [М, L], включая его концы. Поэтому оптимальное решение должно быть выбрано из указанного множества.

Процедура выбора наилучшего решения по методу $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия представлена на рис. 6.4. Направляющая для линий уровня этого критерия проходит через утопическую точку (ее координаты задаются равенством $UT = (40; 35)$), причем параллельно биссектрисе первого координатного угла. Легко видеть, что в области допустимых альтернативных решений наилучший показатель минимаксного критерия соответствует альтернативе из отрезка [М, L].

Обозначим указанную точку через S. Она лежит на пересечении двух линий: указанной выше направляющей и линии, проходящей через точки М и L. Координаты точки S - следующие: (42, (3); 37, (3)). Убедитесь в этом самостоятельно (например, воспользовавшись приемом, который был проиллюстрирован в примере 4.6 главы 4).

Кстати, только одна указанная точка имеет лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Поэтому процедуры формализации множества решений, оптимальных по Парето можно опустить. Итак, альтернатива S является оптимальным решением по указанному критерию.

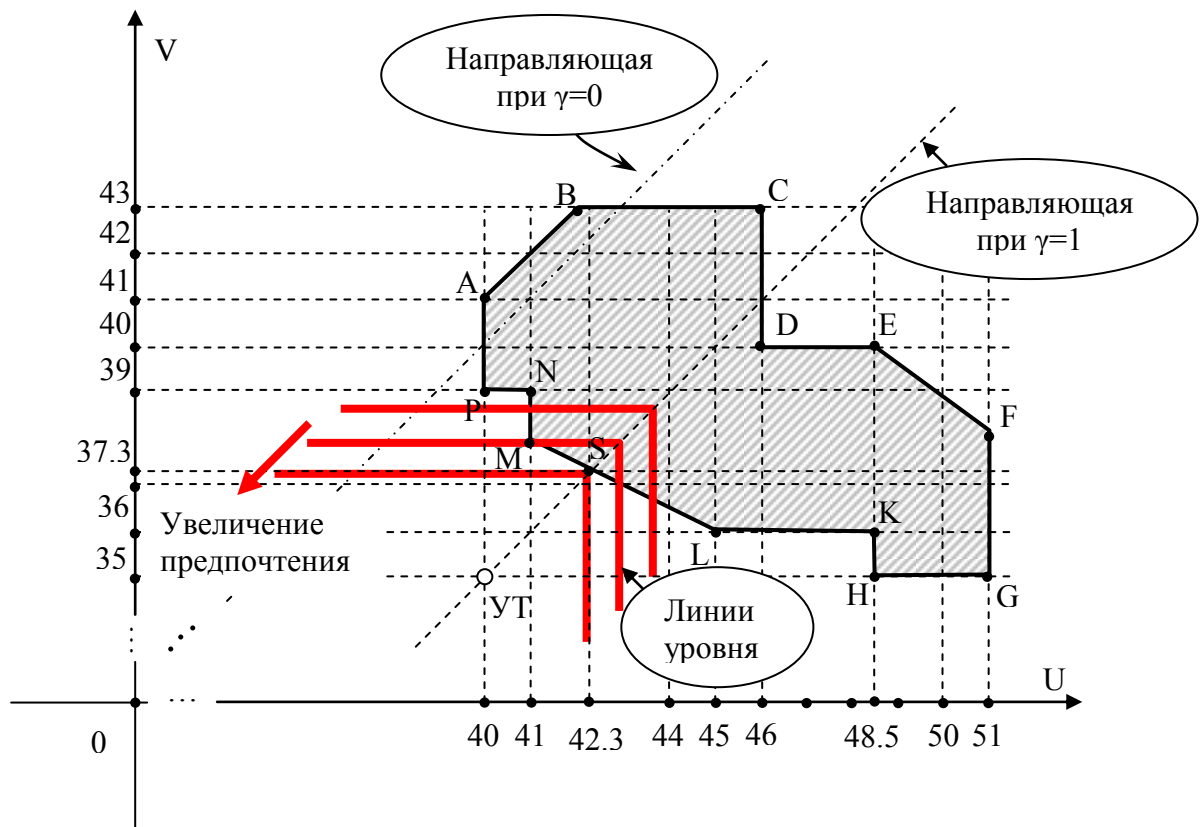


Рис. 6.4. Графическое решение задачи минимизации двух критериев: в формате сдвига при $\gamma=1$ $\gamma(UT)$ -модифицированный минимаксный критерий выбирает альтернативу S.

6.3. Алгоритм $\gamma(UT)$ -модификации для критерия Гурвица

В этом параграфе представим особенности реализации процедур $\gamma(UT)$ -модификации, которые обусловлены сдвигом семейства линий уровня критерия выбора (к утопической точке поля потерь) применительно к критерию выбора по методу Гурвица. Получаемый в результате такой модификации новый модифицированный критерий принятия решений при многих критериях называем $\gamma(UT)$ -модифицированным критерием Гурвица.

Алгоритм оптимизации решения в рамках указанного $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица будет предполагать реализацию следующих процедур (как и ранее, рассматривается формат задачи минимизации частных критериев). Сначала уточняется конкретное значение коэффициента γ ($\gamma \in [0;1]$), выбор которого должен быть реализован ЛПР в соответствии со своей системой предпочтений. Далее применительно к исходно заданным частным критериям и их оценкам для анализируемых альтернативных решений по формулам (6.1) - (6.3) реализуются процедуры требуемой $\gamma(UT)$ -модификации. В результате получают новые «пересмотренные» или модифицированные оценки частных критериев, обусловленные сдвигом системы координат в пространстве значений частных критериев. После этого в формате указанных новых «пересмотренных» оценок для частных критериев реализуются процедуры выбора на основе подхода, предложенного в критерии Гурвица.

Пусть, как и прежде, $\hat{g}^{(k)}(\bar{x})$ обозначают специальным образом модифицированные частные критерии, оценки которых соответствуют новым «пересмотренным» оценкам для исходно заданных частных критериев в формате процедур $\gamma(UT)$ -модификации. Критериальная функция выбора $F(\bar{x})$ определяется равенством:

$$F(\bar{x}) = c \cdot \max_{1 \leq k \leq N} \{\hat{g}^{(k)}(\bar{x})\} + (1-c) \cdot \min_{1 \leq k \leq N} \{\hat{g}^{(k)}(\bar{x})\},$$

где для альтернативного решения \bar{x} максимум и минимум ищутся по всем «пересмотренным» оценкам для исходно заданных частных критериев, а $c \in [0;1]$ – параметр, который выбирает менеджер (для адаптации линий уровня критерия к предпочтениям ЛПР). Точка минимума этой критериальной функции принимается в качестве оптимального решения. Если таких точек несколько, то в случаях $c=0$ и $c=1$ требуется дополнительная проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 6.4. Пусть в условии примера 6.1 для нахождения наилучшего решения используется представленный $\gamma(UT)$ -модифицированный критерий Гурвица. Оба заданных частных критерия минимизируются. Показатель γ для формата процедур $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица, например, выбран равным $\gamma = 0,5$. Требуется: реализовать соответствующие процедуры $\gamma(UT)$ -модификации.

РЕШЕНИЕ. Как и в примере 6.1 напомним, что координаты утопической точки UT уже известны нам. Действительно, $a_{y1} = 1$ и $a_{y2} = 1$, т.к. $\min\{g^{(1)}(\bar{x})\} = 1$ и $\min\{g^{(2)}(\bar{x})\} = 1$ (см. пример 1.2 главы 1). Таким образом, $UT = (1; 1)$. Для наименьшей из координат указанной утопической точки имеем равенство $a_{y^*} = 1$. В соответствии с формулами (6.1) для требуемой $\gamma(UT)$ -модификации имеем: $\Delta_u^* = 0$ и $\Delta_v^* = 0$. Поэтому по формулам (6.2) находим, что для параметров требуемого сдвига координатных осей в пространстве значений частных критериев в этой ситуации имеют место равенства: $\Delta_u^*(\gamma) = 0$ и $\Delta_v^*(\gamma) = 0$. Следовательно, в этой задаче сдвиги (по координатным осям) для направляющей линий уровня критерия Гурвица не требуются. Направляющая критерия Гурвица в этом примере уже была нацелена на утопическую точку поля потерь (в формате исходно заданных частных критериев). Модификация оценок частных критериев не требуется. Поэтому в данной ситуации имеем: $\hat{g}^{(k)}(\bar{x}) = g^{(k)}(\bar{x})$.

Дальнейшие процедуры оптимизации полностью соответствуют процедурам представленного в главе 2 критерия выбора по методу Гурвица. В соответствии с указанным критерием и найденными параметрами сдвигов системы координат в пространстве значений частных критериев получаем следующую задачу минимизации:

$$c \cdot \max \{2x - y; 5 - x - 2y\} + (1-c) \cdot \min \{2x - y; 5 - x - 2y\} \rightarrow \min$$

при условии

$$x \in [1; 2] \text{ и } y \in [0; 1].$$

Дальнейшие иллюстрации процедур оптимизации опускаются, поскольку они были приведены в примере 2.11 (см. главу 2).

Процедуры $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица в формате дискретного множества альтернатив. Процедуры оптимизации в формате $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица будут представлены следующими шагами алгоритма оптимизации (как и выше, предполагается формат задачи минимизации частных критериев).

Шаги 1 – 2. Они полностью соответствуют представленным выше процедурам в формате $\gamma(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия. В частности, на начальном шаге уточняется значение параметра γ ($\gamma \in [0; 1]$). Затем по формулам (6.1) - (6.3) реализуются процедуры требуемой $\gamma(UT)$ -модификации. Результат для новых «пересмотренных» оценок частных критериев представляется в виде новой модифицированной таблицы.

Шаг 3. В формате указанных новых «пересмотренных» оценок для частных критериев (для новой модифицированной таблицы) реализуются процедуры критерия выбора по Гурвицу. Это означает следующее.

- 13) К новой модифицированной таблице с «пересмотренными» оценками частных критериев приписывается три дополнительных столбца. В первый записывают максимальные (наихудшие в формате задачи оптимизации) из значений таких новых оценок для каждого из вариантов решений (т.е. максимальные элементы по строкам новой модифицированной таблицы).
- 14) Во второй записывают наименьшие (наилучшие в формате задачи оптимизации) из значений таких оценок (т.е. минимальные элементы по строкам указанной таблицы).
- 15) В третий (он будет решающим) записывают средневзвешенный результат для элементов первых двух вспомогательных столбцов с весами c и $(1 - c)$. Весовой коэффициент « c » выбирается ЛПР из множества $c \in [0; 1]$; он соотносится именно с тем вспомогательным столбцом, в котором записаны наилучшие модифицированные показатели частных критериев.

Шаг 4. Затем из всех элементов указанного третьего дополнительного столбца модифицированной таблицы выбирается наименьший (образно говоря, «из всех зол выбирают наименьшее», т.к. показатели оценок относятся к полю издержек / потерь).

Шаг 5. Соответствующее (по строке модифицированной таблицы) найденному элементу третьего дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации.

Шаг 6. Если наименьший показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в случаях $c \neq 0$ и $c \neq 1$ в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них (все они будут оптимальными по Парето). В случаях $c = 0$ и $c = 1$ выбор можно реализовать только после процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 6.5. Для продолжения иллюстрации процедур оптимизации по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица рассмотрим ситуацию, когда множество X состоит из дискретных точек, для которых заданы оценки частных критериев.

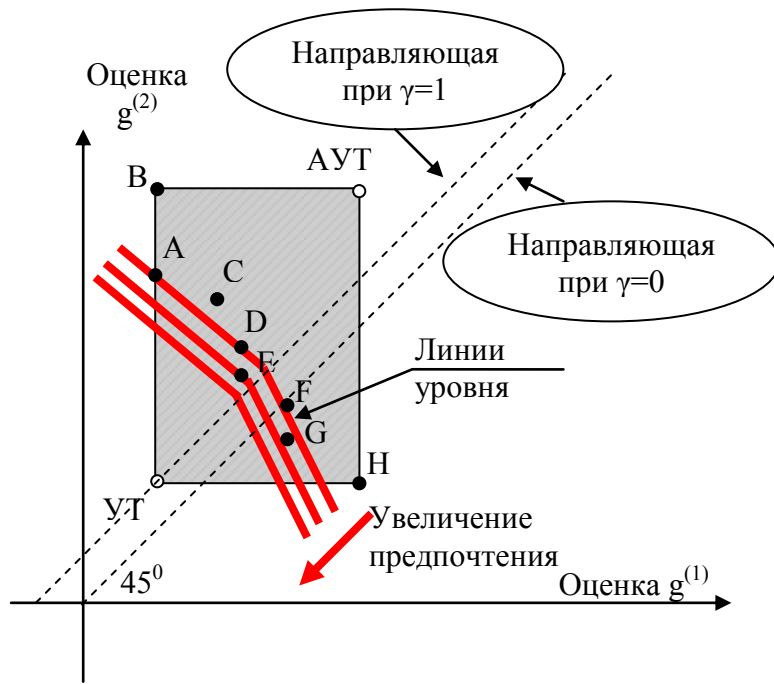


Рис. 6.5-а. Иллюстрация семейства линий уровня $\gamma(УТ)$ -модифицированного критерия выбора по Гурвицу (при $c = 0,7$ выбирается альтернатива Е).

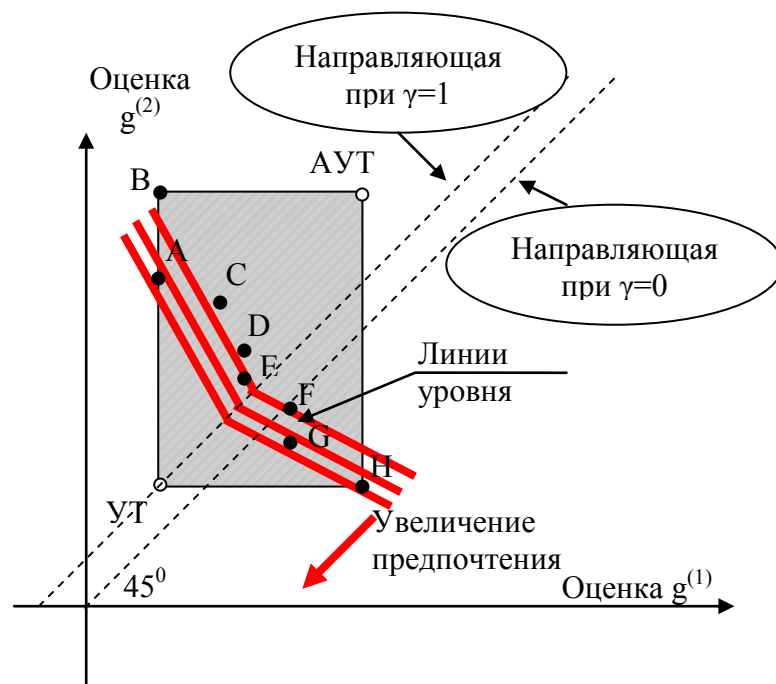


Рис. 6.5-б. Иллюстрация семейства линий уровня $\gamma(УТ)$ -модифицированного критерия выбора по Гурвицу (при $c = 0,2$ выбирается альтернатива Н).

Для удобства сравнения результатов выбора, рассмотрим ситуацию, представленную в примере 6.2, когда выбирается наилучший вариант из семи допустимых альтернатив (А, В, С, D, E, F и G) по организации поставок сырья. Напомним, что множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями (см. пример 6.2). Показатели оценок частных критериев были приведены в таблице 6.3. В дополнительной строке этой таблицы также приведены координаты утопической точки UT в поле издержек/потерь. Требуется: найти наилучшую альтернативу по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица, приняв для управляющего параметра «с» значение $c=0,5$.

РЕШЕНИЕ. *Шаги 1-2.* Процедуры $\gamma(UT)$ -модификации не зависят от формата критерия выбора. Они зависят от выбора параметра $\gamma \in [0;1]$ и от структуры задачи многокритериальной оптимизации. Пусть и в этой ситуации ЛПР для параметра γ (в рамках указанной $\gamma(UT)$ -модификации) выбирает значение $\gamma=1$ (100%-ый формат сдвига). Тогда процедуры $\gamma(UT)$ -модификации будут полностью соответствовать аналогичным процедурам примера 6.2. Поэтому здесь их можно опустить. Результат таких процедур – новая модифицированная таблица с «пересмотренными» оценками частных критериев, - см. табл. 6.4. Процедуры выбора в формате таких оценок иллюстрирует таблица 6.5.

Таблица 6.5.
Процедуры выбора по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица ($\gamma=1$).

Альтернативы	Значения частных критериев				Max {g ^(k) }	Min {g ^(k) }	Показатель критерия выбора
	g ⁽¹⁾	g ⁽²⁾	g ⁽³⁾	g ⁽⁴⁾			
А	29	24	61	29	61	24	42,5
В	24	31	50	28	50	24	37
С	26	32	28	24	32	24	28
D	25	31	72	28	72	25	48,5
Е	29	32	48	26	48	26	37
F	27	29	49	27	49	27	38
G	26	33	24	25	33	24	28,5

Для нахождения наилучшего решения по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица к новой модифицированной матрице с «пересмотренными» оценками $\hat{g}^{(k)}$ частных критериев приписываем три дополнительных столбца (такая процедура уже формализована в таблице 6.5: это – столбцы «max $\hat{g}^{(k)}$ », «min $\hat{g}^{(k)}$ » и последний). В первый столбец записываем максимальные из значений «пересмотренных» оценок частных критериев по строкам таблицы. Во второй столбец записываем минимальные из значений таких оценок. В последний третий столбец записываем взвешенные показатели первых двух вспомогательных столбцов с заданными весами (0,5 и 0,5). Наконец, из всех элементов этого дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 28 (выделен в таблице) и отвечает альтернативе С (по строке таблицы). Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива С принимается в качестве оптимальной для организации соответствующих поставок сырья применительно к анализируемому звену цепи поставок по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица.

Графическая интерпретация и линии уровня критерия. Линии уровня для $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица по своей структуре остаются такими же, как и в формате традиционного подхода по критерию Гурвица (см. рис. 2.11 главы 2). Их специфика в формате представленного здесь критерия выбора состоит в следующем. Направляющая для линий уровня уже не обязательно совпадает с биссектрисой первого координатного угла. Она «привязана» к утопической точке поля потерь, причем остается параллельной биссектрисе первого координатного угла. Соответствующая «привязка» подразумевает: 1) при $\gamma=1$ указанная направляющая проходит через UT (полный формат сдвига направляющей к UT); 2) при $\gamma=0$ указанная направляющая совпадает с биссектрисой первого координатного угла (отсутствует сдвиг направляющей к UT); 3) в остальных случаях она занимает промежуточное положение относительно указанных выше «крайних» ситуаций для расположения такой направляющей. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите самостоятельно (далее использован формат введенных в начале этой главы обозначений) график функции

$$c \cdot \text{Max} \{u - \Delta_u^*(\gamma); v - \Delta_v^*(\gamma)\} + (1-c) \cdot \text{Min} \{u - \Delta_u^*(\gamma); v - \Delta_v^*(\gamma)\} = K$$

(при различных значениях параметров γ и c из интервала [0; 1]).

Как и в предыдущих ситуациях, приведем иллюстрацию семейства линий уровня рассматриваемого в этом параграфе критерия в пространстве издержек / потерь для случая задачи минимизации двух частных критериев ($N = 2$): $g^{(1)} \rightarrow \min$, $g^{(2)} \rightarrow \min$. Соответствующие линии уровня указанного критерия представлены на рис. 6.5(а-б) при разных значениях управляющего параметра «С». Эти рисунки соотносятся со случаями, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и H);
- для параметра c выбираются следующие значения: $c = 0,7$; $c = 0,2$.

Указанные рисунки иллюстрируют, что решение задачи нахождения оптимального решения на основе указанного $\gamma(VT)$ -модифицированного критерия Гурвица в ситуации $N = 2$ имеет следующую графическую интерпретацию. Пусть вдоль направляющей для линий уровня критерия (напомним, она параллельна биссектрисе первого координатного угла и в общем случае занимает «промежуточное» положение между указанной биссектрисой и параллельной к ней линии, проходящей через утопическую точку поля потерь) передвигается специальный инструмент. Этот инструмент представляет собой угол, вершина которого лежит на указанной направляющей, а стороны идут под одинаковым углом к границе соответствующего конуса предпочтений. При этом движение осуществляется в направлении улучшения / уменьшения показателя критериальной функции выбора, т.е. от антиутопической точки в сторону утопической точки поля потерь. Тогда последняя (из анализируемых) точка в поле потерь, которую «захватит» этот инструмент при указанном движении, как раз и будет соответствовать оптимальному выбору по этому методу.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Представленный аппарат линий уровня для $\gamma(VT)$ -модифицированного критерия Гурвица удобно использовать для нахождения наилучших решений (по указанному критерию), если задача многокритериальной оптимизации формализована в графическом представлении. Проиллюстрируем это на примерах, которые уже были использованы ранее, рассмотрим различные варианты выбора весовых коэффициентов «С».

ПРИМЕР 6.6. Нахождение наилучшего решения по $\gamma(VT)$ -модифицированному методу Гурвица при $c = 0,8$ (минимизация двух частных критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь ($U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$), задано графически (см. рис. 6.6). Требуется: найти наилучшее решение по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию Гурвица при $c = 0,8$.

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора наилучшего решения по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию Гурвица при $c = 0,8$ представлена на рис. 6.6. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель такого критерия соответствует альтернативе S. Указанная альтернатива представлена точкой S, которая лежит на пересечении двух линий: 1) направляющая для линий уровня критерия при $\gamma=1$; 2) отрезок [M; L]. Параметры/координаты указанной точки уже были приведены ранее в примере 6.3. Поэтому их расчет здесь опускаем.

Кстати, только одна альтернатива S имеет лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Итак, при $c = 0,8$ альтернатива S является оптимальным решением по указанному критерию.

ПРИМЕР 6.7. Нахождение наилучшего решения по $\gamma(VT)$ -модифицированному методу Гурвица при $c = 0,25$ (минимизация двух критериев). Пусть, как и в предыдущем примере, снова минимизируются те же два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Кроме того, пусть для удобства сравнения результатов оптимизации множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь ($U \times V$), где $U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$, будет таким же, как и в предыдущем примере (см. рис. 6.7).

Требуется: найти наилучшее решение по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию Гурвица при $c = 0,25$.

РЕШЕНИЕ. Оптимизация выбора наилучшей альтернативы по методу Гурвица в случае $c = 0,25$ представлена на рис. 6.7. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель $\gamma(VT)$ -модифицированного по Гурвицу критерия выбора соответствует альтернативе P. В этой ситуации, только она одна имеет лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Поэтому процедуры проверки этой альтернативы на оптимальность по Парето также можно опустить. Итак, при выборе параметра $c = 0,25$ оптимальным решением по указанному критерию является альтернатива P.

Подчеркнем дополнительно следующую особенность. Для анализируемой ситуации при $c = 0,25$ некоторое отклонение в наклоне линий уровня может привести к другому выбору (см. точку M на рис. 6.7).

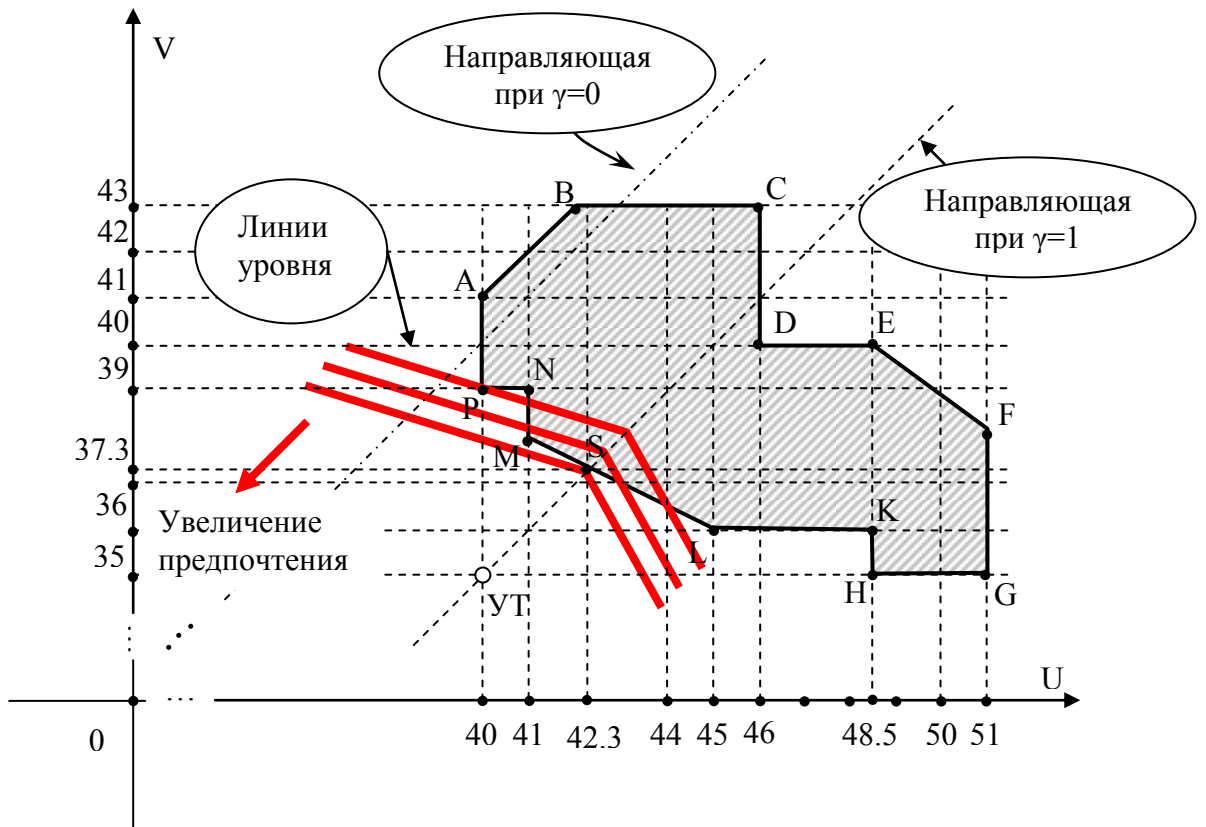


Рис. 6.6. Графическое представление задачи минимизации двух критериев (в формате $\gamma(VT)$ -модифицированного критерия Гурвица при $c = 0,8$).

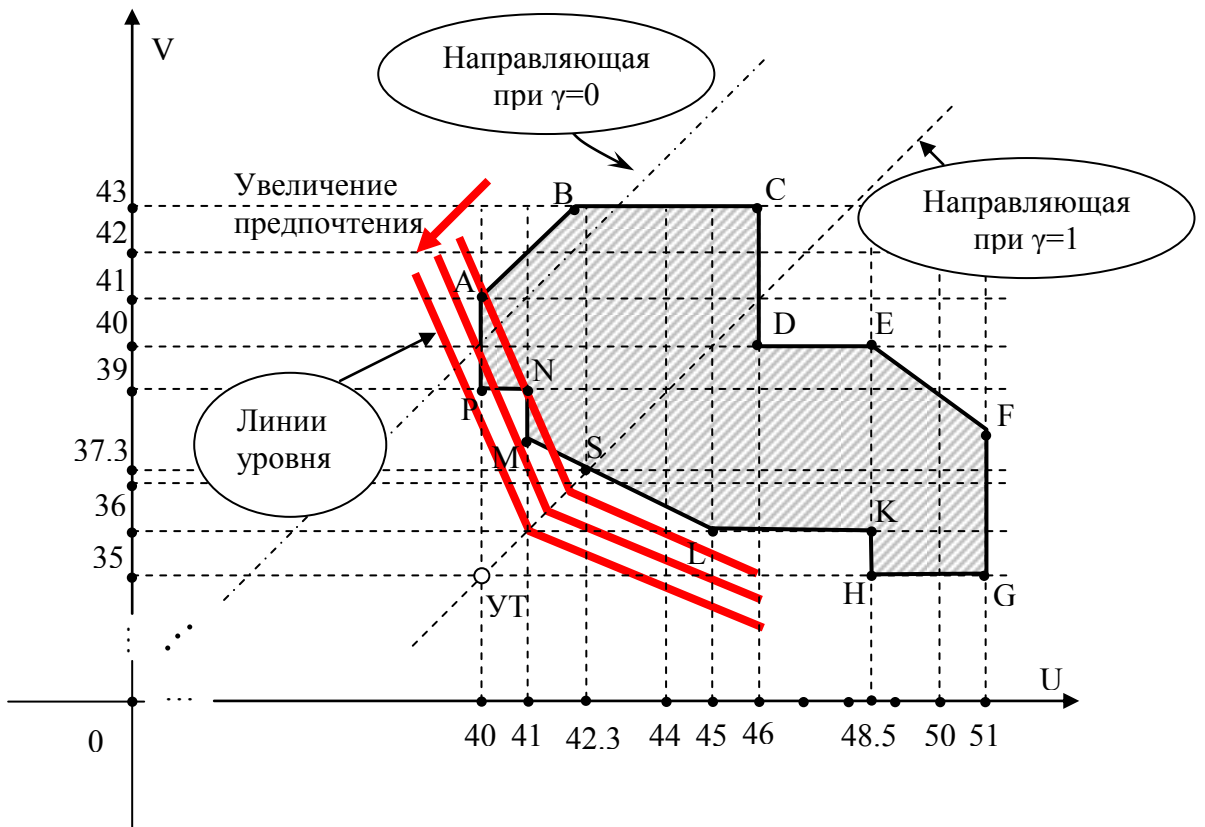


Рис. 6.7. Графическое представление задачи минимизации двух критериев (в формате $\gamma(VT)$ -модифицированного критерия Гурвица при $c = 0,25$).

Поэтому, чтобы не осталось сомнений в правильности указанного выбора, следует уточнить показатели «К» линий уровня для альтернатив, представленных точками Р и М.

Таблица 6.6.

Расчет показателей линий уровня для альтернатив Р и М.

Точки	Оценки частных критериев		Показатель «К» линии уровня для $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица при $c = 0,25$
	До процедур $\gamma(UT)$ -модификации	После процедур $\gamma(UT)$ -модификации	
Р	(40; 39)	(35; 39)	$K_P = 39 \cdot 0,25 + 35 \cdot 0,75 = 36$
М	(41; 38)	(36; 38)	$K_M = 38 \cdot 0,25 + 36 \cdot 0,75 = 36,5$

В формате рассматриваемого критерия эти показатели надо определять следующим образом. Сначала уточняем координаты UT : $UT = (40; 35)$. Минимальная из указанных координат равна 35 (она соответствует второму частному критерию). Поэтому в рамках процедур $\gamma(UT)$ -модификации потребуется сдвиг по оси OU (модификация для оценок первого частного критерия). В принятых в начале главы обозначениях имеем: $\Delta_u^* = 5$, т.к. $40 - 35 = 5$. Кроме того, $\Delta_u^*(\gamma) = \Delta_u^* \cdot \gamma = 5 \cdot 1 = 5$ (формат 100% сдвига при $\gamma=1$). Теперь определим «пересмотренные» оценки частных критериев: они пересматриваются для частного критерия $g^{(1)}$; для частного критерия $g^{(2)}$ оценки остаются прежними. Результат представлен в таблице 6.6.

Полученные новые/«пересмотренные» оценки используем для определения показателей «К» линий уровня, которые соответствуют интересующим нас точкам. С этой целью реализуются процедуры расчетов указанных показателей по методу Гурвица. Результаты представлены в последнем столбце таблицы 6.6. Минимальный показатель в этом столбце соотносится с альтернативой Р (он равен 36 и выделен в столбце жирным шрифтом). Таким образом, альтернатива Р имеет наилучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Приведенные расчеты подтвердили корректность графического представления процедур выбора наилучшего решения на рис. 6.7 по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица.

6.4. Алгоритм $\gamma(UT)$ -модификации для критерия среднего геометрического

В этом параграфе представим особенности реализации процедур $\gamma(UT)$ -модификации для частичного сдвига семейства линий уровня критерия (к утопической точке поля потерь в задачах минимизации частных критериев) применительно к критерию выбора по методу среднего геометрического. Получаемый в результате такой модификации новый модифицированный критерий принятия решений при многих критериях называем $\gamma(UT)$ -модифицированным критерием на основе среднего геометрического.

Алгоритм оптимизации для указанного $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия выбора по среднему геометрическому будет предполагать реализацию следующих процедур (напомним, рассматривается формат задачи минимизации частных критериев). Сначала уточняется конкретное значение коэффициента γ ($\gamma \in [0;1]$). Его выбор реализует ЛПР в соответствии со своими предпочтениями. Далее исходно заданные оценки частных критериев модифицируются по формулам (6.1) - (6.3), т.е. реализуются процедуры требуемой $\gamma(UT)$ -модификации. В результате получаются новые «пересмотренные» оценки частных критериев из-за соответствующего сдвига системы координат в пространстве значений частных критериев. После этого для таких новых «пересмотренных» оценок реализуются процедуры выбора на основе подхода в формате критерия выбора по среднему геометрическому.

Пусть, как и прежде, $\hat{g}^{(k)}(\vec{x})$ обозначают специальным образом модифицированные частные критерии, оценки которых соответствуют новым «пересмотренным» оценкам для исходно заданных частных критериев по соответствующим процедурам $\gamma(UT)$ -модификации. Тогда указанный подход к решению многокритериальной задачи минимизации формализуется следующим образом. Критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ определяется равенством:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N \hat{g}^{(k)}(\vec{x})} = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N (g^{(k)}(\vec{x}) - \Delta_k^*(\gamma))}.$$

Точка минимума этой критериальной функции принимается в качестве оптимального решения.

Процедуры $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия по методу среднего геометрического в формате дискретного множества альтернатив. Соответствующие процедуры оптимизации будут представлены следующими шагами алгоритма оптимизации (напомним, что предполагается формат задачи минимизации частных критериев).

Шаги 1 – 2. Эти шаги полностью соответствуют представленным выше процедурам в формате $\gamma(VT)$ -модифицированного минимаксного критерия и модифицированного критерия Гурвица. При этом на начальном шаге уточняется значение параметра γ ($\gamma \in [0;1]$). Затем по формулам (6.1) - (6.3) реализуются процедуры требуемой $\gamma(VT)$ -модификации. Результат для новых «пересмотренных» оценок частных критериев представляется в виде новой модифицированной таблицы со значениями показателей, которые мы обозначаем через $\hat{g}^{(k)}(\bar{x})$.

Шаг 3. В формате указанных новых «пересмотренных» оценок для частных критериев (для новой модифицированной таблицы) реализуются процедуры критерия выбора по методу среднего геометрического. Это означает следующее.

- 1) К новой модифицированной таблице с «пересмотренными» оценками частных критериев приписывается дополнительный столбец. В нем записывают значения среднего геометрического показателя для каждого из вариантов решений (т.е. по строкам новой модифицированной таблицы).
- 2) Затем из всех элементов дополнительного столбца модифицированной таблицы выбирается наименьший (образно говоря, «из всех зол выбирают наименьшее», т.к. показатели оценок относятся к полю издержек / потерь).

Шаг 4. Соответствующее (по строке модифицированной таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации.

Шаг 5. Если наименьший показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них. Все они будут оптимальными по Парето (это обеспечивается атрибутами критерия выбора по методу среднего геометрического).

ПРИМЕР 6.8. Для иллюстрации процедур оптимизации по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического рассмотрим случай, когда множество X является дискретным. Для удобства сравнения результатов выбора, как и в предыдущих случаях, рассмотрим ситуацию, представленную в примере 6.2, когда выбирается наилучший вариант из семи допустимых альтернатив (A, B, C, D, E, F и G) по организации поставок сырья. Напомним, что множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями (см. пример 6.2). Показатели оценок частных критериев были приведены в таблице 6.3. В дополнительной строке этой таблицы также приведены координаты утопической точки VT в поле издержек/потерь. Требуется: найти наилучшую альтернативу по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического, приняв для управляющего параметра « γ » значение $\gamma = 1$.

РЕШЕНИЕ. Шаги 1-2. Как уже отмечалось, процедуры $\gamma(VT)$ -модификации не зависят от формата критерия выбора. Они зависят от выбора конкретного значения параметра $\gamma \in [0;1]$ и от структуры самой задачи многокритериальной оптимизации. В этой ситуации ЛПР для параметра γ (в рамках указанной $\gamma(VT)$ -модификации) выбрало значение $\gamma = 1$ (100%-ый формат сдвига). Поэтому процедуры $\gamma(VT)$ -модификации будут полностью соответствовать процедурам, которые уже были представлены при решении примеров 6.2 и 6.5. Поэтому здесь их можно опустить. Результат таких процедур – новая модифицированная таблица с «пересмотренными» оценками частных критериев, которая была приведена в табл. 6.4. Процедуры выбора по методу среднего геометрического в формате таких новых оценок иллюстрирует таблица 6.7.

Таблица 6.7.

Процедуры выбора по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического ($\gamma=1$).

Альтернативы	«Пересмотренные» оценки частных критериев				Показатель среднего геометрического
	$\hat{g}^{(1)}$	$\hat{g}^{(2)}$	$\hat{g}^{(3)}$	$\hat{g}^{(4)}$	
A	29	24	61	29	$\sqrt[4]{29 \cdot 24 \cdot 61 \cdot 29} = 33,31$
B	24	31	50	28	$\sqrt[4]{24 \cdot 31 \cdot 50 \cdot 28} = 31,95$
C	26	32	28	24	$\sqrt[4]{26 \cdot 32 \cdot 28 \cdot 24} = 27,34$
D	25	31	72	28	$\sqrt[4]{25 \cdot 31 \cdot 72 \cdot 28} = 35,35$
E	29	32	48	26	$\sqrt[4]{29 \cdot 32 \cdot 48 \cdot 26} = 32,81$
F	27	29	49	27	$\sqrt[4]{27 \cdot 29 \cdot 49 \cdot 27} = 31,90$
G	26	33	24	25	$\sqrt[4]{26 \cdot 33 \cdot 24 \cdot 25} = 26,79$

Для нахождения наилучшего решения по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического к новой модифицированной матрице с «пересмотренными» оценками $\hat{g}^{(k)}$ частных критериев приписываем дополнительный столбец (такая процедура уже формализована в таблице 6.7). В этот столбец записываем показатели среднего геометрического для элементов соответствующей строки таблицы. Затем из всех элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 26,79 (выделен в таблице) и отвечает альтернативе G (по строке таблицы). Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива G принимается в качестве оптимальной для организации соответствующих поставок сырья применительно к анализируемому звену цепи поставок в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического. Сравните этот выбор с выбором оптимального решения по методу среднего геометрического без процедур $\gamma(UT)$ -модификации в примере 3.13 главы 3. Отметьте специфику выбора и дайте соответствующие комментарии.

Графическая интерпретация и линии уровня критерия. Линии уровня для $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия среднего геометрического по своей структуре остаются такими же, как и в формате метода оптимизации по среднему геометрическому (см. рис. 3.13 главы 3).

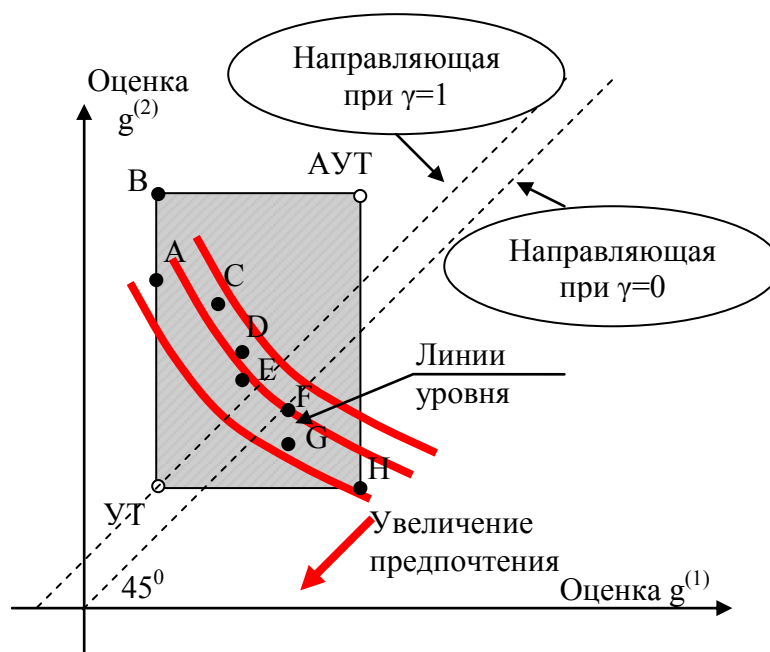


Рис. 6.8. Иллюстрация семейства линий уровня $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия среднего геометрического (при $\gamma = 1$ выбирается альтернатива H).

Их специфика в формате представленного $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия выбора состоит в следующем: направляющая для таких линий уровня уже не обязательно совпадает с биссектрисой первого координатного угла. Она «привязана» к утопической точке поля потерь, причем остается параллельной указанной биссектрисе. В частности: 1) при $\gamma=1$ указанная направляющая проходит через UT (полный формат сдвига направляющей к UT); 2) при $\gamma=0$ указанная направляющая совпадает с биссектрисой первого координатного угла (отсутствует сдвиг направляющей к UT); 3) в остальных случаях она занимает промежуточное положение относительно указанных выше «крайних» ситуаций для расположения такой направляющей. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите самостоятельно (далее использован формат введенных в начале этой главы обозначений в пространстве значений для двух частных критериев) график функции

$$\sqrt{(u - \Delta_u^*(\gamma)) \times (v - \Delta_v^*(\gamma))} = K.$$

Как и в предыдущих ситуациях, приведем иллюстрацию семейства линий уровня рассматриваемого в этом параграфе критерия в пространстве издержек потерь для случая задачи минимизации двух частных критериев ($N = 2$):

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Линии уровня указанного критерия представлены на рис. 6.8 для случая, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками A, B, C, D, E, F, G и H);
- для параметра γ выбрано значение $\gamma=1$.

Рисунок 6.8 иллюстрирует, что нахождение оптимального решения на основе $\gamma(VT)$ -модифицированного критерия среднего геометрического в ситуации $N = 2$ имеет графическую интерпретацию, вполне аналогичную той, которая была представлена в главе 3 (рис. 3.13 для критерия среднего геометрического). Имеющееся отличие состоит только в том, что направляющая для линий уровня критерия (напомним, что их представляют соответствующие гиперболы) теперь может занимать промежуточное положение между биссектрисой первого координатного угла и параллельной к ней линии, проходящей через утопическую точку поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев.

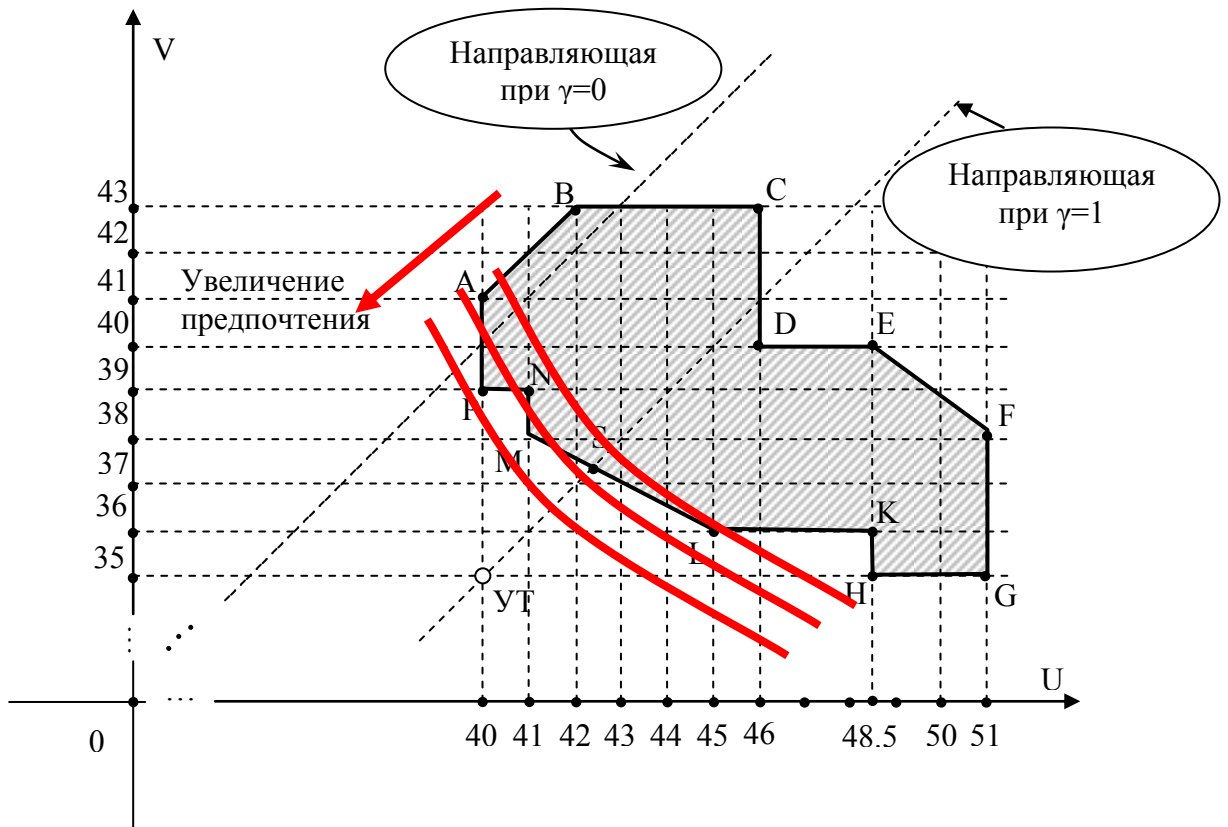


Рис. 6.9. Графическое представление задачи минимизации двух критериев: в формате $\gamma(VT)$ -модифицированного критерия среднего геометрического при $\gamma=1$ выбирается P.

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Представленный аппарат линий уровня для $\gamma(VT)$ -модифицированного критерия среднего геометрического позволяет находить наилучшие решения (по указанному критерию), если задача многокритериальной оптимизации формализована в графическом представлении. Проиллюстрируем это на примере, который уже был использован ранее.

ПРИМЕР 6.8. Нахождение наилучшего решения по $\gamma(VT)$ -модифицированному методу среднего геометрического (минимизация двух частных критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь ($U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$), задано графически (см. рис. 6.9). Требуется: найти наилучшее решение по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического, выбрав $\gamma=1$.

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора наилучшего решения по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического представлена на рис. 6.9. В области допустимых альтернативных решений наилучший/минимальный показатель такого критерия соответствует альтернативе P.

Подчеркнем дополнительно отличительную особенность. Для анализируемой ситуации некоторое отклонение в графическом представлении линий уровня может привести к другому выбору (см. точки М, L и Н на рис. 6.9). Поэтому, чтобы не осталось сомнений в правильности реализованного выбора, следует уточнить показатели «К» линий уровня для альтернатив, представленных точками Р, М, L и Н.

В формате рассматриваемого критерия эти показатели надо определять, как и в формате примера 6.7. Зная координаты UT ($UT = (40; 35)$), сначала находим минимальную из ее координат. Она равна 35 (соответствует второму частному критерию). Поэтому в соответствии с процедурами $\gamma(UT)$ -модификации потребуется сдвиг по оси абсцисс (модификация оценок первого частного критерия). Как и в примере 6.7, имеем: $\Delta_u^* = 5$ (т.к. $40 - 35 = 5$). Соответственно, $\Delta_u^*(\gamma) = \Delta_u^* \cdot \gamma = 5 \cdot 1 = 5$ (формат 100% сдвига при $\gamma=1$). Наконец, можно определить «пересмотренные» оценки для частного критерия $g^{(1)}$; для частного критерия $g^{(2)}$ оценки остаются прежними. Для удобства изложения результат представлен в таблице 6.8.

Таблица 6.8.

Расчет показателей линий уровня для альтернатив Р, М, L и Н.

Точки	Оценки частных критериев		Показатель «К» линии уровня для $\gamma(UT)$ -модифицированного критерия среднего геометрического при $\gamma = 1$
	До процедур $\gamma(UT)$ -модификации	После процедур $\gamma(UT)$ -модификации	
Р	(40; 39)	(35; 39)	$K_P = \sqrt{35 \cdot 39} = 36,95$
М	(41; 38)	(36; 38)	$K_M = \sqrt{36 \cdot 38} = 36,98$
L	(45; 36)	(40; 36)	$K_L = \sqrt{40 \cdot 36} = 37,95$
Н	(48,5; 35)	(45,5; 35)	$K_H = \sqrt{45,5 \cdot 35} = 39,90$

Полученные новые или «пересмотренные» оценки используем для определения показателей «К» для линий уровня, которые соответствуют интересующим нас точкам. С этой целью рассчитываются средние геометрические показатели. Результаты представлены в последнем столбце таблицы 6.8. Минимальный показатель в этом столбце соотносится с альтернативой Р (он равен 36,95 и выделен в таблице). Таким образом, альтернатива Р имеет наилучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Приведенные расчеты подтвердили корректность графического представления процедур выбора наилучшего решения на рис. 6.9 по $\gamma(UT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического.

Только альтернатива Р имеет лучший показатель критерия. Она является оптимальной по указанному критерию. Сравните этот выбор с выбором по методу среднего геометрического без $\gamma(UT)$ -процедур (см. пример 3.14 главы 3, когда в аналогичных условиях была выбрана альтернатива Н). Дайте соответствующие комментарии.

6.5. Критерии выбора, инвариантные относительно процедур $\gamma(UT)$ -преобразований: метод взвешенной суммы оценок частных критериев; метод идеальной точки; модифицированный метод среднего геометрического

Формат представленных в этой главе процедур модификации критерия выбора на основе $\gamma(UT)$ -преобразований подразумевает следующую особенность. Его реализация применительно к некоторым критериям выбора может никогда не изменять оптимального решения. Другими словами, оптимальное решение, которое будет найдено в случае, когда процедуры $\gamma(UT)$ -преобразований реализуются, может всегда совпадать с оптимальным решением, которое будет найдено по этому же критерию выбора в случае, когда процедуры $\gamma(UT)$ -преобразований не реализуются. При этом для некоторых критериев выбора указанное совпадение будет не случайным: оно будет иметь место применительно к любой ситуации бизнеса. Более того, не только оптимальные решения будут совпадать в указанных ситуациях, но даже и ранжирование альтернатив будет сохраняться прежним. В таком случае говорят, что критерий выбора является *инвариантным* относительно соответствующих процедур модификации. При адаптации линий уровня критерия выбора к предпочтениям ЛПР менеджеру необходимо знать, какие критерии выбора являются инвариантными относительно процедур модификации на основе $\gamma(UT)$ -преобразований. Поэтому в этом параграфе такие критерии выбора (для прямых методов оптимизации при многих критериях) будут специально отмечены. А именно, это –

- критерий выбора по методу взвешенной суммы оценок частных критериев;
- критерий выбора по методу идеальной точки;
- критерий выбора по модифицированному методу среднего геометрического.

Рассмотрим процедуры $\gamma(UT)$ -преобразований для этих критериев, более подробно.

Процедуры $\gamma(VT)$ -преобразований в формате метода взвешенной суммы оценок частных критериев. Формат указанных процедур предусматривает, как уже отмечалось выше, переход к новым «пересмотренным» оценкам частных критериев (на основе сдвига координатных осей в пространстве издержек/потерь). Пусть, как и ранее в этой главе, $\hat{g}^{(k)}(\bar{x})$ обозначают специальным образом модифицированные частные критерии, оценки которых соответствуют новым «пересмотренным» оценкам для исходно заданных частных критериев в формате соответствующих процедур $\gamma(VT)$ -модификации (по формулам (6.1) – (6.3)). Тогда рассматриваемая модификация указанного подхода к решению многокритериальной задачи минимизации формализуется следующим образом. Критериальная функция выбора $F(\bar{x})$ определяется равенством:

$$F(\bar{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot \hat{g}^{(k)}(\bar{x}),$$

где c_k – весовые коэффициенты для частных критериев. Точка минимума этой критериальной функции принимается в качестве оптимального решения. Если минимум функции выбора достигается при двух или более альтернативных решениях (из допустимой области решений), то в качестве оптимального может быть выбрано любое из них. Проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето не требуется. Это обуславливается спецификой линий уровня этого критерия выбора.

Обратим внимание на следующее. Указанную модифицированную критериальную функцию выбора $F(\bar{x})$ можно представить в исходных обозначениях с учетом формул (6.1) – (6.3) следующим образом:

$$F(\bar{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot (g^{(k)}(\bar{x}) - \Delta_k^*(\gamma)),$$

или

$$F(\bar{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot g^{(k)}(\bar{x}) - \sum_{k=1}^N c_k \cdot \Delta_k^*(\gamma).$$

Первое слагаемое в этом представлении модифицированной (по процедурам $\gamma(VT)$ -преобразований) функции выбора для метода взвешенной суммы оценок частных критериев совпадает с показателем такой же функции выбора, но без реализации $\gamma(VT)$ -процедур (см. главу 2). Второе слагаемое (вычитаемое) не зависит от анализируемой альтернативы. Оно внесет изменения в показатель модифицированного критерия выбора, но такое изменение будет одинаковым для всех альтернатив. Следовательно, оптимальный выбор по модифицированному критерию выбора на основе метода взвешенной суммы оценок частных критериев всегда будет совпадать с выбором этого критерия, но применительно к ситуации, когда указанные процедуры модификации не используются. Как видим, этот критерий выбора является инвариантным относительно процедур модификации на основе $\gamma(VT)$ -преобразований. Поэтому реализация указанных процедур в формате такого критерия не имеет смысла.

Процедуры $\gamma(VT)$ -преобразований в формате метода идеальной точки. В формате критерия выбора по методу идеальной точки модификация на основе анализируемых в этой главе процедур $\gamma(VT)$ -преобразований формализуется следующим образом. Для такой ситуации критериальную функцию выбора $F(\bar{x})$ менеджер определяет равенством:

$$F(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{k=1}^N [\min_{\bar{x}} \{ \hat{g}^{(k)}(\bar{x}) \} - \hat{g}^{(k)}(\bar{x})]^2}.$$

Здесь, как и выше, $\hat{g}^{(k)}(\bar{x})$ обозначают специальным образом модифицированные частные критерии, оценки которых соответствуют новым «пересмотренным» оценкам для исходно заданных частных критериев в формате соответствующих процедур $\gamma(VT)$ -модификации (по формулам (6.1) – (6.3)). Точка минимума этой критериальной функции принимается в качестве оптимального решения. Подчеркнем, что, если минимум достигается при двух или более альтернативных решениях (из допустимой области решений), то в качестве оптимального может быть выбрано любое из них. Проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето и в этом случае не требуется. Это обуславливается спецификой линий уровня критерия выбора по методу идеальной точки.

Запишем представленную критериальную функцию выбора в исходных обозначениях:

$$F(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{k=1}^N [\min_{\bar{x}} \{ g^{(k)}(\bar{x}) - \Delta_k^*(\gamma) \} - (g^{(k)}(\bar{x}) - \Delta_k^*(\gamma))]^2}.$$

Здесь для каждого выражения в квадратных скобках (под знаком суммы и квадратного корня) нетрудно заметить следующее. После реализации процедур модификации на основе $\gamma(VT)$ -преобразований указанные выражения в квадратных скобках не изменятся, т.к. и вычитаемое, и уменьшаемое уменьшатся на одну и

ту же величину $\Delta_k^*(\gamma)$. Соответственно не изменится и значение результирующего показателя для критериальной функции выбора. Другими словами, его можно представить в виде:

$$F(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{k=1}^N [\min_{\bar{x}} \{g^{(k)}(\bar{x})\} - (g^{(k)}(\bar{x}))]^2}.$$

Сравнивая эту формулу с аналогичной формулой главы 3 для критерия выбора по методу идеальной точки, видим следующее. Оптимальный выбор по модифицированному (на основе $\gamma(VT)$ -преобразований) критерию выбора для метода идеальной точки всегда совпадает с выбором этого критерия применительно к ситуации, когда указанные процедуры модификации не используются. Как видим, и этот критерий выбора является *инвариантным* относительно указанных процедур модификации. Менеджер должен знать это, поскольку реализация указанных процедур модификации в формате такого критерия не имеет смысла. Полученный здесь на основе формальных рассуждений указанный результат можно проиллюстрировать, также используя графическое представление линий уровня этого критерия (сделайте это самостоятельно).

Процедуры $\gamma(VT)$ -преобразований в формате модифицированного метода среднего геометрического. Формат критерия выбора по среднему геометрическому, скорее всего (как уже отмечалось выше), будет использоваться менеджером или ЛПР именно в задачах максимизации частных критериев (это обуславливается, как было отмечено в главе 3, атрибутами метода и спецификой выпуклости линий уровня этого критерия). Разумеется, в этом случае при выборе наилучшего решения показатель критерия выбора соответствующей критериальной функции (или показатель в дополнительном столбце таблицы с соответствующими оценками частных критериев) необходимо максимизировать. В пространстве значений частных критериев это только меняет направление предпочтений на противоположное. Применительно к задачам минимизации частных критериев более адаптированные (к предпочтениям ЛПР) линии уровня в пространстве издержек/потерь, скорее всего, будет давать введенный в главе 3 модифицированный критерий среднего геометрического. Как уже отмечалось, он используется в ситуации, когда в пространстве значений частных критериев по желанию менеджера или ЛПР требуется изменить выпуклость для семейства линий уровня критерия выбора по методу среднего геометрического. Для этого изменяют (см. главы 3 - 4) формат анализируемых оценок, переходя к следующим процедурам: анализируются не издержки и потери (по заданным частным критериям, которые требуется минимизировать), а выигрыши, которые обеспечивают альтернативы относительно специальным образом определяемой модифицированной антиутопической точки (AUT_{mod}). При этом для каждой альтернативы показатель среднего геометрического определяют именно в формате оценок выигрышей такого типа. Поэтому наилучшее решение ищется как решение, которое максимизирует указанный показатель.

Рассмотрим возможность синтеза процедур оптимизации по модифицированному критерию среднего геометрического с учетом процедур $\gamma(VT)$ -преобразований. Если в формате такого подхода (модифицированного критерия среднего геометрического) к решению задачи многокритериальной оптимизации менеджер решит предварительно использовать процедуры $\gamma(VT)$ -преобразования (для смещения линий уровня критерия выбора к VT), то это обусловит соответствующий сдвиг системы координат в пространстве значений частных критериев. Поэтому соответствующую модифицированную антиутопическую точку AUT_{mod} (после реализации процедуры $\gamma(VT)$ -преобразования) необходимо будет определить следующим образом:

$$AUT_{mod} = (1 + \hat{g}_{max}^{(1)} ; 1 + \hat{g}_{max}^{(2)} ; \dots ; 1 + \hat{g}_{max}^{(N)}).$$

Здесь $\hat{g}_{max}^{(k)}$ обозначает наихудшее/наибольшее значение из всех «пересмотренных» оценок для анализируемых альтернатив по частному критерию $g^{(k)}$, т.е. $\hat{g}_{max}^{(k)} = \max_{\bar{x} \in X} \{ \hat{g}^{(k)}(\bar{x}) \}$. Кроме того, к каждому из таких показателей $\hat{g}_{max}^{(k)}$ добавлена единица, чтобы среди вводимых оценок «выигрышей» не было нулевых. Напомним, указанные оценки «выигрышей» будут перемножаться для определения максимального такого показателя, по которому будет выбрано оптимальное альтернативное решение.

При этом для альтернативы \bar{x} из области допустимых решений «пересмотренная» оценка для выигрыша по k -му частному критерию (рассматривается формат новых оценок $\hat{g}^{(k)}(\bar{x})$, причем выигрыш оценивается относительно AUT_{mod}) будет определяться равенством: $1 + \hat{g}_{max}^{(k)} - \hat{g}^{(k)}(\bar{x})$. По указанным показателям «выигрышей» (в формате каждого частного критерия) необходимо определить показатели среднего геометрического для анализируемых альтернатив $\bar{x} \in X$. При этом, чем большим будет найденный показатель, тем более предпочтительной будет альтернатива (применительно к задаче минимизации частных критериев).

При таком подходе на основе «пересмотренных» оценок для заданных частных критериев в рамках исходной многокритериальной задачи их минимизации критериальная функция обобщенного критерия выбора $F(\bar{x})$ формализуется следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N (1 + \hat{g}_{\max}^{(k)} - \hat{g}^{(k)}(\vec{x}))}.$$

Соответственно точка максимума этой критериальной функции выбора $F(\vec{x})$ принимается как искомое оптимальное решение (при минимизации исходно заданных частных критериев $g^{(k)}(\vec{x})$). Если максимальное значение указанной функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения может быть выбрано любое из решений, представленных такими точками. Все они будут оптимальными по Парето.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если при оптимизации системы логистики менеджер будет использовать табличное представление задачи многокритериальной оптимизации, то соответствующие процедуры оптимизации по модифицированному критерию среднего геометрического с учетом предварительных процедур $\gamma(VT)$ -модификации будут следующими.

Шаги 1-2. Сначала уточняется значение параметра $\gamma \in [0;1]$. Затем от таблицы с оценками исходно заданных частных критериев необходимо в формате процедур $\gamma(VT)$ -модификации по формулам (6.1) – (6.3) перейти к таблице с «пересмотренными» оценками частных критериев, которые мы обозначаем через $\hat{g}^{(k)}(\vec{x})$.

Шаг 3. В формате новых/«пересмотренных» оценок реализуются процедуры выбора наилучшего решения по модифицированному методу среднего геометрического. Это предполагает следующее.

- 1) Определяются координаты введенной выше модифицированной антиутопической точки (точка AUT_{mod} в поле издержек / потерь).
- 2) От $\gamma(VT)$ -модифицированной таблицы с «пересмотренными» оценками частных критериев переходим к таблице, которая будет представлять показатели «выигрышей» относительно найденной антиутопической точки AUT_{mod} .
- 3) К такой таблице с указанными показателями «выигрышей» приписывается дополнительный столбец. В этот дополнительный столбец для каждой альтернативы (т.е. по строкам указанной модифицированной таблицы «выигрышей») записывают значения среднего геометрического показателя для элементов соответствующей строки.
- 4) Затем (в задачах минимизации частных критериев) из элементов этого дополнительного столбца выбирается наибольший (в задачах, когда все частные критерии максимизируются можно искать наименьший из показателей).

Шаг 4. Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации.

Шаг 5. Если выбранный показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, т.к. в формате этого критерия такие альтернативы будут оптимальными по Парето.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание на следующий эффект отсутствия смещения линий уровня в формате анализируемых процедур $\gamma(VT)$ -преобразований для указанного критерия выбора. Оценки для «выигрышей», о которых шла речь выше, при использовании модифицированного метода выбора по среднему геометрическому не будут зависеть от формата реализации процедур сдвига координатных осей в пространстве значений частных критериев (при любом $\gamma \in [0;1]$). Любой сдвиг по одной из координатных осей в этом пространстве будет вносить одинаковую поправку как в соответствующую координату AUT , так и в соответствующую координату альтернативного решения. Поэтому их разность останется прежней. Как видим, предварительная реализация $\gamma(VT)$ -преобразования не изменит выбора по модифицированному критерию среднего геометрического. Такой выбор будет совпадать с выбором по модифицированному критерию среднего геометрического, причем без $\gamma(VT)$ -преобразования. Соответственно и линии уровня этих критериев будут совпадать. Здесь их не будем приводить, поскольку они были уже представлены на рис. 3.18 в главе 3. Это - семейство гипербол, для которых их центры симметрии расположены на линии, проходящей через AUT параллельно биссектрисе первого координатного угла, а асимптоты соответствуют координатам AUT_{mod} . Как видим, и этот критерий выбора является *инвариантным* относительно рассматриваемых в этой главе процедур модификации. Менеджер должен знать это, поскольку соответствующие процедуры модификации в формате такого критерия, как видим, не имеют смысла. Проиллюстрируем указанную специфику выбора следующим примером.

ПРИМЕР 6.9. Представим иллюстрацию процедур оптимизации по модифицированному методу среднего геометрического с учетом процедур $\gamma(VT)$ -модификации для ситуации, когда множество X состоит из дискретных точек. Для удобства сравнения результатов выбора, рассмотрим ситуацию, представленную ранее в примере 3.16, когда необходимо было выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (А, В, С, D, Е, F и G) по организации поставок сырья. При этом напомним, что множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями. Оценки частных критериев уже были приведены в таблице 6.3. В дополнительной строке указанной таблицы представлены также

координаты утопической точки (для перехода к «пересмотренным» оценкам частных критериев). Требуется: найти наилучшую альтернативу по модифицированному методу среднего геометрического с учетом предварительных процедур $\gamma(VT)$ -модификации при $\gamma=1$.

РЕШЕНИЕ. *Шаги 1-2.* Как уже отмечалось, процедуры $\gamma(VT)$ -модификации не зависят от формата критерия выбора. На них влияет выбор конкретного значения параметра $\gamma \in [0,1]$ и структура самой задачи многокритериальной оптимизации. В этой ситуации для параметра γ (в рамках указанной $\gamma(VT)$ -модификации) задано значение $\gamma=1$ (100%-ый формат сдвига). Поэтому процедуры $\gamma(VT)$ -модификации будут полностью соответствовать процедурам, которые уже были представлены при решении примеров 6.2 и 6.5. Поэтому здесь их можно опустить. Результат таких процедур – новая модифицированная таблица с «пересмотренными» оценками частных критериев, которая была приведена в табл. 6.4.

Шаг 3. Для перехода к требуемым показателям «выигрышей» необходимо по данным таблицы 6.4 сначала определить координаты специальным образом модифицированной антиутопической точки (см. представленные выше формулы). Для этого ниже приведена табл. 6.9.

Таблица 6.9.

«Пересмотренные» оценки частных критериев и антиутопическая точка ($\gamma=1$).

Альтернативы	«Пересмотренные» оценки частных критериев			
	$\hat{g}^{(1)}$	$\hat{g}^{(2)}$	$\hat{g}^{(3)}$	$\hat{g}^{(4)}$
A	29	24	61	29
B	24	31	50	28
C	26	32	28	24
D	25	31	72	28
E	29	32	48	26
F	27	29	49	27
G	26	33	24	25
AУТ	29	33	72	29
AУТ _{mod}	30	34	73	30

Вычитая из координат AУТ_{mod} элементы соответствующего столбца, переходим к таблице, которая представляет показатели «выигрышей» для каждой альтернативы относительно найденной антиутопической точки AУТ_{mod}. Результаты приведены в таблице 6.10 (сравните их с показателями «выигрышей» но в формате примера 3.16 главы 3, когда отсутствовали процедуры $\gamma(VT)$ -преобразований).

Таблица 6.10.

Выбор наилучшего решения по модифицированному критерию среднего геометрического с учетом процедур $\gamma(VT)$ -модификации.

Альтернативы	«Выигрыши» в «пересмотренных» оценках частных критериев по отношению к AУТ _{mod}				Средний геометрический показатель «выигрыша»
	$\hat{g}^{(1)}$	$\hat{g}^{(2)}$	$\hat{g}^{(3)}$	$\hat{g}^{(4)}$	
A	1	10	12	1	$\sqrt[4]{1 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 1} = \sqrt[4]{120}$
B	6	3	23	2	$\sqrt[4]{6 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 2} = \sqrt[4]{828}$
C	4	2	45	6	$\sqrt[4]{4 \cdot 2 \cdot 45 \cdot 6} = \sqrt[4]{2160}$
D	5	3	1	2	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt[4]{30}$
E	1	2	25	4	$\sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 4} = \sqrt[4]{200}$
F	3	5	24	3	$\sqrt[4]{3 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 3} = \sqrt[4]{1080}$
G	4	1	49	5	$\sqrt[4]{4 \cdot 1 \cdot 49 \cdot 5} = \sqrt[4]{980}$

Для нахождения наилучшего решения по модифицированному критерию среднего геометрического с учетом процедур $\gamma(UT)$ -преобразований, к матрице с «пересмотренными» оценками для «выигрышей» по частным критериям приписываем дополнительный столбец (такая процедура уже формализована в таблице 6.10). В этот столбец записываем показатели среднего геометрического по строкам таблицы.

Шаг 4. Среди элементов дополнительного столбца выбираем наибольший, т.к. анализируются специальные показатели выигрышей. Он равен $\sqrt[4]{2160}$ (выделен в таблице) и отвечает альтернативе С (по строке таблицы). Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива С принимается в качестве оптимальной для организации соответствующих поставок сырья применительно к анализируемому звену цепи поставок в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации по модифицированному критерию среднего геометрического с учетом дополнительных процедур $\gamma(UT)$ -преобразований. Сравните этот выбор с выбором оптимального решения по модифицированному методу среднего геометрического без процедур $\gamma(UT)$ -преобразований в примере 3.16 главы 3. Обратите внимание на совпадение результатов выбора для этих критериев и совпадение результатов ранжирования альтернатив.

Возможность смещения линий уровня в формате специального $\gamma(UT)$ -преобразования для модифицированного критерия среднего геометрического. Как было показано выше, реализация $\gamma(UT)$ -преобразования до процедур выбора по модифицированному критерию среднего геометрического не дает желаемого эффекта от смещения линий уровня такого критерия. Чтобы добиться желаемого эффекта от сдвига таких линий уровня необходимо $\gamma(UT)$ -преобразование реализовать после перехода к показателям «выигрышей» в формате процедур модифицированного критерия среднего геометрического. Представим атрибуты такого $\gamma(UT)$ -преобразования, если оно реализуется в пространстве «выигрышей» (относительно модифицированной АУТ в поле издержек/потерь).

Напомним, что модифицированный критерий среднего геометрического предполагает, что вместо оценок частных критериев при определении показателя среднего геометрического будут рассмотрены оценки следующего типа. Анализируются выигрыши для исходно заданных оценок частных критериев относительно специальным образом модифицированной антиутопической точки (см. параграф 3.5 главы 3). Пусть выигрыши измеряются относительно точки AUT_{mod} , с координатами

$$AUT_{mod} = (1 + g_{max}^{(1)} ; 1 + g_{max}^{(2)} ; \dots ; 1 + g_{max}^{(N)}),$$

где $g_{max}^{(k)}$ обозначает наихудшее/наибольшее значение из всех оценок для анализируемых альтернатив по частному критерию $g^{(k)}$, т.е. $g_{max}^{(k)} = \max_{\vec{x} \in X} \{g^{(k)}(\vec{x})\}$. Здесь единица добавлена для того, чтобы при нахождении среднего геометрического по показателям выигрышей, ни один из них не был равен нулю.

Для каждого решения \vec{x} из области допустимых решений выигрыш по k -му частному критерию (относительно AUT_{mod}) составляет $1 + g_{max}^{(k)} - g^{(k)}(\vec{x})$. Образно говоря, каждое альтернативное решение теперь рассматривается в пространстве указанных выигрышей. Координаты этого пространства (т.е. выигрыши по каждому частному критерию относительно AUT_{mod}) будем обозначать через $(\hat{u}, \hat{v}, \dots, \hat{z})$ вместо координат (u, v, \dots, z) в пространстве значений частных критериев. Определим процедуры $\gamma(UT)$ -преобразования в новом пространстве. Определим параметры $\Delta_{\hat{u}}^*, \Delta_{\hat{v}}^*, \dots, \Delta_{\hat{z}}^*$ равенствами (6.1), т.е.

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{u}}^* &= \Delta_u^* \\ \Delta_{\hat{v}}^* &= \Delta_v^* \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{\hat{z}}^* &= \Delta_z^* \end{aligned}$$

Аналогично определим показатели $\Delta_{\hat{u}}^*(\gamma), \Delta_{\hat{v}}^*(\gamma), \dots, \Delta_{\hat{z}}^*(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{u}}^*(\gamma) &= \gamma \cdot \Delta_u^* \\ \Delta_{\hat{v}}^*(\gamma) &= \gamma \cdot \Delta_v^* \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{\hat{z}}^*(\gamma) &= \gamma \cdot \Delta_z^* \end{aligned} \tag{6.4}$$

Требуемый в формате $\gamma(UT)$ -преобразования сдвиг координатных осей в пространстве «выигрышей» по частным критериям (относительно AUT_{mod}) обеспечит следующий переход к новым координатам такого пространства:

$$\begin{aligned} \hat{u} &\rightarrow \hat{u} + \Delta_{\hat{u}}^*(\gamma), \\ \hat{v} &\rightarrow \hat{v} + \Delta_{\hat{v}}^*(\gamma), \\ &\dots \dots \dots \\ \hat{z} &\rightarrow \hat{z} + \Delta_{\hat{z}}^*(\gamma). \end{aligned} \tag{6.5}$$

При конкретном выборе γ можно получать различные результаты сдвига координатных осей в пространстве «выигрышей». В частности,

- при $\gamma = 0$ никакого сдвига для семейства линий уровня критерия выбора в пространстве значений частных критериев не будет;
- при $\gamma = 1$ сдвиг реализуется на все 100% по направлению к утопической точке (направляющая для линий уровня критерия выбора будет проходить через утопическую точку поля);
- при $\gamma = 0,5$ указанный сдвиг реализуется только на 50% (по направлению к утопической точке поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев) и т.д.

Геометрическая интерпретация преобразований типа (6.4) – (6.5) при $\gamma = 0$, при $\gamma = 0,5$ и при $\gamma = 1$ в пространстве издержек/потерь представлена на рис. 6.10.

При больших значениях γ выбор будет в большей степени «нацелен» на такие решения, которые в пространстве доходов представлены точками, расположенными, более близко к утопической точке поля потерь. Предложенные в формате формул (6.4) – (6.5) процедуры $\gamma(UT)$ -преобразования (применительно к модифицированному критерию среднего геометрического) приводят к изменению положения начала системы координат в пространстве «выигрышей» по частным критериям (относительно AUT_{mod}). Начало системы координат переместится от точки AUT_{mod} к новой точке (см. рис 6.10). Обозначим такую новую точку через AUT_{γ} . При $\gamma=0$ никакого смещения не будет, т.е. имеет равенство $AUT_{mod} = AUT_{\gamma=0}$. При $\gamma=1$ результат смещения будет соответствовать формату $AUT(mod)$, т.е. начало координат в пространстве «выигрышей» окажется в точке $AUT(mod)$, - см. параграф 3.5 главы 3. При $0 < \gamma < 1$ начало системы координат будет соответствовать промежуточному положению между точками AUT_{mod} и $AUT(mod)$.

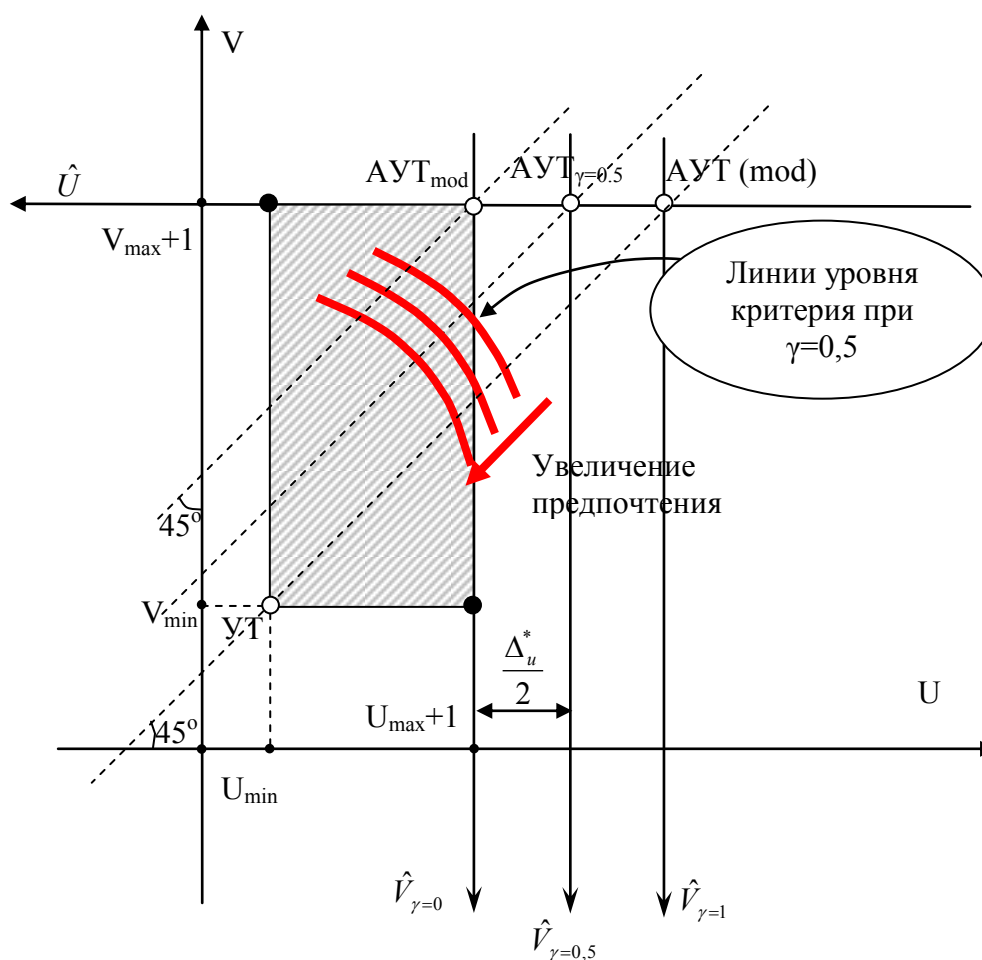


Рис. 6.10. Иллюстрация изменения формата системы координат при реализации процедур $\gamma(UT)$ -преобразования для модифицированного критерия среднего геометрического

После такого смещения координатных осей анализируемые альтернативные решения в указанном пространстве выигрышей будут представлены следующими координатами. «Выигрыш» по k -му частному критерию (в новых показателях относительно точки AUT_{γ}) для решения $\bar{x} \in X$ определится равенством

$1 + g_{\max}^{(k)}(\bar{x}) + \gamma \cdot \Delta_k^* - g^{(k)}(\bar{x})$. При таком подходе в рамках исходной многокритериальной задачи минимизации частных критериев формируется обобщенный критерий выбора $F(\bar{x})$ следующим образом:

$$F(\bar{x}) = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N (1 + g_{\max}^{(k)}(\bar{x}) + \gamma \cdot \Delta_k^* - g^{(k)}(\bar{x}))}.$$

Точка максимума указанной синтезированной критериальной функции выбора $F(\bar{x})$ принимается в качестве оптимального решения (в формате исходной задачи минимизации частных критериев).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если максимальное значение представленной критериальной функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения может быть выбрано любое из решений, представленных такими точками. Все они будут оптимальными по Парето.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если множество анализируемых альтернатив является дискретным, то менеджер будет использовать табличное представление задачи многокритериальной оптимизации. Соответственно алгоритм оптимизации по модифицированному критерию среднего геометрического с учетом процедур $\gamma(VT)$ -преобразования будут следующими. От таблицы с оценками частных критериев переходим к таблице, которая представляет параметры «выигрышей» для таких оценок относительно модифицированной антиутопической точки AUT_{mod} в поле издержек / потерь.

- 1) По формулам (6.4) – (6.5) учитываем требуемые процедуры $\gamma(VT)$ -преобразования (предварительно согласовав с ЛПР показатель $\gamma \in [0;1]$). Результат будет представлен в новой таблице с модифицированными показателями выигрышей для оценок частных критериев (относительно специально подобранной в заданном формате преобразования точки AUT_{γ}).
- 2) К такой таблице с указанными новыми показателями «выигрышей» приписывается дополнительный столбец. В нем для каждой альтернативы (т.е. по строкам такой таблицы) записывают значения среднего геометрического показателя строки.
- 3) Затем в задачах многокритериальной оптимизации, когда все частные критерии минимизируются, из элементов этого дополнительного столбца выбирается наибольший такой показатель (если все частные критерии максимизируются, то надо искать наименьший из показателей).
- 4) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации.
- 5) Если выбранный показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, т.к. в формате этого критерия такие альтернативы будут оптимальными по Парето.

ПРИМЕР 6.10. Представим иллюстрацию процедур оптимизации по модифицированному методу среднего геометрического с учетом требуемых процедур $\gamma(VT)$ -преобразования для ситуации, когда множество X состоит из дискретных точек. Для удобств сравнения результатов выбора, снова рассмотрим ситуацию, уже представленную ранее, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (A, B, C, D, E, F и G) по организации поставок сырья. Напомним, что множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями. Оценки заданных частных критериев для этих альтернатив уже были приведены ранее (например, в таблице 3.7, где, кстати, в дополнительных строках таблицы представлены и координаты антиутопической точки, и координаты модифицированной антиутопической точки AUT_{mod}). Требуется: найти наилучшую альтернативу по модифицированному методу среднего геометрического с учетом $\gamma(VT)$ -преобразования при $\gamma=0,5$.

РЕШЕНИЕ. Сначала реализуем процедуры перехода от таблицы с оценками частных критериев к таблице, которая представляет параметры «выигрышей» для таких оценок, но уже относительно модифицированной антиутопической точки AUT_{mod} в поле издержек / потерь. Эти процедуры уже были представлены в таблице 3.7 примера 3.16 в главе 3. Поэтому приведем лишь соответствующие результаты, которые нам понадобятся для реализации последующих шагов алгоритма оптимизации. В частности, подчеркнем, что для точки AUT_{mod} в формате этого примера имеем (см. таблицу 3.7): $AUT_{\text{mod}} = (46; 37; 171; 30)$. Показатели выигрышей для оценок частных критериев представлены в таблице 6.11. Кроме того, отметим, что наибольшая из координат AUT_{mod} равна 171. Соответственно по формулам (6.1) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_1^* &= \Delta_1^* = 125 & \Delta_2^* &= \Delta_2^* = 134 \\ \Delta_3^* &= \Delta_3^* = 0 & \Delta_4^* &= \Delta_4^* = 141 \end{aligned}$$

(это - условные параметры сдвигов по каждой координатной оси, которые соответствуют 100%-му формату процедур $\gamma(VT)$ -преобразования в пространстве выигрышей по частным критериям).

Таблица 6.11.

Показатели «выигрышей» в оценках частных критериев по отношению к AUT_{mod}

Альтернативы	«Выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к АУТ _{mod}			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	1	10	12	1
B	6	3	23	2
C	4	2	45	6
D	5	3	1	2
E	1	2	25	4
F	3	5	24	3
G	4	1	49	5

По формулам (6.4) находим требуемые параметры сдвигов $\Delta_k^*(\gamma)$, которые соответствуют заданному формату таких процедур. Применительно к каждому частному критерию при заданном значении параметра $\gamma=0,5$ имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_1^*(\gamma) &= 62,5 & \Delta_2^*(\gamma) &= 67 \\ \Delta_3^*(\gamma) &= 0 & \Delta_4^*(\gamma) &= 70,5. \end{aligned}$$

На следующем шаге по формулам (6.5) учитываем требуемые сдвиги координатных осей в формате заданного $\gamma(UT)$ -преобразования (при $\gamma=0,5$). Другими словами, пересчитываем показатели выигрышей по каждому частному критерию с учетом новых переменных по каждой оси координат (по каждому частному критерию) в соответствии с заменой переменных, которую задают формулы (6.5). Результат представлен в модифицированной новой таблице 6.12. В ней приведены уже модифицированные показатели выигрышей для оценок частных критериев (причем относительно точки АУТ _{$\gamma=0,5$} , как этого требует заданный формат преобразования).

К таблице 6.12 уже приписан дополнительный столбец. В нем записаны показатели критерия выбора (это – среднегеометрические показатели указанных «выигрышей» по строке) для каждой анализируемой альтернативы.

Таблица 6.12.

Выбор наилучшего решения по модифицированному критерию среднего геометрического (с учетом $\gamma(UT)$ -преобразования при $\gamma=0,5$).

Альтернативы	«Выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к АУТ _{γ} при $\gamma=0,5$				Средний геометрический показатель «выигрыша»
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	
A	63,5	77	12	71,5	$\sqrt[4]{63,5 \cdot 77 \cdot 12 \cdot 71,5} = 45,26$
B	68,5	70	23	72,5	$\sqrt[4]{68,5 \cdot 70 \cdot 23 \cdot 72,5} = 53,18$
C	66,5	69	45	76,5	$\sqrt[4]{66,5 \cdot 69 \cdot 45 \cdot 76,5} = 63,04$
D	67,5	70	1	72,5	$\sqrt[4]{67,5 \cdot 70 \cdot 1 \cdot 72,5} = 24,19$
E	63,5	69	25	74,5	$\sqrt[4]{63,5 \cdot 69 \cdot 25 \cdot 74,5} = 53,45$
F	65,5	72	24	73,5	$\sqrt[4]{65,5 \cdot 72 \cdot 24 \cdot 73,5} = 53,71$
G	66,5	68	49	75,5	$\sqrt[4]{66,5 \cdot 68 \cdot 49 \cdot 75,5} = \mathbf{63,95}$

Среди элементов дополнительного столбца выбираем наибольший. Он равен 63,95 (выделен в таблице) и соответствует альтернативе G (по строке таблицы). Таким образом, в рассматриваемом случае

альтернатива G и принимается в качестве оптимальной для организации поставок сырья применительно к решению многокритериальной задачи оптимизации анализируемого звена цепи поставок по модифицированному методу среднего геометрического с учетом процедур $\gamma(VT)$ -преобразования при $\gamma = 0,5$. Разумеется, при других значениях параметра γ выбор, естественно, может быть другим. В частности, при $\gamma = 0$ оптимальной альтернативой в формате рассматриваемого критерия, как уже было показано в примере 3.16 главы 3, будет другая альтернатива: С.

Подчеркнем, что в этой ситуации учет $\gamma(VT)$ -преобразования (формат при $\gamma=0,5$) изменил оптимальный выбор: вместо альтернативы С, как это было в указанном примере 3.16 (без учета $\gamma(VT)$ -преобразования), выбирается альтернатива G.

ВОПРОСЫ (по материалам главы 6).

1. Какие возможности для менеджера дают процедуры сдвига линий уровня критерия выбора к утопической точке поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев (при минимизации их оценок на основе представленных в этой главе процедур $\gamma(VT)$ -преобразований)?
2. Какие процедуры позволяют формализовать указанный сдвиг линий уровня критерия выбора:
 - для случая 100%-го формата реализации такого сдвига;
 - для случая частичного формата его реализации.
3. Представьте специфику указанных процедур $\gamma(VT)$ -преобразований при модификации критерия выбора, если задача оптимизации системы логистики задана в табличной форме.
4. В чем состоит специфика процедур $\gamma(VT)$ -преобразований при соответствующей модификации минимаксного критерия? Как меняются его линии уровня при таком преобразовании в пространстве издержек/потерь (при минимизации частных критериев)?
5. Какие имеются возможности у менеджера для адаптации параметра « γ » в формате процедур $\gamma(VT)$ -модификаций минимаксного критерия? Позволяют ли они расширить инструментарий менеджера для лучшей адаптации выбора к предпочтениям ЛППР?
6. Уточните особенности алгоритма для процедур $\gamma(VT)$ -модификаций в формате подхода критерия выбора по методу Гурвица. Приведите их иллюстрацию для случая, когда множество анализируемых альтернатив является дискретным.
7. Какова специфика линий уровня для $\gamma(VT)$ -модифицированного критерия Гурвица в пространстве издержек/потерь (для задач минимизации частных критериев)?
8. Представьте процедуры оптимизации по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического и особенности его линий уровня в пространстве значений частных критериев. Позволяют ли такие модификации расширить инструментарий менеджера для лучшей адаптации выбора к предпочтениям ЛППР?
9. Какие особенности имеют место в формате процедур $\gamma(VT)$ -преобразований для модифицированного метода выбора по среднему геометрическому (с изменением выпуклости его линий уровня)?
10. Какие критерии выбора (в формате прямых методов решения задач многокритериальной оптимизации) обладают свойством инвариантности относительно процедур $\gamma(VT)$ -модификаций? Что это обозначает в формате задач оптимизации при многих критериях? Приведите соответствующие интерпретации применительно к задачам многокритериальной оптимизации систем логистики.

ГЛАВА 7

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ИЗМЕНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ЛИНИЙ УРОВНЯ КРИТЕРИЯ ВЫБОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ ЧАСТНЫХ КРИТЕРИЕВ

7.1. Специфика процедур управления ориентацией направляющей для линий уровня критерия выбора

В главе 5 была отмечена необходимость разработки специальных подходов к решению задач оптимизации логистических систем при многих критериях, чтобы обеспечить более эффективную адаптацию семейства линий уровня (критерия выбора) к системе предпочтений ЛПР. В предыдущей главе был представлен один из подходов к такой модификации критерия выбора: на основе параллельного сдвига линий уровня в пространстве значений частных критериев по направлению к утопической точке поля издержек/потерь. В этой главе будет представлен другой подход, который может использовать менеджер при оптимизации систем логистики. Соответствующая модификация потребует от менеджера умения формализовать процедуры изменения наклона направляющей для линий уровня критерия выбора. Указанное изменение наклона такой направляющей не является самоцелью. Как уже было отмечено в главе 5, модификация критерия выбора на основе этих процедур позволит менеджеру устранять/обходить нежелательный феномен блокировки выбора (в качестве оптимальных) альтернатив, которые являются оптимальными по Парето и могут быть самыми предпочтительными для ЛПР. Подходы, которые позволяют формализовать и реализовать модификации указанного вида, будут представлены в этом параграфе. В последующих параграфах этой главы они будут реализованы в формате традиционных критериев выбора прямого типа для задач многокритериальной оптимизации систем логистики.

Указанная возможность модификации еще более расширит арсенал методов адаптации линий уровня в пространстве значений частных критериев применительно к предпочтениям ЛПР. Поэтому представленные в этой главе подходы к оптимизации при многих критериях будут интересны многим менеджерам по логистике. Они снова сохраняют специфику линий уровня самого модифицируемого критерия выбора. Но при этом обеспечат возможность изменения ориентации/наклона их направляющей, например, ориентируя выбор на утопическую точку поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев. Далее снова предполагается, что все частные критерии *минимизируются*.

Напомним, что формализация семейства линий уровня для критерия выбора в общем случае, когда модель задачи оптимизации при многих частных критериях предполагает наличие произвольного числа таких критериев $\{g^{(k)}, k = \overline{1, N}\}$, реализуется на основе параметрического представления функции выбора: $f(u; v; \dots; z) = K$. Здесь

- параметр « K » характеризует конкретную линию из соответствующего их семейства, причем меньшим значениям параметра « K » соответствует «линия», точнее гиперповерхность, в пространстве значений частных критериев, точки которой будут представлять более предпочтительные альтернативы (имеется ввиду формат задач минимизации частных критериев);
- $(u; v; \dots; z)$ - точки соответствующего N -мерного пространства оценок/значений частных критериев, например, $u = g^{(1)}; v = g^{(2)}$; и т.д.;
- $f(u; v; \dots; z)$ - функция N переменных, аргументами которой являются оценки частных критериев; она задает правило, которое позволяет по оценкам частных критериев находить соотносимый с альтернативой показатель в формате конкретного критерия выбора;

Указанное равенство представляет в параметрической форме множество точек указанного пространства издержек/потерь, которые расположены на «гиперповерхности» уровня « K ». Для удобства изложения снова образно называем такую гиперповерхность «линией уровня K ». Сравнение альтернатив реализуется на основе сравнения соответствующих показателей уровня « K », соотносимых с анализируемыми альтернативами. Альтернативы $\{X_i, i = \overline{1, m}\}$ представляются (см. главу 1) точками указанного N -мерного пространства значений частных критериев: $X_i = (a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{iN})$. При этом для этих координат имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
u &= g^{(1)}(X_i) = a_{i1} \\
v &= g^{(2)}(X_i) = a_{i2} \\
&\dots\dots\dots \\
z &= g^{(N)}(X_i) = a_{iN}
\end{aligned}$$

Процедуры изменения наклона направляющей для линий уровня критерия выбора будут реализованы таким образом, чтобы использовать возможность ее ориентации на утопическую точку поля издержек/потерь. Это – точка $(UT = X_v = (a_{v1}; a_{v2}; \dots; a_{vN}))$ в пространстве значений частных критериев с наилучшими их возможными оценками для анализируемых альтернатив. Ее координаты определяются (при минимизации частных критериев) равенствами $a_{vk} = \min_i \{g^{(k)}(X_i)\}$. Здесь a_{vk} является наименьшей оценкой по частному критерию $g^{(k)}$ среди всех альтернатив.

Представим на формальном уровне процедуру изменения наклона направляющей для линий уровня критерия выбора при многокритериальной оптимизации систем логистики. Имеются в виду процедуры сжатия или растяжения по осям координат в указанном пространстве. Они не нарушат структуры указанных линий. Из курса высшей математики известно следующее. Преобразование замены переменной типа

$$"u" \rightarrow "u \cdot q_u = u \cdot q_1",$$

где $q_1 = q_u \geq 0$, в соотношении, определяющем семейство линий уровня критерия выбора (соотношение $f(u; v; \dots; z) = K$), т.е. формализация такого семейства в новом представлении $f(u \cdot q_u; v; \dots; z) = K$, приведет к сжатию/растяжению таких линий относительно оси OU (в пространстве издержек/потерь). Одновременная реализация преобразований типа

$$"u" \rightarrow "u \cdot q_u = u \cdot q_1"$$

$$"v" \rightarrow "v \cdot q_v = v \cdot q_2"$$

.....

$$"z" \rightarrow "z \cdot q_z = z \cdot q_N"$$

(где $q_u \geq 0$; $q_v \geq 0$; ... ; $q_z \geq 0$) в соотношении, задающем параметрическое представление линий уровня, т.е. формализация его в виде $f(u \cdot q_u; v \cdot q_v; \dots; z \cdot q_z) = K$, приведет к сжатию/растяжению линий уровня одновременно по всем координатным осям. Указанные процедуры можно использовать для «нацеливания» семейства линий уровня критерия на утопическую точку поля издержек/потерь в пространстве значений частных критериев. Для этого надо специальным образом определить параметры $q_i \geq 0$. При этом будет сохраняться структура линий уровня исходного критерия выбора. Представим соответствующую формализацию для процедур такого типа.

Процедуры «нацеливания» семейства линий уровня критерия на утопическую точку поля полезностей удобно представить следующим образом. Сначала определим показатели для таких процедур сжатия/растяжения по каждой координатной оси применительно к случаю 100% -го формата изменения наклона направляющей для «нацеливания» ее на утопическую точку. Пусть:

$$\begin{aligned}
q_1^* &= q_u^* = 1/a_{v1} \\
q_2^* &= q_v^* = 1/a_{v2} \\
&\dots\dots\dots \\
q_N^* &= q_z^* = 1/a_{vN}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Формализация семейства линий уровня критерия в следующем новом виде (используется подстановка с указанной выше заменой переменных):

$$f(u \cdot q_u^*; v \cdot q_v^*; \dots; z \cdot q_z^*) = K, \tag{7.2}$$

как раз, и дает требуемое изменение наклона направляющей для семейства линий уровня критерия выбора, при котором она будет проходить через утопическую точку поля издержек/потерь. Линия уровня, которая проходит через утопическую точку, будет соответствовать следующему значению показателя «K»: $K_{UT} = f(1; 1; \dots; 1)$.

Специфика управления наклоном направляющей для линий уровня критерия выбора. В общем случае, когда помимо желания «нацелить» выбор на утопическую точку поля издержек/потерь менеджер должен учитывать и показатели важности для оценок частных критериев, соответствующий алгоритм

изменения наклона направляющей в пространстве значений частных критериев необходимо дополнить специальными процедурами. Они позволят реализовать синтез преобразований по формулам (7.1) – (7.2) с учетом «весов» важности для показателей частных критериев. Указанные специальные процедуры далее будем называть $\vec{k}(VT)$ -преобразованиями. Здесь \vec{k} подчеркивает специфику учета субъективных (для ЛПР) коэффициентов важности оценок частных критериев. Такие коэффициенты могут быть заданы любым образом, например, в виде пропорций типа $k_1: k_2: \dots : k_N$. Далее считаем, что они заданы в виде соответствующего вектора

$$\vec{k} = (k_1; k_2; \dots; k_N).$$

Весовые коэффициенты k_i в формате указанных процедур будем называть «коэффициентами доверия/важности». Синтез процедур «нацеливания» направляющей для линий уровня критерия выбора с процедурами учета указанных «коэффициентов доверия/важности» приводит к новому определению параметров сжатия/растяжения по координатным осям в пространстве издержек/потерь. Обозначим указанные параметры через $q_i^*(\vec{k})$, $i = 1, 2, \dots, N$. Формат таких процедур синтеза может быть реализован, если определить эти параметры по формулам:

$$\begin{aligned} q_1^*(\vec{k}) &= q_1^* \cdot k_1 \\ q_2^*(\vec{k}) &= q_2^* \cdot k_2 \\ &\dots\dots\dots \\ q_N^*(\vec{k}) &= q_N^* \cdot k_N \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь сомножители q_i^* гарантируют, что направляющая линий уровня критерия выбора будет исходно ориентирована на утопическую точку поля издержек/потерь. При этом сомножители k_i внесут дополнительную корректировку, изменяя такое указанное ее направление с учетом заданных ЛПР «коэффициентов доверия» к важности оценок частных критериев. Поэтому формализация линий уровня критерия выбора на основе следующего параметрического представления (используется подстановка такой специальной замены переменных):

$$f(u \cdot q_u^*(\vec{k}); v \cdot q_v^*(\vec{k}); \dots; z \cdot q_z^*(\vec{k})) = K,$$

даст изменение наклона его направляющей, которое будет соответствовать атрибутам указанного синтеза. Замена переменных, обеспечивающая формат таких преобразований, определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} "u" &\rightarrow "u \cdot q_1^*(\vec{k})" \\ "v" &\rightarrow "v \cdot q_2^*(\vec{k})" \\ &\dots\dots\dots \\ "z" &\rightarrow "z \cdot q_N^*(\vec{k})" \end{aligned} \quad (7.4)$$

В частном случае, когда при формализации оптимизационной модели ЛПР не задает коэффициенты важности для оценок частных критериев, вектор \vec{k} из «коэффициентов доверия» будет тривиальным, т.е. $\vec{k} = (1; 1; \dots; 1)$. В этом случае направляющая для семейства линий уровня критерия выбора будет проходить через утопическую точку поля издержек/потерь.

Особенность и специфика процедур $\vec{k}(VT)$ -преобразования при двух частных критериях ($N=2$) представлены на рис. 7.1 (а-б). Указанные рисунки представляют ситуацию, когда в качестве критерия выбора используется минимаксный критерий. Рис. 7.1-а дает графическую иллюстрацию процедур выбора наилучшего решения в формате тривиального вектора $\vec{k} = (1; 1)$. Для такой ситуации имеем:

- ▶ в пространстве значений частных критериев реализуется замена переменных типа

$$"u" \rightarrow "u" \quad \text{и} \quad "v" \rightarrow "v/2"$$

(параметры такой замены переменных обусловлены координатами соответствующей $VT = VT(1; 2)$ в поле издержек/потерь);

- ▶ семейство линий уровня традиционного минимаксного критерия преобразуется в семейство линий уровня, определяемых параметрически равенствами вида $\max\{u; v/2\} = K$.

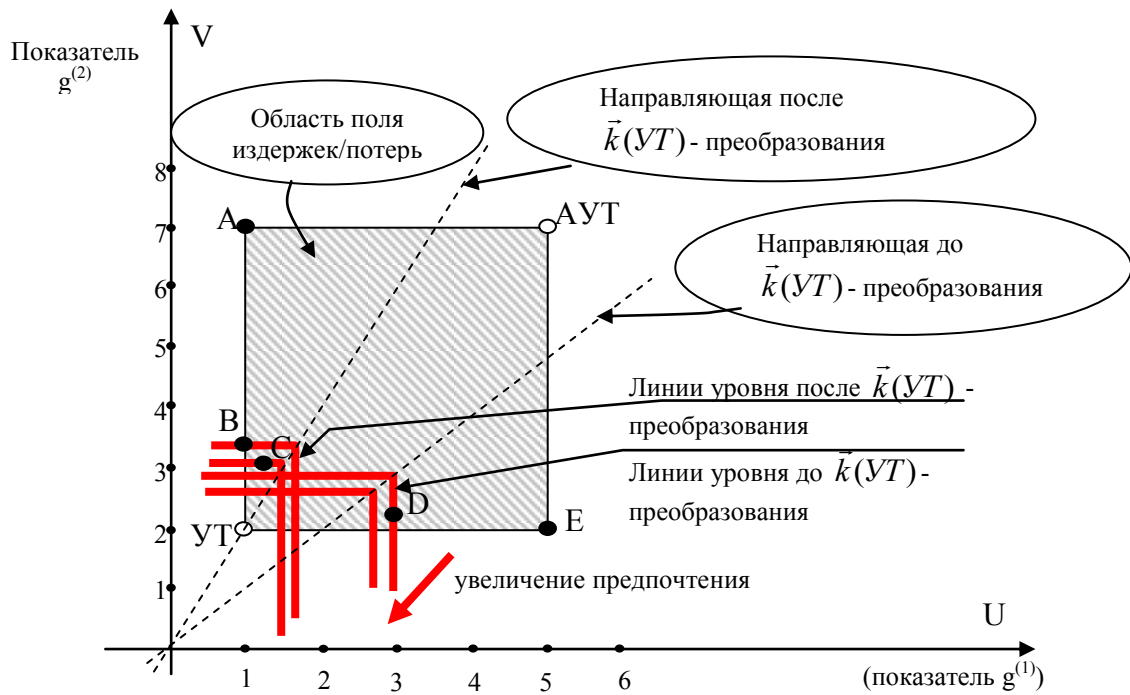


Рис. 7.1-а. Иллюстрация линий уровня минимаксного критерия в формате $\vec{k}(УТ)$ -преобразования при $\vec{k} = (1; 1)$: выбор D до таких процедур; выбор C – после.

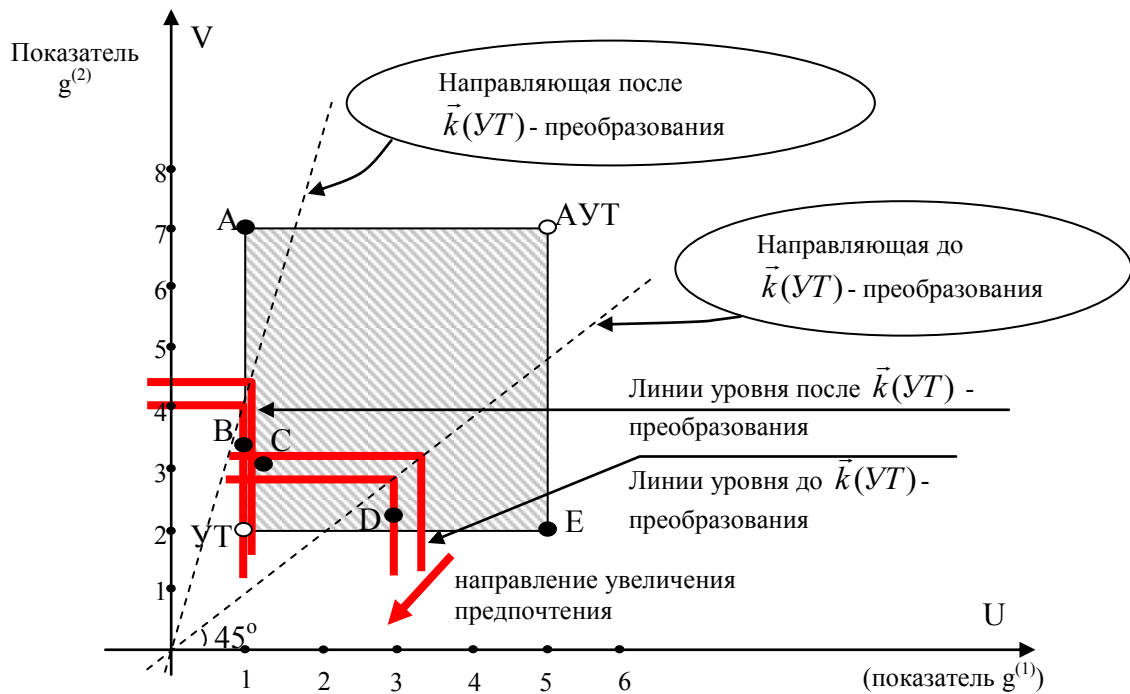


Рис. 7.1-б. Иллюстрация линий уровня минимаксного критерия в формате $\vec{k}(УТ)$ -преобразования при $\vec{k} = (2; 1)$: выбор D до таких процедур; выбор B – после.

На рис. 7.1-б дополнительно приведена графическая иллюстрация для случая, когда вектор \vec{k} задан равенством $\vec{k} = (2; 1)$. Для такой ситуации имеем:

- ▶ в пространстве значений частных критериев реализуется замена переменных типа

$$"u" \rightarrow "2u" \quad \text{и} \quad "v" \rightarrow "\frac{v}{2}"$$

(здесь дополнительно к координатам UT учтены также коэффициенты вектора $\vec{k} = (2; 1)$);

- ▶ семейство линий уровня традиционного минимаксного критерия преобразуется в семейство линий уровня, определяемых параметрически равенствами вида $\max\{2u; v/2\} = K$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Представленное $\vec{k}(UT)$ -преобразование для линий уровня критерия выбора реализуется «автоматически» в рамках соответствующей модификации. Никаких рисунков для таких линий уровня и, тем более, гиперповерхностей в пространстве значений частных критериев менеджеру изображать в процессе оптимизации решений не требуется. Необходимо реализовать только требуемые процедуры (они будут формализованы в виде алгоритма) в рамках соответствующего алгоритма модификации. При этом менеджеру также необходимо понимать: 1) какие возможности дает указанная модификация; 2) как ими воспользоваться для реализации более адекватного выбора применительно к предпочтениям ЛПР в задачах многокритериальной оптимизации. Представленные рисунки призваны помочь в этом.

Процедуры модификации в формате табличного представления оценок частных критериев.

Указанные процедуры модификации (на основе $\vec{k}(UT)$ -преобразования) реализуются только применительно к значениям оценок частных критериев. Атрибуты самого критерия выбора остаются прежними. В формате задач многокритериальной оптимизации при дискретном множестве альтернатив они легко иллюстрируются на основе табличного представления задачи оптимизации (как и процедуры сдвига линий уровня, представленные в главе 6). Пусть исходная таблица с оценками частных критериев для формализации задачи оптимизации при многих критериях задана в следующем виде (см. табл. 7.1).

Таблица 7.1.

Заданные оценки частных критериев

Альтернативы	Оценки частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$...	$g^{(N)}$
X_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1N}
X_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2N}
...
X_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mN}

Если менеджер решает использовать $\vec{k}(UT)$ -преобразование по формулам (7.1) - (7.4) для линий уровня критерия (при конкретных значениях коэффициентов доверия/важности), то это означает следующее. Требуется реализовать процедуры критерия выбора, но не в формате исходной таблицы со значениями оценок по частным критериям, а применительно к новой модифицированной таблице.

Модификация такой таблицы делается на основе $\vec{k}(UT)$ -преобразования. Его конкретная специфика определяется формулами (7.1) - (7.4). Другими словами, снова можно образно сказать, что при этом «пересматриваются» оценки частных критериев. Такие «пересмотренные» оценки обозначим через $\check{g}^{(k)}$ (применительно к k -му частному критерию). Тогда для выбора оптимальной альтернативы менеджер будет уже иметь дело с таблицей вида 7.2.

Таблица 7.2.

«Пересмотренные» оценки частных критериев в формате $\vec{k}(UT)$ -преобразования.

Альтернативы	Модифицированные оценки по частным критериям			
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$...	$\check{g}^{(N)}$
X_1	$a_{11} \cdot q_1^*(\vec{k})$	$a_{12} \cdot q_2^*(\vec{k})$...	$a_{1N} \cdot q_N^*(\vec{k})$
X_2	$a_{21} \cdot q_1^*(\vec{k})$	$a_{22} \cdot q_2^*(\vec{k})$...	$a_{2N} \cdot q_N^*(\vec{k})$

...
X_m	$a_{m1} \cdot q_1^*(\vec{k})$	$a_{m2} \cdot q_2^*(\vec{k})$...	$a_{mN} \cdot q_N^*(\vec{k})$

Формат представленных процедур предполагает возможность следующей интерпретации новых значений оценок в модифицированной таблице значений частных критериев. Менеджер, как бы, «пересматривает» такие оценки, причем с новой «точки зрения» в пространстве издержек/потерь. Такая точка зрения будет обусловлена выбором нового масштаба по каждой оси в системе координат (из-за формата указанных процедур для $\vec{k}(UT)$ -преобразования). Такие процедуры позволяют менеджеру регулировать в пространстве издержек/потерь наклон направляющей для линий уровня критерия выбора (для лучшей адаптации к предпочтениям ЛПП).

В последующих параграфах этой главы будет рассмотрена специфика реализации указанных процедур применительно к конкретным критериям выбора при решении задач многокритериальной оптимизации систем логистики. Подчеркнем, что в формате критерия выбора по методу *взвешенной суммы оценок частных критериев* реализация представленных выше процедур не повлияет на имеющиеся у менеджера возможности адаптации выбора к предпочтениям ЛПП. Действительно, изменение наклона направляющей для линий уровня такого критерия выбора приведет соответственно к изменению положения его линий уровня относительно координатных осей в пространстве издержек/потерь. Но поскольку семейство линий уровня этого критерия является семейством прямых линий, то любое такое изменение положения линий уровня относительно координатных осей менеджер может реализовать и на основе подбора соответствующих весовых коэффициентов непосредственно в формате процедур указанного критерия выбора (без процедур $\vec{k}(UT)$ -преобразований). Аналогичная ситуация будет иметь место и в формате критерия выбора по методу *среднего геометрического*. Соответствующее обоснование будет приведено в конце главы. Представляя специфику реализации процедур модификации конкретных критериев выбора (для рассматриваемых прямых методов многокритериальной оптимизации) на основе $\vec{k}(UT)$ -преобразования, далее ограничимся форматами следующих подходов к оптимизации: форматом минимаксного критерия; форматом процедур оптимизации по методу Гурвица; форматом процедур оптимизации по методу идеальной точки.

7.2. Алгоритм $\vec{k}(UT)$ -преобразования для минимаксного критерия

Представим особенности реализации процедур $\vec{k}(UT)$ -преобразования, которые обуславливают изменение наклона направляющей для линий уровня минимаксного критерия. Получаемый новый критерий выбора при многих критериях обозначаем как $\vec{k}(UT)$ -модифицированный минимаксный критерий. Алгоритм оптимизации решения в рамках $\vec{k}(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия предполагает реализацию следующих процедур (при минимизации частных критериев). Сначала уточняются конкретные значения коэффициентов (k_1, k_2, \dots, k_N), выбор которых должен быть реализован ЛПП в соответствии со своей системой предпочтений. Далее применительно к исходно заданным частным критериям и их оценкам для анализируемых альтернативных решений по формулам (7.1) - (7.4) реализуются процедуры $\vec{k}(UT)$ -преобразования. Получаются новые «пересмотренные» или модифицированные оценки частных критериев, обусловленные переходом к новому масштабу в системе координат для пространства значений частных критериев. После этого в формате указанных новых «пересмотренных» оценок для частных критериев реализуются процедуры традиционного минимаксного критерия.

Если $\tilde{g}^{(k)}(\vec{x})$ обозначают модифицированные указанным образом оценки частных критериев, то указанный подход к решению многокритериальной задачи минимизации формализуется следующим образом. Критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ определяется равенством:

$$F(\vec{x}) = \min_{1 \leq i \leq N} \{\tilde{g}^{(i)}(\vec{x})\} = \min_{1 \leq i \leq N} \{g^{(i)}(\vec{x}) \cdot q_i^*(\vec{k})\},$$

причем $q_i^*(\vec{k})$ определяются соотношениями (7.1) – (7.4). Точка минимума этой критериальной функции принимается в качестве оптимального решения. Если минимум достигается при двух или более альтернативных решениях из допустимой области решений, то требуется проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 7.1. Пусть в условии примера 1.2 для оптимизации решения используется $\vec{k}(UT)$ -модифицированный минимаксный критерий. Оба рассматриваемых частных критерия минимизируются (напомним их: 1) минимизация ожидаемых годовых затрат на эксплуатацию агрегата в зависимости от

выбираемой его мощности и надежности; 2) минимизация ожидаемых годовых издержек на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов). «Коэффициенты доверия/важности» выбраны ЛПР следующим образом: $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$. Реализуем процедуры $\vec{k}(UT)$ -преобразования. Координаты утопической точки UT уже известны нам: $UT = (1; 1)$. Действительно, $a_{y1} = 1$ и $a_{y2} = 1$, т.к. $\min\{g^{(1)}(\vec{x})\} = 1$ и $\min\{g^{(2)}(\vec{x})\} = 1$ (см. пример 1.2 главы 1). В соответствии с формулами (7.1) имеем: $q_1^* = 1/1 = 1$ и $q_2^* = 1/1 = 1$. Далее по формулам (7.3) находим параметры $q_i^*(\vec{k})$ для требуемого «изменения масштаба» по координатным осям в пространстве значений частных критериев:

$$q_1^*(\vec{k}) = q_1^* \cdot k_1 = 3 \quad \text{и} \quad q_2^*(\vec{k}) = q_2^* \cdot k_2 = 1.$$

Найденные параметры позволяют формализовать модифицированные частные критерии, показатели которых будут соответствовать новым «пересмотренным» оценкам с учетом $\vec{k}(UT)$ -преобразования:

$$\begin{aligned} \check{g}^{(1)}(\vec{x}) &= g^{(1)}(\vec{x}) \cdot 3 = 6x - 3y \\ \check{g}^{(2)}(\vec{x}) &= g^{(2)}(\vec{x}) \cdot 1 = 5 - x - 2y. \end{aligned}$$

Дальнейшие процедуры оптимизации полностью соответствуют процедурам минимаксного критерия. Но они реализуются в формате модифицированных частных критериев $\check{g}^{(i)}(\vec{x})$. Поэтому получаем следующую задачу минимизации: $\max\{6x - 3y; 5 - x - 2y\} \rightarrow \min$ при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$. Поскольку для точек множества Парето, как мы уже знаем, $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2), то такая задача минимизации эквивалентна минимизации функции

$$\max\{6x - 3; 3 - x\} \rightarrow \min$$

при $x \in [1; 2]$.

В области $x \in [1; 2]$ выполняется неравенство: $6x - 3 > 3 - x$. Поэтому последняя задача приводится к виду: $6x - 3 \rightarrow \min$ при $x \in [1; 2]$. Функция $f = 6x - 3$ является возрастающей. Поэтому точкой минимума модифицированной критериальной функции в области допустимых значений будет точка $x^* = 1$. Это приводит к выбору решения $x^* = 1$ и $y^* = 1$. Указанное решение и будет оптимальным по модифицированному на основе $\vec{k}(UT)$ -преобразования минимаксному критерию. При таком подходе наилучшее решение потребует обеспечить максимальную надежность агрегата без запаса его мощности.

Процедуры $\vec{k}(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если при оптимизации системы логистики множество анализируемых альтернатив является дискретным, то процедуры оптимизации в формате модифицированного на основе $\vec{k}(UT)$ -преобразования минимаксного критерия будут представлены следующими шагами.

Шаг 1. На начальном шаге уточняются конкретные значения «коэффициентов доверия/важности» (k_1, k_2, \dots, k_N). Их выбор должен быть реализован ЛПР в соответствии со своей системой предпочтений.

Шаг 2. Применительно к исходно заданным частным критериям и их оценками для анализируемых альтернативных решений по формулам (7.1) - (7.4) реализуются требуемые $\vec{k}(UT)$ -процедуры модификации. В результате получают новые «пересмотренные» оценки частных критериев, обусловленные новым «масштабом» для системы координат в пространстве значений частных критериев. Для таких «пересмотренных» оценок удобно выписать новую модифицированную таблицу с указанными «пересмотренными» оценками частных критериев (см. формат табл. 7.2).

Шаг 3. По новым «пересмотренным» оценкам для частных критериев (в новой модифицированной таблице), реализуются процедуры традиционного минимаксного критерия. Это означает, что к такой таблице дописывается дополнительный столбец. Его элементы определяются как самые плохие (самые большие) элементы по соответствующим строкам указанной новой модифицированной таблицы.

Шаг 4. Дополнительный столбец указывает на оптимальное решение. Это – решение, которому соответствует наименьший показатель в указанном дополнительном столбце.

Шаг 5. Если наименьший показатель дополнительно столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, но только после реализации процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 7.2. Для удобства сравнения результатов выбора рассмотрим ситуацию, представленную ранее в примерах 1.1 и 2.2, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (А, В, С, D, E, F и G) по организации поставок сырья. Множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями (они минимизируются). Показатели оценок указанных частных критериев (в тыс. у.е.) для удобства изложения приведены в таблице 7.3. В дополнительной строке этой таблицы уже приведены координаты утопической точки UT поля издержек/потерь. Требуется: найти наилучшую альтернативу по $\vec{k}(UT)$ -модифицированному минимаксному критерию.

Таблица 7.3.
Оценки частных критериев и координаты UT .

Альтернативы	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
А	45	27	159	29
В	40	34	148	28
С	42	35	126	24
Д	41	34	170	28
Е	45	35	146	26
Ф	43	32	147	27
Г	42	36	122	25
UT	40	27	122	24

РЕШЕНИЕ. Для реализации $\vec{k}(UT)$ -процедур модификации в формате минимаксного критерия поступаем следующим образом.

Шаг 1. Уточняем значения «коэффициентов доверия/важности»: k_1, k_2, k_3 и k_4 . Пусть в этой ситуации для указанных параметров (в рамках рассматриваемой модификации) ЛПР выбирает, например, следующие значения: $k_1 = 4, k_2 = 3, k_3 = 1$ и $k_4 = 3$.

Шаг 2. Обратим внимание на то, что соответствующая утопическая точка в поле потерь применительно к этой задаче имеет координаты: $UT = X_Y = (40; 27; 122; 24)$ – см. табл. 7.3. Действительно, $a_{y1} = 40, a_{y2} = 27, a_{y3} = 122$ и $a_{y4} = 24$, т.к. $\min\{g^{(1)}\} = 40, \min\{g^{(2)}\} = 27, \min\{g^{(3)}\} = 122$ и $\min\{g^{(4)}\} = 24$.

Для параметров q_i^* в соответствии с формулами (7.1) имеем: $q_1^* = 1/40, q_2^* = 1/27, q_3^* = 1/122$ и $q_4^* = 1/24$. Далее по формулам (7.3) находим параметры $q_i^*(\vec{k})$ для требуемого «изменения масштаба» с учетом ориентации на UT и важности показателей по координатным осям в пространстве значений частных критериев:

$$q_1^*(\vec{k}) = q_1^* \cdot k_1 = 4/40 = 0,1$$

$$q_2^*(\vec{k}) = q_2^* \cdot k_2 = 3/27 = 1/9$$

$$q_3^*(\vec{k}) = q_3^* \cdot k_3 = 1/122$$

$$q_4^*(\vec{k}) = q_4^* \cdot k_4 = 3/24 = 1/8.$$

С учетом формул (7.1) - (7.4) для перехода к новым «пересмотренным» оценкам частных критериев выписываем модифицированную таблицу с такими новыми оценками (табл. 7.4).

Таблица 7.4.

Модифицированные оценки частных критериев при заданных «коэффициентах доверия».

Альтернативы	Модифицированные оценки частных критериев				$\text{Max}\{\check{g}^{(k)}\}$
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	
А	$45 \cdot 0,1 = 4,5$	$27 \cdot 1/9 = 3,00$	$159 \cdot 1/122 = 1,30$	$29 \cdot 1/8 = 3,62$	4,5
В	$40 \cdot 0,1 = 4,0$	$34 \cdot 1/9 = 3,77$	$148 \cdot 1/122 = 1,21$	$28 \cdot 1/8 = 3,50$	4,0
С	$42 \cdot 0,1 = 4,2$	$35 \cdot 1/9 = 3,88$	$126 \cdot 1/122 = 1,03$	$24 \cdot 1/8 = 3,00$	4,2
Д	$41 \cdot 0,1 = 4,1$	$34 \cdot 1/9 = 3,77$	$170 \cdot 1/122 = 1,39$	$28 \cdot 1/8 = 3,50$	4,1

E	$45 \cdot 0,1 = 4,5$	$35 \cdot 1/9 = 3,88$	$146 \cdot 1/122 = 1,19$	$26 \cdot 1/8 = 3,25$	4,5
F	$43 \cdot 0,1 = 4,3$	$32 \cdot 1/9 = 3,55$	$147 \cdot 1/122 = 1,20$	$27 \cdot 1/8 = 3,37$	4,3
G	$42 \cdot 0,1 = 4,2$	$36 \cdot 1/9 = 4,00$	$122 \cdot 1/122 = 1,00$	$25 \cdot 1/8 = 3,12$	4,2

К таблице 7.4 приписываем дополнительный столбец (столбец « $\max \tilde{g}^{(k)}$ »). В нем по каждой строке записываем наибольшую из новых модифицированных оценок частных критериев. Среди элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. В рассматриваемой ситуации он равен 4,0 (выделен в указанном столбце) и отвечает альтернативе В (по строке таблицы).

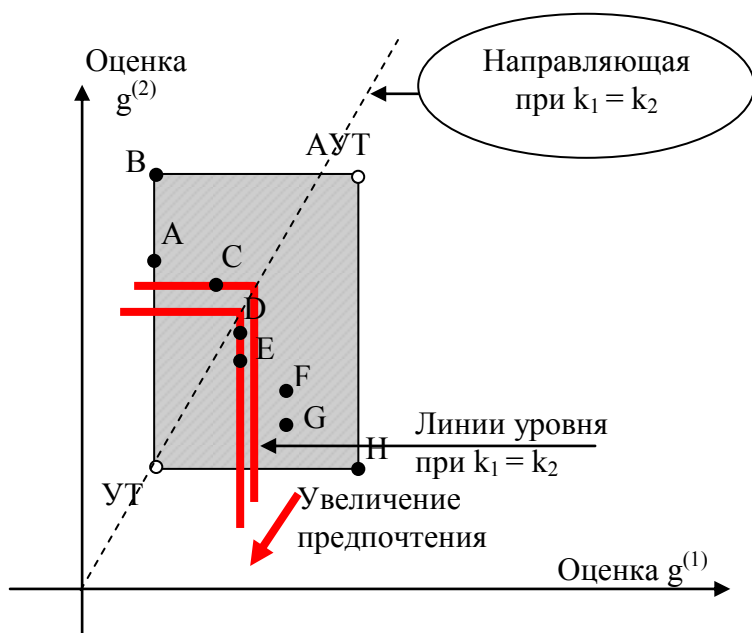


Рис. 7.3а. Иллюстрация линий уровня модифицированного минимаксного критерия на основе $k(УГ)$ -преобразования: при $k_1=k_2=1$ выбирается альтернатива Е.

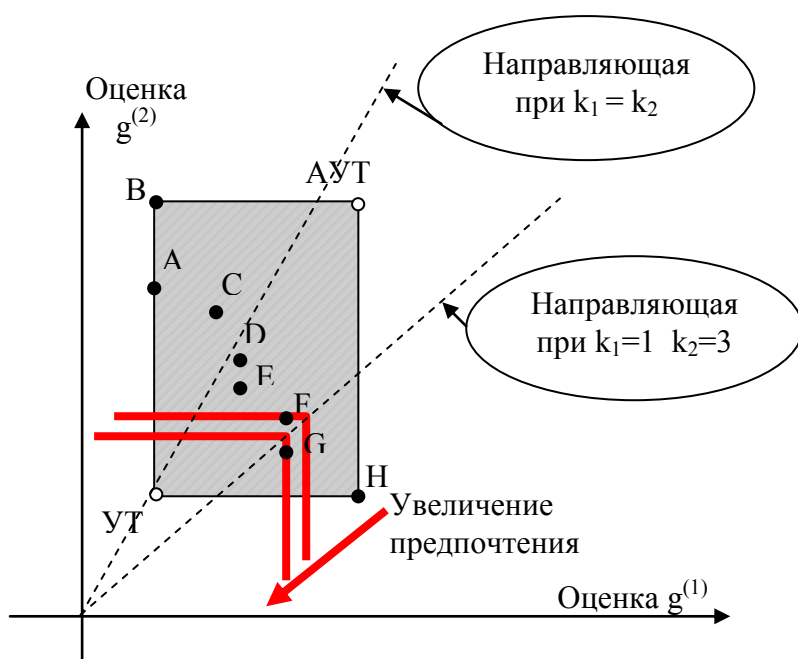


Рис. 7.36. Иллюстрация линий уровня модифицированного минимаксного критерия на основе

$\bar{k}(UT)$ -преобразования: при $k_1=1$ и $k_2=3$ выбирается альтернатива G.

Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива В будет оптимальной по $k(UT)$ -модифицированному минимаксному критерию.

Обратите внимание на следующее. Если для одного из частных критериев ЛПП задаст достаточно большой «коэффициент доверия/важности» (по сравнению с другими частными критериями), то выбор по модифицированному критерию может превратиться автоматически в выбор только по одному такому частному критерию (с указанным большим «коэффициентом доверия/важности»), как это могло быть в формате традиционного минимаксного критерия.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Графическая интерпретация для семейства линий уровня этого критерия уже была представлена выше на рис. 7.1(а-б). Подчеркнем, что в рамках рассматриваемого здесь модифицированного минимаксного критерия на основе $\bar{k}(UT)$ -преобразования семейство линий уровня будет определяться равенствами типа:

$$\min \{u \cdot q_u^*(\bar{k}); v \cdot q_v^*(\bar{k}); \dots; z \cdot q_z^*(\bar{k})\} = K.$$

Здесь

- K – показатель линии уровня в пространстве значений частных критериев;
- $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ – выбранные ЛПП показатели соответствующих «коэффициентов доверия/важности» для оценок частных критериев в пространстве издержек/потерь;
- $q_i^*(\bar{k})$ – соответствующие показатели (применительно к каждой i -ой координатной оси), учет которых в виде множителей применительно к аргументам критериальной функции, обеспечивает требуемое менеджером изменение наклона направляющей для семейства линий уровня критерия в поле издержек/потерь.

Для удобств сравнения представленных процедур оптимизации с такими процедурами в формате других критериев приведем иллюстрации линий уровня модифицированного минимаксного критерия на основе $\bar{k}(UT)$ -преобразования в пространстве издержек/потерь для рассмотренного в предыдущих главах случая задачи минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min$, $g^{(2)} \rightarrow \min$. Соответствующие линии уровня указанного критерия представлены на рис. 7.3(а-б). Эти рисунки соотносятся со случаями, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками А, В, С, D, E, F, G и H);
- для частных критериев рассматриваются ситуации, когда: 1) их «коэффициенты доверия/важности» совпадают между собой, т.е. $k_1=k_2=1$ (в этом случае направляющая проходит через UT); 2) имеется более важный частный критерий – это критерий $g^{(2)}$ (в этом случае направляющая изменяет наклон «в пользу» такого критерия).

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Для удобства сравнения результатов выбора с аналогичными, но применительно к модификации, которая была предложена в главе 6, соответствующую иллюстрацию представим в формате примера 6.3.

ПРИМЕР 7.3. Нахождение наилучшего решения по модифицированному минимаксному критерию на основе $k(UT)$ -преобразования (при минимизации двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$g^{(1)} \rightarrow \min, \quad g^{(2)} \rightarrow \min.$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь ($U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$) задано графически (см. рис. 7.4). Требуется: найти наилучшее решение по методу $k(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия, учитывая, что ЛПП задает следующие «коэффициенты доверия/важности»: $k_1=9$ и $k_2=10$.

РЕШЕНИЕ. Множество решений, оптимальных по Парето, представлено в пространстве значений частных критериев следующими точками: точки Р, Н и отрезок [М, L], включая его концы. Процедура выбора наилучшего решения по методу $\bar{k}(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия представлена на рис. 7.4. Направляющая для линий уровня этого критерия не проходит через утопическую точку (координаты UT задаются равенством $UT = (40; 35)$), т.к. заданные ЛПП «коэффициенты доверия/важности» для частных критериев не совпадают между собой.

В этом случае ($k_1 = 9$ и $k_2 = 10$) параметры, характеризующие наклон направляющей для линий уровня минимаксного критерия, будут следующими:

$$q_1^*(\bar{k}) = q_1^* \cdot k_1 = 9/40 = 0,225$$

$$q_2^*(\bar{k}) = q_2^* \cdot k_2 = 10/35 = 0,2857.$$

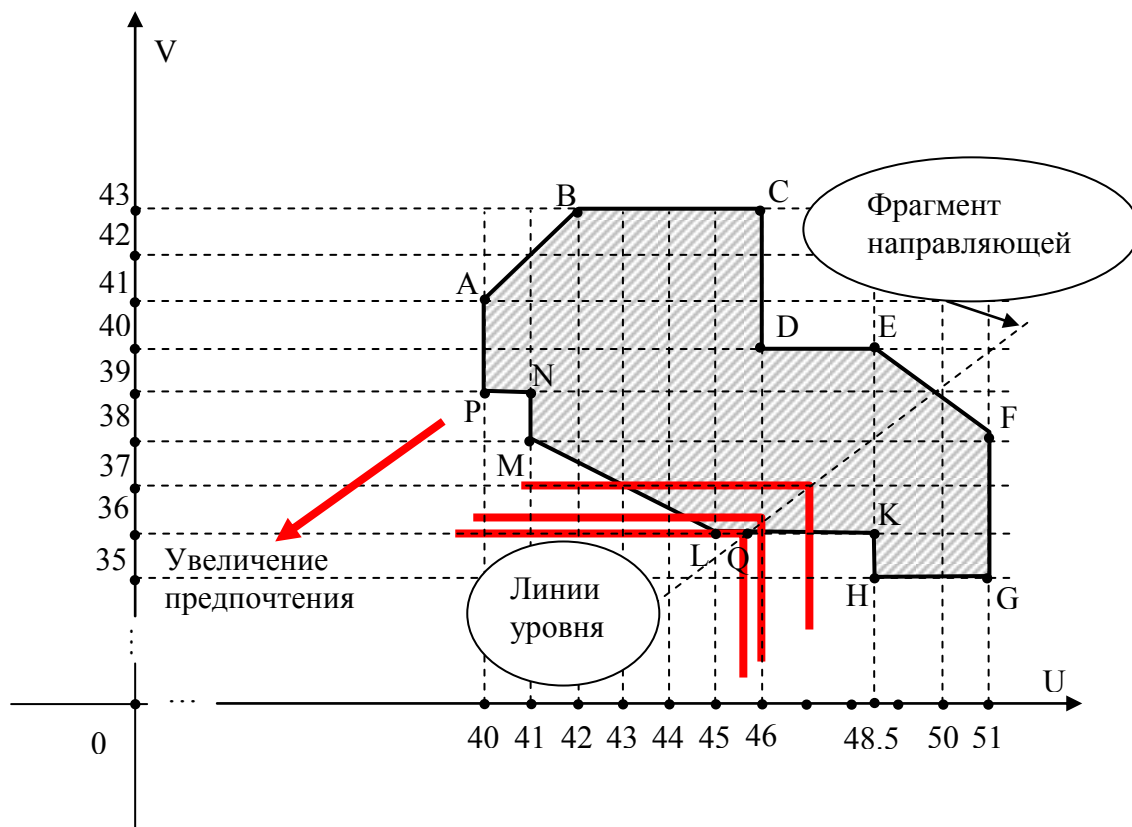


Рис. 7.4. Графическое решение задачи минимизации двух критериев по $k(VT)$ -модифицированному минимаксному критерию: при $k_1=9$ и $k_2=10$ выбирается альтернатива L.

Соответственно уравнение для этой направляющей в пространстве $(U \times V)$ будет задаваться равенством: $v = 0,7875 \cdot u$. Она будет проходить через начало координат и через точку Q из отрезка [L, K], - см. рис. 7.4. Убедитесь в этом самостоятельно (по оси OU координаты точки Q из отрезка [L; K] составят 45,7). В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель модифицированного минимаксного критерия соответствует альтернативе L.

Кстати, не одна только точка L будет иметь лучший показатель в формате рассматриваемого критерия. Такой же показатель будут иметь также и все точки отрезка [L; Q]. Поэтому процедуры формализации множества решений, оптимальных по Парето в этой ситуации опускать было нельзя.

7.3. Алгоритм $\vec{k}(VT)$ -преобразования в формате подхода критерия Гурвица

Рассмотрим особенности реализации процедур $\vec{k}(VT)$ -преобразования, которые обуславливают изменение наклона направляющей для семейства линий уровня критерия Гурвица. Получаемый в результате такой модификации новый модифицированный критерий принятия решений при многих критериях обозначаем как $\vec{k}(VT)$ -модифицированный критерий Гурвица.

Алгоритм оптимизации решения в рамках указанной $\vec{k}(VT)$ -модификации критерия Гурвица, как и в формате минимаксного критерия, предполагает реализацию представленных в параграфе 7.1 процедур модификации (напомним, что изложение относится к ситуации, когда рассматривается задача минимизации частных критериев). При этом сначала уточняются конкретные значения коэффициентов доверия/важности к показателям частных критериев (k_1, k_2, \dots, k_N), выбор которых должен быть реализован ЛПР в соответствии со своей системой предпочтений. Далее, применительно к исходно заданным частным критериям и их оценкам для анализируемых альтернатив реализуются процедуры $\vec{k}(VT)$ -преобразования по формулам (7.1) - (7.4). В результате получают новые «пересмотренные» или модифицированные оценки частных критериев. Они обусловлены переходом к новому масштабу в системе координат применительно к пространству значений частных критериев. После этого в формате таких новых «пересмотренных» оценок для частных критериев реализуются процедуры критерия Гурвица.

Пусть, как и ранее, $\tilde{g}^{(k)}(\bar{x})$ обозначают модифицированные указанным образом частные критерии, показатели которых уже соответствуют их новым «пересмотренным» оценкам. Тогда модифицированный подход критерия Гурвица к решению многокритериальной задачи минимизации формализуется следующим образом. Критериальная функция выбора $F(\bar{x})$ определяется любым из равенств:

$$F(\bar{x}) = c \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \{\tilde{g}^{(i)}(\bar{x})\} + (1-c) \cdot \min_{1 \leq i \leq N} \{\tilde{g}^{(i)}(\bar{x})\},$$

$$F(\bar{x}) = c \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \{g^{(i)}(\bar{x}) \cdot q_i^*(\vec{k})\} + (1-c) \cdot \min_{1 \leq i \leq N} \{g^{(i)}(\bar{x}) \cdot q_i^*(\vec{k})\},$$

где в формате альтернативного решения \bar{x} максимум и минимум ищутся по всем «пересмотренным» оценкам для исходно заданных частных критериев; $c \in [0;1]$ – параметр, который выбирает менеджер (для адаптации линий уровня критерия к предпочтениям ЛПП); при этом параметры $q_i^*(\vec{k})$ для $\vec{k}(VT)$ -преобразования определяются соотношениями (7.1) – (7.4). Точка минимума этой критериальной функции принимается в качестве оптимального решения. Если минимум функции выбора достигается при двух или более альтернативных решениях (из допустимой области решений), то в качестве оптимального может быть выбрано любое из них. Проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето потребует только в следующих частных случаях: 1) когда $c = 0$; 2) когда $c = 1$.

ПРИМЕР 7.4. Пусть в условии примера 1.2 для нахождения наилучшего решения используется $\vec{k}(VT)$ -модификация критерия Гурвица при $c=0,1$. Оба рассматриваемых частных критерия минимизируются (напомним их: 1) минимизация ожидаемых годовых затрат на эксплуатацию агрегата в зависимости от выбираемой его мощности и надежности; 2) минимизация ожидаемых годовых издержек на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов). Пусть, для удобства сравнения, «коэффициенты доверия/важности» выбраны ЛПП такими же, как и в примере 7.1 этой главы: $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$. Требуется реализовать процедуры $\vec{k}(VT)$ -преобразования.

РЕШЕНИЕ. Координаты утопической точки VT в поле издержек/потерь уже известны нам: $VT = (1; 1)$, т.к. $a_{y1} = 1$ и $a_{y2} = 1$ (см. пример 7.1). В соответствии с формулами (7.1) имеем: $q_1^* = 1/1 = 1$ и $q_2^* = 1/1 = 1$. По формулам (7.3), как и в указанном примере 7.1, находим параметры $q_i^*(\vec{k})$ для требуемого «изменения масштаба» по координатным осям в пространстве значений частных критериев применительно к рассматриваемой ситуации. Из-за указанного выбора коэффициентов доверия/важности они остаются прежними: $q_1^*(\vec{k}) = q_1^* \cdot k_1 = 3$ и $q_2^*(\vec{k}) = q_2^* \cdot k_2 = 1$.

Найденные параметры позволяют перейти к новым модифицированным оценкам частных критериев. Они будут соответствовать новому формату измерения по осям координат в пространстве издержек/потерь с учетом реализованного $\vec{k}(VT)$ -преобразования. Другими словами, процедуры оптимизации необходимо будет реализовать применительно к следующим новым частным критериям:

$$\tilde{g}^{(1)}(\bar{x}) = g^{(1)}(\bar{x}) \cdot 3 = 6x - 3y$$

$$\tilde{g}^{(2)}(\bar{x}) = g^{(2)}(\bar{x}) \cdot 1 = 5 - x - 2y.$$

Дальнейшие процедуры оптимизации полностью соответствуют процедурам, реализуемым в формате критерия по методу Гурвица. Разумеется, они соотносятся уже с новыми модифицированными оценками частных критериев $\tilde{g}^{(i)}(\bar{x})$. В соответствии с методом критерия Гурвица получаем задачу минимизации:

$$c \cdot \max \{6x - 3y; 5 - x - 2y\} + (1-c) \cdot \min \{6x - 3y; 5 - x - 2y\} \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Поскольку для точек множества Парето, как мы уже знаем, переменная y выбирается с учетом равенства $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2), то последняя задача эквивалентна задаче минимизации функции следующего вида:

$$c \cdot \max \{6x - 3; 3 - x\} + (1-c) \cdot \min \{6x - 3; 3 - x\} \rightarrow \min$$

при $x \in [1; 2]$.

В области $x \in [1; 2]$ выполняется неравенство: $6x - 3 > 3 - x$. Поэтому указанная задача минимизации будет эквивалентна следующей: $c \cdot (6x - 3) + (1-c) \cdot (3 - x) \rightarrow \min$ или

$$x \cdot (7c - 1) + 3 - 6c \rightarrow \min$$

при $x \in [1; 2]$.

Учитывая, что $c = 0,1$, окончательно находим, что в области $x \in [1; 2]$ требуется минимизировать функцию $f = 2,4 - 0,3 \cdot x$. Это - убывающая функция переменной x . Поэтому ее точкой в области допустимых значений переменной « x » будет точка $x^* = 2$, что приводит к выбору решения $x^* = 2$ и $y^* = 1$. Указанное

решение и будет оптимальным по модифицированному на основе $\vec{k}(UT)$ -преобразования критерию Гурвица. Оно потребует обеспечить максимальную надежность и максимальный запас мощности агрегата.

Процедуры $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица в формате дискретного множества альтернатив. При табличное представлении процедуры оптимизации с использованием $\vec{k}(UT)$ -преобразования для критерия Гурвица будут представлены следующими шагами (как и выше, предполагается формат задачи минимизации частных критериев).

Шаг 1. На этом шаге, как уже подчеркивалось выше, предварительно уточняются конкретные значения для «коэффициентов доверия/важности» - (k_1, k_2, \dots, k_N) . Напомним, их выбор реализует ЛПР.

Шаг 2. Применительно к исходно заданным частным критериям и их оценками для анализируемых альтернативных решений по формулам (7.1) - (7.4) реализуются $\vec{k}(UT)$ -процедуры модификации. В результате получают значения для новых «пересмотренных» оценок частных критериев. Они обусловлены переходом к новому «масштабу» по координатным осям в пространстве значений частных критериев. Для таких новых «пересмотренных» значений оценок частных критериев удобно выписать новую модифицированную таблицу с указанными «пересмотренными» их оценками (см. формат табл. 7.2).

Шаг 3. Используя указанные «пересмотренные» оценки для исходно заданных частных критериев (формат новой модифицированной таблицы), реализуются процедуры выбора по критерию Гурвица. Это предполагает следующее.

- 16) К такой новой таблице с «пересмотренными» оценками частных критериев приписывается три дополнительных столбца. В первый записывают наихудшие (максимальные в формате задачи минимизации частных критериев) из значений таких новых оценок для каждого из вариантов решений (т.е. максимальные элементы по строкам указанной новой таблицы).
- 17) Во второй записывают наилучшие (наименьшие в формате такой задачи оптимизации) из значений указанных оценок (т.е. минимальные элементы по строкам соответствующей таблицы).
- 18) В третий (он будет решающим) записывают средневзвешенный результат для элементов первых двух вспомогательных столбцов с весами « c » и « $1 - c$ ». Весовой коэффициент « c » выбирается ЛПР из множества $c \in [0;1]$; он соотносится с «доверием» или «важностью» того вспомогательного столбца, в котором записаны наихудшие модифицированные показатели частных критериев.

Шаг 4. По элементам третьего дополнительного столбца такой модифицированной таблицы определяется наилучшее / оптимальное решение. Это – решение, которому соответствует наименьший показатель в указанном третьем дополнительном столбце.

Шаг 5. Если наименьший показатель дополнительно столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них. Реализация процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето требуется только применительно к указанным выше ситуациям: 1) когда $c = 0$; 2) когда $c = 1$.

ПРИМЕР 7.5. Рассмотрим ситуацию, которая была представлена в примерах 1.1 и 2.2. Выбирается наилучший вариант из семи допустимых вариантов альтернативных решений (А, В, С, D, E, F и G) по организации поставок сырья. При этом множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями, которые минимизируются. Оценки исходно заданных частных критериев (в тыс. у.е.) приведены в таблице 7.5. Для удобства изложения в дополнительной строке этой таблицы уже приведены координаты утопической точки (UT) соответствующего поля издержек/потерь. Требуется: найти наилучшую альтернативу по $\vec{k}(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица, при $c = 0,5$.

Таблица 7.5.
Оценки частных критериев и координаты UT .

Альтернативы	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
А	45	27	159	29
В	40	34	148	28
С	42	35	126	24
D	41	34	170	28
Е	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25
UT	40	27	122	24

РЕШЕНИЕ. Реализуем $\vec{k}(UT)$ -процедуры модификации для критерия Гурвица.

Шаг 1. Уточняем значения «коэффициентов доверия/важности»: k_1, k_2, k_3 и k_4 . Пусть в этой ситуации для указанных параметров (в рамках рассматриваемой модификации) ЛПР выбирает, как и в примере 7.3, следующие значения: $k_1 = 4, k_2 = 3, k_3 = 1$ и $k_4 = 3$.

Шаг 2. Учитывая координаты утопической точки в поле издержек/потерь ($UT = X_U = (40; 27; 122; 24)$ – см. табл. 7.3), для параметров q_i^* и $q_i^*(\vec{k})$ по формулам (7.1) – (7.3) получаем такие же значения, как и в примере 7.3. В частности, $q_1^* = 1/40, q_2^* = 1/27, q_3^* = 1/122$ и $q_4^* = 1/24$. Кроме того,

$$q_1^*(\vec{k}) = q_1^* \cdot k_1 = 4/40 = 0,1$$

$$q_2^*(\vec{k}) = q_2^* \cdot k_2 = 3/27 = 1/9$$

$$q_3^*(\vec{k}) = q_3^* \cdot k_3 = 1/122$$

$$q_4^*(\vec{k}) = q_4^* \cdot k_4 = 3/24 = 1/8.$$

Поэтому, с учетом формул (7.4) для перехода к новым «пересмотренным» оценкам частных критериев получаем модифицированную таблицу с указанными новыми оценками (табл. 7.6), вполне аналогичную таблице 7.4 (отличие только в формате дополнительных столбцов).

Таблица 7.6.

Модифицированные оценки частных критериев при заданных «коэффициентах доверия».

Решения	Модифицированные оценки частных критериев				Max $\{\check{g}^{(k)}\}$	Min $\{\check{g}^{(k)}\}$	Показатель Критерия Гурвица
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$			
A	45·0,1=4,5	27·1/9= 3,00	159·1/122=1,30	29·1/8=3,62	4,5	1,30	2,900
B	40·0,1=4,0	34·1/9=3,77	148·1/122=1,21	28·1/8=3,50	4,0	1,21	2,605
C	42·0,1=4,2	35·1/9=3,88	126·1/122=1,03	24·1/8=3,00	4,2	1,03	2,615
D	41·0,1=4,1	34·1/9=3,77	170·1/122=1,39	28·1/8=3,50	4,1	1,39	2,745
E	45·0,1=4,5	35·1/9=3,88	146·1/122=1,19	26·1/8=3,25	4,5	1,19	2,845
F	43·0,1=4,3	32·1/9=3,55	147·1/122=1,20	27·1/8=3,37	4,3	1,20	2,750
G	42·0,1=4,2	36·1/9=4,00	122·1/122=1,00	25·1/8=3,12	4,2	1,00	2,600

К таблице с указанными значениями «пересмотренных» оценок $\check{g}^{(k)}$ частных критериев приписываем три дополнительных столбца. В столбце «max $\check{g}^{(k)}$ » по каждой строке записываем наибольшую из новых модифицированных оценок (это – наибольшие из «пересмотренных» оценок для каждого из решений). В столбце «min $\check{g}^{(k)}$ » по каждой строке записываем наименьшую из новых модифицированных оценок (это – наилучшие из «пересмотренных» оценок для каждого из альтернативных решений). В третьем дополнительном столбце представлен средневзвешенный результат для элементов первых двух таких столбцов с заданными «весами» $c = 0,5$ и $(1 - c) = 0,5$. Наконец, среди элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. В рассматриваемой ситуации он равен 2,6 (выделен в таблице жирным шрифтом) и отвечает альтернативе G (по строке таблицы). Альтернатива G будет принята в качестве оптимальной по $\vec{k}(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. В рамках модифицированного на основе $\bar{k}(UT)$ -преобразования критерия Гурвица семейство линий уровня будет определяться равенствами следующего типа:

$$c \cdot \min \{ \mu \cdot q_u^*(\bar{k}); v \cdot q_v^*(\bar{k}); \dots; z \cdot q_z^*(\bar{k}) \} + (1-c) \cdot \min \{ \mu \cdot q_u^*(\bar{k}); v \cdot q_v^*(\bar{k}); \dots; z \cdot q_z^*(\bar{k}) \} = K.$$

Здесь

- « K » – показатель линии уровня в пространстве значений частных критериев;
- $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ – выбранные ЛПР показатели соответствующих «коэффициентов доверия/важности» для оценок частных критериев в пространстве издержек/потерь;
- $q_i^*(\bar{k})$ – показатели (для каждой i -ой координатной оси), учет которых в виде множителей к аргументам критериальной функции, обеспечивает требуемое менеджером изменение наклона направляющей для семейства линий уровня критерия в поле издержек/потерь.

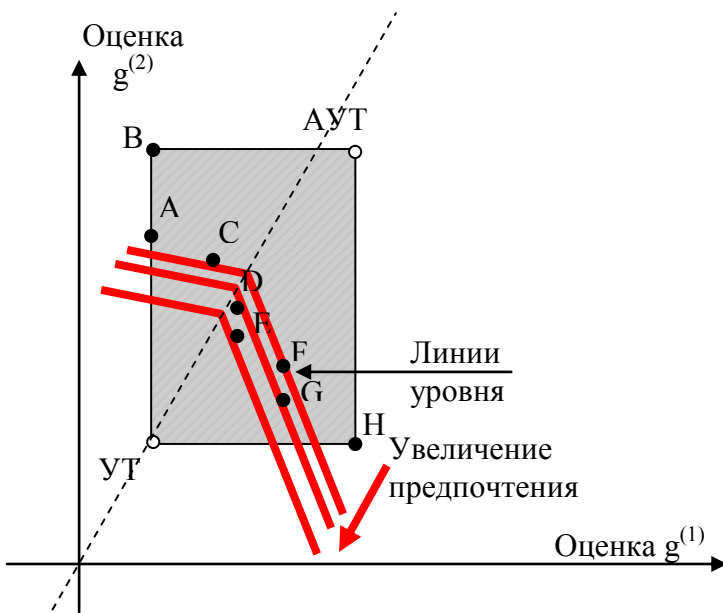


Рис. 7.5а. Иллюстрация линий уровня модифицированного критерия Гурвица на основе $\bar{k}(UT)$ -преобразования в случае $c = 0,75$: при $k_1=k_2=1$ выбирается альтернатива E.

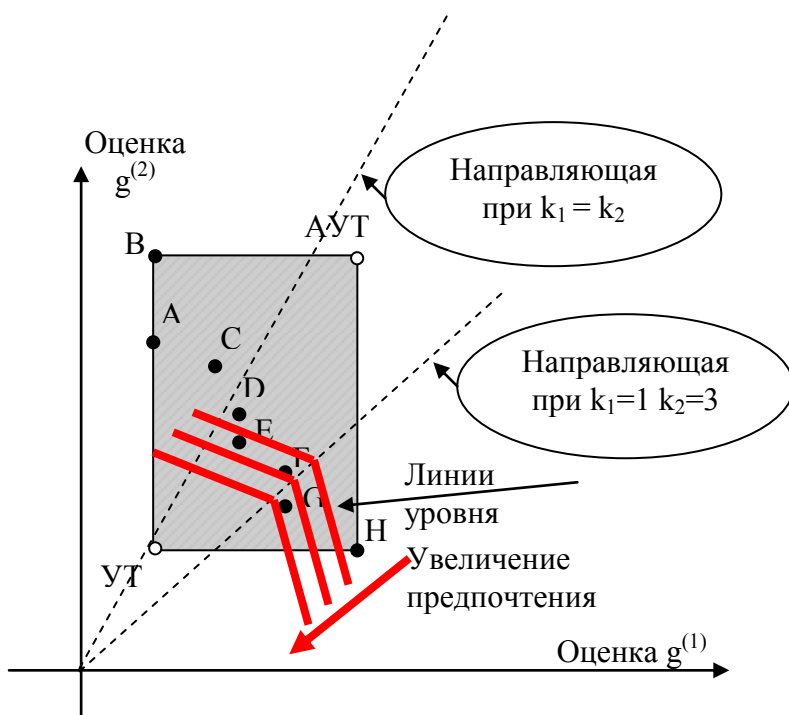


Рис. 7.5б. Иллюстрация линий уровня модифицированного критерия Гурвица на основе $\bar{k}(UT)$ -преобразования в случае $c = 0,75$: при $k_1=1$ и $k_2=3$ выбирается альтернатива G; отметьте сами, что при $k_1=1$ и $k_2=2$ выбирается альтернатива E.

Для удобств сравнения представленных процедур оптимизации с такими процедурами в формате других критериев приведем иллюстрации семейства линий уровня модифицированного критерия Гурвица на основе $\bar{k}(UT)$ -преобразования в пространстве издержек/потерь для рассмотренного в предыдущих главах случая задачи минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Линии уровня указанного критерия представлены на рис. 7.5(а-б). Эти рисунки соотносятся со случаями, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками A, B, C, D, E, F, G и H);
- для частных критериев рассматриваются ситуации, когда: 1) их «коэффициенты доверия/важности» совпадают между собой, т.е. $k_1=k_2=1$ (в этом случае направляющая проходит через UT , - рис. 7.5а); 2) имеется более важный частный критерий – это критерий $g^{(2)}$, чтобы обратить внимание на изменение наклона направляющая «в пользу» такого критерия. При этом направляющая уже не будет проходить через UT (рис. 7.5б).

Иллюстрация процедур оптимизации графическим методом. Для удобства сравнения результатов выбора по $\bar{k}(UT)$ -модифицированному критерию Гурвица с аналогичными результатами, но применительно к $\gamma(UT)$ -модификации, которая была предложена в главе 6, соответствующую иллюстрацию представим в формате уже использованного в указанной главе примера.

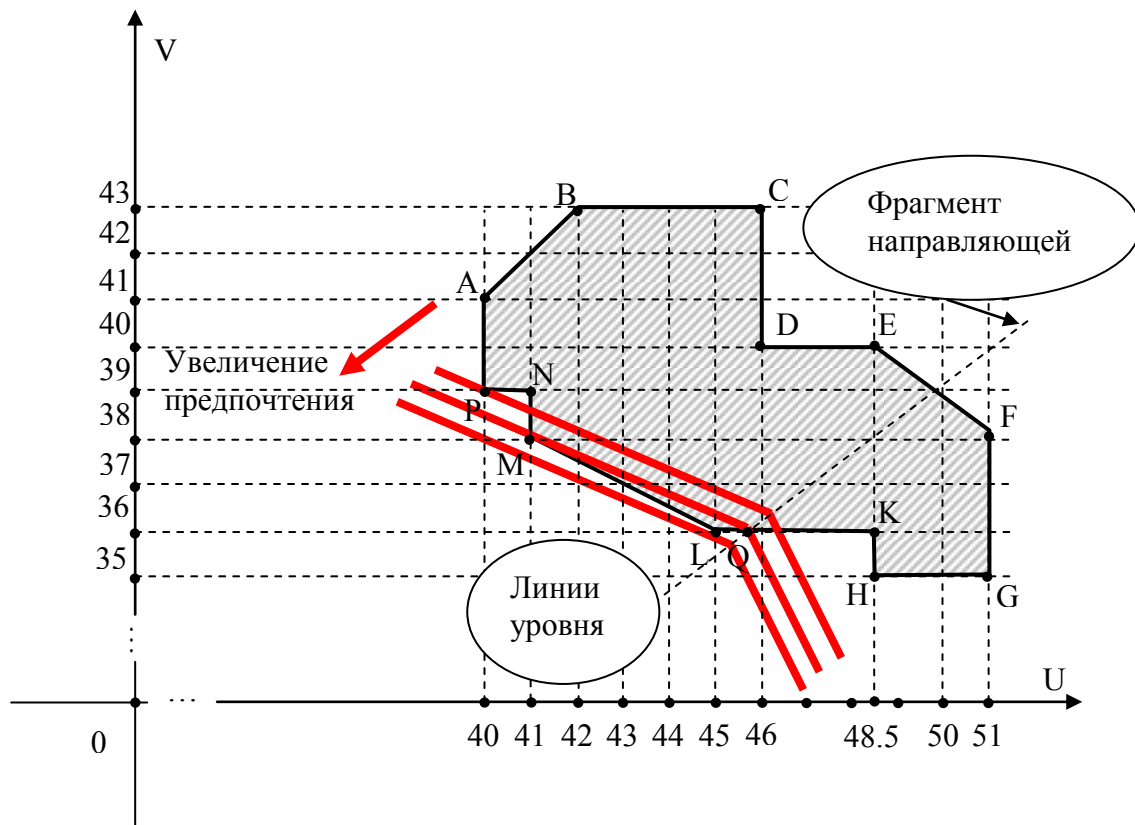


Рис. 7.6. Графическое решение задачи минимизации двух критериев по $\bar{k}(UT)$ -модифицированному минимаксному критерию: при $k_1=9$ и $k_2=10$ выбирается альтернатива L.

ПРИМЕР 7.6. Нахождение наилучшего решения по модифицированному критерию Гурвица на основе $\bar{k}(UT)$ -преобразования (при минимизации двух критериев). Пусть минимизируются два частных критерия:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &\rightarrow \min, \\ g^{(2)} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество допустимых значений этих критериев в пространстве издержек / потерь ($U = g^{(1)}$ и $V = g^{(2)}$), задано графически (см. рис. 7.6). Требуется: найти наилучшее решение по методу $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица, если в качестве управляющего параметра «с» выбрано значение $c = 0,75$. При этом (для удобства сравнения результатов выбора) учтем, что ЛПР задает такие же «коэффициенты доверия/важности», как и в примере 7.3: $k_1 = 9$ и $k_2 = 10$.

РЕШЕНИЕ. Процедура выбора наилучшего решения по методу $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица представлена на рис. 7.6. Как и в примере 7.3 (см. рис. 7.4), направляющая для линий уровня этого критерия не проходит через утопическую точку (напомним, что координаты UT задаются равенством $UT = (40; 35)$). Это обусловлено тем, что заданные ЛПР «коэффициенты доверия/важности» для частных критериев не совпадают между собой. В указанном случае (когда $k_1 = 9$ и $k_2 = 10$) параметры, характеризующие наклон направляющей для линий уровня минимаксного критерия, будут следующими: $q_1^*(\vec{k}) = q_1^* \cdot k_1 = 9/40 = 0,225$; $q_2^*(\vec{k}) = q_2^* \cdot k_2 = 10/35 = 0,285$ (они совпадают с аналогичными значениями указанных параметров в формате рассмотренного выше примера 7.3 из-за одинакового выбора «коэффициентов доверия/важности»).

Уравнение для этой направляющей в пространстве ($U \times V$) снова будет задаваться представленным в примере 7.3 равенством: $v = 0,7875 \cdot u$. Указанная направляющая будет проходить через начало координат и через точку Q из отрезка [L, K], причем координаты такой точки Q из отрезка [L; K] по оси 0U составят 45,7. Соответствующие линии уровня модифицированного критерия Гурвица при $c = 0,75$ представлены на рис. 7.6. В области допустимых альтернативных решений наилучший показатель такого модифицированного критерия при $c = 0,75$ соответствует альтернативе L. Она и будет оптимальной по рассматриваемому критерию. Процедуры формализации множества решений, оптимальных по Парето в этой ситуации не требуются.

Линия уровня $k(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица при $c = 0,75$, которая соответствует альтернативе L (т.е. проходит через точку L(45; 36) на рис. 7.6), как видно из указанного рисунка, проходит очень близко к отрезку [M; L]. Чтобы убедиться в том, что точка M(41;38) все-таки лежит выше указанной линии уровня и следовательно рисунок 7.6 правильно иллюстрирует анализируемую ситуацию, достаточно проверить, что показатель критерия выбора в формате точки M(41;38) окажется большим, чем показатель этого критерия выбора, но реализованный в формате указанной точки L(45; 36). Соответствующие расчеты, которые подтверждают такой результат сравнения этих показателей, приведены в таблице 7.7.

Таблица 7.7

Сравнение показателей $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица для решений, представленных точками M и L.

Точки	Оценки частных критериев		Модифицированные оценки частных критериев		Max $\check{g}^{(i)}$	Min $\check{g}^{(i)}$	Показатель критерия при $c = 0,75$
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$			
M	41	38	$\frac{41 \cdot 9}{40}$	$\frac{38 \cdot 10}{35}$	$\frac{38 \cdot 10}{35}$	$\frac{41 \cdot 9}{40}$	10,499
L	45	36	$\frac{45 \cdot 9}{40}$	$\frac{36 \cdot 10}{35}$	$\frac{36 \cdot 10}{35}$	$\frac{45 \cdot 9}{40}$	10,246

В таблице 7.7 для точек M(41;38) и L(45; 36) сначала представлены показатели исходно заданных частных критериев $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ (см. координаты таких точек по оси абсцисс и по оси ординат на рис. 7.6). В последующих двух столбцах указанной таблицы представлены уже модифицированные оценки исходных частных критериев на основе соответствующего $\vec{k}(UT)$ -преобразования. При этом учитывается то, что параметры такого преобразования определяются указанными выше равенствами: $q_1^*(\vec{k}) = q_1^* \cdot k_1 = 9/40$; $q_2^*(\vec{k}) = q_2^* \cdot k_2 = 10/35$.

Таким образом, в формате $\vec{k}(UT)$ -преобразования для получения модифицированных оценок для альтернатив, которые представлены точками M и L, необходимо их оценки по исходно заданным частным критериям умножить на соответствующее значение из множества представленных параметров (с нижним индексом, соответствующим номеру критерия).

Затем в первом дополнительном столбце (столбец $\check{g}^{(i)}$) приведены наихудшие (т.е. самые большие) из модифицированных оценок для каждой строки. Во втором дополнительном столбце (столбец $\check{g}^{(i)}$) – наилучшие (т.е. самые маленькие) из таких показателей. Наконец, в третьем дополнительном столбце представлены синтезированные показатели $\bar{k}(YT)$ -модифицированного критерия выбора по Гурвицу для интересующих нас альтернатив, которым соответствуют точки М и L (расчеты проведены при $c = 0,75$). Как видим, показатель, соотносимый с точкой L, оказался меньшим (выделен в таблице), чем показатель, который соотносится с точкой М. Подчеркнем, что указанный показатель для точки L получен на основе следующих расчетов

$$0,75 \cdot \frac{36 \cdot 10}{35} + 0,25 \cdot \frac{45 \cdot 9}{40} = 10,246$$

(напомним, что это есть средневзвешенный результат модифицированных оценок для первого и второго дополнительных столбцов таблицы с весами $c = 0,75$ и $(1 - c) = 0,25$).

Итак, представленные расчеты подтверждают, что альтернатива L является наилучшей в формате рассматриваемого в этом примере $\bar{k}(YT)$ -модифицированного критерия Гурвица.

7.4. Алгоритм $\bar{k}(YT)$ -преобразования для критерия идеальной точки

Рассмотрим особенности реализации процедур $\bar{k}(YT)$ -преобразования, для случая, когда в качестве критерия выбора менеджер будет использовать критерий идеальной точки. Указанные процедуры $\bar{k}(YT)$ -преобразования приведут к сжатию/растяжению линий уровня критерия выбора по осям координат соответствующего пространства значений частных критериев (пространства издержек/потерь). Пусть, как и ранее, $\check{g}^{(k)}(\bar{x})$ обозначают модифицированные указанным образом частные критерии, показатели которых уже соответствуют новым «пересмотренным» оценкам (в формате процедур $\bar{k}(YT)$ -преобразования) для исходно заданных частных критериев. Тогда реализация указанного подхода для модификации критерия идеальной точки (для решения многокритериальной задачи минимизации частных критериев) формализуется следующим образом. Для такой ситуации критериальную функцию выбора $F(\bar{x})$ менеджер определяет равенством:

$$F(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\check{g}_{YT}^{(i)}(\bar{x}) - \check{g}^{(i)}(\bar{x}))^2},$$

где параметры $\check{g}_{YT}^{(i)}(\bar{x})$ обозначают модифицированные координаты утопической точки в пространстве значений частных критериев (т.е. координаты такой точки, которые получатся после процедур $\bar{k}(YT)$ -преобразований).

В обозначениях исходного пространства значений частных критериев это соответствует следующей критериальной функции

$$F(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\min_{\bar{x}} \{g^{(i)}(\bar{x}) \cdot g_i^*(\bar{k})\} - g^{(i)}(\bar{x}) \cdot g_i^*(\bar{k}))^2},$$

где параметры $g_i^*(\bar{k})$ для $\bar{k}(YT)$ -преобразования определяются соотношениями (7.1) – (7.4).

Точка минимума указанной критериальной функции принимается в качестве оптимального решения. Если минимум функции выбора достигается при двух или более альтернативных решениях (из допустимой области решений), то в качестве оптимального может быть выбрано любое из них. Проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето не требуется. Это обусловливается спецификой линий уровня критерия выбора по методу идеальной точки.

ПРИМЕР 7.7. Пусть в условии примера 1.2 для нахождения наилучшего решения используется представленная в этой главе $\bar{k}(YT)$ -модификация критерия выбора по методу идеальной точки. Оба частных критерия минимизируются (напомним их: 1) минимизация ожидаемых годовых затрат на эксплуатацию агрегата в зависимости от выбираемой его мощности и надежности; 2) минимизация ожидаемых годовых издержек на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов). Пусть, для удобства сравнения, «коэффициенты доверия/важности» выбраны ЛПР такими же, как и в примерах 7.1 и 7.4 этой главы: $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$. Требуется реализовать соответствующие процедуры $\bar{k}(YT)$ -преобразования.

РЕШЕНИЕ. Координаты утопической точки UT в исходном поле издержек/потерь уже известны нам: $UT = (1; 1)$, т.к. $a_{y1} = 1$ и $a_{y2} = 1$ (см. примеры 7.1 и 7.4). В соответствии с формулами (7.1) имеем: $q_1^* = 1/1 = 1$ и $q_2^* = 1/1 = 1$. По формулам (7.3), как и в указанных примерах 7.1 и 7.4, находим параметры $q_i^*(\vec{k})$ для требуемого «изменения масштаба» по координатным осям в пространстве значений частных критериев применительно к рассматриваемой ситуации. Поскольку «коэффициенты доверия/важности» выбраны прежними, то и параметры $q_i^*(\vec{k})$ остаются такими же, как и в примерах 7.1 и 7.4:

$$q_1^*(\vec{k}) = q_1^* \cdot k_1 = 3 \quad \text{и} \quad q_2^*(\vec{k}) = q_2^* \cdot k_2 = 1.$$

Перейдем к новым модифицированным оценкам частных критериев. Они будут соответствовать новому формату измерения по осям координат в пространстве издержек/потерь с учетом $\vec{k}(UT)$ -преобразования. Процедуры оптимизации необходимо будет реализовать применительно к следующим новым частным критериям:

$$\begin{aligned} \check{g}^{(1)}(\vec{x}) &= g^{(1)}(\vec{x}) \cdot 3 = 6x - 3y \\ \check{g}^{(2)}(\vec{x}) &= g^{(2)}(\vec{x}) \cdot 1 = 5 - x - 2y. \end{aligned}$$

Дальнейшие процедуры оптимизации полностью соответствуют процедурам, которые реализуются в формате критерия по методу идеальной точки. При этом они соотносятся уже с новыми модифицированными оценками частных критериев $\check{g}^{(i)}(\vec{x})$. Сначала найдем модифицированные координаты утопической точки (в пространстве новых значений частных критериев). Такие координаты теперь будут следующими:

$$\begin{aligned} \check{g}_{yT}^{(1)}(\vec{x}) &= a_{y1}(mod) = a_{y1} \cdot q_1^*(\vec{k}) = 1 \cdot 3 = 3, \\ \check{g}_{yT}^{(2)}(\vec{x}) &= a_{y2}(mod) = a_{y2} \cdot q_2^*(\vec{k}) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

В соответствии с методом идеальной точки получаем задачу минимизации:

$$\sqrt{(3 - 6x + 3y)^2 + (x + 2y - 4)^2} \rightarrow \min$$

при условии $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

Для точек множества Парето, как мы уже знаем, переменная y будет выбираться с учетом равенства $y = y^* = 1$ (см. пример 1.2). Поэтому последняя задача эквивалентна задаче минимизации следующей функции (при $x \in [1; 2]$):

$$\sqrt{(6x)^2 + (x - 2)^2} \rightarrow \min$$

Подкоренное выражение представляет собой параболу (ее ветви направлены вверх; ось симметрии проходит через точку $x = 1/37$). На интересующем нас отрезке $x \in [1; 2]$ она возрастает. Минимум указанной функции в заданной области достигается на границе этого отрезка, причем в точке $x = 1$. Это приводит к выбору следующего решения $x^* = 1$ и $y^* = 1$. Указанное решение и будет оптимальным по модифицированному на основе $\vec{k}(UT)$ -преобразования критерию идеальной точки. При таком подходе наилучшее решение потребует обеспечить максимальную надежность без запаса мощности агрегата. Это решение отличается от найденного по методу ИТ без использования $\vec{k}(UT)$ -преобразований (см. главу 3).

Процедуры $\vec{k}(UT)$ -модификации для критерия выбора по методу идеальной точки в формате дискретного множества альтернатив. Обратимся к ситуации, когда при оптимизации системы логистики множество анализируемых альтернатив является дискретным. Процедуры оптимизации с использованием $\vec{k}(UT)$ -преобразования по методу идеальной точки будут представлены следующими шагами (как и выше, предполагается формат задачи минимизации частных критериев).

Шаги 1-2. Эти шаги полностью соответствуют шагам любого из алгоритмов, представленных выше в этой главе. В частности, должны быть уточнены конкретные значения для «коэффициентов доверия/важности» - (k_1, k_2, \dots, k_N) . Затем по формулам (7.1) - (7.4) реализуются требуемые $\vec{k}(UT)$ -процедуры модификации. В результате модифицируются заданные оценки частных критериев. Они будут соответствовать новой системе измерения по координатным осям в пространстве значений частных критериев. Для новых «пересмотренных» значений оценок частных критериев выписывают специальную модифицированную таблицу. Ее структура была представлена ранее на рис. 7.2.

Шаг 3. Используя новые «пересмотренные» оценки для частных критериев (формат новой модифицированной таблицы), реализуются процедуры критерия выбора по методу идеальной точки. Это означает, что к такой таблице дописывается дополнительный столбец. Его элементы определяются как показатели расстояния от точки, которая представляет конкретную альтернативу (по строке модифицированной таблицы), до соответствующей утопической точки поля издержек/потерь в пространстве уже модифицированных оценок частных критериев (формат новой модифицированной таблицы).

Шаг 4. По элементам дополнительного столбца новой модифицированной таблицы определяется оптимальное решение. Ему соответствует наименьший показатель в дополнительном столбце (ищется точка, ближайшая к утопической в пространстве модифицированных значений частных критериев).

Шаг 5. Если наименьший показатель дополнительно столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них. Реализация процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето не требуется.

Проиллюстрируем специфику выбора и отмеченный выше факт отсутствия влияния процедур $\bar{k}(УТ)$ -преобразований на оптимальный выбор по среднему геометрическому следующим примером.

ПРИМЕР 7.8. Рассмотрим ситуацию, представленную ранее в примере 3.16 (см. также примеры 7.2 и 7.5), когда необходимо было выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (А, В, С, D, E, F и G) по организации поставок сырья. Множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями (они минимизируются). Оценки частных критериев уже были приведены выше в таблице 7.5. В дополнительной строке указанной таблицы были представлены также координаты утопической точки (они требуются для перехода к «пересмотренным» новым оценкам частных критериев). Требуется: найти наилучшую альтернативу по модифицированному методу идеальной точки с учетом предварительных процедур $\bar{k}(УТ)$ -модификации. Пусть, для удобства сравнения, формат таких процедур в этой ситуации предполагает такие же параметры, как и в условии примеров 7.2 и 7.5. Другими словами, выбраны следующие значения «коэффициентов доверия/важности»: $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$ и $k_4 = 3$.

РЕШЕНИЕ. Шаги 1-2. Процедуры $\bar{k}(УТ)$ -модификации не зависят от формата критерия выбора. Они будут полностью соответствовать тем процедурам, которые уже были представлены при решении примеров 7.2 и 7.5 (см. табл. 7.4 и 7.6). Соответственно их можно опустить. Результат таких процедур – новая модифицированная таблица с «пересмотренными» новыми оценками частных критериев.

Шаг 3. На основе «пересмотренных» новых оценок частных критериев найдем соответствующие показатели «расстояний» (от точек, представляющих анализируемые альтернативы, до утопической точки) в пространстве «пересмотренных» значений частных критериев. Результаты представлены в таблице 7.8. Для удобства иллюстрации в последней строке этой таблицы представлены координаты утопической точки УТ в пространстве модифицированных значений частных критериев.

Таблица 7.8.

Утопическая точка и показатели «расстояний» в пространстве новых оценок частных критериев при заданных «коэффициентах доверия».

Решения	Модифицированные оценки частных критериев				Показатель расстояния
	$\bar{g}^{(1)}$	$\bar{g}^{(2)}$	$\bar{g}^{(3)}$	$\bar{g}^{(4)}$	
А	4,5	3,00	1,30	3,62	$\sqrt{0,5^2 + 0^2 + 0,3^2 + 0,62^2} = 0,851$
В	4,0	3,77	1,21	3,50	$\sqrt{0^2 + 0,77^2 + 0,21^2 + 0,5^2} = 0,942$
С	4,2	3,88	1,03	3,00	$\sqrt{0,2^2 + 0,88^2 + 0,03^2 + 0^2} = 0,903$
D	4,1	3,77	1,39	3,50	$\sqrt{0,1^2 + 0,77^2 + 0,39^2 + 0,5^2} = 1,003$
E	4,5	3,88	1,19	3,25	$\sqrt{0,5^2 + 0,88^2 + 0,19^2 + 0,25^2} = 1,059$
F	4,3	3,55	1,20	3,37	$\sqrt{0,3^2 + 0,55^2 + 0,2^2 + 0,37^2} = 0,755$
G	4,2	4,00	1,00	3,12	$\sqrt{0,2^2 + 1^2 + 0^2 + 0,12^2} = 1,027$
УТ	4,0 0	3,00	1,00	3,00	

К таблице 7.8 с указанными «пересмотренными» оценками $\tilde{g}^{(k)}$ частных критериев приписан дополнительный столбец. В нем представлены показатели расстояний от точек с координатами, которые соответствуют элементам каждой строки такой новой таблицы, до утопической точки, представленной в последней строке таблицы.

Шаг 4. Среди элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 0,755 (выделен в таблице) и соответствует альтернативе F (по строке таблицы). Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива F будет принята в качестве наилучшей/оптимальной для организации соответствующих поставок сырья применительно к анализируемому звену цепи поставок (по $\vec{k}(УТ)$ -модифицированному критерию идеальной точки).

Такой выбор отличается от выбора по методу идеальной точки без указанных процедур модификации: сравните с выбором в примере 3.5.

Графическая интерпретация линий уровня критерия. Заметим, что в рамках рассматриваемого здесь модифицированного на основе $\vec{k}(УТ)$ -преобразования критерия идеальной точки соответствующее семейство линий уровня будет определяться равенствами типа:

$$(\min\{u \cdot q_u^*(\vec{k})\} - u \cdot q_u^*(\vec{k}))^2 + (\min\{v \cdot q_v^*(\vec{k})\} - v \cdot q_v^*(\vec{k}))^2 + \dots + (\min\{z \cdot q_z^*(\vec{k})\} - z \cdot q_z^*(\vec{k}))^2 = K^2$$

Здесь

- «K» – показатель линии уровня в пространстве значений частных критериев;
- $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ – выбранные ЛПП показатели соответствующих «коэффициентов доверия/важности» для оценок частных критериев в пространстве издержек/потерь;
- $q_u^*(\vec{k}), \dots, q_z^*(\vec{k})$ – показатели (применительно к соответствующей координатной оси), учет которых в виде множителей применительно к аргументам критериальной функции, обеспечивает требуемое менеджером изменение наклона направляющей для семейства линий уровня критерия в поле издержек/потерь.

Для удобств сравнения представленных процедур оптимизации и выбора с соответствующими процедурами в формате других критериев приведем иллюстрации семейства линий уровня модифицированного критерия идеальной точки на основе $\vec{k}(УТ)$ -преобразования в пространстве издержек/потерь для рассмотренного в предыдущих главах случая задачи минимизации двух критериев: $g^{(1)} \rightarrow \min, g^{(2)} \rightarrow \min$. Линии уровня указанного критерия представлены на рис. 7.7. Этот рисунок соотносится со случаем, когда:

- множество анализируемых альтернативных решений является дискретным (оно представлено в пространстве издержек точками A, B, C, D, E, F, G и H);
- для частных критериев рассматривается ситуация, когда «коэффициенты доверия/важности» совпадают между собой, т.е. $k_1=k_2=1$ (в этом случае направляющая проходит через УТ).

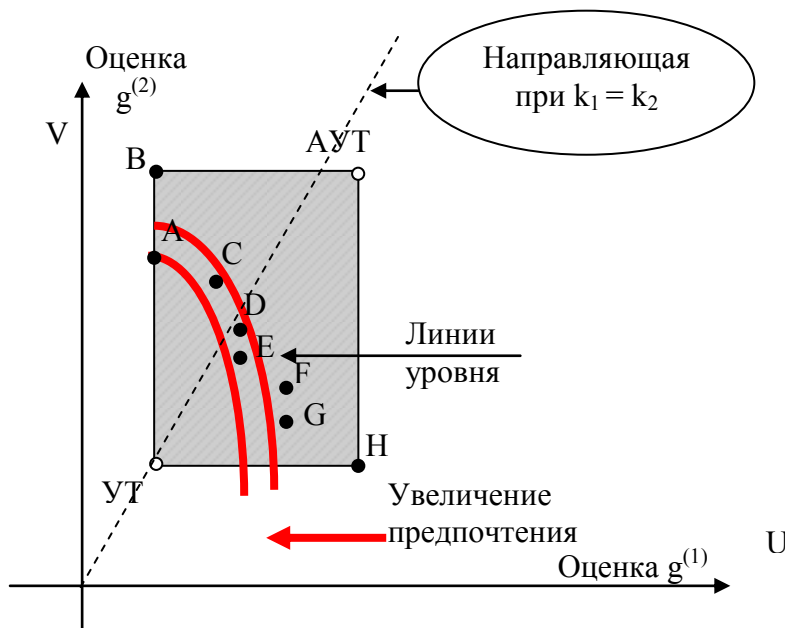


Рис. 7.7. Иллюстрация линий уровня $\vec{k}(УТ)$ -модифицированного критерия идеальной точки:

при $k_1 = k_2 = 1$ (причем $g_1^*(\vec{k}) : g_2^*(\vec{k}) = 2 : 1$) выбирается альтернатива А.

Рисунок 7.7 иллюстрирует следующую особенность линий уровня для $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия идеальной точки. Это уже не фрагменты концентрических окружностей в поле издержек/потерь с центром в УТ (как было в формате критерия идеальной точки без указанной модификации). Для этого модифицированного критерия выбора указанные окружности будут сжаты по каждой координатной оси (со «своими» коэффициентами сжатия в соответствии с заданными ЛПП компонентами вектора «доверия» $\vec{k}(UT)$). В частности, на рис. 7.7 такое сжатие реализовано по оси «OU», причем в два раза.

7.5. Критерии выбора, инвариантные относительно процедур

$\vec{k}(UT)$ -преобразований: метод взвешенной суммы оценок частных критериев; метод среднего геометрического

Представленные выше процедуры $\vec{k}(UT)$ -преобразований позволяют менеджеру, как уже неоднократно отмечалось, вносить коррективы в алгоритм выбора оптимального решения, адаптируя такой выбор к предпочтениям ЛПП (за счет изменения ориентации направляющей для линий уровня соответствующего критерия). Однако, при этом будет неверно считать, что представленная в этой главе модификация всегда расширит для менеджера возможности выбора оптимального решения (в формате заданного конкретного критерия выбора). Такой вывод - неверен. Применительно к некоторым критериям выбора может оказаться, что такое же оптимальное решение (и даже такое же ранжирование анализируемых альтернативных решений), которое будет найдено при использовании модификации на основе $\vec{k}(UT)$ -преобразований, можно получить и без использования этих процедур. Другими словами, некоторые критерии выбора могут оказаться инвариантными относительно процедур $\vec{k}(UT)$ -преобразований. В частности, отмеченная ситуация будет иметь место в формате следующих подходов к оптимизации при многих критериях на основе следующих прямых методов: метода взвешенной суммы оценок частных критериев, метода среднего геометрического. Рассмотрим указанные ситуации более подробно.

Процедуры $\vec{k}(UT)$ -преобразований в формате метода взвешенной суммы оценок частных критериев. Указанные процедуры предусматривают переход к новым «пересмотренным» оценкам частных критериев (на основе изменения масштаба измерения по осям координат в пространстве издержек/потерь). Пусть, как и ранее, $\check{g}^{(k)}(\vec{x})$ обозначают специальным образом модифицированные оценки частных критериев в формате процедур $\vec{k}(UT)$ -модификации (по формулам (7.1) – (7.4)). Тогда рассматриваемая модификация указанного подхода к решению многокритериальной задачи минимизации формализуется следующим образом. Критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ определяется равенством:

$$F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot \check{g}^{(k)}(\vec{x}),$$

где c_k – весовые коэффициенты для частных критериев. Точка минимума этой критериальной функции принимается в качестве оптимального решения. Если минимум функции выбора достигается при двух или более решениях, то в качестве оптимального может быть выбрано любое из них. Проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето не требуется. Эту функцию выбора можно представить с учетом формул (7.1) – (7.4) следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot g_k^*(\vec{k}) \cdot g^{(k)}(\vec{x}),$$

или

$$F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N \hat{c}_k g^{(k)}(\vec{x}),$$

где через \hat{c}_k обозначено произведение $c_k \cdot g_k^*(\vec{k})$.

Последняя запись выражения для критериальной функции $F(\vec{x})$ подчеркивает следующую особенность процедур $\vec{k}(UT)$ -модификации, которые относятся к критерию выбора по методу взвешенной суммы оценок частных критериев. Множители $g_k^*(\vec{k})$, определяющие сжатие/растяжение по осям координат в пространстве издержек/потерь, будут одинаковыми для всех анализируемых альтернатив. Поэтому формат процедур модификации, практически, отразится только на «весовых» коэффициентах.

Напомним, что «весовые» коэффициенты для метода взвешенной суммы оценок частных критериев могут быть выбраны менеджером произвольно. Следовательно, выбор по $\bar{k}(UT)$ -модифицированному критерию для метода взвешенной суммы оценок частных критериев всегда можно получить за счет «пересмотра» значений «весовых» коэффициентов в формате такого подхода к оптимизации, причем без $\bar{k}(UT)$ -модификации. Другими словами, в формате рассматриваемого здесь критерия выбора возможности для адаптации линий уровня к предпочтениям ЛПР, которые может реализовать менеджер при использовании процедур модификации, совпадают с такими возможностями и без использования процедур модификации.

Процедуры $\bar{k}(UT)$ -преобразований в формате метода среднего геометрического. Теперь обратим внимание на указанную выше особенность выбора, если для нахождения оптимального решения при многокритериальной оптимизации будет использован метод среднего геометрического. Алгоритм, в формате которого учитываются процедуры $k(UT)$ -модификации для критерия выбора по среднему геометрическому, предполагает (как и в случае уже рассмотренных в предыдущих параграфах других критериев выбора) реализацию вполне конкретных процедур, не зависящих от специфики критерия выбора. Такие процедуры модификации были представлены в параграфе 7.1 (подчеркнем, что изложение относится к ситуации, когда рассматривается задача минимизации всех частных критериев). Напомним, что они предполагают реализацию следующих процедур. Сначала уточняются конкретные значения коэффициентов доверия/важности к показателям частных критериев (k_1, k_2, \dots, k_N). Их выбор должен быть реализован непосредственно ЛПР в соответствии со своим опытом в бизнесе и в соответствии со своей системой предпочтений. Далее менеджер реализует процедуры соответствующего $\bar{k}(UT)$ -преобразования для оценок частных критериев по формулам (7.1) - (7.4). В результате таких процедур менеджер получает новые «пересмотренные» или модифицированные оценки частных критериев. Они будут соответствовать новому масштабу измерения в системе координат для соответствующего пространства значений частных критериев (пространство издержек/потерь – для задач минимизации частных критериев). После этого уже в формате таких новых «пересмотренных» оценок для частных критериев реализуются процедуры критерия выбора: в данном случае – критерия выбора по среднему геометрическому показателю. Для задач минимизации частных критериев лучшей альтернативе при таком подходе к оптимизации соответствует меньший показатель среднего геометрического значения соответствующих оценок.

Пусть, как и ранее, $\check{g}^{(k)}(\bar{x})$ обозначают модифицированные указанным образом частные критерии, показатели которых уже соответствуют новым «пересмотренным» оценкам для исходно заданных частных критериев. Тогда указанный модифицированный подход для критерия среднего геометрического к решению многокритериальной задачи минимизации частных критериев формализуется следующим образом. Для такой ситуации критериальную функцию выбора $F(\bar{x})$ менеджер определяет равенством:

$$F(\bar{x}) = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N \check{g}^{(i)}(\bar{x})} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N (g^{(i)}(\bar{x}) \cdot q_i^*(\bar{k}))},$$

где параметры $q_i^*(\bar{k})$ для $\bar{k}(UT)$ -преобразования определяются соотношениями (7.1) – (7.4). Точка минимума этой функции принимается в качестве оптимального решения. Если минимум достигается при двух или более альтернативных решениях (из допустимой области решений), то в качестве оптимального может быть выбрано любое из них. Проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето не требуется. Это обуславливается спецификой линий уровня критерия выбора по среднему геометрическому.

Процедуры $\bar{k}(UT)$ -модификации для критерия выбора по среднему геометрическому в формате дискретного множества альтернатив. Такие процедуры будут представлены следующими шагами (для задачи минимизации частных критериев).

Шаг 1. На начальном шаге уточняются конкретные значения для «коэффициентов доверия/важности» - (k_1, k_2, \dots, k_N). Их выбор зависит от опыта и системы предпочтений ЛПР.

Шаг 2. На этом шаге применительно к исходно заданным частным критериям и их оценкам для анализируемых альтернативных решений по формулам (7.1) - (7.4) реализуются требуемые $\bar{k}(UT)$ -процедуры модификации. В результате получают значения для новых «пересмотренных» оценок частных критериев. Для них выписывают новую модифицированную таблицу (см. формат табл. 7.2).

Шаг 3. Используя указанные «пересмотренные» оценки для исходно заданных частных критериев (формат новой модифицированной таблицы), реализуются процедуры критерия выбора на основе среднего геометрического показателя. Это означает, что к такой таблице дописывается дополнительный столбец. Его элементы определяются как средние геометрические показатели для элементов по соответствующим строкам новой модифицированной таблицы.

Шаг 4. По элементам такого дополнительного столбца новой модифицированной таблицы определяется наилучшее / оптимальное решение. Это – решение, которому соответствует наименьший показатель в указанном дополнительном столбце.

Шаг 5. Если наименьший показатель дополнительно столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них. Реализация процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето не требуется.

Параметры $q_i^*(\vec{k})$ в формате процедур $\vec{k}(УТ)$ -преобразований используются как множители для преобразования «исходных» оценок частных критериев в модифицированные оценки. Их произведение не будет зависеть от альтернатив, т.е. будет одинаковым для каждой строки новой модифицированной таблицы со значениями частных критериев. Обозначим такое произведение через Π :

$$\Pi = \prod_{i=1}^N q_i^*(\vec{k}).$$

Теперь обратим внимание на следующее. При нахождении показателя среднего геометрического для элементов каждой строки модифицированной таблицы с новыми значениями оценок по частным критериям легко обнаружить одну специфическую особенность. Она относится к результату сравнения оптимального выбора по среднему геометрическому в формате исходной и в формате новой модифицированной таблиц со значениями частных критериев. Показатели среднего геометрического для каждой строки таблицы с использованием $\vec{k}(УТ)$ -преобразований будут отличаться от аналогичных показателей соответствующей строки для таблицы без их использования только постоянным множителем. Это будет множитель $\sqrt[N]{\Pi}$. Он не зависит от анализируемого решения (т.е. не зависит от строки таблицы). Итак, переход от исходной таблицы с показателями частных критериев к модифицированной таблице на основе $\vec{k}(УТ)$ -преобразований изменяет показатели среднего геометрического для всех альтернатив одинаково: они умножаются на одно и то же число. Таким образом, мы установили следующий факт.

Предварительная реализация процедур $\vec{k}(УТ)$ -преобразований не изменит оптимального решения, если критерий выбора основан на использовании среднего геометрического показателя. Такой выбор будет совпадать с выбором по критерию среднего геометрического без анализируемой здесь модификации (т.е. без реализации процедур $k(УТ)$ -преобразований). Соответственно и линии уровня этих критериев в пространстве издержек/потерь будут совпадать. Здесь не будем приводить иллюстрацию таких линий, поскольку их специфика уже была представлена ранее (см. главу 3). Это - семейство гипербол, для которых в данной ситуации их центры симметрии будут расположены на линии, проходящей через УТ. Проиллюстрируем указанную специфику выбора и отмеченный выше факт отсутствия влияния процедур $\vec{k}(УТ)$ -преобразований на оптимальный выбор по среднему геометрическому следующим примером.

ПРИМЕР 7.9. Рассмотрим ситуацию, представленную ранее в примере 3.16 (см. также примеры 7.2 и 7.5), когда необходимо было выбрать один наилучший вариант из семи допустимых альтернатив (А, В, С, D, E, F и G) по организации поставок сырья. Множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями. Их оценки уже были приведены выше в таблице 7.5. В дополнительной строке указанной таблицы были представлены также координаты соответствующей утопической точки (они требуются для перехода к «пересмотренным» новым оценкам частных критериев).

Требуется: найти наилучшую альтернативу по методу среднего геометрического с учетом процедур $\vec{k}(УТ)$ -модификации. Пусть для удобства сравнения формат таких процедур в этой ситуации предполагает такие же параметры, как и в условии примеров 7.2, 7.5 и 7.7. Другими словами, считаем, что ЛПР выбирает следующие значения «коэффициентов доверия/важности»: $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$ и $k_4 = 3$.

РЕШЕНИЕ. Шаги 1-2. Напомним, что процедуры $\vec{k}(УТ)$ -модификации не зависят от формата критерия выбора. Поэтому такие процедуры будут полностью соответствовать тем процедурам, которые уже были представлены при решении примеров 7.2 и 7.5. Соответственно здесь их можно опустить. Результат таких процедур – новая модифицированная таблица с «пересмотренными» новыми оценками частных критериев. Они были приведены в табл. 7.4, 7.6 и 7.8.

Шаг 3. Воспользуемся указанными «пересмотренными» новыми оценками частных критериев для нахождения соответствующих показателей среднего геометрического в формате каждой анализируемой альтернативы. Результаты представлены в таблице 7.9.

Таблица 7.9.

Модифицированные оценки среднего геометрического при заданных «коэффициентах доверия».

Решения	Модифицированные оценки частных критериев				Показатель среднего геометрического
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	

A	$45 \cdot 0,1 = 4,5$	$27 \cdot 1/9 = 3,00$	$159 \cdot 1/122 = 1,30$	$29 \cdot 1/8 = 3,62$	$\sqrt[4]{4,5 \cdot 3,0 \cdot 1,3 \cdot 3,62} = 2,823$
B	$40 \cdot 0,1 = 4,0$	$34 \cdot 1/9 = 3,77$	$148 \cdot 1/122 = 1,21$	$28 \cdot 1/8 = 3,50$	$\sqrt[4]{4,0 \cdot 3,77 \cdot 1,21 \cdot 3,5} = 2,827$
C	$42 \cdot 0,1 = 4,2$	$35 \cdot 1/9 = 3,88$	$126 \cdot 1/122 = 1,03$	$24 \cdot 1/8 = 3,00$	$\sqrt[4]{4,2 \cdot 3,88 \cdot 1,03 \cdot 3,0} = 2,664$
D	$41 \cdot 0,1 = 4,1$	$34 \cdot 1/9 = 3,77$	$170 \cdot 1/122 = 1,39$	$28 \cdot 1/8 = 3,50$	$\sqrt[4]{4,1 \cdot 3,77 \cdot 1,39 \cdot 3,5} = 2,945$
E	$45 \cdot 0,1 = 4,5$	$35 \cdot 1/9 = 3,88$	$146 \cdot 1/122 = 1,19$	$26 \cdot 1/8 = 3,25$	$\sqrt[4]{4,5 \cdot 3,88 \cdot 1,19 \cdot 3,25} = 2,867$
F	$43 \cdot 0,1 = 4,3$	$32 \cdot 1/9 = 3,55$	$147 \cdot 1/122 = 1,20$	$27 \cdot 1/8 = 3,37$	$\sqrt[4]{4,3 \cdot 3,55 \cdot 1,2 \cdot 3,37} = 2,803$
G	$42 \cdot 0,1 = 4,2$	$36 \cdot 1/9 = 4,00$	$122 \cdot 1/122 = 1,00$	$25 \cdot 1/8 = 3,12$	$\sqrt[4]{4,2 \cdot 4,0 \cdot 1,0 \cdot 3,12} = 2,691$

Формат таблицы 7.9 предусматривает, что к ее столбцам со значениями новых «пересмотренных» оценок $\tilde{g}^{(k)}$ для частных критериев уже приписан дополнительный столбец. В нем представлен показатель среднего геометрического для элементов каждой строки такой таблицы.

Шаг 4. Из всех элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. В рассматриваемой ситуации он равен 2,664 (выделен в таблице) и соответствует альтернативе С (по строке таблицы).

Шаг 5. Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива С будет принята в качестве наилучшей/оптимальной для организации соответствующих поставок сырья применительно к анализируемому звену цепи поставок в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации по $\vec{k}(VT)$ -модифицированному критерию среднего геометрического.

Такое же оптимальное решение в этой ситуации дает критерий выбора по методу среднего геометрического без всякой модификации, т.е. без предварительной реализации $\vec{k}(VT)$ -модификации (сравните с оптимальным выбором при решении примера 3.13 в главе 3).

Сравнивая для каждой рассматриваемой альтернативы показатели среднего геометрического, которые были получены с использованием процедур $\vec{k}(VT)$ -модификации (табл. 7.9) и без использования указанных процедур (табл. 3.6), видим следующее. Все указанные показатели отличаются только на постоянный множитель. Этот множитель не зависит от альтернативного решения (т.е. не зависит от строки таблицы). Именно это и обусловило совпадение результатов оптимизации для критерия выбора по среднему геометрическому и его модификации на основе процедур $\vec{k}(VT)$ -преобразований. Кстати, подчеркнем, что в этом примере указанный выше множитель Π определяется равенством $\Pi = \sqrt[4]{1/10 \cdot 9 \cdot 122 \cdot 8} = 0,058087$ (проверьте это самостоятельно).

Как видим, рассмотренные в этом параграфе процедуры $\vec{k}(VT)$ -преобразований не влияют на оптимальное решение, если в основе критерия выбора лежит показатель среднего геометрического. Таким образом, формат таких преобразований может быть интересен менеджеру только применительно к модифицированному критерию среднего геометрического, обуславливающему, как уже было отмечено в главе 3, специальную выпуклость линий уровня соответствующего критерия выбора.

7.6. Алгоритм $\vec{k}(VT)$ -преобразования для модифицированного критерия среднего геометрического

Рассмотрим особенности реализации и специфику выбора оптимального решения в формате процедур $\vec{k}(VT)$ -преобразования, если в качестве критерия выбора менеджер будет использовать модифицированный критерий среднего геометрического. Такой подход используют в ситуации, когда требуется изменить выпуклость линий уровня критерия выбора, представленных семейством гипербол. Направляющая для линий уровня критерия будет сориентирована на точку AUT_{mod} или на точку $AUT(mod)$ в пространстве значений частных критериев (см. главу 3). Это достигается за счет введения специальных оценок для «выигрышей» по каждому частному критерию. Показатель среднего геометрического ищется для таких «выигрышей» по частным критериям. Формат $\vec{k}(VT)$ -преобразования дополнительно потребует «переоценки» указанных выигрышей. Это реализуется с учетом задаваемых компонент вектора $\vec{k}(VT) =$

(k_1, k_2, \dots, k_N) . Критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ для модифицированного критерия среднего геометрического с учетом $\vec{k}(UT)$ -преобразования вводится следующим образом.

I. Модификация на основе АУТ_{mod} :

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N (1 + k_i \cdot g_{\max}^{(i)} - k_i \cdot g^{(i)}(\vec{x}))},$$

где $g_{\max}^{(i)} = \max_{x \in X} \{g^{(i)}(\vec{x})\}$, т.е. это – наилучшее значение по i -му частному критерию в множестве анализируемых альтернатив.

II. Модификация на основе АУТ(mod) :

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N (1 + \max\{k_i \cdot g_{\max}^{(i)}\} - k_i \cdot g^{(i)}(\vec{x}))}.$$

Точка максимума такой функции принимается в качестве оптимального решения. Если максимальное значение указанной критериальной функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения и в этом случае может быть выбрано любое из решений, представленных такими точками. Все они будут оптимальными по Парето.

Процедуры $\vec{k}(UT)$ -преобразований для модифицированного критерия выбора по среднему геометрическому в формате дискретного множества альтернатив. Указанные процедуры будут следующими (для задачи минимизации частных критериев).

Шаг 1. На начальном шаге уточняются конкретные значения для «коэффициентов доверия/важности» - (k_1, k_2, \dots, k_N) .

Шаг 2. Оценки частных критериев требуется пересмотреть: по формулам (7.1) - (7.4) реализуются требуемые $\vec{k}(UT)$ -процедуры. Значения «пересмотренных» оценок частных критериев представляют специальной таблицей, - см. табл. 7.2.

Шаг 3. От таблицы с пересмотренными оценками частных критериев переходим к таблице, которая представляет показатели выигрышей (для пересмотренных оценок) относительно модифицированной антиутопической точки (точка АУТ_{mod} или точка АУТ(mod)) в пространстве издержек / потерь.

Шаг 4. На основе оценок для указанных выигрышей реализуем процедуры выбора по критерию среднего геометрического: к такой таблице дописывается дополнительный столбец. Его элементы определяются как средние геометрические показатели для элементов по строкам указанной таблицы.

Шаг 5. По элементам такого дополнительного определяется наилучшее / оптимальное решение. Это – решение, которому соответствует наибольший показатель в указанном дополнительном столбце (наибольший – т.к. анализируются выигрыши).

Шаг 6. Если наибольший показатель дополнительно столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них. Реализация процедур проверки выбираемого решения на оптимальность по Парето не требуется.

ПРИМЕР 7.10. Вернемся к условию примера 7.9, когда выбирается наилучший вариант из семи допустимых альтернатив (А, В, С, D, Е, F и G) по организации поставок сырья. При этом множество частных критериев задано четырьмя критериями. Оценки частных критериев были приведены в таблице 7.5. Требуется: найти наилучшую альтернативу по модифицированному методу среднего геометрического с учетом предварительных процедур $\vec{k}(UT)$ -модификации. Пусть для удобства сравнения формат таких процедур в этой ситуации предполагает такие же параметры, как и в условии примеров 7.2, 7.5 и 7.7. Другими словами, считаем, что ЛПР выбирает следующие значения «коэффициентов доверия/важности»: $k_1 = 4, k_2 = 3, k_3 = 1$ и $k_4 = 3$.

РЕШЕНИЕ. *Шаги 1-2.* Процедуры $\vec{k}(UT)$ -модификации не зависят от формата критерия выбора. Они будут полностью соответствовать тем процедурам, которые были представлены при решении примеров 7.2 и 7.5. Здесь их опускаем. Результат таких процедур – новая модифицированная таблица с «пересмотренными» оценками частных критериев. Они были приведены в табл. 7.4, 7.6 и 7.8.

Шаг 3. На основе указанных пересмотренных оценок частных критериев находим показатели выигрышей относительно модифицированной антиутопической точки (точка АУТ_{mod} или точка АУТ(mod)). Координаты модифицированных антиутопических точек приведены ниже:

АУТ _{mod}	4,50	4,00	1,39	3,62
АУТ(mod)	4,50	4,50	4,50	4,50

Показатели выигрышей представлены в таблицах 7.10 и 7.11.

Шаг 4. Для пересмотренных оценок «выигрышей» находим показатель среднего геометрического (см. дополнительный столбец в таб. 7.10 и 7.11).

Шаг 5. По наибольшему показателю дополнительного столбца находим оптимальное решение. В формате модифицированного критерия среднего геометрического, который обусловлен точкой АУТ_{mod}, наилучший показатель (он равен 1,47 и выделен в дополнительном столбце табл. 7.10) соответствует альтернативе С. Она и будет оптимальной по рассматриваемому критерию (при модификации АУТ_{mod}). В формате модифицированного критерия среднего геометрического, который обусловлен точкой АУТ(mod), наилучший показатель (он равен 2,202 и выделен в дополнительном столбце табл. 7.11) также соответствует альтернативе С. Она будет оптимальной по рассматриваемому критерию и при модификации АУТ(mod).

Таблица 7.10.

Показатели «выигрышей» и оптимальный выбор с учетом $\vec{k}(УТ)$ -преобразований по модифицированному критерию среднего геометрического (формат АУТ_{mod})

Решения	«Выигрыши» относительно АУТ _{mod} для пересмотренных оценок частных критериев				Показатель среднего геометрического
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	
A	1,0	2,00	1,09	1,00	$\sqrt[4]{1,0 \cdot 2,00 \cdot 1,09 \cdot 1,00} = 1,215$
B	1,5	1,23	1,18	1,12	$\sqrt[4]{1,5 \cdot 1,23 \cdot 1,18 \cdot 1,12} = 1,300$
C	1,3	1,12	1,36	1,62	$\sqrt[4]{1,3 \cdot 1,12 \cdot 1,36 \cdot 1,62} = \mathbf{1,470}$
D	1,4	1,23	1,00	1,12	$\sqrt[4]{1,4 \cdot 1,23 \cdot 1,00 \cdot 1,12} = 1,178$
E	1,0	1,12	1,20	1,37	$\sqrt[4]{1,0 \cdot 1,12 \cdot 1,20 \cdot 1,37} = 1,165$
F	1,2	1,45	1,19	1,25	$\sqrt[4]{1,2 \cdot 1,45 \cdot 1,19 \cdot 1,25} = 1,247$
G	1,3	1,00	1,39	1,50	$\sqrt[4]{1,3 \cdot 1,00 \cdot 1,39 \cdot 1,50} = 1,283$

Таблица 7.11.

Показатели «выигрышей» и оптимальный выбор с учетом $\vec{k}(УТ)$ -преобразований по модифицированному критерию среднего геометрического (формат АУТ(mod))

Решения	«Выигрыши» относительно АУТ(mod) для пересмотренных оценок частных критериев				Показатель среднего геометрического
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	
A	1,0	2,50	4,20	1,88	$\sqrt[4]{1,0 \cdot 2,50 \cdot 4,20 \cdot 1,88} = 2,108$
B	1,5	1,73	4,29	2,00	$\sqrt[4]{1,5 \cdot 1,73 \cdot 4,29 \cdot 2,00} = 2,172$
C	1,3	1,62	4,47	2,50	$\sqrt[4]{1,3 \cdot 1,62 \cdot 4,47 \cdot 2,50} = \mathbf{2,202}$
D	1,4	1,73	4,11	2,00	$\sqrt[4]{1,4 \cdot 1,73 \cdot 4,11 \cdot 2,00} = 2,112$
E	1,0	1,62	4,31	2,25	$\sqrt[4]{1,0 \cdot 1,62 \cdot 4,31 \cdot 2,25} = 1,991$
F	1,2	1,95	4,30	2,13	$\sqrt[4]{1,2 \cdot 1,95 \cdot 4,30 \cdot 2,13} = 2,152$
G	1,3	1,50	4,50	2,38	$\sqrt[4]{1,3 \cdot 1,50 \cdot 4,50 \cdot 2,38} = 2,138$

Оптимальным решением при обеих модификациях (на основе точки АУТ_{mod} или точки АУТ(mod)) оказалась альтернатива С. Это совпадение - случайное. Оно обусловливается конкретными цифровыми значениями показателей частных критериев в этой задаче многокритериальной оптимизации. Обратите внимание на то, что даже в этом примере ранжирование альтернатив для указанных модификаций уже различается. Рассматриваемые альтернативы ранжируются (в порядке убывания предпочтения) следующим образом:

- модификация АУТ_{mod} - C; B; G; F; A; D; E,
- модификация АУТ(mod) - C; B; F; G; D; A; E.

Как видим, представленный инструмент модификации критериев выбора открывает для менеджера новые возможности адаптации оптимального решения к предпочтениям ЛПП.

ВОПРОСЫ (по материалам главы 7).

11. Какие возможности для менеджера дают процедуры изменения ориентации направляющей для линий уровня критерия выбора в пространстве значений частных критериев (на основе представленных в этой главе процедур $\vec{k}(UT)$ -преобразований)?

12. Какие процедуры позволяют формализовать указанное изменение наклона направляющей для линий уровня критерия выбор? В частности, отметьте, какие изменения наклона для такой направляющей будут иметь место, если задать коэффициенты важности или «коэффициенты доверия» к оценкам частных критериев.

13. Представьте специфику процедур управления наклоном такой направляющей:

- без учета «коэффициентов доверия»;
- с учетом таких коэффициентов.

14. Как формализуется алгоритм $\vec{k}(UT)$ -преобразования для минимаксного критерия? Как модифицируются его линии уровня при таком преобразовании в пространстве издержек/потерь (при минимизации частных критериев)?

15. В чем состоит специфика процедур $\vec{k}(UT)$ -преобразований в формате подхода критерия Гурвица? проиллюстрируйте их применительно к ситуации, когда множество анализируемых альтернатив является дискретным.

16. Уточните особенности алгоритма $\vec{k}(UT)$ -преобразования для критерия выбора по методу идеальной точки.

17. Какова специфика линий уровня для $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия идеальной точки (в пространстве значений частных критериев)? Уточните их особенности и отличия по отношению к линиям уровня этого же критерия, но в формате процедур $\gamma(UT)$ -преобразований, которые были представлены в предыдущей главе.

18. Какие особенности будут иметь место в формате процедур $\vec{k}(UT)$ -преобразования для метода взвешенной суммы оценок частных критериев? Позволяют ли такие преобразования расширить инструментарий менеджера для лучшей адаптации выбора к предпочтениям ЛПП?

19. Какие критерии выбора (в формате прямых методов решения задач многокритериальной оптимизации) обладают свойством инвариантности относительно процедур $\vec{k}(UT)$ -преобразований?

20. Изменится ли выбор по методу среднего геометрического, если для его модификации использовать процедуры $\vec{k}(UT)$ -преобразования? Приведите соответствующие интерпретации применительно к задачам многокритериальной оптимизации систем логистики.

ГЛАВА 8

ИЛЛЮСТРАЦИИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С УЧЕТОМ РИСКА

8.1. Традиционный формат критериев выбора прямого типа в приложениях к задаче оптимизации места дислокации и формы собственности склада

Задача выбора места дислокации склада и формы его собственности является одной из наиболее актуальных в логистике при формировании сети распределения и определении основных ее параметров [Дыбская В.В., Сергеев В.И.]. Несмотря на ее важность и востребованность, проблема структурной оптимизации в цепях и сетях поставок остается сложной, отнимающей внимание и усилия менеджеров из-за многообразия схем и технологий доставки, разнообразия форм собственности и требований к помещениям и условиям хранения товаров. Атрибуты альтернатив, относящиеся к выбору места дислокации склада, обусловят разные распределения издержек/потерь и соответствующих рисков. Это же относится и к атрибутам альтернатив, относящимся к выбору одной из форм собственности склада: собственный склад; арендуемый склад; склад общего пользования.

Выбор конкретной формы собственности склада может зависеть от логистических процессов фирмы. В частности, как показано в [Дыбская В.В.], строительство собственного склада может быть обусловлено высоким и стабильным товарооборотом и устойчивым спросом в регионе сбыта, возрастающими требованиями к обслуживанию клиентов и специфическими условиями хранения. Стратегия складирования запасов на собственном складе имеет следующие преимущества [Дыбская В.В.] : высокая степень контроля процесса грузопереработки, высокая скорость адаптации к изменениям спроса и требований обслуживания клиентов, более высокий уровень интеграции логистической системы, обеспечение специальных условий хранения и предпродажной подготовки товара, осуществление любого уровня комплектации заказа и др. В то же время стратегия складирования запасов на складе логистического посредника (арендуемый склад или СОП) также имеет свои преимущества. Они обуславливаются переносом финансовых рисков и прямых потерь при складировании на посредника, высоким уровнем мобильности при покрытии потребностей в складских мощностях при изменениях спроса, отсутствием инвестиций в развитие складских мощностей и технологий и др. При этом для каждой формы собственности характерны и свои риски. Собственный склад требует значительных финансовых вложений и с ним связаны риски недостаточной гибкости сети при возможных изменениях ее конфигурации. Склад общего пользования (СОП) имеет риск недостаточного качества предоставляемых услуг. Для арендуемого склада характерен риск возможного изменения арендной платы, а также риск ухудшения качества технологического процесса грузопереработки в связи с ограничениями арендодателя.

С учетом, как преимуществ, так и рисков при реализации указанных стратегий складирования задача выбора места дислокации и формы собственности склада может быть представлена как многокритериальная задача оптимизации. При выборе наилучшего решения лицо, принимающее решение (далее ЛПР), может руководствоваться различными критериями. Соответственно задача выбора места дислокации и формы собственности склада может рассматриваться как задача многокритериальной оптимизации.

Для анализа рисков в формате такой задачи среди частных критериев менеджер формализует критерии, позволяющие учитывать требуемые рамками модели факторы риска. В представленной здесь модели ограничимся случаем, когда учет факторов риска реализуется в формате концепции чистых или производственных рисков. Напомним, что при таком подходе к учету риска ЛПР считает приемлемым ограничиться анализом только одного параметра для каждого фактора риска: средних ожидаемых потерь, обуславливаемых соответствующим риском. Другими словами, в рассматриваемой ниже модели принимается, что при управлении рисками ЛПР ориентируется на так называемый критерий EVC (expected value criterion – критерий ожидаемого значения), - см., например, [Бродецкий Г.Л., 2006г.]. При этом частные критерии, учитывающие требуемые факторы риска будут представлены показателями соответствующих средних ожидаемых потерь, обуславливаемых анализируемыми рисками.

Далее для иллюстрации рассматривается оптимизационная модель дислокации, которая относится к моделям выбора из заданных точек размещения на основе сравнения комплексов ключевых показателей эффективности возможных вариантов. При формализации модели учитываются показатели следующих частных критериев:

- K_1 - совокупные (капитальные и эксплуатационные) затраты на складирование и грузопереработку;
- K_2 - транспортные затраты;
- K_3 - качество складского сервиса;
- K_4 - средние ожидаемые прямые потери при складировании и грузопереработке;
- K_5 - средние ожидаемые потери при транспортировке.

(в общем случае формат задачи оптимизации рассматриваемого типа позволяет учитывать произвольное число частных критериев).

При этом структура показателей частных критериев $K_1 - K_3$ определяется ЛПР. Показатели частных критериев K_4-K_5 характеризуют соответствующие риски. В формате EVC критерия они формируются на основе статистических данных по формулам теории вероятностей (представляют собой математические ожидания указанных потерь). При формализации таких показателей менеджер должен учитывать соответствующую специфику страховых контрактов и/или контрактных условий хранения. Из-за ограниченности объема книги указанные показатели будут приведены без дополнительных комментариев и уточнений (соответствующие рекомендации представлены, например, в статье Ануреев А.Е., Бродецкий Г.Л. «Выбор страхового контракта при управлении логистическим рисками»/ В кн. «Логистика. Практическая энциклопедия» -М.: МЦФЭР, 2007).

Менеджеру требуется минимизировать показатели указанных частных критериев (кроме показателя качественного частного критерия K_3 , который необходимо максимизировать). Чтобы упростить изложение и сделать его единообразным, указанный частный критерий K_3 будет ниже модифицирован. Он будет преобразован к специальному виду таким образом, чтобы его оптимизация также подразумевала минимизацию соответствующего модифицированного показателя.

Как уже отмечалось выше, различные ЛПР даже в формате одной и той же задачи многокритериальной оптимизации применительно к отдельному звену цепи поставок могут предпочесть разные решения в качестве оптимальных. Для повышения эффективности цепей поставок им нужны «гибкие» инструменты указанного типа. Чем большим будет арсенал средств менеджера для обоснования наилучшего решения, тем более эффективным может быть выбор. В этом параграфе будут рассмотрены возможности оптимизации решений на основе традиционных критериев выбора (прямого типа). В следующем будут представлены решения на основе новых (см. главы 6 и 7) подходов и методов модификации для таких критериев, чтобы обеспечить лучшую их адаптацию к предпочтениям ЛПР. Представленные в п.8.1 алгоритмы оптимизации реализованы совместно с Гусевым Д.А.

Атрибуты модели многокритериальной оптимизации. Для некоторого сегмента распределительной сети анализируются варианты размещения склада одной из трех указанных выше форм собственности. При этом в качестве атрибутов альтернатив, относящихся к выбору места дислокации склада рассматриваются четыре города (A, B, C и D). Требуется выбрать одну из двенадцати альтернатив (они обозначены буквами соответствующих городов, причем нижний индекс указывает на форму собственности):

A_1 – приобретение склада в городе A;

A_2 – аренда складских мощностей в городе A;

A_3 – использование склада общего пользования (СОП) в городе A;

B_1 – приобретение склада в городе B;

B_2 – аренда складских мощностей в городе B;

B_3 – использование СОП в городе B;

аналогично задаются альтернативы $C_1 - C_3$ и альтернативы $D_1 - D_3$.

Для сравнения альтернатив по разным частным критериям менеджер в формате многокритериальной оптимизационной задачи использует агрегированные показатели затрат (как показатели соответствующих критериев). Применительно к рассматриваемой в этом параграфе оптимизационной модели такие показатели уже формализованы и сведены в табл.1 (это – условные показатели, поскольку такие данные обычно конфиденциальные). Такие показатели являются основой для реализации сравнений с учетом отношения ЛПР к уровню ожидаемых затрат/потерь.

Таблица 8.1.

Показатели альтернатив (тыс. у.е)					
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
A_1	200	50	B	7	15
A_2	100	50	C	17	15
A_3	100	50	B	15	15
B_1	300	40	A	3	10
B_2	70	40	C	20	10
B_3	90	40	B	14	10
C_1	230	60	C	25	13
C_2	80	60	C	4	13
C_3	60	60	B	14	13
D_1	180	70	B	8	12
D_2	50	70	B	13	12
D_3	60	70	B	10	12

Показатели частного критерия K_3 представлены рейтинговыми оценками, основанными на шкале, которая приведена в табл. 8.2. Как уже отмечалось выше, в формате задач многокритериальной оптимизации удобно перевести показатели качественного частного критерия K_3 в значения порядковой

шкалы, поставив в соответствие каждой рейтинговой оценке качества складского сервиса – сопутствующие средние ожидаемые косвенные потери. Их структура и порядок будут зависеть от системы предпочтений ЛПР и специфики рассматриваемых логистических процессов. В формате рассматриваемой оптимизационной модели соответствующие показатели (уже с учетом таких особенностей) представлены в табл.8. 2.

Таблица 8.2.

Шкала оценка качества складского сервиса и сопутствующих потерь.		
Рейтинг	Обозначение	Оценка средних ожидаемых потерь, тыс. у.е
Высший	A	1
Отличный	B	50
Хороший	C	150
Удовлетворительный	D	300
Неудовлетворительный	E	1000

Соответственно, значения частных критериев, представляющие соответствующие потери / затраты для анализируемых альтернатив приведены в табл. 8.3. Подчеркнем, что теперь все частные критерии минимизируются. Это позволяет при оптимизации использовать представленные в предыдущих главах алгоритмы.

Таблица 8.3.

Потери / затраты для альтернатив (тыс. у.е)					
	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅
A ₁	200	50	50	7	15
A ₂	100	50	150	17	15
A ₃	100	50	50	15	15
B ₁	300	40	1	3	10
B ₂	70	40	150	20	10
B ₃	90	40	50	14	10
C ₁	230	60	150	25	13
C ₂	80	60	150	4	13
C ₃	60	60	50	14	13
D ₁	180	70	50	8	12
D ₂	50	70	50	13	12
D ₃	60	70	50	10	12

Обратим внимание на то, что абсолютного решения (минимизирующего одновременно все критериальные функции) в формате рассматриваемой ситуации нет. Кроме того, альтернатива B₃ доминирует альтернативы A₂ и A₃, а альтернатива C₃ доминирует альтернативу C₁. Соответственно девять из анализируемых альтернатив (это - альтернативы A₁, B₁ – B₃, C₂ – C₃, D₁ – D₃) являются Парето-оптимальными. Таким образом, любое из указанных оптимальных по Парето решений в формате такой задачи оптимизации может быть принято в качестве наилучшего (в определенном смысле и для определенного ЛПР). Альтернативы A₂, A₃, и C₁, которые не являются оптимальными по Парето (они выделены в табл. 8.3), могут быть заведомо отброшены при нахождении оптимального решения. Для компактности изложения это будет сделано в последующих таблицах этой главы.

Далее будут представлены процедуры выбора наилучшей альтернативы на основе традиционных методов оптимизации прямого типа. Требуемый формат учета рисков уже обеспечен при формализации частных критериев.

Метод минимаксного критерия. Для каждой альтернативы выделяем наибольший показатель потерь по всем частным критериям. На его основе определяем наилучшее решение. Оно соответствует наименьшему из показателей указанного типа. Требуемые процедуры представлены в табл. 8.4.

Таблица 8.4.

Выбор наилучшего решения по минимаксному критерию						
	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	Показатель минимаксного критерия
A ₁	200	50	50	7	15	200
B ₁	300	40	1	3	10	300
B ₂	70	40	150	20	10	150
B ₃	90	40	50	14	10	90

C_2	80	60	150	4	13	150
C_3	60	60	50	14	13	60
D_1	180	70	50	8	12	180
D_2	50	70	50	13	12	70
D_3	60	70	50	10	12	70

Наибольший показатель потерь для альтернативы A_1 (по критериям $K_1 - K_5$) составляет 200. Он и будет выделен для этой альтернативы в дополнительном столбце. Для альтернативы A_2 такой показатель составляет 150 и т.д. Наименьшее значение показателя дополнительного столбца (оно равно 60 и выделено в табл. 4) соответствует альтернативе C_3 . По минимаксному критерию наилучшим решением будет использование СОП в городе С.

Метод обобщенного минимаксного критерия. При таком подходе показатели частных критериев в алгоритме минимаксного критерия менеджер учитывает с конкретными «весами». Указанные веса c_i устанавливаются таким образом, чтобы семейство линий уровня критерия выбора оказалось «нацеленным» на утопическую точку поля издержек/потерь. Такие веса определяют по формулам $c_i = 1/g_{\min}(C_i)$, где $g_{\min}(C_i)$ – показатель минимального значения i -го частного критерия по всем анализируемым альтернативам. В качестве наилучшей принимается альтернатива с наименьшим значением критериальной функции минимаксного критерия с учетом указанной особенности. Для реализации такого подхода к решению задачи многокритериальной оптимизации сначала в табл. 8.5 представим показатели $g_{\min}(C_i)$ для каждого из критериев.

Таблица 8.5.
Наилучшие показатели частных критериев

Критерии	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Показатели $g_{\min}(C_i)$	50	40	1	3	10

Определим значения критериальной функции выбора. Например, для A_1 значение такой функции в формате минимаксного критерия (но уже с учетом указанных весов) составит:

$$\max\left\{\frac{200}{50}, \frac{50}{40}, \frac{50}{1}, \frac{7}{3}, \frac{15}{10}\right\} = 50.$$

Оно записано в отдельном столбце табл. 8.6. Значения для остальных альтернатив вычисляются аналогично. Они сведены в табл. 8.6, где указан и выбор по обобщенному минимаксному критерию.

Таблица 8.6.

Выбор по обобщенному минимаксному критерию

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	Значения функции выбора
A_1	200	50	50	7	15	50
B_1	300	40	1	3	10	6
B_2	70	40	150	20	10	150
B_3	90	40	50	14	10	50
C_2	80	60	150	4	13	150
C_3	60	60	50	14	13	50
D_1	180	70	50	8	12	50
D_2	50	70	50	13	12	50
D_3	60	70	50	10	12	50
Показатели $g_{\min}(C_i)$	50	40	1	3	10	

Наименьшее значение функции выбора (оно составляет 6 и выделено в табл. 8.6) соответствует альтернативе B_1 . По методу обобщенного минимаксного критерия наилучшим решением является строительство собственного склада в городе В. Подчеркнем, что выбор наилучшей альтернативы по обобщенному минимаксному критерию не совпадает с выбором по минимаксному критерию.

Метод взвешенных оценок частных критериев. При использовании такого метода наилучшей является альтернатива с наименьшим средневзвешенным показателем по оценкам всех частных критериев. В формате рассматриваемой оптимизационной модели принято, что ЛПП задает указанные «веса» следующим образом. Для частного критерия K_1 указанный вес составляет $c_1=0,1$; для частного критерия K_2 такой вес составляет $c_2=0,2$; для частного критерия K_3 он составляет $c_3=0,3$; а для частных критериев K_4 и K_5 имеем $c_4=c_5=0,2$ (для наглядности эти веса представлены в последней строке табл. 8.7). Результаты расчетов и оптимальный выбор приведены в табл. 8.7.

Таблица 8.7

Выбор по методу взвешенной суммы оценок частных критериев

	K₁	K₂	K₃	K₄	K₅	Взвешенная сумма
A₁	200	50	50	7	15	49,4
B₁	300	40	1	3	10	40,9
B₂	70	40	150	20	10	66
B₃	90	40	50	14	10	36,8
C₂	80	60	150	4	13	68,4
C₃	60	60	50	14	13	38,4
D₁	180	70	50	8	12	51
D₂	50	70	50	13	12	39
D₃	60	70	50	10	12	39,4
Веса критериев	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	

Дополнительный столбец «Взвешенная сумма» представляет средние арифметические взвешенные показатели строк. Например, такая «взвешенная сумма» для A₁ составит:

$$200*0,1 + 50*0,2 + 50*0,3 + 7*0,2 + 15*0,2 = 49,4.$$

«Взвешенные суммы» для остальных альтернатив рассчитываются аналогично (см. табл. 8.7). Наименьший показатель «взвешенной суммы» (он равен 36,8 и выделен в указанной таблице) соответствует альтернативе B₃. Как видим, в формате метода взвешенной суммы оценок частных критериев наилучшим решением является использование СОП в городе В.

Метод обобщенного скалярного критерия. Характерным отличием такого метода от метода взвешенных оценок частных критериев является то, что веса частных критериев не задаются ЛПП. Менеджер определяет их непосредственно при вычислении обобщенной критериальной функции выбора $F(A_k)$. Воспользуемся для нее равенством

$$F(A_k) = \sum_{i=1}^n \frac{g(C_i^{(k)}) - g_{\min}(C_i)}{g_{\min}(C_i)}.$$

Здесь: $g(C_i^{(k)})$ – показатель i -го критерия для k -ой альтернативы; $g_{\min}(C_i)$ – показатель минимального значения i -го частного критерия по всем анализируемым альтернативам. В качестве наилучшей принимается альтернатива с наименьшим значением указанной критериальной функции. Напомним, что особенностью данного метода, как и метода обобщенного минимаксного критерия, является ориентация направляющей для линий уровня критерия выбора на утопическую точку (соответствующего поля издержек / потерь). Другими словами, «прицел» в формате такого критерия устанавливается менеджером на наилучшие показатели частных критериев.

Для реализации метода сначала определяем показатели «весов» $1/g_{\min}(C_i)$ для каждого из критериев. Величины $g_{\min}(C_i)$ уже были представлены в табл. 8.5. Зная их, определим соответствующие значения критериальной функции выбора. Например, для A₁ значение указанной функции составит:

$$F(A_1) = \frac{200 - 50}{50} + \frac{50 - 40}{40} + \frac{50 - 1}{1} + \frac{7 - 3}{3} + \frac{15 - 10}{10} = 54,08.$$

Это значение записывается в отдельный столбец табл. 8.8 для альтернативы A₁. Соответствующие значения функции выбора для остальных альтернатив вычисляются аналогично. Они сведены в табл. 8.8, где указан выбор по обобщенному скалярному критерию.

Таблица 8.8.

Выбор по обобщенному скалярному критерию

	K₁	K₂	K₃	K₄	K₅	Значения функции выбора
A₁	200	50	50	7	15	54,08
B₁	300	40	1	3	10	5,00
B₂	70	40	150	20	10	155,07
B₃	90	40	50	14	10	53,47
C₂	80	60	150	4	13	150,73
C₃	60	60	50	14	13	53,67
D₁	180	70	50	8	12	54,22
D₂	50	70	50	13	12	53,28
D₃	60	70	50	10	12	52,48
Показатели $g_{\min}(C_i)$	50	40	1	3	10	

Наименьшее значение функции выбора (равно 5,00 и выделено в табл. 8.8) соответствует альтернативе В₁. По методу минимизации обобщенного скалярного критерия наилучшим решением является строительство собственного склада в городе В.

Метод критерия среднего геометрического. В формате такого подхода к решению задачи многокритериальной оптимизации каждой альтернативе менеджер сопоставляет показатель, который является средним геометрическим по значениям всех частных критериев для этой альтернативы. Наилучшее решение соответствует альтернативе с наименьшим из показателей указанного типа. Выбор не изменится, если вместо указанного показателя менеджер будет использовать показатель произведения всех значений частных критериев для каждой альтернативы. Соответственно такой критерий выбора называют также критерием произведений. Требуемые процедуры представлены в табл. 8.9.

Таблица 8.9.

Выбор наилучшего решения по критерию среднего геометрического

	К ₁	К ₂	К ₃	К ₄	К ₅	Показатель критерия произведений
A ₁	200	50	50	7	15	525·10 ⁵
B₁	300	40	1	3	10	3,6·10⁵
B ₂	70	40	150	20	10	840·10 ⁵
B ₃	90	40	50	14	10	252·10 ⁵
C ₂	80	60	150	4	13	374,4·10 ⁵
C ₃	60	60	50	14	13	327,6·10 ⁵
D ₁	180	70	50	8	12	604,8·10 ⁵
D ₂	50	70	50	13	12	273·10 ⁵
D ₃	60	70	50	10	12	252·10 ⁵

Наименьшее значение показателя критерия выбора по критерию произведений (оно равно 3,6·10⁵ и выделено в табл. 8.9) соответствует альтернативе В₁. По минимаксному критерию наилучшим решением будет строительство собственного склада в городе В.

Метод идеальной точки. В формате рассматриваемой модели координатами утопической точки являются наилучшие показатели по столбцам табл. 3: УТ = (50; 40; 1; 3; 10). «Расстояние» от альтернативы до утопической точки в n-мерном пространстве вычисляется по известным формулам линейной алгебры. Это – корень квадратный из суммы квадратов разностей координат для УТ и анализируемой альтернативы. В частности, расстояние от УТ до А₁ находим следующим образом:

$$\sqrt{(200 - 50)^2 + (50 - 40)^2 + (50 - 1)^2 + (7 - 3)^2 + (15 - 10)^2} = 158,25$$

«Расстояния» от остальных альтернатив до УТ вычисляются аналогично и представлены в табл. 8.10.

Таблица 8.10.

Выбор наилучшего решения по методу утопической точки

	К ₁	К ₂	К ₃	К ₄	К ₅	Расстояние до УТ
A ₁	200	50	50	7	15	158,25
B ₁	300	40	1	3	10	250,00
B ₂	70	40	150	20	10	151,29
B ₃	90	40	50	14	10	64,20
C ₂	80	60	150	4	13	153,33
C ₃	60	60	50	14	13	55,05
D ₁	180	70	50	8	12	142,23
D ₂	50	70	50	13	12	58,35
D ₃	60	70	50	10	12	58,77
УТ	50	40	1	3	10	

Наименьшее расстояние до УТ равно 55,05 (выделено в табл. 8.10) и соответствует альтернативе С₃. По методу идеальной точки наилучшим решением будет использование СОП в городе С.

В заключение подчеркнем следующее. Реализованный в этом параграфе арсенал критериев выбора применительно к формату представленной оптимизационной модели (дислокации и выбора формы собственности склада) из заданного множества девяти оптимальных по Парето альтернативных решений позволит менеджеру выбрать только следующие три альтернативы: В₁, В₃ и С₃. Как видим, классический подход многокритериальной оптимизации на основе прямых методов не даст менеджеру возможность обосновать выбор (в качестве оптимальной) шести из девяти альтернатив, оптимальных по Парето. Следовательно, у менеджера в такой ситуации возникнут трудности с обоснованием выбора любой из них в качестве наилучшей (если это понадобится, например, с учетом предпочтений ЛПР). Обратим внимание на то, какие возможности остаются у менеджера, чтобы адаптировать выбор оптимального решения к предпочтениям ЛПР в такой ситуации в формате традиционных рекомендаций теории. Только метод

взвешенных оценок частных критериев позволит ему менять «веса» для частных критериев, чтобы изменить ситуацию. Убедитесь самостоятельно, что указанный подход все равно не позволит менеджеру выбрать любую желаемую ЛПР оптимальную по Парето альтернативу. В частности, проверьте самостоятельно, что оптимальные по Парето альтернативы A_1 и D_1 не могут быть выбраны в качестве оптимальных ни при каких критериях выбора указанного типа (при этом и ни при каких весовых коэффициентах в формате метода взвешенной суммы оценок частных критериев). В такой ситуации менеджеру понадобится более широкий арсенал средств обоснования наилучших решений, который будет более полно соответствовать системе предпочтений ЛПР. С такими средствами мы уже познакомились в гл. 6 – 7. Соответствующие иллюстрации для рассматриваемой оптимизационной модели будут даны в следующих двух параграфах.

8.2. Формат γ (УТ)-модифицированных критериев оптимизации для задачи выбора места дислокации и формы собственности склада

Продолжим иллюстрацию процедур многокритериальной оптимизации для задачи выбора места дислокации и формы собственности склада. В этом параграфе будут представлены γ (УТ)-модифицированные методы оптимизации на основе сдвига линий уровня к УТ, которые были формализованы в гл. 6. Они позволяют более эффективно адаптировать выбор наилучшего решения к предпочтениям ЛПР. Найдем оптимальное решение для указанной задачи в формате следующих критериев выбора: γ (УТ)-модифицированный минимаксный критерий; γ (УТ)-модифицированный критерий среднего геометрического; γ (УТ)-модифицированный критерий Гурвица. Напомним, что процедуры выбора по методу взвешенной суммы оценок частных критериев, по методу идеальной точки и по методу модифицированного критерия среднего геометрического - инвариантны относительно γ (УТ)-модификации. Поэтому их реализация и иллюстрация здесь не приводится (как было показано в гл. 6, они не расширяют арсенал средств менеджера для адаптации выбора к предпочтениям ЛПР).

Метод γ (УТ)-модифицированного минимаксного критерия. Этот подход к оптимизации требует реализации следующих шагов алгоритма нахождения наилучшего решения.

Шаг 1. Уточняется параметр $\gamma \in [0; 1]$. Пусть для определенности принято, что $\gamma=1$.

Шаг 2. Зная координаты УТ (см. табл. 8.5) находим наименьшую из координат такой точки. В рассматриваемой оптимизационной модели она составляет $a_{\gamma}^* = 1$. По формулам (6.1) главы 6 определяем показатели Δ_j^* для сдвигов по j -ой координатной оси в случае 100%-го формата сдвига:

$$\Delta_1^* = 50 - 1 = 49; \quad \Delta_2^* = 40 - 1 = 39; \quad \Delta_3^* = 1 - 1 = 0; \quad \Delta_4^* = 3 - 1 = 2; \quad \Delta_5^* = 10 - 1 = 9.$$

Поскольку $\gamma=1$, то для показателей $\Delta_j^*(\gamma)$ имеем те же значения: $\Delta_j^*(\gamma) = \Delta_j^*$. По формулам (6.1) – (6.3) вычисляем модифицированные оценки частных критериев. Эти процедуры приведены в табл. 8.11.

Таблица 8.11.

Выбор по γ (УТ)-модифицированному минимаксному критерию

Решения	Модифицированные оценки частных критериев:					Показатель критерия выбора
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	200-49=151	50-39=11	50-0=50	7-2=5	15-9=6	151
B_1	300-49=251	40-39=1	1-0=1	3-2=1	10-9=1	251
B_2	70-49=21	40-39=1	150-0=150	20-2=18	10-9=1	150
B_3	90-49=41	40-39=1	50-0=50	14-2=12	10-9=1	50
C_2	80-49=31	60-39=21	150-0=150	4-2=2	13-9=4	150
C_3	60-49=11	60-39=21	50-0=50	14-2=12	13-9=4	50
D_1	180-49=131	70-39=31	50-0=50	8-2=6	12-9=3	131
D_2	50-49=1	70-39=31	50-0=50	13-2=11	12-9=3	50
D_3	60-49=11	70-39=31	50-0=50	10-2=8	12-9=3	50

Шаг 3. В формате этих модифицированных оценок реализуем процедуры минимаксного критерия (см. последний столбец в табл. 8.11). Среди элементов указанного столбца выбираем наименьший. Он равен 50 (выделен в таблице). Оптимальным решением по γ (УТ)-модифицированному минимаксному критерию является выбор одной из следующих альтернатив (любой из них, т.к. все они оптимальны по Парето): $\{B_3; C_3; D_2; D_3\}$.

Сравните этот результат с выбором по традиционному варианту процедур минимаксного критерия (без γ (УТ)-модификации). С учетом процедур γ (УТ)-модификации возможности выбора для менеджера существенно расширились. В частности, имеющаяся теперь у него возможность выбора в качестве

наилучшего решения альтернатив D_2 и D_3 для рассматриваемой модели многокритериальной оптимизации раньше была проблемной (см. п. 8.1).

Метод γ (УТ)-модифицированного критерия среднего геометрического. Реализацию такого подхода представляют следующие шаги алгоритма оптимизации.

Шаги 1-2. Их реализация не зависит от формата критерия выбора. Результат зависит от заданного значения параметра $\gamma \in [0; 1]$. Пусть снова для определенности принято $\gamma=1$. Тогда модифицированные оценки частных критериев останутся такими же, как и в табл. 8.11.

Шаг 3. Находим наилучшее решение по γ (УТ)-модифицированному критерию среднего геометрического. Для каждой альтернативы, используя новые оценки частных критериев, достаточно определить показатель их произведений, - см. табл. 8.12.

Таблица 8.12.
Выбор по γ (УТ)-модифицированному критерию среднего геометрического

Решения	Модифицированные оценки частных критериев:					Показатель критерия выбора
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	151	11	50	5	6	$2,49 \cdot 10^6$
B_1	251	1	1	1	1	$2,51 \cdot 10^2$
B_2	21	1	150	18	1	$5,67 \cdot 10^4$
B_3	41	1	50	12	1	$2,46 \cdot 10^4$
C_2	31	21	150	2	4	$7,81 \cdot 10^5$
C_3	11	21	50	12	4	$5,54 \cdot 10^5$
D_1	131	31	50	6	3	$3,65 \cdot 10^6$
D_2	1	31	50	11	3	$5,11 \cdot 10^4$
D_3	11	31	50	8	3	$4,09 \cdot 10^5$

Показатели произведений для модифицированных оценок частных критериев приведены в дополнительном столбце табл. 8.12. Наименьший из них равен 251 (выделен в таблице). Он соответствует альтернативе B_1 . Она и является оптимальной по γ (УТ)-модифицированному критерию среднего геометрического (произведений). Этот выбор не совпадает с выбором по методу среднего геометрического без процедур по γ (УТ)-модификации (напомним, в п. 8.1 выбиралась альтернатива C_3).

Метод γ (УТ)-модифицированного критерия Гурвица. Пусть снова $\gamma=1$. Тогда шаги 1-2 можно не повторять: модифицированные оценки частных критериев соответствуют тем, которые приведены в табл. 8.11. Реализуем последующие шаги указанного алгоритма оптимизации (см. п. 6.3).

Шаг 3. К таблице с модифицированными оценками частных критериев припишем три столбца. Это – столбцы « $\text{Max} \{ \hat{g}^{(k)} \}$ »; « $\text{Min} \{ \hat{g}^{(k)} \}$ »; «Показатель критерия выбора». В третьем/последнем из них найдены средневзвешенные показатели для элементов первых двух приписанных столбцов с весами « c » и « $1-c$ » соответственно. Эти процедуры представлены в табл. 8.13 для случая $c=0,7$.

Таблица 8.13.
Выбор по γ (УТ)-модифицированному критерию Гурвица

Решения	Модифицированные оценки частных критериев:					$\text{Max} \{ \hat{g}^{(k)} \}$	$\text{Min} \{ \hat{g}^{(k)} \}$	Показатель критерия выбора
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5			
A_1	151	11	50	5	6	151	5	107,2
B_1	251	1	1	1	1	251	1	175,3
B_2	21	1	150	18	1	150	1	105,3
B_3	41	1	50	12	1	50	1	35,3
C_2	31	21	150	2	4	150	2	105,3
C_3	11	21	50	12	4	50	4	36,2
D_1	131	31	50	6	3	131	3	92,6
D_2	1	31	50	11	3	50	1	35,3
D_3	11	31	50	8	3	50	3	35,9

Минимальный элемент последнего столбца равен 35,3 (выделен в таблице). Оптимальными по γ (УТ)-модифицированному критерию Гурвица являются альтернативы B_3 и D_2 (они эквивалентны между собой в формате этого критерия и оптимальны по Парето). Кстати, они будут наилучшими по γ (УТ)-модифицированному критерию Гурвица при любом другом значении весового коэффициента $c \in (0; 1)$.

Снова можно отметить, что имеющаяся теперь для менеджера возможность обосновать выбор альтернативы D_2 , которая отсутствовала ранее для рассмотренной в п. 8.1 модели многокритериальной оптимизации (на основе традиционных методов оптимизации прямого типа), расширила арсенал средств менеджера для адаптации выбора к предпочтениям ЛППР.

8.3. Формат \vec{k} (УТ)-модифицированных критериев выбора для задачи оптимизации места дислокации и формы собственности склада

В этом параграфе для указанной задачи иллюстрируются $\vec{k}(УТ)$ -модифицированные методы многокритериальной оптимизации, формализованные в гл. 7. Они обусловят изменение ориентации для линий уровня критерия выбора в пространстве значений частных критериев и позволят расширить возможности менеджера для адаптации выбора к предпочтениям ЛППР. Будет найдено оптимальное решение для условно задачи выбора места дислокации и формы собственности склада по методам: $\vec{k}(УТ)$ -модифицированного минимаксного критерия; $\vec{k}(УТ)$ -модифицированного критерия идеальной точки; $\vec{k}(УТ)$ -преобразований для модифицированного критерия среднего геометрического; $\vec{k}(УТ)$ -модифицированного критерия Гурвица. Результаты выбора по методу взвешенной суммы оценок частных критериев и по методу среднего геометрического является инвариантными относительно процедур $\vec{k}(УТ)$ -модификации. Поэтому их реализация и иллюстрация опускается (как было показано в гл. 6, они не расширяют арсенал средств менеджера для адаптации выбора к предпочтениям ЛППР).

Метод $\vec{k}(УТ)$ -модифицированного минимаксного критерия. Такой подход предполагает реализацию следующих шагов алгоритма оптимизации.

Шаг 1. Задаются «коэффициенты доверия/важности» в виде вектора $\vec{k} = (k_1; k_2; \dots; k_5)$. Пусть для удобства изложения и последующих расчетов они заданы следующим образом: $\vec{k} = (10; 10; 1; 9; 10)$. Это означает, что ЛППР считает, практически, одинаково важными показатели всех критериев, кроме третьего критерия $g^{(3)}$, формат издержек которого ЛППР считает уместным учитывать в меньшей степени.

Шаг 2. По формулам (7.1) – (7.4) реализуются процедуры $\vec{k}(УТ)$ -преобразований. Напомним, что координаты УТ приведены в табл. 8.5. Соответственно по формулам (7.1) имеем: $g_1^* = 1/50$; $g_2^* = 1/40$; $g_3^* = 1$; $g_4^* = 1/3$; $g_5^* = 1/10$. По формулам (7.3) находим параметры, обеспечивающие соответствующую ориентацию линий уровня:

$$\begin{aligned} g_1^*(\vec{k}) &= k_1 \cdot g_1^* = 10 \cdot 1/50 = 0,2; \\ g_2^*(\vec{k}) &= k_2 \cdot g_2^* = 10 \cdot 1/40 = 0,25; \\ g_3^*(\vec{k}) &= k_3 \cdot g_3^* = 1 \cdot 1 = 1; \\ g_4^*(\vec{k}) &= k_4 \cdot g_4^* = 9 \cdot 1/3 = 3; \\ g_5^*(\vec{k}) &= k_5 \cdot g_5^* = 10 \cdot 1/10 = 1. \end{aligned}$$

На основе преобразований, представленных в табл. 7.2 главы 7, находим «пересмотренные» оценки частных критериев: они сведены в табл. 8.14, причем для них использованы обозначения главы 7.

Таблица 8.14.

«Пересмотренные» оценки частных критериев при $\vec{k}(УТ)$ -модификации

Решения	«Пересмотренные» оценки для критериев:				
	$\vec{g}^{(1)}$	$\vec{g}^{(2)}$	$\vec{g}^{(3)}$	$\vec{g}^{(4)}$	$\vec{g}^{(5)}$
A_1	$200 \cdot 0,2 = 40$	$50 \cdot 0,25 = 12,5$	$50 \cdot 1 = 50$	$7 \cdot 3 = 21$	$15 \cdot 1 = 15$
B_1	$300 \cdot 0,2 = 60$	$40 \cdot 0,25 = 10$	$1 \cdot 1 = 1$	$3 \cdot 3 = 9$	$10 \cdot 1 = 10$
B_2	$70 \cdot 0,2 = 14$	$40 \cdot 0,25 = 10$	$150 \cdot 1 = 150$	$20 \cdot 3 = 60$	$10 \cdot 1 = 10$
B_3	$90 \cdot 0,2 = 18$	$40 \cdot 0,25 = 10$	$50 \cdot 1 = 50$	$14 \cdot 3 = 42$	$10 \cdot 1 = 10$
C_2	$80 \cdot 0,2 = 16$	$60 \cdot 0,25 = 15$	$150 \cdot 1 = 150$	$4 \cdot 3 = 12$	$13 \cdot 1 = 13$
C_3	$60 \cdot 0,2 = 12$	$60 \cdot 0,25 = 15$	$50 \cdot 1 = 50$	$14 \cdot 3 = 42$	$13 \cdot 1 = 13$
D_1	$180 \cdot 0,2 = 36$	$70 \cdot 0,25 = 17,5$	$50 \cdot 1 = 50$	$8 \cdot 3 = 24$	$12 \cdot 1 = 12$
D_2	$50 \cdot 0,2 = 10$	$70 \cdot 0,25 = 17,5$	$50 \cdot 1 = 50$	$13 \cdot 3 = 39$	$12 \cdot 1 = 12$
D_3	$60 \cdot 0,2 = 12$	$70 \cdot 0,25 = 17,5$	$50 \cdot 1 = 50$	$10 \cdot 3 = 30$	$12 \cdot 1 = 12$

Шаг 2. Для «пересмотренных» оценок частных критериев реализуем процедуры минимаксного критерия. Результаты приведены в дополнительном столбце ($\text{Max}\{\tilde{g}^{(k)}\}$) табл. 8.15.

Таблица 8.15.

Выбор по $\vec{k}(УТ)$ -модифицированному минимаксному критерию.

Решения	«Пересмотренные» оценки частных критериев					$\text{Max}\{\tilde{g}^{(k)}\}$
	$\tilde{g}^{(1)}$	$\tilde{g}^{(2)}$	$\tilde{g}^{(3)}$	$\tilde{g}^{(4)}$	$\tilde{g}^{(5)}$	
A₁	40	12,5	50	21	15	50
B₁	60	10	1	9	10	60
B₂	14	10	150	60	10	150
B₃	18	10	50	42	10	50
C₂	16	15	150	12	13	150
C₃	12	15	50	42	13	50
D₁	36	17,5	50	24	12	50
D₂	10	17,5	50	39	12	50
D₃	12	17,5	50	30	12	50

Минимальный элемент указанного дополнительного столбца равен 50 (выделен в таблице). Оптимальным решением по $\vec{k}(УТ)$ -модифицированному минимаксному критерию является выбор любой альтернативы из множества $\{A_1; B_3; C_3; D_1; D_2; D_3\}$, т.к. все они оптимальны по Парето. Отметим, как расширились у менеджера возможности адаптации выбора к предпочтениям ЛПР. В частности, в такой ситуации менеджер уже может рекомендовать ЛПР и выбор альтернативы A_1 , и выбор альтернативы D_1 , которые *априори* были заблокированы для выбора в качестве оптимальных в формате методов многокритериальной оптимизации, представленных в п. 8.1.

Метод $\vec{k}(УТ)$ -модифицированного критерия идеальной точки. Реализация такого подхода предполагает реализацию следующих шагов алгоритма оптимизации.

Шаги 1-2. Реализации этих шагов алгоритма не зависит от формата критерия выбора. Результат зависит от заданных «коэффициентов доверия/важности». Пусть снова $\vec{k} = (10; 10; 1; 9; 10)$. Тогда «пересмотренные» оценки частных критериев будут такими же, как и в табл. 8.14.

Шаг 3. Реализуем процедуры ИТ-критерия. Результаты приведены в табл. 8. 16. Для удобства иллюстрации процедур этого критерия в последней строке табл. 8.16 дополнительно представлены координаты $УТ_{\text{пер}}$ (утопической точки в пространстве «пересмотренных» оценок частных критериев).

Таблица 8.16.

Выбор по $\vec{k}(УТ)$ -модифицированному критерию идеальной точки.

Решения	«Пересмотренные» оценки частных критериев					Показатель расстояния до $УТ_{\text{mod}}$
	$\tilde{g}^{(1)}$	$\tilde{g}^{(2)}$	$\tilde{g}^{(3)}$	$\tilde{g}^{(4)}$	$\tilde{g}^{(5)}$	
A₁	40	12,5	50	21	15	58,96
B₁	60	10	1	9	10	50,00
B₂	14	10	150	60	10	157,54
B₃	18	10	50	42	10	59,62
C₂	16	15	150	12	13	149,26
C₃	12	15	50	42	13	59,40
D₁	36	17,5	50	24	12	65,05
D₂	10	17,5	50	39	12	57,98
D₃	12	17,5	50	30	12	53,91
УТ_{пер}	10	10	1	9	10	

Шаг 4. Наименьший элемент дополнительного столбца табл. 8. 16 равен 50 (выделен в таблице). Оптимальным решением по $\vec{k}(УТ)$ -модифицированному критерию идеальной точки является выбор альтернативы B_1 . Указанный выбор отличается от выбора по критерию идеальной точки (без процедур $\vec{k}(УТ)$ -модификации), который имел место в п. 8.1 (по ИТ-критерию была выбрана альтернатива C_3).

Метод $\vec{k}(УТ)$ -преобразований для модифицированного критерия произведений или среднего геометрического. Пусть снова $\vec{k} = (10; 10; 1; 9; 10)$. Тогда шаги 1-2 соответствующего алгоритма

оптимизации можно не повторять. «Пересмотренные» оценки частных критериев будут соответствовать тем, которые приведены в табл. 8.14.

Шаг 3. Используя указанные «пересмотренные» оценки находим показатели выигрышей относительно модифицированных антиутопических точек (см. п. 3.5 главы 3) AUT_{mod} и/или $AUT(mod)$. Координаты этих точек приведены в табл. 8.17.

Таблица 8.17.
Координаты модифицированных антиутопических точек.

Точки	Соответствующие координаты при «пересмотренных» оценках частных критериев				
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	$\check{g}^{(5)}$
AUT_{mod}	61	18,5	151	61	16
$AUT(mod)$	151	151	151	151	151

Показатели выигрышей для «пересмотренных» оценок частных критериев (относительно AUT_{mod} и относительно $AUT(mod)$) приведены в табл. 8.18 и 8.19.

Таблица 8.18.

Оптимальный выбор с учетом $\vec{k}(UT)$ -преобразований для модифицированного критерия среднего геометрического (формат AUT_{mod})

Решения	«Выигрыши» относительно AUT_{mod} для пересмотренных оценок частных критериев					Показатель произведений
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	$\check{g}^{(5)}$	
A_1	21	6	101	40	1	$21 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 40 \cdot 1 = 5,1 \cdot 10^5$
B_1	1	8,5	150	52	6	$1 \cdot 8,5 \cdot 150 \cdot 52 \cdot 6 = 4,0 \cdot 10^5$
B_2	47	8,5	1	1	6	$47 \cdot 8,5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = 2,4 \cdot 10^3$
B_3	43	8,5	101	19	6	$43 \cdot 8,5 \cdot 101 \cdot 19 \cdot 6 = 4,2 \cdot 10^6$
C_2	45	3,5	1	49	3	$45 \cdot 3,5 \cdot 1 \cdot 49 \cdot 3 = 2,3 \cdot 10^4$
C_3	49	3,5	101	19	3	$49 \cdot 3,5 \cdot 101 \cdot 19 \cdot 3 = 9,9 \cdot 10^5$
D_1	25	1	101	37	4	$21 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 40 \cdot 1 = 1,4 \cdot 10^5$
D_2	51	1	101	22	4	$21 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 40 \cdot 1 = 7,6 \cdot 10^5$
D_3	49	1	101	31	4	$21 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 40 \cdot 1 = 6,1 \cdot 10^5$

Таблица 8.19.

Оптимальный выбор с учетом $\vec{k}(UT)$ -преобразований для модифицированного критерия среднего геометрического (формат $AUT(mod)$)

Решения	«Выигрыши» относительно AUT_{mod} для пересмотренных оценок частных критериев					Показатель произведений
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	$\check{g}^{(5)}$	
A_1	111	138,5	101	130	136	$111 \cdot 138,5 \cdot 101 \cdot 130 \cdot 136 = 2,8 \cdot 10^{10}$
B_1	91	141	150	142	141	$91 \cdot 141 \cdot 150 \cdot 142 \cdot 141 = 3,9 \cdot 10^{10}$
B_2	137	141	1	91	141	$137 \cdot 141 \cdot 1 \cdot 91 \cdot 141 = 3,4 \cdot 10^8$
B_3	133	141	101	109	141	$133 \cdot 141 \cdot 101 \cdot 109 \cdot 141 = 2,9 \cdot 10^{10}$
C_2	135	136	1	139	138	$135 \cdot 136 \cdot 1 \cdot 139 \cdot 138 = 3,5 \cdot 10^8$
C_3	139	136	101	109	138	$139 \cdot 136 \cdot 101 \cdot 109 \cdot 138 = 2,9 \cdot 10^{10}$
D_1	115	133,5	101	127	139	$115 \cdot 133,5 \cdot 101 \cdot 127 \cdot 139 = 2,7 \cdot 10^{10}$
D_2	141	133,5	101	112	139	$141 \cdot 133,5 \cdot 101 \cdot 112 \cdot 139 = 3,0 \cdot 10^{10}$
D_3	139	133,5	101	121	139	$139 \cdot 133,5 \cdot 101 \cdot 121 \cdot 139 = 3,2 \cdot 10^{10}$

Шаг 4. В дополнительном столбце каждой из таблиц 8.18 и 8.19 приведены показатели критерия выбора: использованы произведения элементов соответствующих строк.

Шаг 5. Наибольший показатель дополнительного столбца в табл. 8.18 равен $4,2 \cdot 10^6$ (выделен в таблице). В табл. 8.19 наибольший такой показатель равен $3,9 \cdot 10^{10}$. Альтернатива B_3 является наилучшей в формате AUT_{mod} рассматриваемых процедур оптимизации по модифицированному критерию среднего геометрического. Альтернатива B_1 является оптимальной в формате $AUT(mod)$ рассматриваемых процедур оптимизации по указанному критерию выбора.

Метод $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица. Пусть, как и в предыдущей ситуации, $\vec{k} = (10; 10; 1; 9; 10)$. Соответственно шаги 1-2 алгоритма оптимизации с учетом процедур $\vec{k}(UT)$ -

преобразований можно опустить. «Пересмотренные» оценки частных критериев соответствуют приведенным в табл. 8.14.

Шаг 3. К указанной таблице припишем три дополнительных столбца (см. табл.8. 20). В столбце « $\text{Max}\{\check{g}^{(k)}\}$ » представлены самые большие показатели по строкам таблицы. В столбце « $\text{Min}\{\check{g}^{(k)}\}$ » - самые малые такие показатели. В третьем столбце – средневзвешенные показатели первых двух дополнительных столбцов с весами « c » и « $1-c$ ». Эти процедуры иллюстрирует табл. 8.20 при $c=0,7$.

Таблица 8.20.

Выбор по $\vec{k}(VT)$ -модифицированному критерию Гурвица

Решения	«Пересмотренные» оценки частных критериев:					Max $\{\check{g}^{(k)}\}$	Min $\{\check{g}^{(k)}\}$	Показатель критерия выбора
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	$\check{g}^{(5)}$			
A ₁	40	12,5	50	21	15	50	12,5	38,75
B ₁	60	10	1	9	10	60	1	42,3
B ₂	14	10	150	60	10	150	10	108
B ₃	18	10	50	42	10	50	10	38
C ₂	16	15	150	12	13	150	12	108,6
C ₃	12	15	50	42	13	50	12	38,6
D ₁	36	17,5	50	24	12	50	12	38,6
D ₂	10	17,5	50	39	12	50	10	38
D ₃	12	17,5	50	30	12	50	12	38,6

Шаг 4. Минимальный элемент последнего столбца в табл. 8.20 равен 38 (выделен в таблице).

Оптимальной по $\vec{k}(VT)$ -модифицированному критерию Гурвица будут альтернативы B₃ и D₂. Этот результат совпадает с решением по $\gamma(VT)$ -модифицированному критерию Гурвица. Соответствующие комментарии были представлены в п. 8.2.

Подведем итог представленным выше материалам. Они проиллюстрировали модифицированные методы многокритериальной оптимизации глав 6 -7 в формате рассмотренной упрощенной модели для задачи выбора места дислокации и формы собственности склада (п.п. 8.1 – 8.3). Указанные иллюстрации убедительно продемонстрировали следующее. Если в арсенал менеджера среди используемых средств принятия решений при многих критериях (на основе прямых методов оптимизации) будут включены представленные в гл. 6 - 7 методы модификации критериев выбора на основе $\gamma(VT)$ -преобразований и $\vec{k}(VT)$ -преобразований, то, как показано в п.п. 8.2- 8.3, любая из оптимальных по Парето альтернатив уже может быть выбрана в качестве наилучшего решения. При этом проблема адаптации выбора к предпочтениям ЛПР может быть уже решена в формате обычного «статистического» подхода: на основе правильного подбора соответствующего критерия выбора (с учетом представленных методов их модификации).

8.4. Многокритериальная оптимизация запасов с учетом рисков в формате метода дерева решений

При управлении запасами ЛПР может быть заинтересовано одновременно и в снижении издержек, обусловливаемых поставками и хранением товаров, и в минимизации средств, «замороженных» в запасах таких товаров. Кроме того, другие частные критерии могут быть обусловлены также требованиями снижения различных рисков для соответствующих цепей поставок. При этом и факторы риска также могут быть самыми разнообразными. Применительно к цепям поставок они могут быть обусловлены потерями товара и его качества, штрафами и непредвиденными пошлинами вследствие неверного таможенного оформления и др. Таким образом, задача управления запасами может быть сформулирована как задача многокритериальной оптимизации. При управлении риском, который будет обусловлен, например, указанными выше факторами, менеджер (при заданном отношении к риску в формате имеющихся предпочтений ЛПР) может использовать различные методы и подходы, которые позволят получить наилучший или наиболее приемлемый баланс для показателей частных критериев (в формате ожидаемых значений соответствующих конечных результатов).

В этом параграфе будет дана иллюстрация возможностей решения задач такого типа на основе метода дерева решений. Атрибуты соответствующего подхода к оптимизации были представлены в главе 5. Рассматривается ситуация, когда риск формализуется в формате концепции производственных рисков [Г.Л.Бродецкий, 2006]. Это означает, что каждый фактор риска характеризуется показателем соответствующих ожидаемых издержек/потерь, которые требуется минимизировать. Для удобств

иллюстрации количество факторов риска специально ограничено. Представленные здесь материалы проиллюстрируют следующее:

- 1) специфику учета процедур оптимизации при многих критериях в формате метода дерева решений;
- 2) возможность феномена блокировки выбора (для ситуации, когда риск оценивается в формате концепции производственных рисков) стратегий диверсификации поставок в качестве оптимальных решений, даже если ЛПП априори предпочитает их.

Атрибуты оптимизационной модели. Рассмотрим модель, в формате которой задача управления запасами в условиях риска может быть представлена как *многокритериальная задача оптимизации* со следующими *частными критериями*, которые будут минимизироваться.

Частный критерий C_1 - издержки доставки и хранения товара. В случае если предприятие использует для доставки собственный транспорт, сумма издержек будет расти с увеличением сроков доставки ресурсов, а так же будет зависеть от условий работы с конкретным поставщиком. Например, если задержка произошла по вине поставщика (в настоящей модели мы не будем рассматривать «крайние» рисковые ситуации, такие как аварии или поломки транспортного средства) и транспортное средство простаивает в ожидании погрузки на складе поставщика – одной из дополнительных статей затрат станут «суточные» водителя, плата за стоянку и т.п. Если доставка осуществляется силами поставщика или логистического оператора, издержки по доставке для компании остаются постоянными при любых вариантах и относятся к средствам, «замороженным» в запасах, и при построении модели не выделяются в отдельную категорию;

Частный критерий C_2 - потери, обуславливаемые наличием средств, «замороженных» в страховых запасах;

Частный критерий C_3 - средние ожидаемые потери из-за задержек доставки. К этой категории относятся, помимо штрафов в пользу потребителя продукции (если сбой поставки повлек за собой сбой графика выпуска готовой продукции и как следствие нарушение обязательств предприятия перед заказчиками), следующие издержки:

- административные расходы на разрешение рискованной ситуации (командировки, телефонные разговоры, выставление претензий) и изменение производственных графиков;
- оплата простоев основным производственным работникам (при сдельной оплате труда – если подобная ситуация оговорена в трудовом контракте, при повременной оплате - т.н. «упущенная производительность») или изменение тарифов оплаты труда основных производственных рабочих при переводе их на другой фронт работ (наиболее часто данная статья проявляется в строительном производстве);
- затраты, связанные с запасами - на перемещение, хранение и складирование материалов, поступивших в срок, но не использованных как запланировано в производстве из-за задержек, обуславливаемых сопутствующими материально-техническими ресурсами, которые необходимы для конкретного производственного процесса;
- издержки так называемой «упущенной производительности» персонала и оборудования и т.п. за вычетом штрафов в пользу фокусной компании со стороны поставщика.

Частный критерий C_4 - средние ожидаемые потери из-за производственного брака (формализуется аналогично C_3).

Представим атрибуты оптимизационной модели на содержательном/вербальном уровне. Для удобства сравнения представленных ниже результатов решения с аналогичными результатами, но применительно к формату модели, когда не предполагается оптимизация при многих критериях, далее обратимся к модели, рассмотренной в работе [Бродецкий Г.Л., Величко Е.А., Гусев Д.А. Модели управления запасами в условиях риска / В кн. «Логистика. Практическая энциклопедия» – М.: МЦФЭР, 2007].

Пусть некоторая компания намеревается реализовывать товар, который предполагается поставлять от двух поставщиков (I и II). Исходные данные представлены в табл. 8.21. Требуется определить параметры стратегии управления запасами: оптимальный размер заказа у выбранного поставщика (для поставщиков I и II), причем выбранным транспортным средством, с учетом возможности диверсификации поставок. Для упрощения оптимизационной модели (и компактности изложения) в качестве стратегии диверсификации поставок от поставщиков I и II анализируется только стратегия, обозначаемая через (1:1), при которой годовой объем поставок поровну покрывается указанными поставщиками. Таким образом, рассматриваются следующие альтернативы: 1) поставка товара только от поставщика I; 2) поставка только от поставщика II; 3) поставка 50% товара от поставщика I и 50% от поставщика II. При этом доставка товара может быть реализована:

- 120-ти м³ фурой, в которую с учетом ее полезного объема помещается 400 ед. товара;
- 82-ти м³ фурой, позволяющей соответственно, размещать при доставке 280 ед. товара.

В общем случае при решении задачи оптимизации указанного типа менеджер может рассматривать любые доступные варианты решений по выбору размера заказа и транспортного средства.

Издержки на доставку от каждого из поставщиков и для каждого транспортного средства известны и представлены в табл. 8.21. При диверсификации предусматривается возможность догрузки, что также учтено в показателях табл. 8.21. При этом под накладными расходами на поставку понимаются издержки,

которые неудобно расписывать на единицу товара. Кроме того, считаем, что издержки поставки, которые естественно расписываются на единицу товара, включаются в его стоимость.

Для удобства иллюстрации возможности многокритериальной оптимизации с учетом рисков в формате метода дерева решений рассматриваемая модель формализуется достаточно компактно. Принимается, что рассматриваемые риски обусловлены только следующими двумя факторами: 1) случайными задержками поставок; 2) случайными объемами возможных потерь из-за поставки бракованной продукции. Другие форматы оптимизационной модели могут быть рассмотрены аналогично.

Для определенности в формате представленной оптимизационной модели рассматриваем следующие сценарии задержек (первый фактор риска): 1) с вероятностью 0,7 задержки поставок будут не критическими и приведут к потерям в размере 100 у.е. на каждую партию; 2) с вероятностью 0,3 задержки поставок станут критическими и приведут к потерям в размере 1000 у.е. на каждую партию (другие сценарии могут быть рассмотрены аналогично). Добавим, что в целях упрощения расчетов вероятности задержек и суммы потерь будут одинаковыми в рискованных ситуациях с обоими поставщиками. Предусматриваются следующие сценарии для брака (второй фактор риска): 1) от поставщика I с вероятностью 0,9 брак составит 0,4% от партии, с вероятностью 0,1, соответственно, - 1,2 % от партии; 2) от поставщика II с вероятностью 0,8 брак составит 0,8% от партии, с вероятностью 0,2 соответственно - 2 % от партии. При этом каждая единица бракованной продукции повлечет потери в 200 у.е. Подчеркнем, что метод дерева решений позволяет ЛПР формализовать любой формат указанных сценариев. Для иллюстрации процедур метода нам далее будет достаточно представленных. Атрибуты указанной многокритериальной модели управления запасами, как уже отмечалось, приведены в табл. 8.21.

Таблица 8.21.

Атрибуты модели управления запасами

Параметр	Обозначение	Ед. изм.	Поставщик I	Поставщик II
годовое потребление продукции	D	ед.	1000	
затраты на хранение единицы продукции в год	C_h	у.е./ед./год	16	
накладные расходы для фуры 82 м ³ (поставщик I / поставщик II)	C_{011}/ C_{021}	у.е./партия	1232,5	1275
накладные расходы для фуры 120 м ³ (поставщик I / поставщик II)	C_{012}/ C_{022}	у.е./партия	1369,4	1416,7
накладные расходы на одну поставку при диверсификации закупок для фуры 82 м ³ («параллельная» доставка от обоих поставщиков)	$C_{031} = C_{011} + C_{021}$	у.е.	1232,5	1275
накладные расходы на одну поставку при диверсификации закупок для фуры 120 м ³ («кольцевой» маршрут)	C_{032}	у.е./партия	2063,9	
цена закупки (поставщик I / II)	$C_{П1}/C_{П2}$	у.е/ед.	184,2	179,4
производственный брак в партии при первом сценарии потерь	k_{11}/k_{21}	%	0,4	0,8
производственный брак в партии при втором сценарии потерь (поставщики I / II)	k_{12}/k_{22}	%	1,2	2
средний размер потерь при не критических задержках на поставки (поставщики I и II)	$w_{11} = w_{12} = w_1$	у.е./партия	100	
средний размер потерь при критических задержках на поставки (поставщики I и II)	$w_{21} = w_{22} = w_2$	у.е./партия	1000	
размер прямых потерь от бракованной продукции	m	у.е./ед.	200	
косвенные издержки при не критических задержках поставки (поставщики I и II)	f_{11}/ f_{12}	у.е./партия	200	0
косвенные издержки при критических задержках поставки (поставщики I и II)	f_{21}/ f_{22}	у.е./партия	600	150

Требуется найти наилучшее решение для рассматриваемой многокритериальной задачи оптимизации запасов с учетом указанных рисков. Решение предусматривает:

- выбор поставщика / поставщиков (при диверсификации поставок);
- выбор транспортного средства;
- выбор размера заказа (объема партии поставок).

Поскольку в рассматриваемой модели годовое потребление (D) не формализуется как случайная величина (для упрощения изложения и графического представления соответствующего дерева решения), то оптимальный размер заказа применительно к конкретным сценариям, формализующим параметры модели, можно находить по формуле Уилсона $q^* = \sqrt{2C_0D/C_h}$ для экономичного размера заказа. В табл. 8.22 представлены расчеты, дающие обоснование следующей особенности оптимизационной модели. Однако, в формате рассматриваемой модели, используя формулу Уилсона (применительно к конкретному сценарию), легко сделать следующий вывод. При заданных вариантах для выбора объема фуры в ситуации закупок через одного поставщика целесообразно использовать фуру объемом 120 м^3 (и соответственно размер партии поставки - 400 ед.). При диверсификации закупок существует два основных варианта – «параллельный» маршрут двух фур вместимостью 280 ед. и «кольцевой» маршрут фурой вместимостью 400 ед. (по сравнению с первым вариантом дешевле, но имеет и свои недостатки – увеличение рисков доставки, необходимость увеличения издержек на содержание страхового запаса). Из-за ограниченности объема книги рассмотрим только первый из отмеченных вариантов. В этом случае дерево решений будет содержать 24 конечные вершины (см. далее).

Таблица 8.22.

Оптимизация размера заказа с учетом сценариев

Параметры сценария	Формула	Расчет оптимального размера заказа	Требуемая вместимость фуры
C_{011}	$\sqrt{2C_{011}D/C_h}$	$\sqrt{2 \cdot 1232,5 \cdot 1000/16} = 392,5$	400
C_{012}	$\sqrt{2C_{012}D/C_h}$	$\sqrt{2 \cdot 1369,4 \cdot 1000/16} = 413,7$	400
C_{021}	$\sqrt{2C_{021}D/C_h}$	$\sqrt{2 \cdot 1275 \cdot 1000/16} = 399,2$	400
C_{022}	$\sqrt{2C_{022}D/C_h}$	$\sqrt{2 \cdot 1416,7 \cdot 1000/16} = 420,8$	400
C_{031}	$\sqrt{2C_{011}D \div 2 / C_h}$	$\sqrt{2 \cdot 1232,5 \cdot 500/16} = 277,5$	280
	$\sqrt{2C_{021}D \div 2 / C_h}$	$\sqrt{2 \cdot 1275 \cdot 500/16} = 282,3$	280
C_{032}	$\sqrt{2C_{032}D/C_h}$	$\sqrt{2 \cdot 2063,9 \cdot 1000/16} = 507,9$	400

В табл. 8.23 представлены вероятности упомянутых выше сценариев, обуславливаемых возможным развитием событий с учетом анализируемых факторов риска: задержек поставки и потерь товара из-за брака. При поставке товара только от одного выбранного поставщика для каждого из указанных факторов риска возможны два исхода/сценария. Каждый из них будет характеризоваться «своим» конечным результатом. В случае диверсификации поставок между двумя поставщиками при независимой реализации потерь товара из-за брака число учитываемых таких исходов (для каждого сценария задержки поставки) становится равным $2 \times 2 = 4$. В частности, при любом сценарии задержки поставки должны быть учтены следующие сценарии потерь:

- 1) для партии товара от первого поставщика реализуется первый сценарий потерь; для партии товара от второго поставщика – первый сценарий потерь;
- 2) для партии товара от первого поставщика реализуется первый сценарий потерь; для партии товара от второго поставщика – второй сценарий потерь;
- 3) для партии товара от первого поставщика реализуется второй сценарий потерь; для партии товара от второго поставщика – второй сценарий потерь;
- 4) для партии товара от первого поставщика реализуется второй сценарий потерь; для партии товара от второго поставщика – второй сценарий потерь.

Вероятности указанных сценариев рассчитываются далее по правилам теории вероятностей.

Таблица 8.23.
Вероятности сценариев

Сценарий		Вероятность	Величина потерь
Задержки поставок	Некритическая задержка	0,7	$w_{11} = w_{12} = w_1 = 100$
	Критическая задержка	0,3	$w_{21} = w_{22} = w_2 = 1000$
Задержки поставок при диверсификации	Критическая задержка со стороны обоих поставщиков	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$	$w_{21} = 1000$ $w_{22} = 1000$
	Критическая задержка только со стороны первого поставщика	$0,3 \cdot 0,7 = 0,21$	$w_{21} = 1000$ $w_{12} = 100$
	Критическая задержка только со стороны второго поставщика	$0,7 \cdot 0,3 = 0,21$	$w_{11} = 100$ $w_{22} = 1000$
	Некритическая задержка со стороны обоих поставщиков	$0,7 \cdot 0,7 = 0,49$	$w_{11} = 100$ $w_{12} = 100$
Брак в поставке (доля потерь от объема поставки)	Первый сценарий потерь в партии от первого поставщика	0,9	$k_{11} = 0,004$
	Второй сценарий потерь в партии от первого поставщика	0,1	$k_{12} = 0,012$
	Первый сценарий потерь в партии от второго поставщика	0,8	$k_{21} = 0,008$
	Второй сценарий потерь в партии от первого поставщика	0,2	$k_{22} = 0,02$
Брак в поставке при диверсификации (доля потерь от объема поставки)	Первый сценарий потерь на «среднюю партию»	$0,9 \cdot 0,8 = 0,72$	$(k_{11} + k_{21})/2 = (0,004 + 0,008)/2 = 0,006$
	Второй сценарий потерь на «среднюю партию»	$0,9 \cdot 0,2 = 0,18$	$(k_{11} + k_{22})/2 = (0,004 + 0,02)/2 = 0,012$
	Третий сценарий потерь на «среднюю партию»	$0,1 \cdot 0,8 = 0,08$	$(k_{12} + k_{21})/2 = (0,012 + 0,008)/2 = 0,01$
	Четвертый сценарий потерь на «среднюю партию»	$0,1 \cdot 0,2 = 0,02$	$(k_{12} + k_{22})/2 = (0,012 + 0,02)/2 = 0,016$

Дополнительно обратим внимание на следующие особенности рассматриваемой модели, которые относятся к учету издержек по страховому запасу. Величину страхового запаса в моделях такого типа можно формализовать на основе задания соответствующей доли Δ от объема партии поставки (такая доля рассчитывается по формулам математической статистики для доверительного интервала отклонения спроса при заданной доверительной вероятности). Пусть на основе статистических данных с учетом требуемой вероятности отсутствия дефицита уже установлено, что для показателя Δ в формате рассматриваемой модели имеем: $\Delta = 0,2$. Кроме того, далее принято, что потери, обусловливаемые необходимостью содержать страховой запас, составляют 40% от средств, вложенных в такой запас (например, это – соответствующая ставка для используемых заемных средств).

Возможность поставки бракованного товара требует, чтобы для величины страхового запаса формат оптимизационной модели также учитывал следующее. При определении такой величины необходимо учитывать поправки в виде соответствующих добавок к показателю Δ . Эти добавки обуславливаются требованием покрытия возможного брака для поставляемого товара. Например, если весь годовой объем поставок реализует поставщик I, то учет указанных требований означает следующее. Вместо показателя Δ (при определении величины страхового запаса) надо будет использовать показатель $\Delta + \Delta \cdot k_{1i} = \Delta \cdot (1 + k_{1i})$, где i - номер сценария для события, связанного с поставкой брака (на дереве решений). В случае, если весь годовой объем поставок реализует поставщик II, то учет указанных требований означает, что вместо показателя Δ (при определении величины страхового запаса) надо будет использовать показатель $\Delta + \Delta \cdot k_{2i} = \Delta \cdot (1 + k_{2i})$.

Отдельно отметим специфику определения величины страхового запаса при использовании стратегии диверсификации поставок. В представленной здесь модели рассматривается только стратегия такого типа при диверсификации годового объема поставок в равных долях между поставщиками I и II (обозначаемая через (1:1)). В этой ситуации поставки от поставщиков I и II можно организовать так, чтобы максимально сократить величину страхового запаса. При этом очередная поставка от конкретного поставщика (I или II) планируется на момент, когда останется именно половина поставленного запаса предыдущей поставки от другого поставщика (II или I). При таком использовании стратегии диверсификации поставок наибольшее ожидаемое значение для возможного дефицита будет соотноситься с серединой интервала повторного заказа (для каждого из поставщиков). При этом требуемая величина страхового запаса, которая будет обеспечивать заданные доверительные пределы (при заданном коэффициенте доверия относительно события отсутствия дефицита), может быть сокращена. Такое сокращение может быть реализовано почти в два раза (по сравнению с моделью без диверсификации поставок). Поэтому подчеркнем, что эффект диверсификации поставок (в равных долях между поставщиками) далее учитывается при определении издержек на содержание страхового запаса введением дополнительного понижающего множителя ρ (где $0 < \rho < 1$), для которого в рассматриваемой модели принято значение $\rho = 0,71$.

Атрибуты метода дерева решений. Напомним, что общая схема метода дерева решений подразумевает реализацию следующих операций [Г.Л.Бродецкий, 2006].

5. Построение дерева решений применительно к соответствующей задаче управления рисками для анализируемых логистических процессов в системе логистики.

6. Соотнесение параметров исходной задачи с параметрами, приписываемыми к ветвям и к вершинам построенного дерева решений (назовем это процедурами параметризации для построенного дерева решений).

7. Реализация указанных процедур «свертки» и «блокировки» в направлении от «концевых» (или «висячих») вершин дерева решений к его корневой вершине с учетом заданного отношения ЛППР к риску.

8. Выбор наилучшего (оптимального) решения для соответствующей системы логистики, причем с учетом соответствующей системы предпочтений конкретного ЛППР.

Представим процедуры оптимизации стратегии управления запасами на основе метода дерева решений применительно к формату рассматриваемой модели, когда исходно имеется два типа факторов, определяющих возможные альтернативы: выбор поставщика продукции (П1, П2, П(1:1)); выбор транспортного средства (фуры 120 м³ и 82 м³). Необходимо также учитывать два типа случайных факторов, влияющих на экономический результат: 1) фактор случайных задержек при доставке; 2) фактор случайных потерь из-за бракованных изделий.

Приведем структуру дерева решений для указанной оптимизационной модели в виде соответствующего неориентированного графа (рис. 8.1). Перечень анализируемых альтернатив в формате такого дерева решений предполагает 24 исхода: {A1, A2, ..., A24} (концевые вершины графа, - они представлены на рис. 8.1).

Рис. 8.1. – представлен в конце книги

Действительно, для альтернативы выбора поставщика I наличие двух сценариев по задержкам поставки, а также двух сценариев по размеру потерь из-за брака продукции, приводит к четырем (= 2 × 2) различным вариантам конечного результата. На рис. 8.1 они обозначены как A₁, A₂, A₃ и A₄. Аналогично, для альтернативы выбора поставщика II наличие двух сценариев по задержкам поставки и также двух сценариев по размеру потерь из-за брака продукции, снова приводит к четырем различным вариантам конечного результата: A₅, A₆, A₇ и A₈. При выборе альтернативы диверсификации поставок (от поставщиков I и II), в равных долях покрывающих годовые поставки, соответствующих конечных исходов в формате рассматриваемой модели будет уже шестнадцать. А именно, для любого сценария фактора задержек поставки при такой стратегии будет уже четыре сценария реализации потерь из-за брака. Действительно, два сценария из указанных четырех будут обусловлены атрибутами поставляемых товаров от поставщика I (в отдельной партии поставки) и два сценария - атрибутами поставляемых товаров от поставщика II. Обращаем внимание на то, что далее будут рассмотрены не все варианты развития событий. В случае диверсификации закупок и применения «кольцевого» маршрута 120-ти м³ фурой можно было бы учитывать задержки с последствиями «разной тяжести» (как только у одного из поставщиков, так и у обоих одновременно). При этом количество исходов увеличится еще на 16 пунктов. В идеале, конечно, необходимо сравнивать все варианты. Однако, при построении этой оптимизационной модели во избежание громоздкости указанную «ветвь» вычислений опустим, ограничиваясь только отмеченным вариантом.

Процедуры параметризации этого дерева решений представлены на рис. 8.2. Ветвям дерева, относящимся к вершинам круглого типа, «приписаны» вероятности реализации соответствующих сценариев (они были рассчитаны в табл. 8.23). Кроме того, концевым вершинам дерева также «приписаны» соответствующие числовые значения конечного результата по каждому из заданных частных критериев. Они рассчитаны с учетом атрибутов модели и положений теории управления запасами. Необходимая иллюстрация расчетов представлена в табл. 8.24 (для фрагмента дерева, относящегося к поставщику I), табл.

8.25 (для фрагмента дерева, относящегося к поставщику II), табл. 8.26 (для фрагмента дерева, относящегося к диверсификации поставок).

Рис. 8.2. – представлен в конце книги

Таблица 8.24.

Показатели для вершин фрагмента дерева решений (поставщик I)

Вершина	Критерий	Формула	Показатель, у.е.
A ₁	C ₁	$C_{012}D/q + C_h q/2 + f_{11}$	$1369,4 \cdot 1000/400 + 16 \cdot 400/2 + 200 = 6823,5$
	C ₂	$C_{\text{II}} \cdot q \cdot \Delta \cdot (1 + k_{11}) \cdot 0,4$	$184,2 \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,004) \cdot 0,4 = 5918,0$
	C ₃	$w_1 \cdot D/q$	$100 \cdot 1000/400 = 250$
	C ₄	$k_{11} Dm$	$0,004 \cdot 1000 \cdot 200 = 800$
A ₂	C ₁	$C_{012}D/q + C_h q/2 + f_{11}$	$1369,4 \cdot 1000/400 + 16 \cdot 400/2 + 200 = 6823,5$
	C ₂	$C_{\text{II}} \cdot q \cdot \Delta \cdot (1 + k_{12}) \cdot 0,4$	$184,2 \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,012) \cdot 0,4 = 5965,1$
	C ₃	$w_1 D/q$	$100 \cdot 1000/400 = 250$
	C ₄	$k_{12} Dm$	$0,012 \cdot 1000 \cdot 200 = 2400$
A ₃	C ₁	$C_{012}D/q + C_h q/2 + f_{21}$	$1369,4 \cdot 1000/400 + 16 \cdot 400/2 + 600 = 7223,5$
	C ₂	$C_{\text{II}} \cdot q \cdot \Delta \cdot (1 + k_{11}) \cdot 0,4$	$184,2 \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,004) \cdot 0,4 = 5918,0$
	C ₃	$w_2 D/q$	$1000 \cdot 1000/400 = 2500$
	C ₄	$k_{11} Dm$	$0,004 \cdot 1000 \cdot 200 = 800$
A ₄	C ₁	$C_{012}D/q + C_h q/2 + f_{21}$	$1369,4 \cdot 1000/400 + 16 \cdot 400/2 + 600 = 7223,5$
	C ₂	$C_{\text{II}} \cdot q \cdot \Delta \cdot (1 + k_{12}) \cdot 0,4$	$184,2 \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,012) \cdot 0,4 = 5965,1$
	C ₃	$w_2 D/q$	$1000 \cdot 1000/400 = 2500$
	C ₄	$k_{12} Dm$	$0,012 \cdot 1000 \cdot 200 = 2400$

Прокомментируем формулы расчетов по четырем заданным критериям (табл. 8.24) для вершины A₁:

- 1) показатель критерия C₁ характеризует суммарные издержки доставки (определяемые по формуле $C_{012}D/q$, где D/q – число поставок за год) и хранения (определяемые по формуле $C_h q/2$) плюс соответствующие косвенные издержки из-за задержек (f_{11});
- 2) показатель критерия C₂ отражает «замороженные» в запасах денежные средства как произведение цены единицы товара C_{II} на средний объем хранения $q/2$. Обращаем внимание на то, что часто контракт на поставку предусматривает возврат поставщиком стоимости бракованной продукции, если количество брака превышает какой-либо критический уровень – на эту сумму будут уменьшаться и средства «замороженные» в запасах на текущий момент. В нашем конкретном случае принимаем, что поставщик возмещает часть контрактной суммы при любых процентах брака в партии (определяемую по формуле $C_{\text{II}} \cdot q \cdot k_{11}$);
- 3) показатель критерия C₃ равен произведению средних ожидаемых потерь ($w_1 = w_{11}$) из-за задержки одной поставки на число поставок за год (D/q);

4) показатель критерия C_4 определяется как произведение доли бракованного товара (k_{11}) на средний годовой объем спроса (D) и на потери от единицы бракованного товара (m).

Аналогичные расчеты для каждой вершины фрагмента дерева решений для второго поставщика представлены в табл. 8.25.

Таблица 8.25.

Показатели для вершин фрагмента дерева решений (поставщик II)

Вершина	Критерий	Формула	Показатель, у.е.
A ₅	C ₁	$C_{022}D/q + C_{hq}/2 + f_{12}$	$1416,7 \cdot 1000/400 + 16 \cdot 400/2 + 0 = 6741,8$
	C ₂	$C_{П2} \cdot q \cdot \Delta \cdot (1 + k_{21}) \cdot 0,4$	$179,4 \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,008) \cdot 0,4 = 5786,7$
	C ₃	$w_1 D/q$	$100 \cdot 1000/400 = 250$
	C ₄	$k_{21}Dm$	$0,008 \cdot 1000 \cdot 200 = 1600$
A ₆	C ₁	$C_{022}D/q + C_{hq}/2 + f_{12}$	$1416,7 \cdot 1000/400 + 16 \cdot 400/2 + 0 = 6741,8$
	C ₂	$C_{П2} \cdot q \cdot \Delta \cdot (1 + k_{22}) \cdot 0,4$	$179,4 \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,02) \cdot 0,4 = 5855,6$
	C ₃	$w_1 D/q$	$100 \cdot 1000/400 = 250$
	C ₄	$k_{22}Dm$	$0,02 \cdot 1000 \cdot 200 = 4000$
A ₇	C ₁	$C_{022}D/q + C_{hq}/2 + f_{22}$	$1416,7 \cdot 1000/400 + 16 \cdot 400/2 + 150 = 6891,8$
	C ₂	$C_{П2} \cdot q \cdot \Delta \cdot (1 + k_{21}) \cdot 0,4$	$179,4 \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,008) \cdot 0,4 = 5786,7$
	C ₃	$w_2 D/q$	$1000 \cdot 1000/400 = 2500$
	C ₄	$k_{21}Dm$	$0,008 \cdot 1000 \cdot 200 = 1600$
A ₈	C ₁	$C_{022}D/q + C_{hq}/2 + f_{22}$	$1416,7 \cdot 1000/400 + 16 \cdot 400/2 + 150 = 6891,8$
	C ₂	$C_{П2} \cdot q \cdot \Delta \cdot (1 + k_{22}) \cdot 0,4$	$179,4 \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,02) \cdot 0,4 = 5855,6$
	C ₃	$w_2 D/q$	$1000 \cdot 1000/400 = 2500$
	C ₄	$k_{22}Dm$	$0,02 \cdot 1000 \cdot 200 = 4000$

Расчеты, которые представлены в табл. 8.26 для конкретной вершины фрагмента дерева решений при диверсификации поставок по критериям C_2 и C_4 , учитывают, что 50% товара поставляют поставщик I и 50% товара - поставщик II. Технология определения показателей поставок та же, что и для «чистых» вариантов поставок, поэтому представим пример расчетов только для одной вершины A₉ (таб. 8.26), приведя остальные итоговые результаты непосредственно на дереве решений (рис. 8.2А, 8.2Б).

Таблица 8.26.

Пример расчета показателей для концевых вершин фрагмента дерева решений (при диверсификации поставок)

Вершина	Критерий	Формула	Показатель, у.е.
A ₉	C ₁	$(C_{011} + C_{012})D/2q + 2C_{hq}/2 + f_{21} + f_{22}$	$(1232,5 + 1275) \cdot 1000/2 \cdot 280 + 16 \cdot 280 + 600 + 150 = 8957,7$

	C_2	$\{C_{П1} \cdot (q/2) \cdot \Delta \cdot (1 + k_{11}) + C_{П2} \cdot (q/2) \cdot \Delta \cdot (1 + k_{21})\} \cdot p \cdot 0,4$	$\{184,2 \cdot (280/2) \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,004) + 179,4 \cdot (280/2) \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,008)\} \cdot 0,71 \cdot 0,4 = 2926,2$
	C_3	$2w_2 D/2/q$	$2 \cdot 1000 \cdot 500 / 280 = 3\,571,4$
	C_4	$(k_{11} + k_{21}) / 2 \cdot Dm$	$0,006 \cdot 1000 \cdot 200 = 1200$

Оптимизация решения: процедуры свертки. После процедур параметризации шаги алгоритма оптимизации решения в условиях риска оформляются в виде чередующихся процедур свертки и блокировки. Процедуры свертки должны учитывать специфику принятой в формате анализа концепции риска (отношение ЛПП к риску), а процедуры блокировки должны учитывать многокритериальность соответствующей оптимизационной задачи.

Отмеченные процедуры свертки в рамках метода дерева решений реализуются для вершин «круглого» типа. Указанные процедуры сначала реализуются для «круглых» вершин, за которыми следуют концевые вершины с конкретным численным конечным экономическим результатом для анализируемых логистических процессов. Формат указанных процедур свертки позволяет заменить заданные распределения вероятностей случайного конечного результата для «круглой» вершины на соотнесенный с ней набор параметров. Эта процедура реализуется в соответствии с используемым критерием оценки риска. При нейтральном отношении к риску результат свертки представляется одним параметром. Это - средний ожидаемый конечный результат для соответствующих показателей частных критериев. Такой подход соответствует EVC-критерию (*expected value criterion*). Именно такой подход к учету риска будет представлен в рассматриваемой оптимизационной модели. Порядок расчетов для показателей частных критериев в формате процедур свертки представлены в табл. 8.27 на примере альтернативы S_1 . На рис. 8.3 представлено дерево решений после выполнения процедур свертки для всех вершин круглого типа.

Рис. 8.3. – представлен в конце книги

Таблица 8.27.

Процедуры свертки для дерева решений на примере альтернативы S_1

Объекты для свертки	Критерий	Расчет показателя EVC-критерия, у.е
A_1, A_2	C_1	$6823,5 \cdot 0,9 + 6823,5 \cdot 0,1 = 6823,5$
	C_2	$5918 \cdot 0,9 + 5965,1 \cdot 0,1 = 5922,7$
	C_3	$250 \cdot 0,9 + 250 \cdot 0,1 = 250,0$
	C_4	$800 \cdot 0,9 + 2400 \cdot 0,1 = 960,0$
A_3, A_4	C_1	$7223,5 \cdot 0,9 + 7223,5 \cdot 0,1 = 7223,5$
	C_2	$5918 \cdot 0,9 + 5965,1 \cdot 0,1 = 5922,7$
	C_3	$2500 \cdot 0,9 + 2500 \cdot 0,1 = 2500,0$
	C_4	$800 \cdot 0,9 + 2400 \cdot 0,1 = 960,0$
$(A_1, A_2), (A_3, A_4)$	C_1	$6823,5 \cdot 0,7 + 7223,5 \cdot 0,3 = 6943,5$
	C_2	$5922,7 \cdot 0,7 + 5922,7 \cdot 0,3 = 5922,7$
	C_3	$250,0 \cdot 0,7 + 2500,0 \cdot 0,3 = 925,0$
	C_4	$960,0 \cdot 0,7 + 960,0 \cdot 0,3 = 960,0$

В частности, применительно к вершинам A_1 и A_2 свертка показателей по критерию C_1 приводит к результирующему показателю 6823,5: $0,9 \cdot 6823,5 + 0,1 \cdot 6823,5 = 6823,5$. Это отражено не только в табл. 8.27, но также и на рис. 8.3 (см. соответствующую вершину круглого типа «Фактор потерь», соотносимую с концевыми вершинами A_1 и A_2). Свертка показателей по критерию C_2 приводит к следующему результирующему показателю этого критерия для указанной вершины: $0,9 \cdot 5918 + 0,1 \cdot 5965,1 = 5922,7$ (см. табл. 8.27 и рис. 8.3). Свертка показателей по критерию C_3 дает 250. Действительно: $0,9 \cdot 250 + 0,1 \cdot 250 = 250$. Свертка показателей по критерию C_4 дает 960: $0,9 \cdot 800 + 0,1 \cdot 2400 = 960$. Аналогичные процедуры реализуются для всех вершин круглого типа, которые предшествуют концевым вершинам дерева решений.

Затем процедуры свертки реализуются для вершин типа «Фактор задержек». Например, для вершины такого типа на ветви дерева «Поставщик I» (обуславливающей результаты концевых вершин A_1, A_2, A_3 и A_4) свертка соответствующих показателей по критерию C_1 приводит к результирующему

показателю в формате указанной вершины, равному снова $6943,5: 0,7 \cdot 6823,5 + 0,3 \cdot 7223,5 = 6943,5$. Результаты процедур свертки для каждой вершины круглого типа представлены на рис. 8.3 числовыми показателями соответствующих критериев (взяты в рамочку).

Оптимизация решения: процедуры блокировки. Процедуры блокировки в рамках метода дерева решений реализуются для вершин так называемого “прямоугольного” типа (см. главу 5). Это – такие вершины, которые отражают имеющиеся у ЛПР альтернативные возможности выбора в формате соответствующих атрибутов анализируемых альтернатив. Процедуры блокировки реализуются пошагово: на каждом отдельном шаге – только для тех вершин “прямоугольного” типа, для которых каждой имеющейся альтернативной возможности развития траектории анализируемого процесса (исходя из такой вершины) уже сопоставлен соответствующий набор параметров и показателей, характеризующих такую альтернативную возможность по заданным частным критериям. Суть указанных процедур блокировки - оставить незаблокированной (применительно к возможным альтернативам выбора для последующих ветвей дерева решений) только альтернативу с наилучшим набором показателей частных критериев. Понятие «наилучшего набора» таких показателей формализуется непосредственно форматом используемого критерия выбора (при заданных частных критериях). Специфика рассматриваемой здесь задачи многокритериальной оптимизации системы управления запасами с учетом риска состоит в том, что указанные процедуры блокировки требуется реализовать только для вершин первого уровня (после корневой вершины дерева). При этом сразу будет найдено наилучшее решение (см. рис. 8.1 – 8.3).

Таким образом, выбор наилучшей альтернативы определит указанная процедура блокировки. В формате задач оптимизации при многих критериях существуют различные методы определения более предпочтительного решения при сравнении альтернатив. Они формализуются «своими» критериями выбора. Для реализации наилучшего выбора (при конкретном критерии выбора) требуется в формате указанной процедуры блокировки (см. рис. 8.4) применить один из известных методов решения задач многокритериальной оптимизации. Далее будут представлены процедуры выбора наилучшей альтернативы на основе так называемых методов оптимизации прямого типа. Их специфика предполагает, что решение задачи многокритериальной оптимизации будет сведено к решению определенной задачи скалярной оптимизации. Это означает, что при реализации указанного подхода на основе критерия выбора синтезируется некоторый специальный показатель, по которому, как раз, и определяется более предпочтительное решение. При этом менеджер может использовать различные подходы для формализации такого преобразования исходной задачи многокритериальной оптимизации в задачу скалярной оптимизации и, кроме того, различные приемы к адаптации выбора применительно к предпочтениям ЛПР. Требуемый формат учета рисков уже будет обеспечен при формализации частных критериев.

Обозначим анализируемые альтернативы следующим образом (см. также рис. 8.1 – 8.3): S_1 – выбор первого поставщика, S_2 - второго поставщика; S_3 - диверсификация поставок от обоих поставщиков в равной пропорции (1:1). Для удобства иллюстрации указанных подходов к решению рассматриваемой задачи многокритериальной оптимизации показатели этих альтернатив по заданным частным критериям (см. рис. 8.3) представим в табличном виде (табл. 8.28).

Таблица 8.28

Показатели альтернатив по частным критериям				
	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	6943,5	5922,7	925,0	960,0
S_2	6786,8	5800,5	925,0	2080,0
S_3	9322,7	2930,8	1321,4	1520,0

Далее соответствующие процедуры оптимизации будут представлены и проиллюстрированы на основе следующих методов или критериев выбора:

- метод минимаксного критерия (для краткости он обозначен символом **M1**);
- метод взвешенных оценок частных критериев (**M2**);
- метод обобщенного скалярного критерия (**M3**);
- метод идеальной точки (**M4**);
- метод критерия среднего геометрического (**M5**)

Метод минимаксного критерия (M1). Требуемые процедуры проиллюстрированы в табл. 8.29.

Таблица 8.29

Выбор наилучшего решения по минимаксному критерию					
	C_1	C_2	C_3	C_4	Показатель минимаксного критерия
S_1	6943,5	5922,7	925,0	960,0	6943,5
S_2	6786,8	5800,5	925,0	2080,0	6786,8
S_3	9322,7	2930,8	1321,4	1520,0	9322,7

В последнем (дополнительном) столбце приведены наихудшие/наибольшие показатели по строкам таблицы. Наименьший показатель в дополнительном столбце табл. 8.29 равен 6786,8 (выделен в таблице) и соответствует альтернативе S_2 . Этот результат представлен на рис. 8.4: ветви дерева решений, соотносимые с альтернативой S_2 , выделены жирным шрифтом. Остальные альтернативы (при анализе «прямоугольных» вершин первого уровня после корневой вершины) блокируются. В формате метода минимаксного критерия наилучшим или оптимальным решением является выбор второго поставщика, причем поставки организуются партиями 400 ед. тов.

Рис. 8.4. – представлен в конце книги

Метод взвешенных оценок частных критериев (M2). Далее в формате рассматриваемой оптимизационной модели принято, что ЛПП задает «веса» для оценок частных критериев равными между собой (для наглядности эти веса представлены в последней строке табл. 8.30). Результаты расчетов и оптимальный выбор приведены в табл. 8.30.

Таблица 8.30

Выбор по методу взвешенной суммы оценок частных критериев					
	C_1	C_2	C_3	C_4	Взвешенная сумма
S_1	6943,5	5922,7	925,0	960,0	3687,8
S_2	6786,8	5800,5	925,0	2080,0	3898,1
S_3	9322,7	2930,8	1321,4	1520,0	3773,7
Веса критериев	0,25	0,25	0,25	0,25	

В последнем (дополнительном) столбце «Взвешенная сумма» выписан результат для среднего арифметического взвешенного показателя по каждой строке с учетом весов критериев. В частности, такая «взвешенная сумма» для альтернативы S_1 составит: $6943,5 \cdot 0,25 + 5922,7 \cdot 0,25 + 925 \cdot 0,25 + 960 \cdot 0,25 = 3687,8$. Показатели «взвешенных сумм» для остальных альтернатив рассчитываются аналогично (см. табл. 8.30). Наименьший из указанных показателей (он равен 3687,8 и выделен в указанной таблице) соответствует альтернативе S_1 . Остальные альтернативы (при анализе «прямоугольных» вершин первого уровня после корневой вершины) блокируются. Поэтому, в формате метода взвешенной суммы оценок частных критериев наилучшим решением является выбор первого поставщика с партиями поставки размером 400 ед. тов. Графическую интерпретацию дает рис. 8.5.

Метод обобщенного скалярного критерия (M3). В последней строке табл. 8.31 приведены наилучшие показатели по частым критериям. По этим показателям определяют значения критериальной функции выбора. Например, для альтернативы S_1 (выбор поставщика I) значение указанной функции составит:

$$F(S_1) = \frac{6943,5 - 6786,8}{6786,8} + \frac{5922,7 - 2930,8}{2930,8} + \frac{925 - 925}{925} + \frac{960 - 960}{960} = 1,04.$$

Соответствующие значения функции выбора для остальных альтернатив вычисляются аналогично. Они приведены в табл. 8.31, где также отмечен выбор по обобщенному скалярному критерию.

Таблица 8.31

Оптимальный выбор по обобщенному скалярному критерию

	R_1	R_2	R_3	R_4	Значения функции выбора
S_1	6943,5	5922,7	925,0	960,0	1,04
S_2	6786,8	5800,5	925,0	2080,0	2,15
S_3	9322,7	2930,8	1321,4	1520,0	1,39
Показатели $g_{\min}(C_i)$	6786,8	2930,8	925	960	

Наименьшее значение функции выбора (равно 1,04 и выделено в табл. 8.31) соответствует альтернативе S_1 . Остальные анализируемые альтернативы (первого уровня после корневой вершины) будут заблокированы для выбора (их показатели являются большими, чем 1,04). Таким образом, по методу минимизации обобщенного скалярного критерия наилучшим решением является выбор первого поставщика, причем размер партии поставок составляет 400 ед. тов. Графическое представление дает рис. 8.5.

Рис. 8.5. – представлен в конце книги

Метод идеальной точки (М4). Координатами утопической точки являются наилучшие показатели в соответствующих столбцах табл. 8.32: УТ = (6786,8; 35506,8; 925; 960). «Расстояние» от альтернативы до утопической точки вычисляется по известным формулам. В частности, расстояние от УТ до S_1 находим следующим образом:

$$\sqrt{(6943,5 - 6786,8)^2 + (5922,7 - 2930,8)^2 + (925 - 925)^2 + (960 - 960)^2} = 2996,0.$$

«Расстояния» до УТ для остальных альтернатив вычисляются аналогично (см. табл. 8.32).

Таблица 8.32
Выбор наилучшего решения по методу утопической точки

	C_1	C_2	C_3	C_4	Расстояние до УТ
S_1	6943,5	5922,7	925,0	960,0	2996,0
S_2	6786,8	5800,5	925,0	2080,0	3080,5
S_3	9322,7	2930,8	1321,4	1520,0	2627,4
УТ	6786,8	2930,8	925	960	

Наименьшее значение показателя критерия выбора, т.е. показателя расстояния до УТ (оно равно 2627,4 и выделено в табл. 8.32) соответствует альтернативе S_3 . Соответственно, процедуры блокировки, реализованные на основе метода идеальной точки, заблокируют выбор альтернатив S_1 и S_2 , а также приведут к следующему оптимальному решению. Наилучший выбор по методу идеальной точки - это выбор анализируемой стратегии диверсификации поставок, причем размер партии поставок от каждого поставщика составляет 280 ед. тов. Графическую иллюстрацию представьте самостоятельно.

Метод критерия среднего геометрического (М5). В формате такого подхода к решению задачи многокритериальной оптимизации каждой альтернативе менеджер сопоставляет показатель произведения оценок всех частных критериев для каждой альтернативы. Требуемые процедуры представлены в табл. 8.33.

Таблица 8.33.

Выбор наилучшего решения по критерию среднего геометрического

	C_1	C_2	C_3	C_4	Произведение оценок частных критериев
S_1	6943,5	5922,7	925,0	960,0	$3,65 \cdot 10^{13}$
S_2	6786,8	5800,5	925,0	2080,0	$7,29 \cdot 10^{13}$
S_3	9322,7	2930,8	1321,4	1520,0	$5,49 \cdot 10^{13}$

Наименьшее значение показателя дополнительного столбца (оно равно $3,65 \cdot 10^{13}$ и выделено в табл. 8.33) соответствует альтернативе S_1 . Таким образом, по этому методу наилучшим решением является выбор поставщика I, причем размер партии поставок составляет 400 ед. тов. Графическое представление соответствует ситуации, представленной ранее на рис. 8.5.

Представленная иллюстрация процедур многокритериальной оптимизации запасов показала следующее. Альтернатива с диверсификацией поставок выбрана в качестве оптимального решения только одним из рассмотренных критериев (по методу идеальной точки, для которого линии уровня в пространстве значений частных критериев не являются отрезками прямых). Подчеркнем, что это не обусловлено просто конкретными числовыми значениями параметров для представленной оптимизационной модели. Указанная особенность будет иметь место и при других числовых параметрах. Она обусловлена спецификой формата рассматриваемого типа задач многокритериальной оптимизации с учетом риска, когда оценка риска вводится в соответствии с концепцией производственных рисков. Соответствующие положения были формализованы в главе 5 с учетом особенностей практических приложений. Необходимость адаптации выбора к системе предпочтений ЛПП требует использования специальных модификаций критериев выбора.

Используя формат модели управления запасами, в этом параграфе было показано, что метод дерева решений может быть использован не только для решения задач управления рисками. Процедуры этого метода позволяют решать задачи оптимизации логистических систем при многих критериях. При этом проблемы управления риском могут быть формализованы в виде частных критериев. Особенности и специфика реализации таких процедур были проиллюстрированы в этом параграфе на примере модели многокритериальной оптимизации запасов. Возможности использования представленных методов оптимизации в формате модифицированных критериев выбора будут проиллюстрированы в следующем параграфе.

8.5. Иллюстрации модифицированных критериев выбора при многокритериальной оптимизации запасов с учетом рисков

Продолжим иллюстрацию процедур многокритериальной оптимизации запасов в условиях риска с использованием метода дерева решений. Сначала представим γ (УТ)-модифицированные методы/критерии реализации выбора в формате процедур блокировки, которые были формализованы в гл. 6. Как уже отмечалось, они более эффективно адаптируют выбор к предпочтениям ЛПР. Для краткости изложения оптимизацию запасов с учетом рисков проиллюстрируем в формате следующих критериев выбора указанного типа: γ (УТ)-модифицированного минимаксного критерия; γ (УТ)-модифицированного критерия среднего геометрического; γ (УТ)-модифицированного критерия Гурвица. После этого кратко представим \bar{k} (УТ)-модифицированные методы/критерии реализации выбора в формате процедур блокировки (на ветвях дерева решений), которые были формализованы в гл. 7.

Метод γ (УТ)-модифицированного минимаксного критерия. На первом шаге в формате процедур этого метода уточняется параметр $\gamma \in [0; 1]$. Пусть, как и в предыдущих моделях, принято, что $\gamma=1$.

Шаг 2. Координаты утопической точки УТ (точки с наилучшими оценками частных критериев) уже были представлены выше в табл. 8.31 и 8.32 (см. последнюю строку в любой из указанных таблиц). Наименьшая из координат УТ составляет $a_{\gamma}^*=925$. По формулам (6.1) главы 6 определяем показатели Δ_j^* для сдвигов по j -ой координатной оси в случае 100%-го формата сдвига:

$$\Delta_1^* = 6786,8 - 925 = 5861,8; \quad \Delta_2^* = 2930,8 - 925 = 2005,8;$$

$$\Delta_3^* = 925 - 925 = 0; \quad \Delta_4^* = 960 - 925 = 35.$$

Поскольку $\gamma=1$, то для показателей $\Delta_j^*(\gamma)$ имеем те же значения: $\Delta_j^*(\gamma) = \Delta_j^*$. По формулам (6.1) – (6.3) вычисляем модифицированные оценки частных критериев. Эти процедуры приведены в табл. 8.34.

Таблица 8.34.

Процедуры γ (УТ)-модификации для оценок частных критериев

Решения	Модифицированные оценки частных критериев:			
	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	$6943,5-5861,8= 1081,7$	$5922,7-2005,8= 3916,9$	$925- 0 = 925$	$960-35= 925$
S_2	$6786,8-5861,8= 925,0$	$5800,5-2005,8= 3794,7$	$925- 0 = 925$	$2080-35=2045$
S_3	$9322,7-5861,8=3460,9$	$50519,0-2005,8 = 925$	$1321,4- 0 = 1321,4$	$1520-35=1385$

Таблица 8.35.

Выбор по γ (УТ)-модифицированному минимаксному критерию при оптимизации запасов с учетом рисков

Решения	Модифицированные оценки частных критериев:				Показатель критерия выбора
	C_1	C_2	C_3	C_4	
S_1	1081,7	3916,9	925	925	3916,9
S_2	925	3794,7	925	2045	3794,7
S_3	3460,9	925	1321,4	1385	3460,9

Шаг 3. В формате найденных в табл. 8.34 модифицированных оценок частных критериев реализуем процедуры минимаксного критерия (см. последний столбец в табл. 8.35). Среди элементов указанного столбца выбираем наименьший. Он равен 3460,9 (выделен в таблице). Оптимальным решением по γ (УТ)-модифицированному минимаксному критерию является выбор решения S_3 . Это решение соответствует стратегии диверсификации поставок: процедуры γ (УТ)-модификации существенно расширили возможности выбора для менеджера. Имеющаяся теперь у него возможность выбора стратегии диверсификации поставок в качестве наилучшего решения раньше была проблемной.

Метод γ (УТ)-модифицированного критерия среднего геометрического. Напомним, что реализация шагов 1 - 2 такого алгоритма оптимизации не зависит от формата критерия выбора. Результат зависит от задаваемого значения параметра $\gamma \in [0; 1]$. Пусть снова принято, что $\gamma=1$. Тогда модифицированные оценки частных критериев останутся такими же, как и в табл. 8.34.

Шаг 3. Найдем наилучшее решение по γ (УТ)-модифицированному критерию среднего геометрического. Для каждой альтернативы по новым оценкам частных критериев определяем показатель среднего геометрического или показатель их произведений, - см. табл. 8.36.

Таблица 8.36.
Выбор по γ (УТ)-модифицированному критерию среднего геометрического при оптимизации запасов с учетом рисков

Решения	Модифицированные оценки частных критериев:				Показатель произведения
	C_1	C_2	C_3	C_4	
S_1	1081,7	3916,9	925	925	$3,6 \cdot 10^{12}$
S_2	925	3794,7	925	2045	$6,6 \cdot 10^{12}$
S_3	3460,9	925	1321,4	1385	$5,6 \cdot 10^{12}$

Показатели произведений для модифицированных оценок частных критериев приведены в дополнительном столбце табл. 8.36. Наименьший из них равен $3,6 \cdot 10^{12}$ (выделен в таблице). Он соответствует альтернативе S_1 . Она и является оптимальной по γ (УТ)-модифицированному критерию среднего геометрического (произведений). Соответственно альтернативы S_2 и S_3 на дереве решений будут заблокированы. Рисунок, иллюстрирующий такую ситуацию, вполне аналогичен рис. 8.4: он опускается. В формате рассматриваемой оптимизационной модели управления запасами в условиях риска указанный выбор совпадает с выбором по методу среднего геометрического без процедур по γ (УТ)-модификации (напомним, в табл. 8.33 также выбиралась альтернатива S_1).

Метод γ (УТ)-модифицированного критерия Гурвица. Пусть снова $\gamma=1$. Тогда шаги 1-2 алгоритма оптимизации можно не повторять. Модифицированные оценки частных критериев соответствуют табл. 8.34. Реализуем последующие шаги алгоритма оптимизации по Л.Гурвицу (см. параграф 6.3).

Шаг 3. К таблице с модифицированными оценками частных критериев припишем три столбца. Это – столбцы « $\text{Max} \{ \hat{g}^{(k)} \}$ »; « $\text{Min} \{ \hat{g}^{(k)} \}$ »; «Показатель критерия выбора». В третьем (последнем из них) найдены средневзвешенные показатели для элементов указанных первых двух с весами « c » и « $1-c$ » соответственно. Эти процедуры представлены в табл. 8.37 для случая $c=0,7$.

Таблица 8.37.
Выбор по γ (УТ)-модифицированному критерию Гурвица при оптимизации запасов с учетом рисков

Решения	Модифицированные оценки частных критериев:				$\text{Max} \{ \hat{g}^{(k)} \}$	$\text{Min} \{ \hat{g}^{(k)} \}$	Показатель критерия Гурвица
	C_1	C_2	C_3	C_4			
S_1	1081,7	3916,9	925	925	3916,9	925	2992,3
S_2	925	3794,7	925	2045	3794,7	925	2933,8
S_3	3460,9	925	1321,4	1385	3460,9	925	2700,1

Минимальный элемент последнего столбца равен 2700,1 (выделен в таблице). Оптимальным решением по γ (УТ)-модифицированному критерию Гурвица является выбор альтернативы S_3 . Соответственно альтернативы S_1 и S_2 на дереве решений будут заблокированы. Кстати, указанное решение будет наилучшим по γ (УТ)-модифицированному критерию Гурвица при любом другом значении весового коэффициента $c \in (0; 1)$. Стратегия диверсификации всегда будет выбрана в качестве оптимальной по этому критерию. Можно отметить, что теперь для менеджера имеется возможность обосновать выбор стратегии диверсификации поставок по γ (УТ)-модифицированному критерию Гурвица. Такая возможность ранее отсутствовала. Это расширяет арсенал средств менеджера для адаптации выбора к предпочтениям ЛПР.

Далее для рассматриваемой задачи многокритериальной оптимизации запасов в условиях риска (с использованием дерева решений) иллюстрируются \vec{k} (УТ)-модифицированные методы (они были формализованы в гл. 7) для процедур блокировок. Будет представлена иллюстрация таких процедур в формате следующих подходов к многокритериальной оптимизации: \vec{k} (УТ)-модифицированного

минимаксного критерия; $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия идеальной точки; $\vec{k}(UT)$ -преобразований для модифицированного критерия произведений; $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия Гурвица.

Метод $\vec{k}(UT)$ -модифицированного минимаксного критерия. В формате такого подхода реализуются следующие шаги алгоритма оптимизации.

Шаг 1. задается вектор $\vec{k} = (k_1; k_2; \dots; k_5)$ «коэффициентов доверия/важности» к оценкам частных критериев. Пусть, для удобства изложения и последующих расчетов такие коэффициенты заданы следующим образом: $\vec{k} = (1; 10; 10; 6)$.

Шаг 2. По формулам (7.1) – (7.4) реализуются процедуры $\vec{k}(UT)$ -преобразований. Напомним, что координаты УТ приведены в табл. 8.31 и табл. 8.32. По формулам (7.1) имеем: $g_1^* = 1/6786,8$; $g_2^* = 1/2930,8$; $g_3^* = 1/925$; $g_4^* = 1/960$. По формулам (7.3) находим требуемые параметры:

$$g_1^*(\vec{k}) = k_1 \cdot g_1^* = 1 \cdot 1/6786,8 = 1/6786,8;$$

$$g_2^*(\vec{k}) = k_2 \cdot g_2^* = 10 \cdot 1/2930,8 = 1/293,08;$$

$$g_3^*(\vec{k}) = k_3 \cdot g_3^* = 10 \cdot 1/925 = 1/92,5;$$

$$g_4^*(\vec{k}) = k_4 \cdot g_4^* = 6 \cdot 1/960 = 1/160;$$

Используя преобразования, представленные в табл. 7.2 главы 7, находим «пересмотренные» оценки частных критериев: они сведены в табл. 8.38 (с использованием обозначений главы 7).

Таблица 8.38.

«Пересмотренные» оценки частных критериев при $\vec{k}(UT)$ -модификации для задачи оптимизации запасов с учетом рисков

Решения	«Пересмотренные» оценки для критериев:			
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$
S ₁	6943,5/6786,8=1,02	5922,7/293,08=20,21	925/92,5=10,00	960/160=6
S ₂	6786,8/6786,8=1,00	5800,5/293,08=19,79	925/92,5=10,00	2080/160=13
S ₃	9322,7/6786,8=1,37	2930,8/293,08=10,00	1321,4/92,5=14,28	1520/160=9,5

Шаг 2. Для «пересмотренных» оценок частных критериев реализуем процедуры минимаксного критерия. Результаты приведены в дополнительном столбце ($\text{Max}\{\check{g}^{(k)}\}$) табл. 8.39.

Таблица 8.39.

Выбор по $\vec{k}(UT)$ -модифицированному минимаксному критерию при оптимизации запасов с учетом рисков.

Решения	«Пересмотренные» оценки частных критериев				$\text{Max}\{\check{g}^{(k)}\}$
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	
S ₁	1,02	20,21	10,00	6	20,21
S ₂	1,00	19,79	10,00	13	19,79
S ₃	1,37	10,00	14,28	9,5	14,28

Минимальный элемент указанного дополнительного столбца равен 14,28 (выделен в таблице). Оптимальным решением по $\vec{k}(UT)$ -модифицированному минимаксному критерию является выбор стратегии S_3 . Соответственно альтернативы S_1 и S_2 на дереве решений будут заблокированы. Отметим, как расширились у менеджера возможности адаптации выбора к предпочтениям ЛПР. Уже на основе использования указанного критерия можно рекомендовать ЛПР альтернативу диверсификации поставок, выбор которой ранее был заблокирован в формате традиционного варианта минимаксного критерия.

Метод $\vec{k}(UT)$ -модифицированного критерия идеальной точки. Пусть для удобства сравнения результатов выбора снова $\vec{k} = (1; 10; 10; 6)$. Тогда «пересмотренные» оценки частных критериев будут такими же, как и в табл. 8.38 (см. также табл. 8.39).

Шаг 3. Реализуем процедуры ИТ-критерия. Результаты приведены в табл. 8.40. Для удобства иллюстрации процедур этого критерия в последней строке табл. 8.40 дополнительно представлены координаты $UT_{пер}$ (утопической точки в пространстве «пересмотренных» оценок частных критериев).

Таблица 8.40.

Выбор по $\vec{k}(UT)$ -модифицированному критерию идеальной точки при оптимизации запасов с учетом рисков

Решения	«Пересмотренные» оценки частных критериев				Показатель расстояния до $UT_{пер}$
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	
S_1	1,02	20,21	10,00	6	10,21
S_2	1,00	19,79	10,00	13	12,04
S_3	1,37	10,00	14,28	9,5	5,54
$UT_{пер}$	1,00	10,00	10,00	6	

Шаг 4. Наименьший элемент дополнительного столбца в табл. 8.40 равен 5,54 (выделен в таблице). Оптимальным решением по $\vec{k}(UT)$ -модифицированному критерию идеальной точки является выбор альтернативы S_3 . Соответственно альтернативы S_1 и S_2 на дереве решений будут заблокированы. Как видим, и в этом случае выбрана стратегия диверсификации поставок.

Метод $\vec{k}(UT)$ -преобразований для модифицированного критерия произведений или среднего геометрического. Пусть снова $\vec{k} = (1; 10; 10; 6)$. Тогда «пересмотренные» оценки частных критериев будут соответствовать тем, которые приведены в табл. 8.38.

Шаг 3. Используя указанные «пересмотренные» оценки, требуется найти показатели выигрышей относительно модифицированных антиутопических точек (см. п. 3.5 главы 3) AUT_{mod} и/или $AUT(mod)$. Для краткости изложения ограничимся иллюстрацией применительно к формату, обусловливаемому антиутопической точкой AUT_{mod} . Ее координаты приведены в табл. 8.41.

Таблица 8.41.

Координаты модифицированной антиутопической точки AUT_{mod} для задачи оптимизации запасов с учетом рисков.

Точки	Соответствующие координаты при «пересмотренных» оценках частных критериев			
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$
AUT_{mod}	2,37	21,21	15,28	14

Показатели выигрышей для «пересмотренных» оценок частных критериев (относительно АУТ_{mod}) приведены в табл. 8.42.

Таблица 8.42.

Оптимальный выбор с учетом $\vec{k}(УТ)$ -преобразований для модифицированного критерия среднего геометрического (формат АУТ_{mod})

Решения	«Выигрыши» относительно АУТ _{mod} для пересмотренных оценок частных критериев				Показатель произведений
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$	
S ₁	1,35	1,00	5,28	8	1,35·1·5,28·8 = 57,0
S ₂	1,37	1,42	5,28	1	1,37·1,42·5,28·1=10,3
S ₃	1,00	11,21	1,00	4,5	1·11,21·1·4,5= 50,5

Шаг 4. В дополнительном столбце таблицы 8.42 приведены показатели критерия выбора: использованы произведения элементов соответствующих строк.

Шаг 5. Наибольший показатель среди элементов дополнительного столбца в табл. 8.42 равен 57,0 (выделен в таблице). Альтернатива S₁ является наилучшей в формате рассматриваемых процедур оптимизации по модифицированному критерию среднего геометрического (формат антиутопической точки АУТ_{mod}). Графическую иллюстрацию с использованием дерева решений дайте самостоятельно.

Метод $\vec{k}(УТ)$ -модифицированного критерия Гурвица. Пусть снова $\vec{k} = (1; 10; 10; 6)$. «Пересмотренные» оценки частных критериев соответствуют тем, которые приведены в табл. 8.38.

Шаг 3. К указанной таблице припишем три дополнительных столбца (см. табл. 8.43). В столбце «Max{ $\check{g}^{(k)}$ }» представлены самые большие показатели по строкам таблицы. В столбце «Min{ $\check{g}^{(k)}$ }» - наименьшие такие показатели. В третьем столбце – средневзвешенный результат для первых двух дополнительных столбцов с весами «c» и «1-c». Эти процедуры иллюстрирует табл. 8.43 при c=0,7.

Таблица 8.43.

Выбор по $\vec{k}(УТ)$ -модифицированному критерию Гурвица при оптимизации запасов с учетом рисков

Решения	«Пересмотренные» оценки частных критериев:				Max { $\check{g}^{(k)}$ }	Min { $\check{g}^{(k)}$ }	Показатель критерия Гурвица
	$\check{g}^{(1)}$	$\check{g}^{(2)}$	$\check{g}^{(3)}$	$\check{g}^{(4)}$			
S ₁	1,02	20,21	10,00	6	20,21	1,02	14,45
S ₂	1,00	19,79	10,00	13	19,79	1,00	14,15
S ₃	1,37	10,00	14,28	9,5	14,28	1,37	10,40

Шаг 4. Минимальный элемент в последнем столбце табл. 8.43 равен 10,4 (выделен в таблице). Оптимальным решением по $\vec{k}(УТ)$ -модифицированному критерию Гурвица в рассматриваемой ситуации будет выбор альтернативы S₃. Соответствующие комментарии и графическую иллюстрацию в формате дерева решений дайте самостоятельно.

Представленные материалы на примере модели оптимизации запасов с учетом рисков проиллюстрировали следующее. Для реализации процедур блокировки (по методу дерева решений) при многих критериях в арсенал менеджера можно включить изложенные в гл. 6 - 7 методы модификации критериев выбора на основе $\gamma(UT)$ -преобразований и на основе $\bar{k}(UT)$ -преобразований. Это поможет менеджеру более эффективно адаптировать выбор оптимального решения к предпочтениям ЛПР.

ВОПРОСЫ (по материалам главы 8)

1. Перечислите атрибуты задачи выбора места дислокации и формы собственности склада, представленной в главе 8 для иллюстрации модели многокритериальной оптимизации с учетом риска.
2. Какой формат концепции риска позволяют учитывать такие модели многокритериальной оптимизации?
3. Как можно учесть особенность страховых контрактов в формате указанных оптимизационных моделей?
4. Уточните особенности выбора оптимального решения, которые имели место в формате традиционных критериев выбора прямого типа для рассматриваемой в этой главе задачи. Будет ли менеджер удовлетворен такими возможностями реализации выбора?
5. Отметьте соответствующие особенности, обусловливаемые использованием $\gamma(UT)$ - модифицированных критериев выбора в формате указанной задачи. В частности, - что можно сказать о расширении арсенала средств менеджера для адаптации выбора к предпочтениям ЛПР?
6. Отметьте соответствующие особенности, обусловливаемые использованием $\bar{k}(UT)$ - модифицированных критериев выбора в формате указанной задачи. В частности, - что можно сказать о расширении арсенала средств менеджера для адаптации выбора к предпочтениям ЛПР в этом случае?
7. Каким образом задача оптимального управления запасами в условиях риска может быть формализована в виде задачи оптимизации при многих критериях? Какие факторы и показатели менеджер может учитывать в формате такой оптимизационной модели?
8. Укажите, какая специфика выбора оптимального решения будет обусловлена форматом указанной модели для задачи оптимизации запасов при многих критериях.
9. Какие особенности модифицированных критериев выбора при многокритериальной оптимизации системы управления запасами позволили выбрать стратегию диверсификации поставок (в качестве наилучшей альтернативы)?
10. Какие выводы можно сделать относительно необходимости, целесообразности и эффективности расширения арсенала средств менеджера для адаптации выбора к специфике предпочтений ЛПР при решении многокритериальных задач оптимизации запасов с учетом рисков?

Раздел III.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ В ЛОГИСТИКЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ

Методы, представленные в предыдущих разделах, предполагают формальное представление частных критериев для реализации процедур многокритериальной оптимизации. Это потребует привлечения специального математического аппарата. Можно ли упростить решение задач указанного типа? Такой вопрос становится все более актуальным, поскольку с учетом бурного развития логистики в формате задач системного анализа и оптимизации логистических структур число соответствующих элементов и их взаимосвязей оказывается настолько большим, что превосходит способность исследователя воспринимать и обрабатывать информацию в полном объеме. В таких случаях используются приемы декомпозиции системы: она делится на подсистемы с учетом имеющихся связей между ними. Одним из возможных способов указанной формализации является иерархическое представление системы. Иерархии дают способ представления систем, в формате которого:

- элементы системы могут быть распределены по группам в не связанные множества, называемые уровнями (далее считаем, что элементы одного уровня иерархии независимы между собой);
- элементы каждого уровня находятся под непосредственным влиянием элементов другого уровня (его называют более «высоким» уровнем иерархии);
- кроме того, элементы каждого уровня, в свою очередь, оказывают непосредственное влияние на элементы следующего (более «низкого») уровня.

Важным атрибутом для указанного формата задач оптимизации систем логистики является построение иерархии, воспроизводящей имеющиеся функциональные отношения в системе. Для этого сначала перечисляются все элементы, относящиеся к иерархии. Затем они распределяются по группам (уровням) в соответствии с влиянием между такими группами. Так выделяются уровни иерархии. Определяются цели, ради которых ставится задача и строится соответствующая иерархия. В формате заданной иерархии для конкретной системы логистики ставится задача анализа / оптимизации соответствующего звена или звеньев цепи поставок.

Метод аналитической иерархии (Analytic Hierarchy Process – АНР, см., например, [Саати Т.]) в рамках процедур анализа и оптимизации систем различного типа широко распространен в настоящее время, - в том числе применительно к системам логистики и цепям поставок. В основе этого метода реализуется идея направить усилия менеджера и/или ЛПР на сравнение только вполне определенных или заданных (например, выделенных в качестве возможных, доступных, наиболее интересных или перспективных) альтернативных решений. Как отмечено в [Шикин Е.], такой подход зачастую представляется и разумным, и более предпочтительным при небольшом числе анализируемых альтернатив, чем, например, подход, связанный с затратами усилий менеджера и ЛПР на построение соответствующих функций полезности в рамках реализации прямых методов многокритериальной оптимизации с использованием атрибутов теории полезности [Ларичев О.], [Саати Т.].

Кстати, атрибуты теории полезности используются в формате метода АНР. В частности, при сравнении показателей альтернатив (с позиции определенного критерия) или при сравнении самих заданных критериев (с позиции эффективности достижения цели функционирования системы) ЛПР имеет возможность выразить результаты такого сравнения с учетом собственной системы предпочтений. Это – несомненное достоинство метода АНР. Этот метод позволяет менеджеру ориентироваться непосредственно не на оценки заданных критериев оптимизации, а на функции от них, которые будут представлять результаты сравнений. Таким образом, использование метода АНР не предполагает формализацию частных критериев и реализацию процедур их оптимизации, например, как это было проиллюстрировано для методов, представленных в предыдущих разделах книги. Менеджеру достаточно использовать субъективные суждения ЛПР в формате соответствующих сравнений, которые оформляются в виде так называемых матриц сравнений. Это – простые и легко реализуемые процедуры, позволяющие ЛПР опираться на имеющийся опыт в бизнесе, имеющиеся резервы (финансовые, материальные, временные и т.д.), имеющиеся предпочтения.

Чтобы облегчить их наглядное представление, психологами в формате метода АНР разработана специальная удобная шкала. Поэтому можно считать, что результаты таких сравнений будут априори адаптированы к системе предпочтений ЛПР. Разумеется, за эти удобства (и достоинства метода) менеджеру придется все-таки «расплачиваться», вооружившись некоторым математическим аппаратом. Соответствующие математические процедуры будут относиться: 1) к нахождению собственных векторов для представленных ЛПР матриц сравнений (приближенными методами); 2) кроме того, - к проверке суждений ЛПР на согласованность таких формализованных матриц сравнений. Требуемые процедуры будут представлены в этой главе вместе с иллюстрациями и приложениями метода к анализу и оптимизации систем логистики.

ГЛАВА 9.

АТРИБУТЫ МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ. ОСОБЕННОСТИ ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ЛОГИСТИКЕ

9.1 Общая схема метода аналитической иерархии.

Постановка задачи многокритериальной оптимизации системы логистики, решаемой с помощью метода АНР, как правило, выглядит следующим образом.

- Задана общая цель (или цели), обусловливаемые назначением анализируемой системы.
- Заданы m альтернативных решений для достижения цели.
- Заданы N критериев, по которым оцениваются имеющиеся альтернативы в формате задач оптимизации анализируемого звена / звеньев цепи поставок.
- *Требуется:* выбрать наилучшую альтернативу.

Метод АНР предполагает реализацию следующих этапов для решения задач указанного типа.

Этап 1 (СТРУКТУРИЗАЦИЯ ИЕРАРХИИ). На первом этапе исходная задача представляется в виде соответствующей иерархической структуры по уровням: «цели – критерии – альтернативы».

Этап 2 (ПОПАРНЫЕ СРАВНЕНИЯ). Второй этап состоит в реализации попарных сравнений для элементов каждого уровня с учетом специфики их оценки элементами (критериями, целями) предыдущего более высокого уровня иерархии. Результаты такого сравнения (для каждой пары элементов одного уровня иерархии по оценкам одного типа) представляются соответствующей матрицей сравнения. Процедуры формализации таких матриц сравнения позволяют учитывать предпочтения ЛПР. Для удобства реализации процедур попарного сравнения в формате метода АНР разработана специальная шкала. Она позволит ЛПР реализовать имеющиеся предпочтения (вполне аналогично тому, как это может быть реализовано в формате концепции полезностей).

Этап 3 (ВЕСА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ВАЖНОСТИ). Для каждой матрицы сравнений определяются ее собственные векторы (реализуются приближенные методы их нахождения). Найденные значения компонент собственных векторов для каждой матрицы сравнений позволяют определить веса и коэффициенты важности для сравниваемых элементов соответствующего уровня иерархии. Далее при сравнении критериев (по их важности / эффективности для достижения цели) показатели такого типа (на их основе может быть восстановлена матрица сравнений) называем «весами». При сравнении альтернативных решений (по конкретному критерию) такие показатели называем «коэффициентами важности». Результаты указанных процедур оформляются в виде специальных таблиц. При этом проверяется согласованность суждений ЛПР.

Этап 4 (ПРИОРИТЕТЫ АЛЬТЕРНАТИВ). Наконец, вычисляются итоговые количественные индикаторы качества для каждой из альтернатив. Их называют приоритетами. Указанные показатели позволяют определить наилучшее альтернативное решение для соответствующей системы логистики. Это – альтернатива с наивысшим приоритетом.

Ниже будет представлена специфика процедур каждого этапа с иллюстрациями в формате условного примера. Для удобства и компактности изложения сначала представим процедуры первого и последнего этапов. Затем будут формализованы процедуры попарного сравнения и определения весовых коэффициентов и коэффициентов важности для элементов последних двух уровней иерархии (с позиций более высокого уровня иерархии).

9.2. Процедуры структуризации иерархии и нахождения приоритетов альтернатив

СТРУКТУРИЗАЦИЯ ИЕРАРХИИ. Как видно из общей схемы метода АНР первый его этап подразумевает структуризацию задачи многокритериальной оптимизации для анализируемой логистической системы в виде иерархии. Суть таких процедур уже была отмечена выше. Это – построение иерархической структуры по уровням «цели – критерии – альтернативы». Поэтому ограничимся здесь иллюстрацией соответствующих процедур структуризации для приложений логистики. Рассмотрим, например, условную задачу наилучшего выбора площадки под строительство нового терминала.

Анализируется следующая ситуация. Пусть в силу благоприятных обстоятельств развития бизнеса для некоторой компании возникла необходимость в строительстве нового терминала за чертой города. После некоторых дискуссий руководство компании определило следующие три критерия для оценки вариантов выбора площадки под строительство нового терминала (разумеется, реально их может быть значительно больше, - см., например, п. 8 главы 8).

1. **Стоимость строительства** (желательно построить терминал с заданными параметрами пропускной способности, чтобы затраты на его стоимость были наименьшими).
2. **Время в пути** (желательно, чтобы доставка груза к терминалу в формате имеющихся транспортных коммуникаций занимала наименьшее возможное время).
3. **Потери времени на оказание услуг** (желательно, чтобы неудобства для клиентов, связанные с потерями времени при парковке и возможными ожиданиями в очереди, оказались минимальными).

Пусть уже предварительно отобраны четыре альтернативных варианта (из значительно большего числа различных возможных вариантов) площадок для строительства терминала. Обозначим их через А, В, С, D. Требуется определить наилучший из этих вариантов с учетом указанных трех критериев. Тогда соответствующая структуризация решаемой задачи может быть представлена в виде иерархии, которую иллюстрирует рис. 9.1.



Рис. 9.1. Иерархическая структура применительно к задаче выбора площадки для строительства терминала.

Как видно из рис. 9.1 в данном случае первый (наивысший) уровень иерархии имеет одну цель (строительства нового терминала): обеспечение приема, хранения и отправки соответствующего планируемого компанией количества определенных грузов. Элементы второго уровня иерархии это - три критерия: стоимость строительства терминала; время в пути; потери времени на ожидание / оказание услуг, обуславливаемые, например, удобствами расположения, размерами анализируемых площадок, их уровнем технического оснащения и т.п. Третий уровень иерархии имеет четыре элемента: это - альтернативы выбора площадок А, В, С и D.

ПРИОРИТЕТЫ АЛЬТЕРНАТИВ. Как уже было отмечено выше, результатом реализации процедур второго и третьего этапов метода АНР будет нахождение:

- весовых коэффициентов (или весов) W_i для всех элементов одного уровня иерархии, относящегося к заданным критериям оценки альтернатив (подчеркнем, что сумма весов заданных критериев будет равна единице);

- коэффициентов важности v_{ki} для k -ой альтернативы по i -му критерию (сумма коэффициентов важности всех анализируемых альтернатив по любому из критериев также будет равна единице).

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку при иллюстрации в условном примере альтернативы-площадки обозначены буквами (А, В, С, D), то для указанных коэффициентов важности по i -му критерию будем использовать также обозначения v_{Ai} , v_{Bi} , v_{Ci} , v_{Di} . Кстати, указанные коэффициенты важности можно формализовать таким образом, чтобы их сумма была равна 100 (%), если приоритеты альтернатив удобнее представлять в процентах.

Для удобства изложения процедур четвертого этапа (процедур нахождения приоритетов для анализируемых альтернатив) считаем, что указанные параметры (показатели w_i и v_{ki}) уже определены. В частности, если ЛПП априори не сомневается в их значениях, то соответственно процедуры второго и третьего этапов могут быть опущены. Когда указанные показатели известны, их «приписывают» к соответствующим ребрам графа, представляющего иерархическую структуру. Например, пусть для иерархии на рис. 9.1 известно следующее (формализация этих численных показателей будет приведена в следующих двух параграфах).

- Веса критериев C_1 , C_2 и C_3 с точки зрения эффективности достижения цели строительства терминала определяются равенствами

$$w_1 = 0,69; w_2 = 0,23; w_3 = 0,08 \quad (\Sigma = 1).$$

- Коэффициенты важности альтернатив А, В, С и D по критерию C_1 (стоимость строительства) равны

$$v_{A1} = 0,04; v_{B1} = 0,13; v_{C1} = 0,27; v_{D1} = 0,56 \quad (\Sigma = 1).$$

- Коэффициенты важности альтернатив А, В, С и D по критерию C_2 (время в пути) задаются соотношениями

$$v_{A2} = 0,52; v_{B2} = 0,20; v_{C2} = 0,20; v_{D2} = 0,08 \quad (\Sigma = 1).$$

- Коэффициенты важности альтернатив А, В, С и D по критерию C_3 (потери времени на оказание услуг) определяются равенствами

$$v_{A3} = 0,40; v_{B3} = 0,40; v_{C3} = 0,14; v_{D3} = 0,06 \quad (\Sigma = 1).$$

Теперь результат «разметки» графа для указанных уровней анализируемой иерархии на рис. 9.1 можно представить в виде, который приведен на рис. 9.2. Представим процедуры определения итоговых показателей приоритетов альтернатив для «разметки» самого нижнего уровня иерархии.

Соответствующая разметка графа для первых двух верхних уровней анализируемой иерархии позволяет менеджеру легко находить показатели, на основе которых определяется оптимальное решение по методу АНР. Такие итоговые показатели, как уже отмечалось выше, называют *приоритетами* альтернатив. Будем обозначать их следующим образом: V_A – приоритет альтернативы А; V_B – приоритет альтернативы В; V_C – приоритет альтернативы С; V_D – приоритет альтернативы D. На размеченном графе иерархии приоритеты «приписываются» анализируемым альтернативам. Для каждой альтернативы показатель ее приоритета синтезируется по коэффициентам важности (v_{ki}) этой альтернативы (для всех заданных критериев оценки альтернатив) с учетом весов (w_i) этих критериев. Указанный синтез осуществляется по следующим формулам:

$$V_k = \sum w_i \cdot v_{ki}, \quad (9.1)$$

где

- V_k – итоговый показатель качества или приоритет k -той альтернативы в рамках анализа заданной иерархической структуры по методу АНР);
- w_i – вес i -го критерия, т.е. i -ая компонента нормированного собственного вектора-столбца для матрицы попарных сравнений заданных критериев по их важности для достижения цели (см. ниже п. 9.4);
- v_{ki} – показатель важности k -той альтернативы по i -му критерию, т.е. k -ая компонента нормированного собственного вектора-столбца для соответствующей матрицы попарных сравнений альтернатив с позиций i -го критерия (см. ниже п. 9.4).

Наконец, подчеркнем следующее. По значениям найденных приоритетов анализируемых альтернатив и определяется решение, которое принимается в качестве оптимального или наилучшего по методу аналитической иерархии. Это будет решение с наибольшим приоритетом.

Приведем соответствующие иллюстрации в формате условного примера, для которого «размеченный» граф иерархии представлен на рис. 9.2.

ПРИМЕР 9.1 (Определение наилучшей альтернативы в формате метода АНР). Для иерархии, представленной на рис. 9.2, реализуем синтез весовых коэффициентов и коэффициентов важности для нахождения приоритетов анализируемых альтернативных решений. Для анализируемых альтернатив А, В, С, D выбора площадки под строительство нового терминала получаем следующие показатели их качества или приоритета:

$$V_A = 0,69 \cdot 0,04 + 0,23 \cdot 0,52 + 0,08 \cdot 0,40 = 0,1792 ;$$

$$V_B = 0,69 \cdot 0,13 + 0,23 \cdot 0,20 + 0,08 \cdot 0,40 = 0,1677 ;$$

$$V_C = 0,69 \cdot 0,27 + 0,23 \cdot 0,20 + 0,08 \cdot 0,14 = 0,2435 ;$$

$$V_D = 0,69 \cdot 0,56 + 0,23 \cdot 0,08 + 0,08 \cdot 0,06 = 0,4096 .$$

Напомним, что формула для определения этих итоговых показателей приоритетов в формате рассматриваемой модели с тремя критериями будет содержать три слагаемых. Например, для определения приоритета альтернативы А она принимает вид $V_A = w_1 \cdot v_{A1} + w_2 \cdot v_{A2} + w_3 \cdot v_{A3}$. Как видим, приоритет альтернативы D является самым высоким (он составляет 40,96 %). Соответственно это альтернативное решение – *наилучшее* по методу аналитической иерархии.

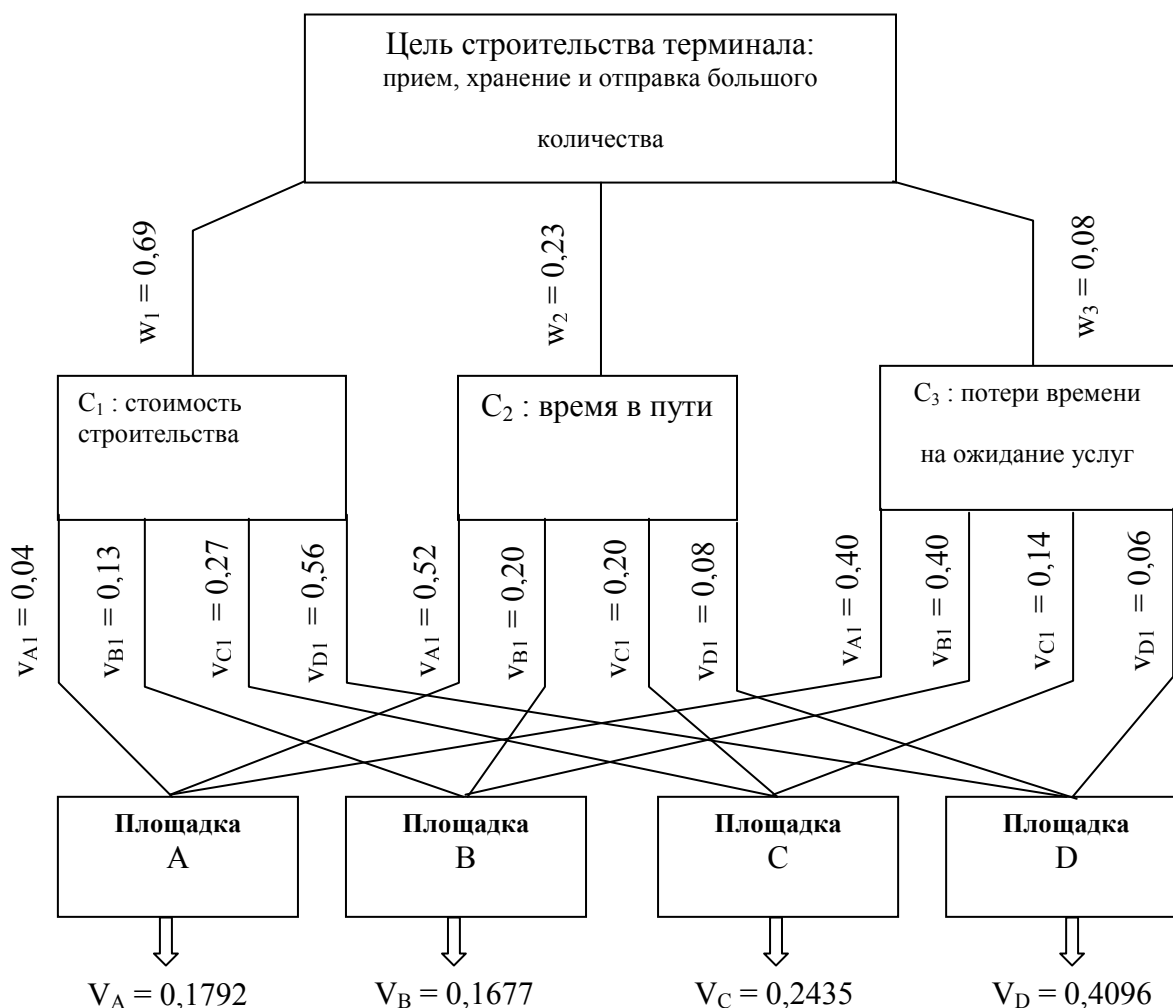


Рис. 9.2. Размеченный граф иерархии с приоритетами альтернатив.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ниже мы проиллюстрируем реализацию всех остальных процедур метода АНР на этом условном примере. Поэтому далее для определенности будем считать, что анализируемые четыре варианта выбора площадок для строительства терминала имеют следующие оценки (их требуется минимизировать) по указанным трем критериям (в порядке нумерации критериев и с учетом некоторых принятых удобных для ЛПР единиц измерения):

А (200; 60; 20); С (160; 80; 30);

В (175; 80; 20); D (150; 90; 40).

9.3. Формализация процедур попарных сравнений

Вернемся к представленной выше общей схеме метода АНР. Из названий процедур этого метода видно, что реализация двух последующих его этапов (после структуризации задачи в виде иерархии) потребует привлечения специальных знаний для ряда понятий. В этом параграфе будут использованы понятия:

- шкалирование;
- сравнения в формате предпочтений ЛПР;
- матрица попарных сравнений (и некоторые ее свойства).

В следующем параграфе -

- согласованность попарных сравнений;
- индекс согласованности;
- собственные характеристики обратно-симметричной матрицы.

Далее приведем, кратко, основные сведения для указанных понятий, необходимые для реализации отмеченных процедур метода АНР. После этого вернемся к обсуждению соответствующих процедур метода применительно к приложениям логистики.

Метод АНР позволяет учитывать следующую особенность, обуславливаемую сравнениями элементов одного уровня иерархии. Учитывая имеющуюся репутацию / имидж, имеющиеся ресурсы (финансовые, материальные, временные и т.п.), имеющийся опыт в бизнесе и определенные навыки, разные ЛПР могут совершенно различным образом сравнить одни и те же элементы. Пусть, например, сравниваются показатели альтернатив по одному из критериев. При сравнении таких показателей разные ЛПР могут представить сильно отличающиеся результаты сравнений. В частности, представим соответствующую иллюстрацию для случая, когда сравниваются представленные выше показатели 200 (тыс. у.е.) для альтернативы А и 150 (тыс. у.е.) для альтернативы D по критерию стоимости строительства (в формате условного примера на рис. 9.1). В качестве результатов такого сравнения можно, например, получить (от разных ЛПР):

1. утверждение о том, что стоимость А больше, чем стоимость D, в $200/150 = 1,3$ раза (это – результат формального арифметического подхода); соответственно будет отмечено, что альтернатива D предпочтительнее альтернативы А в указанное число раз;
2. утверждение о том, что указанные показатели, практически, эквивалентны между собой (это – для ЛПР с таким финансовым положением, для которого разница в 50 тыс. у.е. может оказаться, практически, «незаметной» в формате его желания достижения цели);
3. утверждение о том, что показатель альтернативы D (150 тыс. у.е.) немного превосходит (так называемое умеренное превосходство) показатель альтернативы А (200 тыс. у.е.); это – для ЛПР такого уровня, для которого разница в 50 тыс. у.е. уже заметна, но ее считают небольшой;
4. утверждение о том, что показатель альтернативы D (150 тыс. у.е.) существенно превосходит (так называемое существенное превосходство) показатель альтернативы А (200 тыс. у.е.); это – для ЛПР такого уровня, для которого разница в 50 тыс. у.е. уже считается существенной;
5. и т.д.

Шкалирование. Результаты попарного сравнения элементов одного уровня иерархии (т.е. с позиции одного из критериев, либо с позиции соответствующей цели/целей) необходимо представлять количественными оценками. В общем случае используют подход, называемый «шкалированием». Соответствующие оценки ЛПР строит исходя из определенных эмпирических правил с учетом имеющегося собственного опыта и навыков. При попарных сравнениях ЛПР располагает шкалой словесных определений для относительной величины «важности» оцениваемых элементов одного уровня иерархии. Формат метода АНР использует 10 балльную шкалу для выражения предпочтений. Другими словами, если элемент А более предпочтителен, чем элемент В, то это будет представлено результатом сравнения в виде числа от 1 до 10 (в зависимости от степени предпочтения, причем 1 отражает равную важность). По рекомендации психологов в этой шкале выделены в качестве опорных пять уровней предпочтения: для позиций, соответствующих предпочтениям, которые представляются числами 1, 3, 5, 7 и 9. Выбор соответствующей шкалы обуславливается, как способностью человека производить разграничения сравниваемых элементов на качественном уровне, так и его психологическими пределами при одновременных сравнениях множества элементов. Соответствующая шкала относительной важности, позволяющая ЛПР формализовать свои суждения при попарных сравнениях на качественном уровне, представлена в таблице 9.1.

Табл. 9.1.

Шкала предпочтений в формате метода АНР

№ п/п	Уровни относительной важности для процедур сравнения	Количественное значение предпочтения
1	Равная важность (эквивалентность)	1
2	Умеренное превосходство	3

3	Существенное превосходство	5
4	Большое превосходство	7
5	Очень большое превосходство	9

Обратим внимание на то, что при желании ЛПР может (в рамках соответствующего подхода к шкалированию) использовать и “промежуточные” показатели (например, числа 2, 4, 6, 8, 10), выражая при этом соответственно “промежуточные” уровни относительной важности для имеющихся своих предпочтений. Более того, поскольку формат метода АНР не исключает и реализацию арифметического подхода к формализации имеющихся предпочтений, то соответствующие результаты сравнений могут быть представлены ЛПР и любым дробным числом из промежутка [1; 10].

Результаты сравнений оформляют в виде соответствующей матрицы, которую называют матрицей сравнений. Представим это понятие сначала применительно к ситуации идеальных сравнений (имеется ввиду реализация арифметического подхода для процедур сравнения).

Случай идеальных сравнений. Пусть необходимо сравнить, например, значения показателей некоторого критерия для имеющихся альтернативных решений при оптимизации системы логистики. Рассмотрим, прежде всего, идеальную ситуацию, когда:

- 1) с одной стороны, имеются идеально точные значения соответствующих сравниваемых показателей, которые обозначим b_1, b_2, \dots, b_n , где n - количество сравниваемых альтернатив по конкретному критерию;
- 2) с другой стороны, ЛПР не считает необходимым формализовать свое отношение к указанным показателям, т.е. предпочитает использовать арифметический подход для нахождения результатов сравнения альтернатив.

Отношение вида

$$a_{ik} = \frac{b_i}{b_k}, \text{ где } i, k \in \{1; 2; \dots; n\}$$

показывает, во сколько раз значение показателя b_i для i -той альтернативы больше, чем значение показателя b_k для k -той альтернативы по соответствующему критерию. Например (см. ситуацию в рамках представленной выше задачи выбора площадки под строительство нового терминала), если $b_1 = 200$ и $b_2 = 175$, то отношение $a_{12} = b_1 / b_2 = 200 / 175 = 1,14$ говорит о том, что значение показателя b_1 превышает в 1,14 раза значение показателя b_2 . Указанные отношения a_{ik} записывают в виде квадратной матрицы размера $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{b_1} & \frac{b_1}{b_2} & \dots & \frac{b_1}{b_n} \\ \frac{b_2}{b_1} & \frac{b_2}{b_2} & \dots & \frac{b_2}{b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_n}{b_1} & \frac{b_n}{b_2} & \dots & \frac{b_n}{b_n} \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Отметим очевидные свойства такой идеальной матрицы сравнений.

1. $\forall(i) a_{ii} = 1$, т.е. элементы главной диагонали такой матрицы сравнений всегда равны 1.
2. $\forall(i, k) a_{ik} \cdot a_{ki} = 1$, т.е. произведение элементов, симметричных относительно главной диагонали матрицы, равно 1.

3. $\forall(i, k, l) \ a_{ik} \cdot a_{kl} = a_{il}$, т.е. имеет место согласованность элементов такой матрицы сравнений на количественном уровне, которую можно рассматривать как соответствующий аналог свойства транзитивности для представленного матрицей отношения сравнения.
4. Вектор-столбец

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

является собственным столбцом матрицы сравнений A с собственным значением $\lambda = n$, т.е. имеет место равенство $A \times \vec{b} = n \cdot \vec{b}$.

Приведем некоторые понятия и результаты из теории матриц, которые будут использованы ниже.

Обратно-симметричные и согласованные матрицы. Пусть теперь A - некоторая квадратная матрица порядка n с положительными элементами, т.е. $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} > 0$.

Матрица A называется **обратно-симметричной**, если для любой пары индексов i и k выполняется соотношение $a_{ki} \cdot a_{ik} = 1$ (в частности, и $a_{ii} = 1$, т.е. все элементы главной диагонали равны 1).

Матрица A называется **согласованной**, если для любой тройки индексов i , k и l имеют место равенства $a_{ki} \cdot a_{il} = a_{kl}$.

Легко видеть, что представленная выше идеальная матрица сравнений, естественно, является положительной обратно-симметричной, и согласованной квадратной положительной матрицей порядка n .

Справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Положительная обратно-симметричная матрица является согласованной тогда и только тогда, когда порядок матрицы n совпадает с ее наибольшим собственным значением λ_{max} , т.е. имеет место равенство $\lambda_{max} = n$.

Сравнения в формате метода АНР. Вернемся к формату метода аналитической иерархии, позволяющему ЛПР formalизовать сравнения с учетом имеющегося опыта, навыков и имеющихся предпочтений. Пусть теперь величины b_1, b_2, \dots, b_n обозначают показатели сравниваемых элементов одного уровня иерархии (например, показатели альтернатив, которые сравниваются по одному из критериев). Результаты сравнения ЛПР формализует на основе представленной в табл. 9.1 шкалы предпочтений. Они будут записаны в виде квадратной матрицы порядка n . Сравнивая элементы b_i и b_k , ЛПР определяет какой из них является более предпочтительным (учитывая сами показатели и направление оптимизации).

Если ЛПР считает, что они эквивалентны между собой (имеют равную важность в формате шкалы табл. 9.1), то элемент a_{ik} в матрице сравнений будет «заполнен» числом 1. Соответственно и элемент a_{ki} этой матрицы также будет равен 1. Если среди элементов b_i и b_k имеется более предпочтительный, то поступают следующим образом. Пусть более предпочтительным элементом является b_i . Тогда элемент a_{ik} в матрице сравнений будет «заполнен» числом, большим, чем 1 (в соответствии со шкалой табл. 9.1). Соответственно элемент a_{ki} в матрице сравнений будет представлен «обратным» числом $1/a_{ik}$. По указанному правилу «заполняются» все элементы матрицы сравнений. Понятно, что указанная матрица будет положительной обратно-симметричной матрицей порядка n . Ее согласованность при этом не гарантируется. Поэтому процедуры анализа, представленные в следующем параграфе потребуют исследования такой матрицы сравнений на согласованность.

ПРИМЕР 9.2. Приведем иллюстрацию представления количественных результатов попарного сравнения (в виде соответствующей матрицы попарных сравнений). Рассмотрим в качестве примера соответствующий аспект обсуждавшейся выше ситуации, связанной с анализом выбора площадки под строительство нового терминала (с позиций одного из выбранных там критериев). А именно, пусть сравниваются варианты выбора площадок А, В, С, D, причем именно по критерию стоимости соответствующего строительства. Напомним, эти варианты были представлены ранее следующими показателями:

А (200; 60; 20); С (160; 80; 30);

В (175; 80; 20); D (150; 90; 40).

Здесь первый параметр характеризует стоимость строительства; второй – расстояние от города; третий – потери времени из-за возможных ожиданий в очереди при пользовании услугами терминала.

При определении количественных оценок для матрицы попарных сравнений ЛПР попарно сравнивает анализируемые альтернативы (в рамках соответствующего критерия), реализуя свое отношение к уровню относительной их важности, которое задает численно. В частности, пусть выражая свои суждения относительно предпочтений для показателя стоимости строительства нового терминала при сравнении анализируемых вариантов выбора площадок, ЛПР формализует свои предпочтения следующим образом.

- Вариант В (с показателем 175) существенно превосходит вариант А (с показателем 200). Соответственно в матрицу попарных сравнений в качестве ее элемента a_{21} будет записано число 5 (см. таблицу 9.1), а в качестве ее элемента a_{12} будет записано число $1/5$ (см. соответствующее свойство обратно-симметричных матриц попарных сравнений);
- Вариант С имеет уже большее превосходство (его показатель равен 160) по отношению к варианту А (с показателем 200). Соответственно в матрицу попарных сравнений в качестве ее элемента a_{31} будет записано число 7 (см. таблицу 9.1), а в качестве ее элемента a_{13} будет записано число $1/7$ (свойство обратно-симметричных матриц попарных сравнений).

Аналогичные процедуры попарных сравнений и их количественное представление по соответствующей шкале таблицы 9.1 реализуются для всех пар анализируемых вариантов, что позволит построить соответствующую обратно-симметричную матрицу попарных сравнений. Пусть в нашем примере согласно суждениям ЛПР далее принято следующее.

- Вариант D имеет очень большое превосходство по отношению к варианту А. Тогда в матрице попарных сравнений элемент a_{41} будет равен числу 9, а элемент a_{14} - числу $1/9$.
- Вариант С имеет умеренное превосходство по отношению к варианту В. Тогда в матрице попарных сравнений имеем $a_{32} = 3$ и $a_{23} = 1/3$.
- Вариант D имеет существенное превосходство по отношению к варианту В, т.е. в матрице попарных сравнений имеем $a_{42} = 5$ и $a_{24} = 1/5$.
- Наконец, вариант D имеет умеренное превосходство по отношению к варианту С, т.е. в матрице попарных сравнений имеем $a_{43} = 3$ и $a_{34} = 1/3$.

Указанные суждения ЛПР для перечисленных выше попарных сравнений альтернатив площадок под строительство нового терминала (по критерию стоимости строительства) с учетом принятого шкалирования позволяют выписать матрицу попарных сравнений. Эта матрица приведена в таблице 9. 2.

Табл. 9. 2.

Матрица сравнений по критерию стоимости строительства для площадок А, В, С, D.

Альтернативы	А	В	С	D
А	1	$1/5$	$1/7$	$1/9$
В	5	1	$1/3$	$1/5$
С	7	3	1	$1/3$
D	9	5	3	1

Процедуры анализа указанной матрицы попарных сравнений представлены в следующем параграфе. На их основе менеджер сможет реализовать «разметку» соответствующих ребер для графа анализируемой иерархии.

9.4. Процедуры формализации весов, коэффициентов важности и учета согласованности попарных сравнений

Как уже было отмечено выше, на заключительном этапе метода АНР для выбора наилучшего решения определяются качественные показатели анализируемых альтернатив, называемые приоритетами. Они определяются по формулами (9.1), приведенным в п. 9.2. Напомним, что для реализации этой процедуры необходимо уже знать следующие показатели: 1) «весовые» коэффициенты w_i для заданных i -критериев (характеризующих важность таких критериев для достижения цели); 2) коэффициенты важности

v_{ki} для анализируемых альтернатив ($k = 1; 2; \dots; n$) с позиции каждого i -критерия. Формат метода АНР не исключает, что ЛПР априори задаст указанные показатели w_i и v_{ki} (например, с учетом имеющихся навыков и опыта работы в бизнесе). При этом формализация процедур попарных сравнений, представленных ранее в п. 9.3, не понадобится. Как уже отмечалось, в такой ситуации для определения наилучшего решения будут сразу реализованы процедуры п. 9.2 с учетом формул 9.1.

В реальных ситуациях использования метода АНР на практике большинство ЛПР скорее предпочтут реализовать представленные ниже в этом параграфе формальные процедуры определения указанных показателей w_i и v_{ki} , чем полагаться на интуицию. В этом случае исходная информация для менеджера будет содержаться в соответствующих матрицах сравнения:

- 1) для нахождения «весовых» коэффициентов w_i это - матрицы сравнения заданных критериев (по их эффективности / важности для достижения цели);
- 2) для нахождения коэффициентов важности v_{ki} это - матрицы сравнения анализируемых альтернатив (по каждому из заданных i -критериев отдельно).

Подчеркнем, что процедуры нахождения указанных показателей (w_i и v_{ki}) по соответствующим матрицам попарного сравнения не зависят от того, для какого уровня иерархии они реализуются. Другими словами, и для матрицы попарного сравнения заданных критериев, и для матриц попарного сравнения анализируемых альтернатив (по таким критериям), указанные процедуры реализуются по одним и тем же правилам. Поэтому далее, как и в предыдущем параграфе, для компактности изложения будем говорить просто об исходных показателях и обозначать их через b_i (не уточняя, о каких типах показателей w_i или v_{ki} идет речь).

В идеальной ситуации (см. п. 9.3) матрицы попарного сравнения формализуют на основе соответствующих исходных показателей b_i ($i = 1; 2; \dots; n$) по формулам (9.2). Нас теперь интересует «обратная» ситуация. Ее суть – в следующем. Надо по заданной матрице попарного сравнения вида (9.2), причем, не зная самих показателей b_i (которые были использованы при ее формализации), восстановить исходные значения указанных показателей b_i . Можно ли это выполнить? Для лучшего понимания дадим иллюстрацию следующим примером.

ПРИМЕР 9.3. Пусть для трех заданных критериев ($C_1; C_2; C_3$) на основе показателей $b_1 = 9$, $b_2 = 3$ и $b_3 = 1$ формализована матрица попарных сравнений. Она представлена в табл. 9. 3. Показатели b_i менеджеру не известны. Ему предоставлена указанная матрица без объяснения того, как она была получена. Можно ли по матрице попарных сравнений из табл. 9.3 восстановить исходные значения показателей b_i ?

Таблица 9.3.

Матрица попарного сравнения критериев ($C_1; C_2; C_3$)

Критерии	C_1	C_2	C_3
C_1	1	3	9
C_2	1/3	1	3
C_3	1/9	1/3	1

РЕШЕНИЕ. Легко видеть, что исходные значения указанных показателей восстановить нельзя, если имеется только информация, которая представлена матрицей попарного сравнения. Действительно, если бы исходные показатели, например, были заданы равенствами $b_1 = 18$, $b_2 = 6$ и $b_3 = 2$ (т.е. были бы в два раза большими), то матрица попарных сравнений все равно была бы такой же, как и в табл. 9.3. Ситуация не изменится, если исходные показатели будут в два раза меньшими. И т.д.

Как видим, восстановить исходные значения показателей, на основе которых была формализована матрица попарных сравнений, нельзя. Но это можно сделать, указав соответствующий «масштаб» измерения таких показателей. Другими словами, можно восстановить их структуру с точностью до некоторого множителя. В формате метода АНР соответствующий «масштаб» измерения для показателей w_i и v_{ki} уже был указан ($\sum w_i = 1$ и $\sum v_{ki} = 1$). Поэтому значения интересующих нас показателей можно восстанавливать, причем найденное решение будет единственным (в указанном представлении). В общем случае достаточно найти любое решение для неизвестных показателей b_i (показателей w_i или v_{ki}), обуславливающих требуемую матрицу попарного сравнения. После этого потребуется лишь реализовать операцию нормировки для найденного решения. Такая операция предполагает, что от найденных элементов b_i переходят к нормированным элементам b_{in} по формулам $b_{in} = b_i / \sum b_i$. Очевидно, что сумма нормированных элементов b_{in} будет равна 1.

Например, пусть для матрицы попарных сравнений в табл. 9.3 менеджер, каким либо образом найдет следующие значения для неизвестных показателей: $b_1 = 18$, $b_2 = 6$ и $b_3 = 2$ (их сумма равна 26). Операция нормировки потребует перейти к нормированным показателям $b_{1n} = 9/13$, $b_{2n} = 3/13$ и $b_{3n} = 1/13$. Их сумма уже равна 1. Кроме того, если по указанным нормированным показателям формализовать матрицу попарных сравнений, то она полностью совпадает с матрицей в табл. 9.3.

Итак, мы понимаем, в какой форме могут быть восстановлены исходные показатели, на основе которых была составлена матрица попарных сравнений. В идеальном случае сравнений (см. п. 9.3) процедуры такого восстановления исходных показателей b_i по матрице попарных сравнений вида (9.2) являются процедурами нахождения и последующей нормировки собственного вектора-столбца такой

матрицы (см. вектор (9.3) в п. 9.3). Следовательно, в указанной ситуации такие процедуры могут быть представлены следующими шагами.

Шаг 1. По матрице попарных сравнений порядка n находят ее собственный вектор-столбец. Обозначим его через $\vec{\lambda} = (\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$.

Шаг 2. Для найденного вектора-столбца реализуют операцию нормировки, т.е. находят нормированный вектор-столбец $\vec{\lambda}_n = (\lambda_{1n}; \lambda_{2n}; \dots; \lambda_{nn})$ по формулам:

$$\lambda_{in} = \lambda_i / \sum \lambda_i \quad (9.4)$$

В общем случае процедуры нахождения собственных векторов для матриц попарных сравнений требуют привлечения специального математического аппарата. Чтобы упростить указанные процедуры, формат метода АНР при их нахождении предусматривает возможность использования приближенных методов. Это тем более оправдано, поскольку сама матрица попарного сравнения могла быть получена на основе эвристических соображений ЛПР. В ситуации идеального сравнения представленные ниже приближенные методы нахождения собственных характеристик обратного-симметричных матриц дают идеально точный результат. В ситуации, когда в матрице попарных сравнений ЛПР нарушается условия согласованности, их реализация дополнительно потребует проведения соответствующего анализа на согласованность, чтобы установить возможность (или ее отсутствие) дальнейшего использования найденных собственных векторов. Такие процедуры анализа также опираются на приближенные методы определения собственного вектора матрицы попарных сравнений. Поэтому изложим указанные атрибуты реализации приближенных процедур совместно.

Индекс согласованности. Пусть A произвольная положительная обратного-симметричная матрица порядка n и λ_{\max} - ее наибольшее собственное значение. Если выполнено равенство $\lambda_{\max} = n$, то матрица A является согласованной (см. утверждение в п.9.3). Если $\lambda_{\max} \neq n$, то матрица A не является согласованной. В практических ситуациях при анализе систем логистики несогласованность соответствующей матрицы попарных сравнений (например, при сравнении альтернатив по некоторому критерию), с одной стороны, может обуславливаться (на качественном уровне) нарушением транзитивности предпочтений. В этом случае для элементов такой матрицы из соотношений $a_{ik} > a_{kj}$ и $a_{kj} > a_{il}$ может не следовать $a_{ik} > a_{il}$. Однако, чаще возможны нарушения согласованности соответственно на количественном уровне. При этом $a_{ik} \cdot a_{kj} \neq a_{ij}$. Например, уже в случае, когда при сравнении значений показателей по одному из заданных критериев соответствующие отношения $a_{ij} = b_i / b_j$ даже для идеальной матрицы сравнений будут записаны с округлением их значения, то полученная матрица уже не будет согласованной. В качестве показателя степени отклонения положительной обратного-симметричной матрицы A от согласованной берут отношение, называемое индексом согласованности (ИС):

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (9.5)$$

Показатель $ИС$ можно рассматривать как показатель “близости” суждений ЛПР (представленных в соответствующей матрице A попарных сравнений) к согласованным. Более формализованные процедуры проверки согласованности суждений ЛПР в рамках реализации им попарных сравнений альтернатив см., например, в [Саати Т.]

В практических ситуациях применительно к формату метода АНР (в частности, и в приложениях к анализу и синтезу цепей поставок) можно считать, что степень согласованности соответствующих суждений ЛПР, представленных матрицей попарных сравнений A , является приемлемой или достаточной, если соответствующее значение показателя индекса согласованности не превышает величины 0,1, т.е. когда выполняется неравенство:

$$ИС \leq 0,1 \quad (9.6)$$

Собственные характеристики обратного-симметричной матрицы. Как видим, при анализе согласованности суждений ЛПР (при попарных сравнениях) важную роль играет показатель λ_{\max} . При этом, если обратного-симметричная матрица (матрица сравнений) является согласованной, то наибольшее ее собственное значение λ_{\max} равно (см. утверждение в п. 9.3) порядку n матрицы, т.е. $\lambda_{\max} = n$. В общем случае для несогласованных обратного-симметричных матриц имеем неравенство $\lambda_{\max} > n$. В случае, когда элемент a_{ij} матрицы сравнений выписать на основе некоторых эвристических методов или подходов к сравнению альтернативных решений, соответствующая матрица сравнений уже не будет согласованной. Задача нахождения показателя λ_{\max} в таких общих случаях, хотя и разрешима, но требует использования весьма

сложного аппарата. Поэтому в практических ситуациях поступаются точностью вычислений и ищут приближенную оценку для показателя λ_{\max} . Соответственно используют и приближенные оценки для собственных векторов таких матриц. При этом реализуют следующий подход: сначала на основе специальных процедур (некоторые из них представлены ниже) строят приближенный нормированный собственный вектор-столбец для заданной матрицы попарных сравнений. Он даст менеджеру требуемые показатели для «разметки» соответствующих ребер графа иерархии. Затем по такому вектору-столбцу оценивают соответствующее значение λ_{\max} и ИС. Если ограничения (9.6) будут выполнены, то найденные координаты показателя нормированного собственного вектора-столбца можно использовать для указанных процедур. Таким образом анализируются все матрицы попарного сравнения в формате решаемой задачи.

Существуют различные способы приближенного построения нормированного собственного вектора-столбца для исходно заданной матрицы сравнений $A = (a_{ij})$, $a_{ij} > 0$. Приведем, например, следующие два способа.

СПОСОБ I. а) Для заданной матрицы сравнений выписывают дополнительный столбец с элементами e_i (для i -той строки матрицы). Их определяют по формуле $e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ или по формуле

$$e_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{ (т.е. находят средний арифметический показатель по элементам каждой строки).}$$

б) Реализуют операцию нормировки для такого дополнительного столбца (делением каждого его элемента e_i на их сумму $\sum_{i=1}^n e_i$).

СПОСОБ II. а) Выписывают дополнительный столбец к заданной матрице сравнений с элементами e_i , которые определяют по формуле $e_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}$ (т.е. находят средний геометрический показатель по элементам каждой строки).

б) Реализуют операцию нормировки для элементов указанного дополнительного столбца (делением всех его элементов e_i на соответствующую сумму $\sum_{i=1}^n e_i$ всех элементов такого столбца).

Для каждого из приведенных способов результирующий вектор-столбец, полученный после реализации указанных процедур (завершающихся соответствующей операцией нормировки), и есть приближенный нормированный собственный вектор-столбец матрицы попарных сравнений. При этом в случае идеальной матрицы сравнений, являющейся согласованной, всегда получается точный результат. В общем случае (для несогласованных матриц) второй способ дает более точное приближение. Подчеркнем, что описанные способы приближенного вычисления собственного вектора-столбца матрицы попарных сравнений эффективны лишь для обратно-симметричных положительных матриц, которые будут достаточно близкими к согласованным. Поэтому в формате метода АНР нельзя опускать процедуры анализа матрицы попарных сравнений на согласованность. С учетом (9.5) и (9.6) для реализации таких процедур осталось указать, каким образом можно приближенно оценить максимальное собственное значение матрицы попарных сравнений.

Перейдем к процедурам приближенного нахождения соответствующего показателя λ_{\max} . Напомним, что для идеальной матрицы попарных сравнений (матрица A) должно выполняться равенство

$$A \cdot \vec{x} = \lambda_{\max} \cdot \vec{x},$$

где \vec{x} - соответствующий собственный вектор-столбец матрицы A . Другими словами, для вектора-столбца \vec{y} , определяемого как произведение $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ и собственного вектора-столбца \vec{x} идеальной матрицы попарных сравнений A должны выполняться равенства

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n}$$

(здесь x_i и y_i - соответствующие координаты векторов \vec{x} и \vec{y}), причем само такое отношение, как раз, и есть собственное значение матрицы A , отвечающее собственному столбцу \vec{x} . В общем случае, когда матрица A не является согласованной, вектор-столбец, получаемый по любому из представленных способов

(I и II), является приближением собственного вектора-столбца этой матрицы, так что может оказаться, что ни одно из последних равенств не выполняется. Поэтому, считая каждое из отношений

$$\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}, \dots, \frac{y_n}{x_n}$$

приближением к искомому собственному значению, в качестве оценки для показателя λ_{\max} принимают следующую величину

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}.$$

Другими словами, показатель λ_{\max} определяют как среднее арифметическое значение указанных приближений вида y_i/x_i .

ПРИМЕР 9.4. Рассмотрим обратно-симметричную матрицу, представляющую суждения ЛПР относительно попарных сравнений альтернатив А, В, С и D для условного примера на рис. 9.1. Пусть, например, они сравниваются по критерию C_1 (критерий стоимости строительства). Формализация таких сравнений уже была представлена ранее при обсуждении шкалирования (см. табл. 9.2). Соответствующая матрица попарных сравнений приведена в таблице 9.4. Легко видеть, что она не является согласованной.

Табл. 9.4.

Матрица попарных сравнений альтернатив по критерию C_1 (стоимости строительства)

Альтернативы	A	B	C	D	Дополнительный столбец	Нормированный собственный вектор-столбец
A	1	1/5	1/7	1/9	0,23	0,04
B	5	1	1/3	1/5	0,76	0,13
C	7	3	1	1/3	1,63	0,27
D	9	5	3	1	3,4	0,56

В табл. 9.4 для исходно заданной матрицы попарных сравнений альтернатив А, В, С и D (она выделена жирными линиями) элементы дополнительного столбца определены по способу II. В частности, в колонке “Дополнительный столбец” для каждой i -той строки матрицы сравнений найдены значения $\sqrt[4]{a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot a_{i3} \cdot a_{i4}}$. После этого, в колонке “Нормированный собственный вектор-столбец” представлен результат соответствующей операции нормировки для элементов дополнительного столбца. Если не были нарушены необходимые требования согласованности суждений ЛПР при формализации этой матрицы попарных сравнений, представленные соотношениями (9.5) – (9.6), то найденные нормированные показатели можно использовать для разметки соответствующих ребер графа иерархии как показатели v_{AI} , v_{BI} , v_{CI} и v_{DI} (см. рис. 9.2).

Чтобы определить степень согласованности анализируемой матрицы попарных сравнений надо найти показатель λ_{\max} . Для этого умножаем заданную матрицу попарных сравнений на вектор-столбец соответствующего нормированного приближения для собственного вектора-столбца матрицы (см. последнюю колонку табл. 9.4). В нашем случае получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/7 & 1/9 \\ 5 & 1 & 1/3 & 1/5 \\ 7 & 3 & 1 & 1/3 \\ 9 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,13 \\ 0,27 \\ 0,56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1668 \\ 0,5320 \\ 1,1267 \\ 2,3800 \end{pmatrix}$$

Теперь находим соответствующие отношения y_i/x_i , которые дают приближение к λ_{\max} :

$$1) \quad \frac{0,1668}{0,04} = 4,17; \quad 3) \quad \frac{1,1267}{0,27} = 4,17;$$

$$2) \quad \frac{0,5320}{0,13} = 4,09; \quad 4) \quad \frac{2,38}{0,56} = 4,25.$$

Наконец, вычисляем среднее арифметическое значение этих отношений. Оно представляет требуемую оценку показателя λ_{\max} :

$$\lambda_{\max} = \frac{4,17 + 4,09 + 4,17 + 4,25}{4} = \frac{16,68}{4} = 4,17.$$

При этом для индекса согласованности имеем

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{4,17 - 4}{3} = 0,056.$$

Поскольку $0,056 < 0,1$ (т.е. $ИС < 0,1$ и выполнено необходимое условие (9.6)), это характеризует приемлемую согласованность соответствующих суждений ЛПР относительно сравниваемых альтернатив А, В, С, D в исходной матрице попарных их сравнений (не являющейся согласованной) по критерию стоимости. Подчеркнем, что в случае неприемлемого значения показателя согласованности суждений ЛПР, представленных матрицей попарных сравнений, необходимо пересмотреть соответствующие сравнения ЛПР. Цель такого пересмотра – устранить или снизить по возможности эффект несогласованности попарных сравнений. в данной ситуации такой пересмотр не требуется. Найденные координаты для нормированных собственных векторов матрицы можно использовать как показатели для коэффициентов важности альтернатив по критерию стоимости:

$$v_{AI} = 0,04; \quad v_{BI} = 0,13; \quad v_{CI} = 0,27 \quad \text{и} \quad v_{DI} = 0,56.$$

Они уже «приписаны» к соответствующим ребрам графа анализируемой иерархии на рис. 9.2 (по критерию стоимости строительства).

Таким образом, в п. 9.1 – 9.4 представлены все процедуры метода аналитической иерархии, которыми должен владеть менеджер, чтобы находить наилучшие решения для задач многокритериальной оптимизации рассматриваемого в этой главе типа. В следующем параграфе они иллюстрируются в формате приведенного ранее условного примера.

9.5 Численные иллюстрации для условного примера

Для численной иллюстрации процедур метода аналитической иерархии вернемся к условию представленного ранее условного примера. Это - пример задачи выбора площадки для строительства нового терминала. Напомним, что в этой задаче были заданы три критерия оценки альтернатив (C_1, C_2, C_3) и четыре альтернативных варианта выбора таких площадок (А, В, С, D). Процедуры первого этапа метода АНР, т.е. процедуры структуризации задачи анализа в виде соответствующей иерархии, для этого примера уже были проиллюстрированы выше (рис. 9.1). Иллюстрацию процедур реализации последующих этапов метода АНР приведем на этом же примере (рис. 9.2). Для наглядности этих процедур снова представим здесь показатели альтернатив по заданным критериям. Анализируемые четыре варианта выбора площадок для строительства терминала имеют следующие оценки (их требуется минимизировать) по трем критериям (в порядке нумерации критериев и с учетом удобных для ЛПР единиц измерения):

А (200; 60; 20); С (160; 80; 30);

В (175; 80; 20); D (150; 90; 40).

Сразу начинаем процедуры второго этапа метода. На этом этапе реализуются попарные сравнения для элементов каждого уровня иерархии с позиций элементов предыдущего (более высокого) ее уровня. Они будут представлены соответствующими таблицами. Для компактности изложения такие таблицы будут сразу же дополнены вспомогательными столбцами, в которых представлены собственные характеристики матриц попарного сравнения (найденные на основе приближенного подхода, причем способом II). Для компактности изложения анализ матриц попарного сравнения, которые уже встречались ранее, будет опущен.

Попарные сравнения для критериев. Матрица попарных сравнений для заданных критериев выбора площадки для строительства нового терминала (по их важности этих для достижения цели) с учетом предпочтений ЛПР уже была приведена в таблице 9.1. Однако ее анализ не проводился. процедуры соответствующего анализа представлены в табл. 9.5.

Таблица 9.5.

Нахождение весов для заданных критериев.

Критерии	C_1 : стоимость строительст ва	C_2 : потери времени в пути	C_3 : потери на ожидание услуг	Собственн ый вектор	Вес критерия w_i
C_1 : стоимость строительства	1	3	9	3	0,69
C_2 : потери времени в пути	1/3	1	3	1	0,23
C_3 : потери на ожидание услуг	1/9	1/3	1	1/3	0,08

Представленная в табл. 9.5 матрица попарных сравнений (она выделена жирными линиями) соответствует следующим предпочтениям ЛПР:

- критерий C_1 (стоимость строительства) по важности умеренно превосходит критерий C_2 (потери времени в пути) и имеет очень большое превосходство над критерием C_3 (потери на ожидание услуг);
- критерий C_2 (потери времени в пути) по его важности для достижения цели умеренно превосходит критерий C_3 (потери времени на ожидание услуг).

Легко видеть, что эта матрица является согласованной (выполняются равенства $a_{ik} \cdot a_{kl} = a_{il}$ для всех i, k, l). Значения компонент собственного вектора-столбца для этой матрицы попарных сравнений можно получить любым из приведенных ранее способов (I или II – они будут совпадать). В табл. 9.5 они получены на основе среднего геометрического показателя (способ II). Нормированный собственный вектор-столбец дает значения “весов” (w_i) этих критериев с учетом предпочтений ЛПР. Эти “веса” критериев используются на последнем этапе метода АНР при синтезе итоговых показателей приоритетов анализируемых альтернативных решений. Для этого они «приписаны» к соответствующим ребрам графа иерархии на рис. 9.2.

Попарные сравнения альтернатив. На следующем уровне рассматриваемой в данном примере иерархии сравниваются заданные альтернативы. Это – альтернативные варианты А, В, С, D выбора площадки для строительства терминала. Они сравниваются по каждому критерию отдельно. Проведем анализ результатов таких попарных сравнений, принимая во внимание соответствующие предпочтения (для иллюстрации они формализуются для каждого из заданных критериев отдельно) ЛПР.

Сравнение по критерию C_1 (стоимости строительства). Пусть, для упрощения изложения, соответствующие суждения ЛПР относительно попарных сравнений альтернативных вариантов А, В, С, D по критерию C_1 (стоимости строительства) будут представлены именно матрицей сравнений из табл. 9.2 и табл. 9.4. Она была уже рассмотрена нами ранее в примерах 9.2 и 9.4, где был представлен соответствующий

анализ. Показатели важности для анализируемых альтернатив А, В, С, D по первому критерию оказываются следующими (см. элементы нормированного собственного вектора-столбца в табл. 9.4):

$$1) \quad V_{A1} = 0,04 ; 3) \quad V_{C1} = 0,27 ;$$

$$2) \quad V_{B1} = 0,13 ; 4) \quad V_{D1} = 0,56 .$$

Подчеркнем, что индекс согласованности этой матрицы попарных сравнений равен ИС = 0,056 (также см. пример 9.4). Соответственно приведенные показатели коэффициентов важности альтернатив по критерию стоимости строительства можно далее использовать в формате метода АНР. Они «приписаны» к соответствующим ребрам графа иерархии на рис. 9.2.

Сравнение по критерию C_2 (потери времени в пути). Пусть, для определенности, соответствующие предпочтения ЛПР при попарных сравнениях альтернативных вариантов А, В, С, D по критерию C_2 (потери времени в пути) представляет матрица сравнений из таблицы 9.6 (эта матрица выделена жирными линиями). Отметим, в частности, что представленные этой матрицей предпочтения ЛПР, формализовали следующие его предпочтения:

- умеренное превосходство альтернатив В и С по отношению к альтернативе А;
- эквивалентность альтернатив В и С между собой;
- существенное превосходство альтернативы D по отношению к альтернативе А и умеренное ее превосходство по отношению к альтернативам В и С.

Табл. 9.6.

Коэффициенты важности альтернатив по критерию C_2

Альтернативы	A	B	C	D	Собственный вектор	Важность альтернативы
A	1	3	3	5	2,59	$v_{A2} = 0,52$
B	1/3	1	1	3	1	$v_{B2} = 0,20$
C	1/3	1	1	3	1	$v_{C2} = 0,20$
D	1/5	1/3	1/3	1	0,386	$v_{D2} = 0,08$

Процедуры анализа коэффициентов важности альтернатив по критерию C_2 представлены двумя последними столбцами табл. 9.6. Сначала находим компоненты собственного вектора-столбца (по II-ому из указанных ранее способов). Нормируя его, получаем значения показателей важности рассматриваемых альтернатив по критерию C_2 : они записаны последнем столбце таблицы.

Легко видеть, что представленная в табл. 9.6 матрица попарных сравнений не является согласованной. Поэтому необходимо оценить соответствующий индекс согласованности (ИС) для этой матрицы. Умножая матрицу попарных сравнений (из табл. 9.6) на нормированный собственный вектор-столбец, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,20 \\ 0,20 \\ 0,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,12 \\ 0,81 \\ 0,81 \\ 0,32 \end{pmatrix}$$

После этого находим соответствующие приближения к собственному значению λ_{\max} для рассматриваемой матрицы сравнений:

$$1) \frac{2,12}{0,52} = 4,08; \quad 3) \frac{0,81}{0,20} = 4,05;$$

$$2) \frac{0,81}{0,20} = 4,05; \quad 4) \frac{0,32}{0,08} = 4,00.$$

Среднее арифметическое значение этих отношений дает интересующую нас оценку:

$$\lambda_{\max} = \frac{4,08 + 4,05 + 4,05 + 4}{4} = 4,045.$$

При этом соответствующий индекс согласованности составляет

$$ИС = \frac{4,045 - 4}{3} = 0,015.$$

Это характеризует приемлемую согласованность суждений ЛПР, представленных в анализируемой матрице попарных сравнений. Найденные коэффициенты важности альтернатив по критерию C_2 можно использовать далее в формате процедур последнего этапа метода АНР. Они «приписаны» к соответствующим ребрам графа иерархии на рис. 9.2.

Сравнение по критерию C_3 (потери на ожидание услуг). Пусть соответствующие суждения ЛПР представляет матрица попарных сравнений альтернативных вариантов А, В, С и D, которая задана в табл. 9.7 (эта матрица выделена жирными линиями).

Табл. 9.7.

Коэффициенты важности альтернатив по критерию C_3

Альтернативы	А	В	С	Д	Собственный вектор	Важность альтернативы
А	1	1	3	7	2,141	$V_{A3} = 0,40$
В	1	1	3	7	2,141	$V_{B3} = 0,40$
С	1/3	1/3	1	3	0,759	$V_{C3} = 0,14$
Д	1/7	1/7	1/3	1	0,287	$V_{D3} = 0,06$

Компоненты собственного вектора-столбца для представленной в табл. 9.7 матрицы попарных сравнений (по критерию C_3) анализируемых альтернатив найдены по II-ому из указанных ранее способов. Нормируя представленный собственный вектор-столбец этой матрицы, находим показатели важности альтернатив по критерию C_3 (см. последний столбец табл. 9.7)

Степень согласованности суждений ЛПР, которые представлены в этой матрицей попарных сравнений, проверьте самостоятельно в качестве упражнения. Она будет достаточной (в пределах требований метода). Поэтому найденные коэффициенты важности альтернатив по критерию C_3 могут быть использованы далее в формате процедур оптимизации по методу АНР. Они «приписаны» к соответствующим ребрам графа иерархии на рис. 9.2.

Определение наилучшей альтернативы. Найденные показатели для «весов» исходно заданных критериев и показатели коэффициентов важности анализируемых альтернатив (по соответствующим

критериям) соответствуют требованиям согласованности. Это позволяет реализовать следующие процедуры: 1) «разметку» графа, представляющего анализируемую иерархию (они уже реализованы на рис. 9.2); 2) процедуры определения приоритетов альтернативных решений для нахождения наилучшей альтернативы (они уже были представлены ранее в п. 9.2). Эти процедуры уже были представлены выше в п. 9.2. Напомним, что приоритет альтернативы D оказался самым высоким (он составляет, примерно, 41%). Следовательно, по методу аналитической иерархии эта альтернатива является наилучшей.

ВОПРОСЫ (по материалам главы 9).

1. Представьте общую схему алгоритма анализа и оптимизации системы по методу аналитической иерархии, отметив основные этапы соответствующего подхода.
2. Укажите особенности иерархического представления логистических систем и соответствующих процедур построения графа иерархии в формате метода АНР. Приведите примеры такой структуризации для задач оптимизации цепей поставок.
3. Перечислите атрибуты метода шкалирования для формализации попарных сравнений элементов одного уровня иерархии при анализе систем логистики в рамках метода АНР. В частности, представьте:
 - шкалу словесных определений относительной важности для сравниваемых элементов;
 - соответствие со шкалой количественных показателей такой относительной важности;
 - дополнительные возможности для реализации “промежуточных” суждений ЛПР при определенной относительной важности сравниваемых критериев или альтернативных решений.
4. Перечислите и обоснуйте основные свойства идеальных матриц сравнений. В частности, дайте определение для понятия согласованности (на качественном и количественном уровне).
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором положительная обратнo-симметричная матрица является согласованной.
6. Укажите, каким образом оценивается степень согласованности для положительных обратнo-симметричных матриц попарных сравнений в формате метода АНР. Отметьте, какой показатель используют на практике для характеристики “близости” соответствующих суждений ЛПР к согласованным; в каких случаях согласованность таких суждений можно считать приемлемой.
7. Дайте определения для собственных характеристик положительных обратнo-симметричных матриц, которые используют в рамках метода АНР. В частности, укажите каким образом можно находить:
 - собственный вектор-столбец для матрицы попарных сравнений (приближенно);
 - приближенную оценку для наибольшего собственного значения матрицы попарных сравнений.
8. Дайте определения и интерпретацию для ключевых понятий “весов” и «коэффициентов важности» применительно к элементам конкретного уровня иерархии системы (уточните, какого). Какие процедуры необходимо реализовать для их нахождения в рамках метода АНР при анализе систем логистики.
9. Каким образом реализуется синтез “весов” и коэффициентов важности при определении итоговых значений приоритетов для альтернативных решений?
10. Каким образом формализуется понятие лучшего альтернативного решения в рамках метода аналитической иерархии применительно к задачам анализа и синтеза соответствующих систем логистики? Приведите иллюстрацию процедур метода АНР применительно к анализу системных решений в логистике.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990.
2. Бродецкий Г. Л. Управление запасами. – М.: «Эксмо», 2007. – 400 с. – (Высшее экономическое образование).
3. Бродецкий Г. Л. Управление запасами. Эффект временной стоимости денег. – М.: «Эксмо», 2008. – 352 с. (Полный курс МВА).
5. Бродецкий Г. Л. Моделирование логистических систем. Оптимальные решения в условиях риска. – М.: «Вершина», 2006. – 376 с.
6. Вилкас Э.Й. Майминас Е.З. Системные решения: теория, информация, моделирование. – М.: Радио и связь, 1981.
7. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. – Киев: Выща школа, 1979.
8. Емельянов С.В., Ларичев О.И. Многокритериальные методы принятия решений. – М.: Знание, 1985.
9. Жуковин В.Е. Многокритериальные модели принятия решений с неопределенностью. – Тбилиси: Мецниереба, 1983.
10. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Выща школа, 1991.
11. Кини Р, Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.
12. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. – М.: Логос, 2002.
13. Ларичев О.И. Анализ процессов принятия решений при альтернативах, имеющих оценки по многим критериям. – Автоматика и телемеханика, 1981, № 8.
14. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981.
15. Практическая энциклопедия. Логистика. / Под ред. проф. Сергеева В.И. – М.: МЦФЭР, 2007.
16. Руа Б. Проблемы и методы принятия решений в задачах со многими целевыми функциями./В сб. Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976.
17. Сааги Т., Керис К. Аналитическое планирование и организация систем. – М.: Радио и связь, 1991.
18. Сергеев В.И. Корпоративная логистика. 300 ответов на вопросы профессионалов. –М.: ИНФРА –М, 2004. – 976 с.
19. Сток Д.Р., Ламберт Д.М. Стратегическое управление логистикой. –М.: ИНФРА –М, 2005. – XXXII, 797 с.
20. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах с многими критериями. – М.: Наука, 1981.
21. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
22. Фурмс Е.М., Мошкович Е.М. Упорядочение векторных оценок для задачи формирования «портфеля заказов»/Сб. Процедуры оценивания многокритериальных объектов. Вып. 9. – М.: ВНИИСИ, 1984.
23. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – М.: Дело, 2000.
24. Dawes R. The robust beauty of improper linear models in decision making./In: «Judgement under uncertainty: Heuristics and biases». – Cambridge Univ., Press, 1982.
25. McGrimmon K. An overview of multiple objective decision making./In Multiple criteria decision making. Cochrane I., Zeleny M. (Eds). – Columbia Univ., South Carolina Press, 1973.
26. Tversky A., Kahneman D., Slovic P. (Eds). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. – Cambridge Univ., 1982.

Рис. 1. СТРУКТУРА ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ

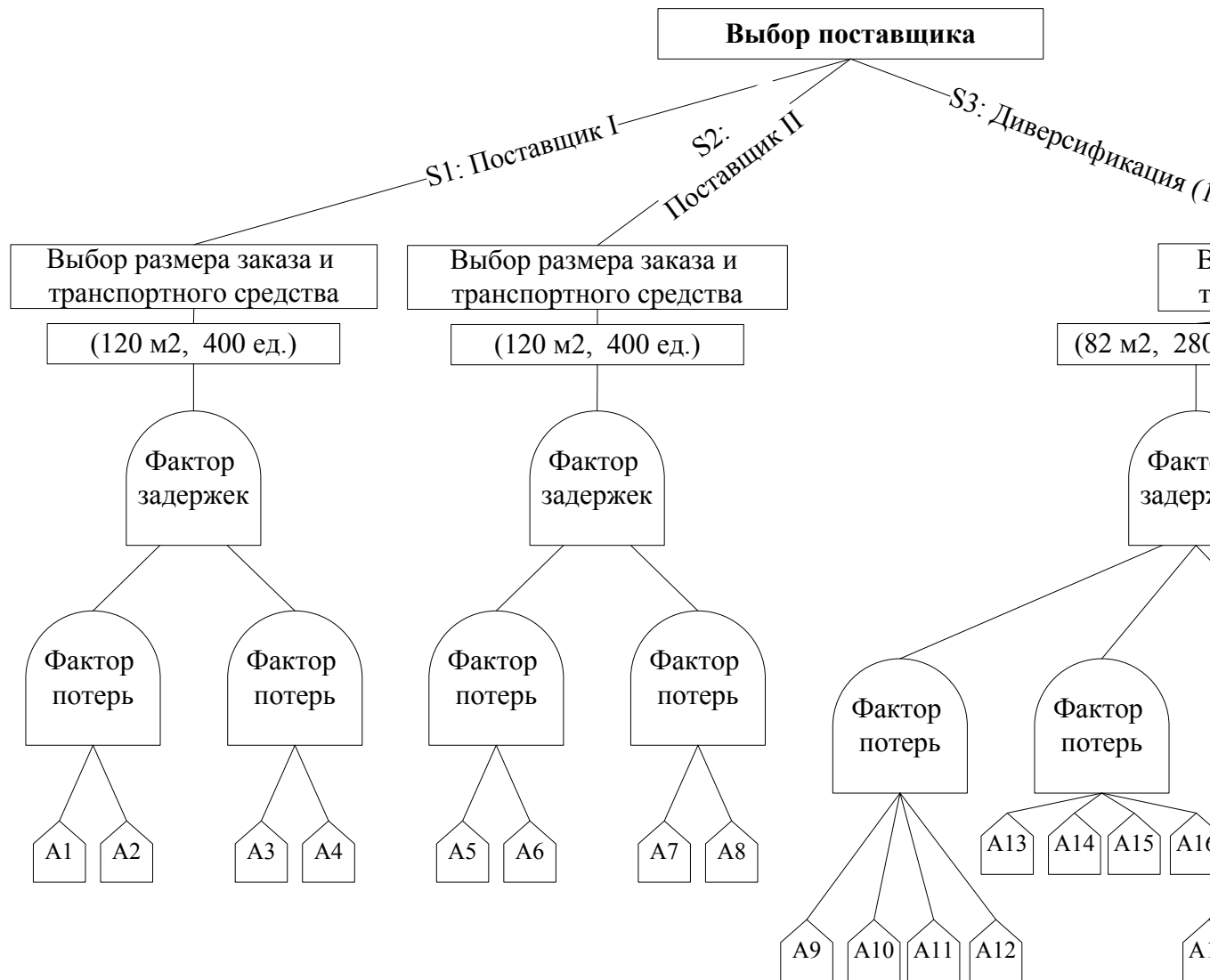
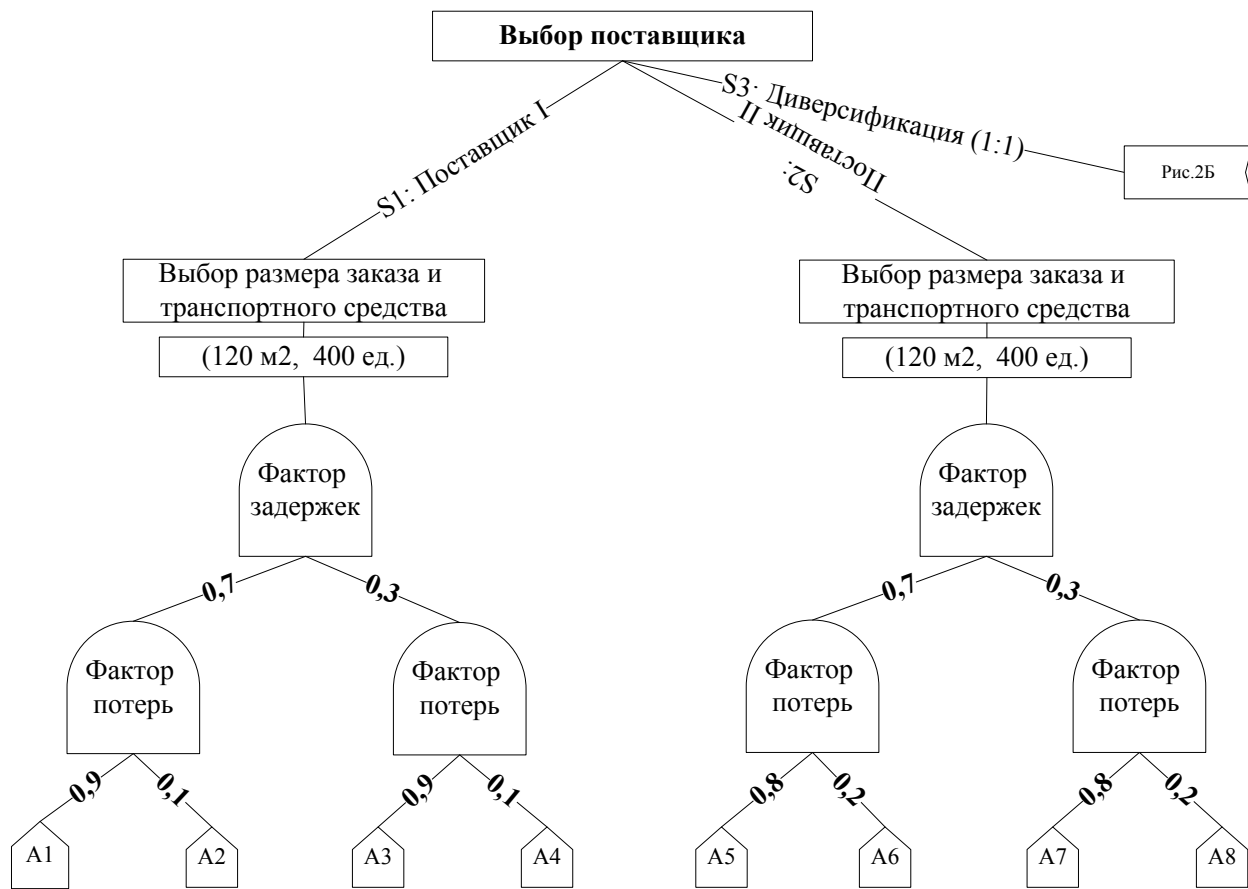


Рис. 2А. ДЕРЕВО РЕШЕНИЙ ПОСЛЕ ПРОЦЕДУРЫ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ



6823,5	6823,5	7223,5	7223,5	6741,75	6741,75	689
5918,0	5965,1	5918,0	5965,1	5786,7	5855,6	578
250	250	2500	2500	250	250	2
800	2400	800	2400	1600	4000	1

Рис. 2Б. ДЕРЕВО РЕШЕНИЙ ПОСЛЕ ПРОЦЕДУРЫ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

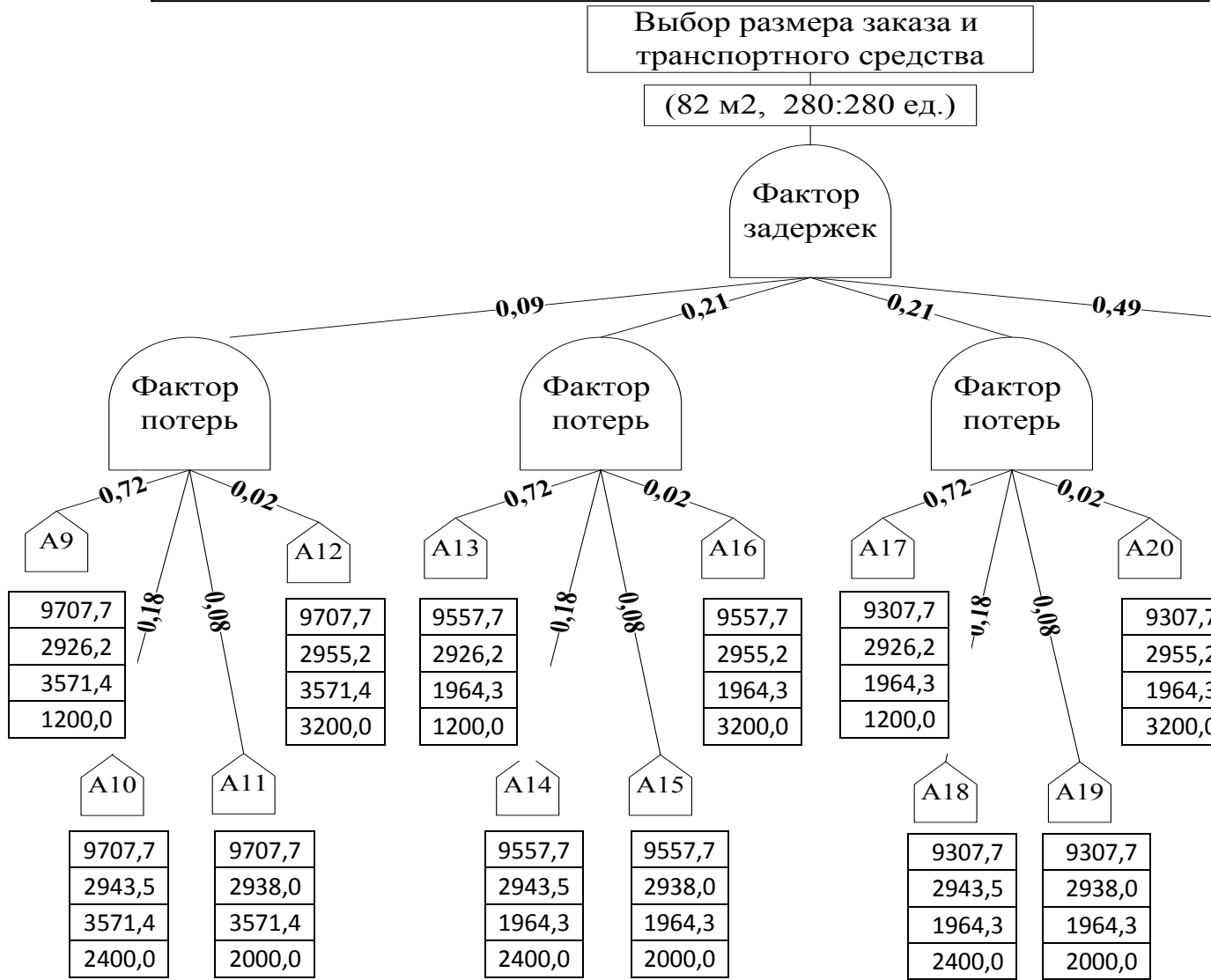


Рис. 3. ДЕРЕВО РЕШЕНИЙ ПОСЛЕ ПРОЦЕДУР СВЕРТКИ ПО КРИТЕРИЮ EVC

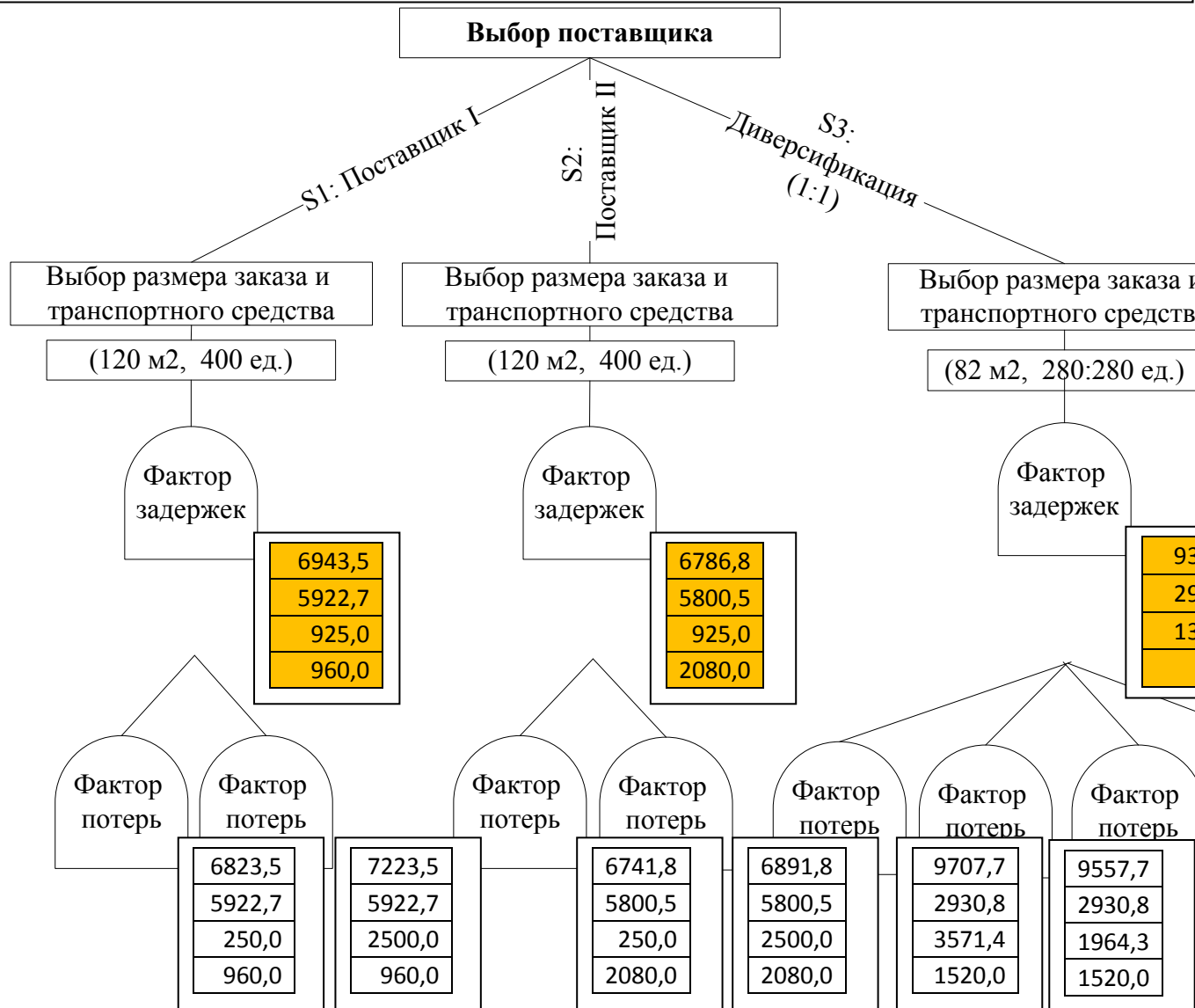
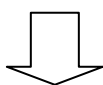


Рис. 4. Дерево решений после процедур блокировки по методу М1 (см. табл. 8.29)



Критерий	Показатель
М1 Минимаксный	6943,5



Критерий	Показатель
М1 Минимаксный	6786,8

Фактор задержек

Выбор размера заказа и транспортного средства

С₁: Поставщик I
Фактор задержек

Выбор размера заказа и транспортного средства

Рис. 5. Дерево решений после процедур блокировки по методам M2, M3 и M5 (см. табл. 8.30,

