Тема №1 Введение

Содержание и порядок проведения занятия	Время, мин
ВСТУПИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ	5
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	80
Учебные вопросы:	
1. Введение	15
2. Двоичная переменная и элементарные операции	20
3. Основные соотношения алгебры логики	15
4. Способы представления логических функций	15
5. Построение логических схем	15
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ	5

VI. Текст лекции

1. Введение

Сформулировать тему, вопросы лекции и ее цель. Обосновать актуальность изучаемой темы. В настоящее время элементы цифровой схемотехники внедряются практически во все электронные системы, начиная от бытовой техники до сложнейших военных систем управления войсками и оружием. Логические функции являются основой для синтеза цифровых схем. Знание теоретических вопросов позволяет оптимальным образом строить узлы военной аппаратуры связи, а также анализировать ее функционирование.

Напряжения и токи в импульсных и цифровых устройствах имеют характер импульсов и перепадов.

Электрическим импульсом называют напряжение (ток), отличающиеся от нуля или некоторой постоянной величины в течение короткого промежутка времени. Под коротким промежутком времени понимают время, соизмеримое с длительностью переходных процессов в электрических цепях (в рассматриваемом устройстве).

Рассмотрим в качестве примера одну из возможных форм импульсного напряжения и отметим его основные параметры:

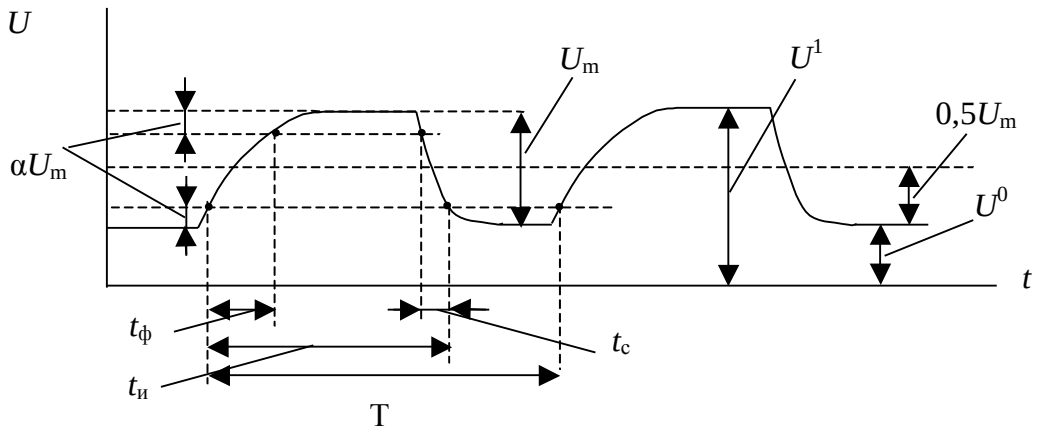
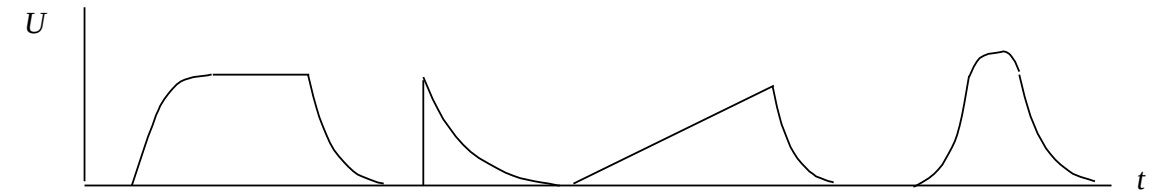


Рис. 1

Наибольшее отклонение напряжения U_m от исходного уровня называется ***амплитудой*** импульса. Участок импульса, где напряжение нарастает, называется ***фронтом***, а участок, где напряжение возвращается к исходному уровню - ***спадом***. В тех случаях, когда бывает трудно точно указать границы фронта и спада, их длительности $t_ф$ и $t_с$ отсчитывают между определенными уровнями αU_m и $(1-\alpha)U_m$. Величина α может быть различной, обычно ее выбирают равной 0,05 или 0,1. ***Длительность импульса*** $\boldsymbol{t_и}$ определяется на уровне αU_m или иногда на уровне $0,5U_m$. ***Длительность вершины*** импульса $\boldsymbol{t_в}$ отсчитывается на уровне $(1-\alpha)U_m$. Если напряжение на вершине не остается постоянным, а несколько уменьшается (нарастает) то говорят о завале (подъеме) вершины.

Периодической последовательностью импульсов называют импульсы, следующие друг за другом через равные промежутки времени. Такую последовательность характеризуют: T - периодом следования импульсов; $F=1/T$ - частотой следования импульсов (числом импульсов в течение одной секунды); $\xi=t_и/T$ - коэффициентом заполнения; $\sigma = \dfrac{T - t_u}{t_u}$ - скважностью.

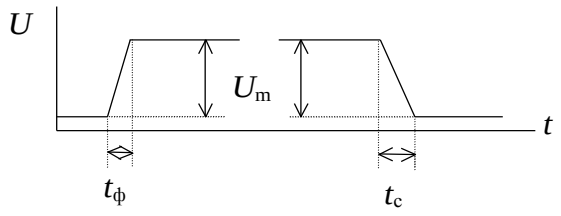
Импульсы могут иметь различную форму. Наибольшее распространение получили импульсы прямоугольной (трапецеидальной) формы, треугольной и колоколообразной.



прямоугольный остроконечный пилообразный колоколообразный
формы импульса

Рис. 2

Прямоугольными называют импульсы, у которых фронт и спад не превышают $0{,}1t_и$. В противном случае импульсы считают трапецеидальными. Треугольными называют импульсы, у которых длительность вершины близка к нулю. Широкое распространение получили импульсы с коротким фронтом и спадом (остроконечные импульсы), а также импульсы, у которых напряжение (ток) во время фронта или спада изменяется по линейному закону (пилообразные импульсы). Колоколообразные импульсы получили свое название благодаря специфической форме, напоминающей колокол.



Диапазон длительностей импульсов, с которыми приходится иметь дело в современной технике, достаточно велик и лежит в пределах от наносекунд (10^{-9}с) до миллисекунд (10^{-3} с) и более. Частота следования импульсов может быть от единиц до сотен миллионов импульсов в секунду.

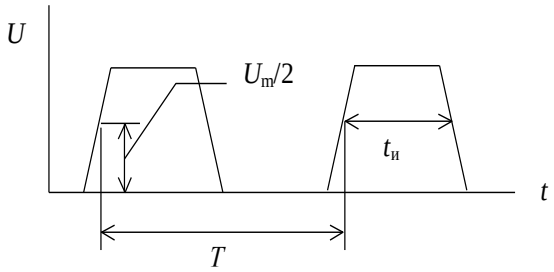


Рис. 3

Перепадом напряжения (тока) называют быстрое, практически скачкообразное изменение напряжения (тока) между двумя уровнями. При положительном перепаде напряжение (ток) меняется от низкого уровня к более высокому, при отрицательном - наоборот, от высокого уровня к более низкому. Разность уровней называют величиной (амплитудой) перепада - U_m, а время изменения от одного уровня до другого – длительностью фронта $t_ф$ (спада $t_с$) перепада.

Напряжение (ток) прямоугольной формы - это периодически повторяющиеся положительные и отрицательные перепады. В частном случае, когда перепады следуют через равные промежутки времени, такое напряжение называют ***меандром.***

2. Двоичная переменная и элементарные операции

Входные и выходные сигналы значительного класса электронных схем принимают только два строго определенных значения. Это могут быть:

- напряжения двух определенных уровней (высокого и низкого);

- электрический ток большой и малой величины;
- наличие и отсутствие импульса напряжения (тока);
- импульсы разной полярности и т.п.

Если сигналы принимают только два значения, то такие сигналы называют двоичными.

Обозначая двоичные сигналы в общем случае буквами (например $x_1, x_2, ... F_1, F_2, ...$) можно рассматривать буквы $x_1, x_2, x_3, ...$ двоичными переменными функций *F1, F2, F3*. В свою очередь функции *F1, F2, F3* могут являться двоичными переменными других функций (например, *F4*).

Одно из значений двоичного сигнала условились обозначать **символом** 1 а другое 0.

$x = 1$, если $x \neq 0$ или $x = 0$, если $x \neq 1$

Как частный случай, двоичные переменные могут постоянно сохранять одно из значений либо 0, либо 1.

Двоичные переменные называют иногда булевыми. Название булевы происходит от фамилии английского математика 19 века Дж. Буля, разработавшего основы математической логики (алгебры логики), оперирующей только двумя высказываниями истина и ложь.

Для преобразования двоичных сигналов используют арифметические и логические операции, а реализуют их электронными импульсными схемами (ЛЭ).

Математический аппарат, описывающий действия дискретных устройств базируется на алгебре логики (булевой алгебре). В практических целях применение аппарата алгебры логики для целей синтеза и анализа цифровых схем впервые осуществлено советским ученым В.Н.Шестаковым в 1935 г., а в 1938 г. независимо от него американским ученым Кн.Шенноном.

Множество двоичных переменных и функций, рассматриваемых вместе с операциями отрицания, дизъюнкции, конъюнкции называют булевой алгеброй (алгеброй логики).

Итак, основные отличия от обычной алгебры:

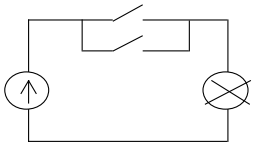
- булева алгебра оперирует двоичными переменными,
- включает только три основные операции,
- действия над двоичными переменными производятся по правилам этих операций.

Элементарные операции

1. Дизъюнкция (операция логического сложения, операция “ИЛИ”). Обозначается знаками + или $\cup$.

Пример: Для функции двух переменных можно записать формулу $f=x1+x2$, либо $f=x1 \cup x2$.

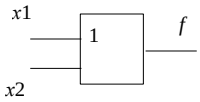
Правила выполнения операции дизъюнкции



0+0=0
0+1=1
1+0=1
1+1=1

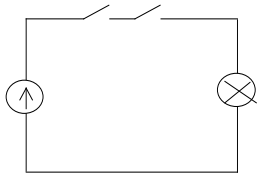
равенство хотя бы одного аргумента логической 1 определяет единичное значение функции

В логических схемах операция дизъюнкции реализуется логическим элементом ИЛИ и обозначается



2. Конъюнкция (операция логического умножения, операция И). Обозначается *, ∩

Пример

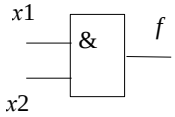


Для функции двух переменных можно записать f=x1*x2, либо f=x1∩x2. Правила:

0*0=0
0*1=0
1*0=0
1*1=1

нулевое значение хотя бы одного из аргументов обеспечивает нулевой результат операции.

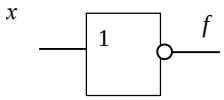
В логических схемах операция конъюнкции реализуется логическим элементом И и обозначается



3. Инверсия (логическое отрицание, операция НЕ). Обозначается чертой над переменной.

f= $\overline{x}$. Правила: $\overline{0}$=1 функция y=1 при аргументе x=0 1=0 функция y=0 при аргументе x=1.

Реализуется логическим элементом - инвертором. На схемах обозначается:

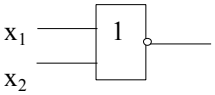


Функционально полные системы элементов

Функционально полной системой элементов называется набор типов логических элементов, позволяющий реализовать любую булеву функцию.

Используемые ранее для построения функциональных схемы ЛЭ типа И, ИЛИ, НЕ образуют один из вариантов функционально полной системы элементов. В настоящее время в качестве функционально полных систем предпочитают использовать элементы одного типа, позволяющие реализовать любую операцию алгебры логики.

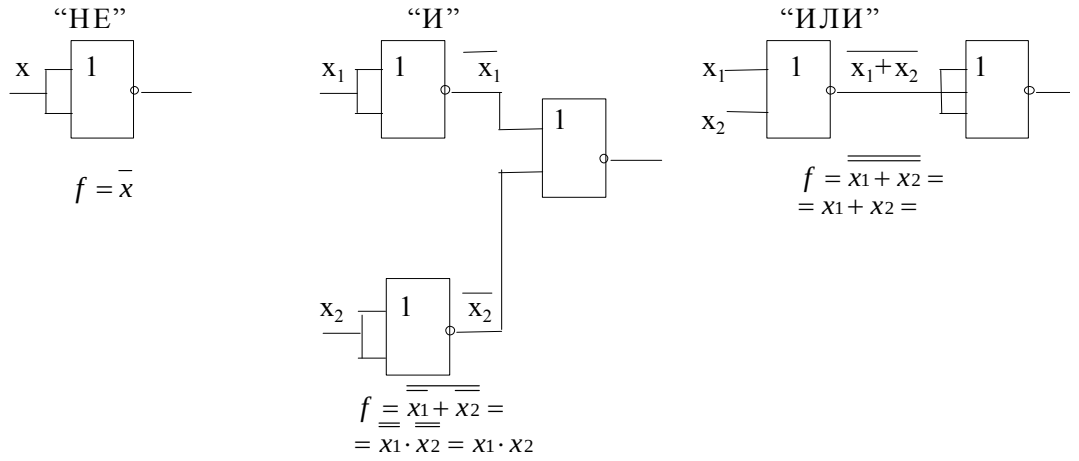
<u>Элемент “ИЛИ-НЕ” </u>(NOR)



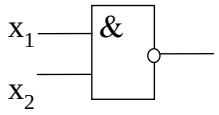
$f = \overline{x_1 + x_2}$ – реализует функцию Пирса

$$f = \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = x1x2 \rightarrow$$

Чтобы убедиться, что этот элемент может использоваться в качестве функционально - полной системы, достаточно показать, как с его помощью реализуются операции НЕ, ИЛИ, И:

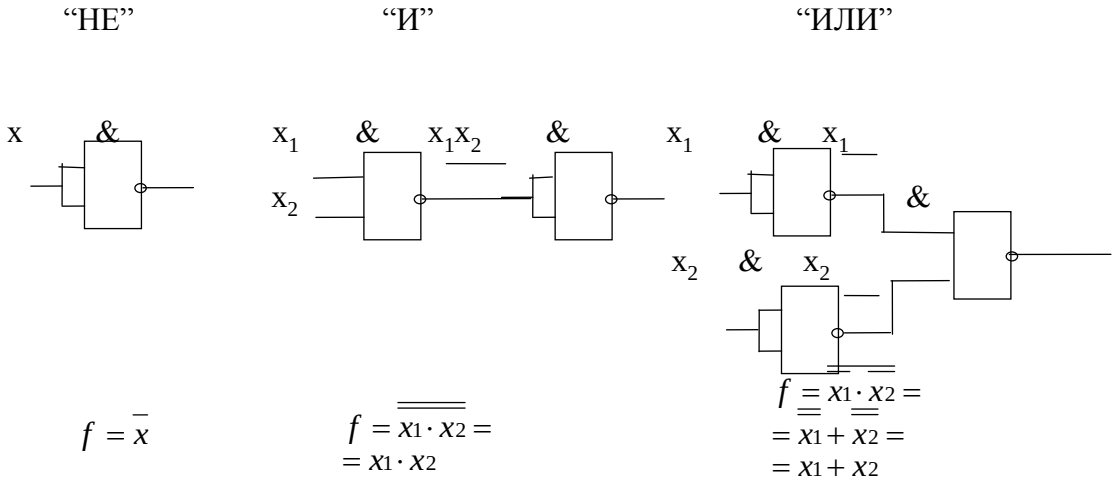


Элемент "И–НЕ" (N And)

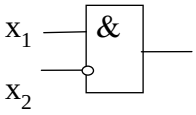


$f = \overline{x_1 \cdot x_2}$ – реализует функцию Шеффера

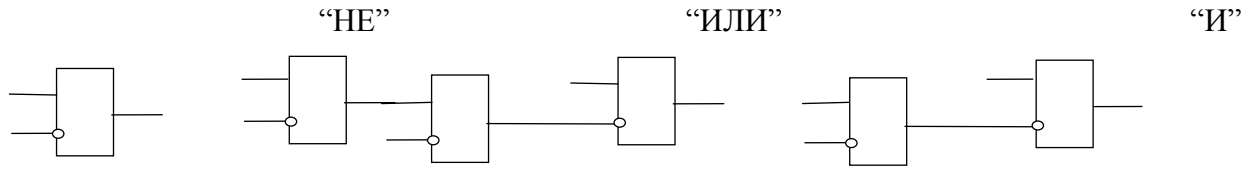
$f = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2} = x_1 | x_2$



Элемент "Запрет"



$f = x_1 \cdot \overline{x_2}$



“1”	&	“1”	&		&	“1”	&	“1”	&	x_2	&
x		x_1		x_2				x_1			

$$f = 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$$

$$f = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_1}} + \overline{\overline{x_2}} = x_1 + x_2$$

$$f = \overline{\overline{x_1} \cdot x_2} = x_1 \cdot x_2$$

3. Основные соотношения алгебры логики (алгебры Буля)

<u>*Теоремы для одной переменной*</u>

1.x+0=x 3.x+x=x 5.x*0=0 7.x*x=x 9.x=x

2.x+1=1 4.x+x=1 6.x*1=x 8.x*x=0

<u>*Законы и теоремы для двух и более переменных*</u>

10. *Переместительный закон*

а) x + y = y + x б) xy = yx

11. *Сочетательный закон*

а) x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z

б) xyz = x * (yz) = (xy) * z

12. *Распределительный закон*

а) x * (y + z) = xy + xz

б) x + yz = (x + y) * (x + z)

13. *Закон поглощения*

а) x + xy = x б) x(x + y) = x

14. а) $(x + \bar{y})y = xy$ б) $x\bar{y} + y = x + y$

15. *Закон склеивания*

а) $xy + \bar{x}y = y$ б) $(x + y)(\bar{x} + y) = y$

16. *Теорема де-Моргана*

а) $\overline{x + y} = \bar{x} * \bar{y}$ б) $\overline{x * y} = \bar{x} + \bar{y}$

Доказательства:

12. б) (x + y) * (x + z)=xx+xy+xz+yz=x(1+y)+xy+yz=x*1+xy+yz=x(1+y)+yz=x+yz.

13. а) x + xy=x(1+y)=x*1=x, б) x(x+y)=xx+xy=x+xy=x(1+y)=x.

14. а) $(x + \bar{y})y = xy + \bar{y}y = xy$, б) $x\bar{y} + y(x+\bar{x}) = x\bar{y} + xy + \bar{x}y = x\bar{y} + xy + xy + \bar{x}y = x + y$.

15. б) $(x + y)(\bar{x} + y) = x\bar{x} + \bar{x}y + xy + yy = \bar{x}y + y(1+x) = y(\bar{x}+1) = y$.

4. Способы представления логических функций

К основным способам представления логических функций относятся:

- ✓ словесный
- ✓ табличный
- ✓ алгебраический
- ✓ цифровой

✓ строчный

Булевыми называются функции, зависящие от любого конечного числа двоичных переменных и способные, как и переменные, принимать только два значения - “0” или ”1”. $F=f(x_1,x_2....x_n)$.

Комбинация аргументов называется **набором**. Двоичное число, соответствующее данному набору, обозначает **номер набора**. Если число аргументов функции n, то число всевозможных наборов будет $N=2^n$

Задать (определить) функцию - значит указать значение функции для каждой комбинации аргументов.

а). **<u>Словесный способ</u>**

Функция трех переменных $f(x_1x_2x_3)$ равна “1” всякий раз, когда, по крайней мере, два ее аргумента равны “1”.

б). **<u>Табличный способ</u>**

№ набора	Переменные			f
	x_1	x_2	x_3	
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Функция представляется в виде **таблицы истинности** (таблицы состояний, переходов). Таблица истинности содержит три графы:

а) номера наборов в порядке их нарастания,

б) наборы переменных,

в) значения функции, соответствующие каждому из наборов.

Для функции, заданной словесно, таблица имеет вид рис1.

Если бы функция *f* была бы задана не на всех наборах, то в графе *f* против наборов, на которых *f* не задана, вместо определенных значений функции “0” или ”1” стояла бы буква “Ф” - факультативное значение функции.

в). **<u>Алгебраический (формульный) способ</u>**

Переход от таблицы к алгебраической формуле может быть осуществлен двумя способами:

1) ***по единицам:***

функция представляется логической суммой произведений переменных тех наборов, на которых функция равна единице. При этом, если переменная в наборе равна нулю, она записывается в произведении с отрицанием:

$f(x_1x_2x_3)=\overline{x_1}x_2x_3+x_1\overline{x_2}x_3+x_1x_2\overline{x_3}+x_1x_2x_3$ - такая запись функции называется **совершенная дизъюнктивная нормальная форма** записи (**СДНФ**). Каждое из слагаемых – конъюнктивный член третьего ранга.

2) ***по нулям:***

функция представляется логическим произведением сумм переменных тех наборов, на которых функция равна нулю. При этом если переменная в наборе равна “1”, то они записываются в сумму с отрицанием:

$f(x_1x_2x_3)=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\overline{x_3})(x_1+\overline{x_2}+x_3)(\overline{x_1}+x_2+x_3)$ - такая форма записи называется **совершенная конъюнктивная нормальная форма** (**СКНФ**). Каждый из сомножителей - дизъюнктивный член третьего ранга.

Важно подчеркнуть, что СДНФ и СКНФ являются тождественными. Они представляют лишь различные формы записи одной и той же функции и, применяя теоремы алгебры Буля, можно одну форму преобразовать в другую. Любые алгебраические формулы, описывающие булевы функции, можно привести к формам в виде СДНФ и СКНФ.

г). **<u>Цифровой способ</u>**

При цифровом способе задания функции СДНФ представляется в виде суммы десятичных номеров наборов, на которых функция равна “1”: $f(x_1x_2x_3)=\sum(3,5,6,7)$ и СКНФ - в виде произведения десятичных номеров, полученных из наборов, на которых функция равна “0”, путем замены значений аргументов функции на обратные: 0 на 1, а 1 на 0. Например, набор $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ будет иметь номер $111_2=7_{10}$, набор $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$ будет иметь номер $110_2=6_{10}$ и т.д. $f(x_1x_2x_3)=\Pi(3,5,6,7)$

Наборы в скобках всегда указываются в порядке нарастания.

При переходе от цифровой формы к алгебраической десятичные номера наборов заменяются двоичными числами. При этом “0” в двоичном числе записывается двоичной переменной с отрицанием $\overline{x_i}$, а “1”- самой этой переменной x_i.

д). **<u>Строчное представление булевых функций</u>**

При машинной обработке булевых функций на ЭВМ их целесообразно представлять в строчной форме. Строчная форма это последовательная запись в строку значений функции на всех наборах, начиная с нулевого набора $f(x_1x_2x_3)=\sum_3[00010111]$.

5. Построение логических схем

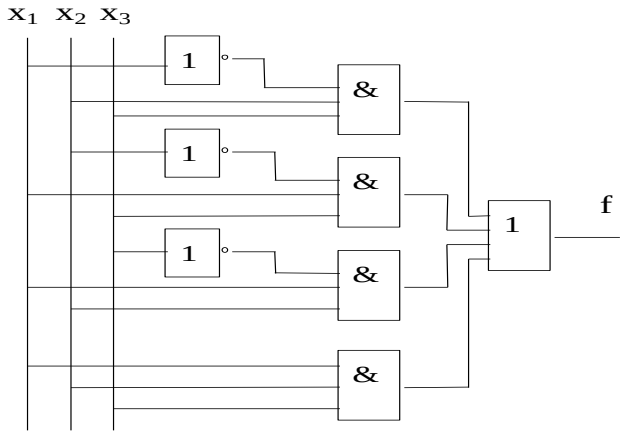


Рис.1

В логических схемах операции алгебры логики реализуются с помощью трех типов логических элементов: ИЛИ, И, НЕ.

Для построения логической схемы, реализующей данную логическую функцию, необходимо логические элементы соединить в соответствии со структурной формулой.

Для функции в СДНФ:

$f(x_1x_2x_3)=\overline{x_1}x_2x_3+x_1\overline{x_2}x_3+x_1x_2\overline{x_3}+x_1x_2x_3$ - функциональная схема будет такой, как показана на рис. 1.

Если воспользоваться функцией в СКНФ:

$f(x_1x_2x_3)=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\overline{x_3})(x_1+\overline{x_2}+x_3)(\overline{x_1}+x_2+x_3)$, то функциональная схема будет иной, как на рис. 2.

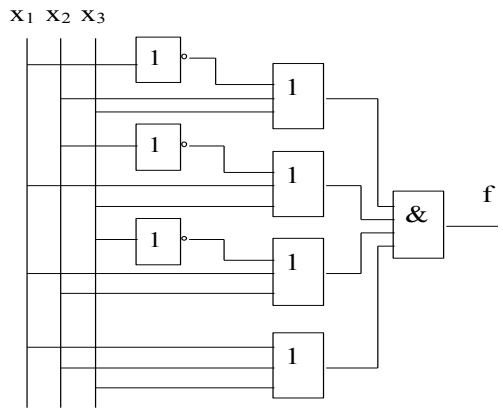


Рис.2

Сложность логической схемы принято оценивать тремя показателями:

- суммарным количеством элементов в схеме - Э,
- суммарным количеством входов всех элементов схемы - В,
- глубиной схемы, т.е. максимальным числом последовательно включенных элементов, через которые проходят сигналы со входа схемы до ее выхода - Г.

По этим показателям приведенные схемы одинаковы: Э=8; Вх=19; Г=3.

При анализе функциональных схем в ряде случаев возникает задача по заданной схеме определить описывающую ее булеву функцию (найти структурную формулу).

Для перехода от схемы к функции следует:

- обозначить на схеме все входы и выходы элементов;

-вычислить функции для каждого элемента;

-путем последовательных подстановок получить окончательную формулу, описывающую схему.

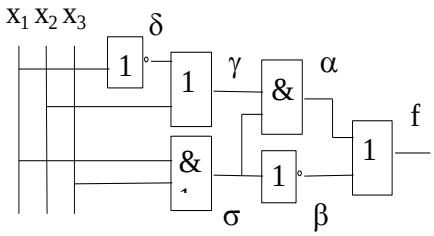


Рис. 3

Начинать последовательные подстановки целесообразно, взяв функцию выходного элемента за исходную, затем последовательно исключить все промежуточные переменные.

Пусть задана функциональная схема рис.3 Обозначим входные и промежуточные переменные элементов: $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \delta$.

Тогда $f=\alpha+\beta$; $\alpha=\gamma\sigma$; $\beta=\overline{\sigma}$; $\gamma=\delta+x_2$; $\sigma=x_1x_3$; $\delta=\overline{x_1}$;

$$f=\alpha+\beta=\gamma\cdot\sigma+\overline{\sigma}=(\delta+x_2)\cdot x_1\cdot x_3+\overline{x_1\cdot x_3}=(\overline{x_1}+x_2)\cdot x_1\cdot x_3+\overline{x_1\cdot x_3}$$