Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича

Кафедра Конструирования и производства радиоэлектронных средств

Дисциплина: «Проектная графика в конструкциях электронных средств»

ТЕМА 2: Преобразования в проектной графике

Лекция №3 Двухмерные преобразования в проектной графике

(2 часа)

Доцент кафедры, к.п.н.,

Мордовин В.Н.

2018 г.

Учебные вопросы

1. Необходимость преобразований.
1.1. Сдвиг.
1.2. Поворот.
1.3. Масштабирование.
2. **Матричное представление.**
2.1. Матричные формулы преобразований.
2.2. Эффективность.

Литература

1. У. Ньюмен, Р. Спрулл. Основы интерактивно машинной графики. М., «Мир», 1976.

2. Сторчак Н. А., Синьков А. В. Компьютерная графика: учебное пособие; ВПИ ВолгГТУ.- Волгоград, 2009.с

ВВЕДЕНИЕ

2D (two dimensions) – вид компьютерной графики широко применяемое при создании проектов. Такое изображение всегда будет выглядеть плоским, так как в нем используется только два измерения – ширина и высота. Используется для создания чертежей деталей, различных схем, карт, и т.д. Несмотря на то, что 2D графика выглядит как плоское изображение, за счет теней можно добиться эффекта объемных объектов (но не фотореалистичности).

В векторной графике 2D изображение представлено в виде геометрических форм, что дает максимальную точность построенного изображения.

Векторная графика подходит для рисования чертежей и схем, используется для масштабируемых шрифтов, деловой графики, а так же применяется в печати (обеспечивает высокое качество изображения).

1. Необходимость преобразований

Графическая система должна позволить проектировщику формировать изображения, допускающие различные преобразования Он должен также уметь производить преобразования частей изображения и символов. Удобно также масштабировать изображение и поворачивать его на некоторый угол.

Аспекты формулирования преобразований.

Во-первых, каждое преобразование представляет собой *цельное математическое понятие* и в качестве такого должно обозначаться собственным именем или символом.

Во-вторых, два преобразования можно *комбинировать, или совмещать*, в результате чего получается *одно преобразование*, т. е. то же самое, что и при последовательном выполнении двух исходных преобразований.

Положим, например, что *A* — *преобразование сдвига*, а *B* — *преобразование масштабирования*. Свойство совмещения позволяет определить преобразование ***C=A*B***, обеспечивающее сдвиг и последующее масштабирование. *Принципы совмещения преобразований* и их обозначения используются в трехмерных и перспективных преобразованиях.

Все эти преобразования используются для вычисления координат новой точки (x', y') по координатам точки (x,y) в исходном описании изображения. Если в этом описании имеется отрезок прямой, то достаточно применить преобразование к концам отрезка прямой и провести прямую линию между двумя преобразованными точками.

1.1. Сдвиг

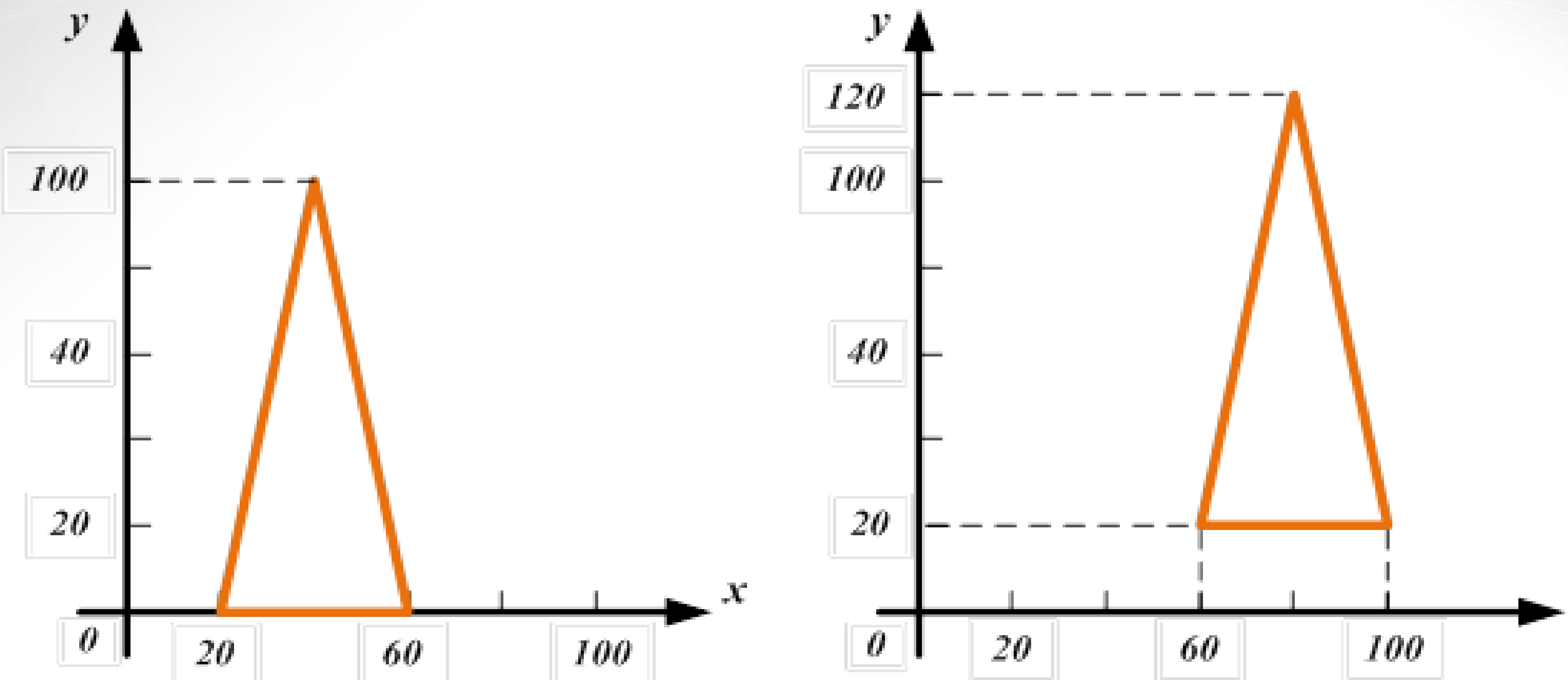
- Преобразование сдвига выражается в следующей форме:

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y \quad , \qquad (1.1)$$

где T_x и T_y – величина сдвига соответствующей координаты.

Рис 1. Преобразование методом сдвига.



Пусть имеется треугольник, заданный тремя вершинами (20, 0), (60, 0), (40, 100). Этот треугольник необходимо сдвинуть (рис. 1) на 40 единиц *вправо* и на 20 единиц *вверх* ***($T_x = 40$, $T_y = 20$)***.

Новые вершины будут иметь координаты (60, 20), (100, 20) и (80, 120).

1.2. Поворот

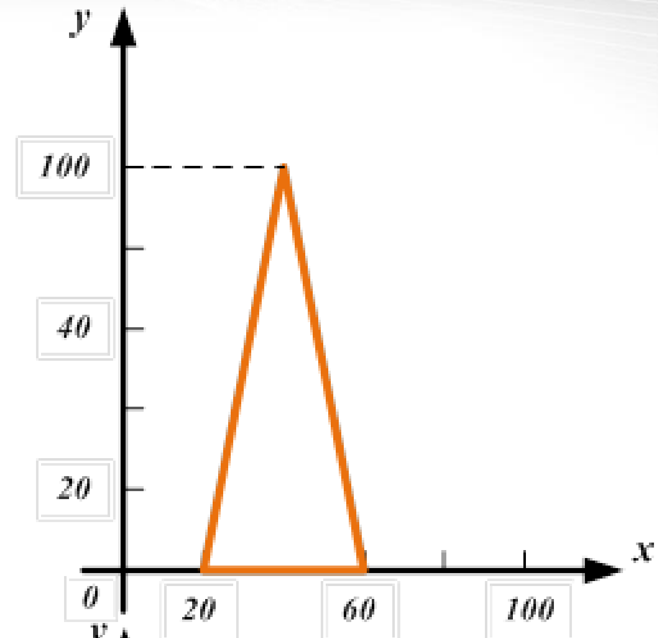
Для поворота радиуса - вектора точки (x, y) на угол α по часовой стрелке относительно начала системы координат следует задать координаты:

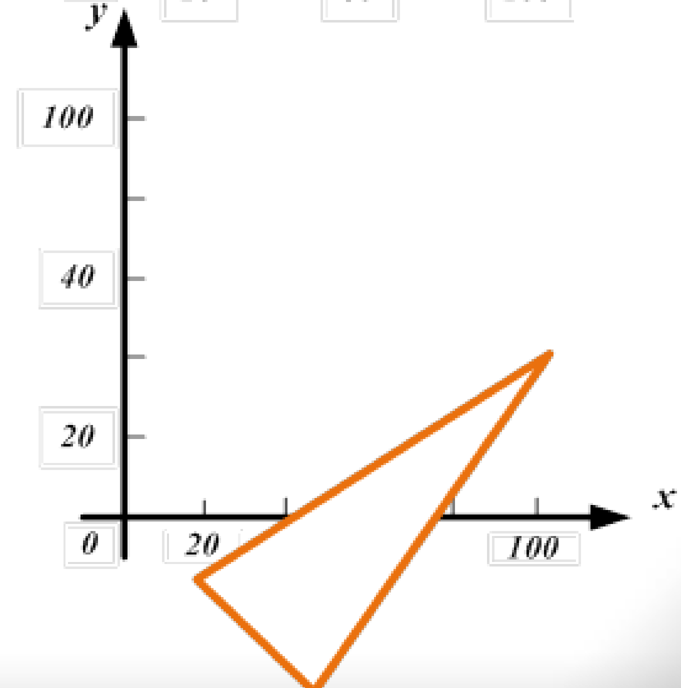
$$x' = x \times \cos\alpha + y \times \sin\alpha, \qquad (1.2)$$

$$y' = -x \times \sin\alpha + y \times \cos\alpha.$$

Треугольник с координатами вершин (20, 0), (60, 0), (40, 100) после поворота на 45° по часовой стрелке относительно начала координат будет иметь новые значения координат вершин ($20\sqrt{2}$, —$10\sqrt{2}$), ($30\sqrt{2}$, —$30\sqrt{2}$), ($70\sqrt{2}$, $30\sqrt{2}$) (рис. 2).

Эти уравнения можно использовать только при повороте относительно начала системы координат!





1.3. Масштабирование.

- Преобразования масштабирования производятся согласно выражений (1.3):

$$x' = x \times S_x, \qquad (1.3)$$

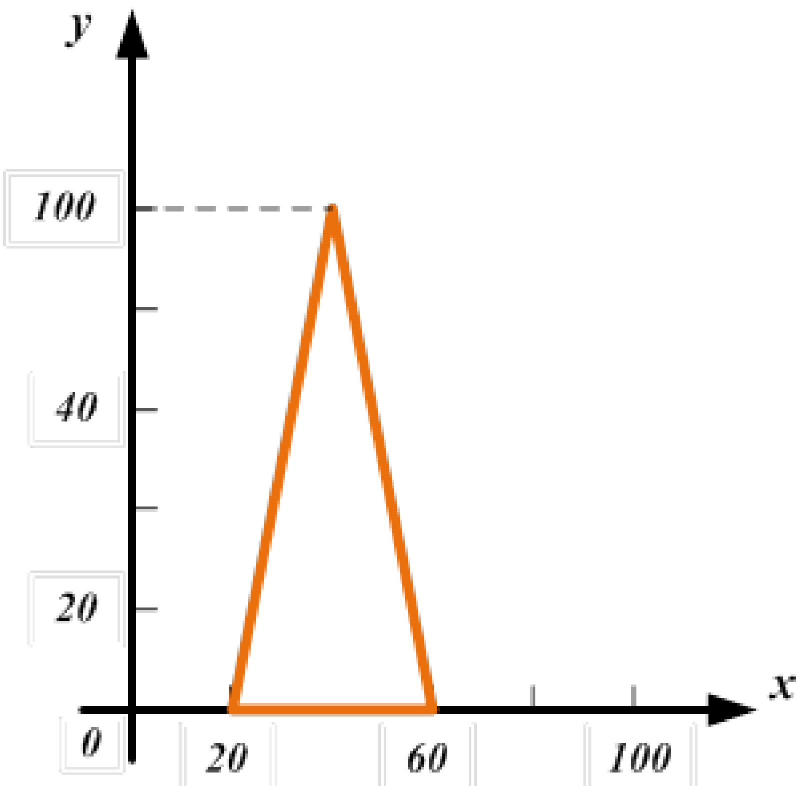
$$y' = y \times S_y,$$

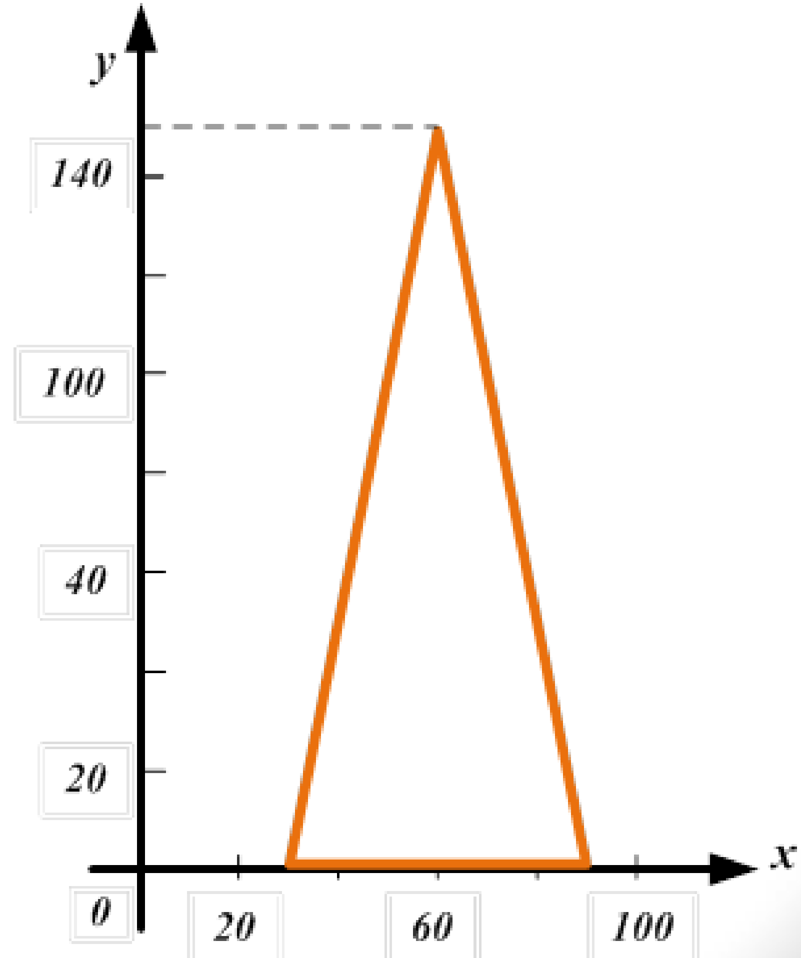
где S_x *и* S_y *– коэффициент масштабирования по соответствующей координате.*

- Данные атематические выражения можно использовать для различных целей. Если изображение необходимо увеличить в полтора раза относительно начального размера, то следует принять $S_x = S_y = 1,5$.
- Следует отметить, что *увеличение производится относительно начала системы координат*.

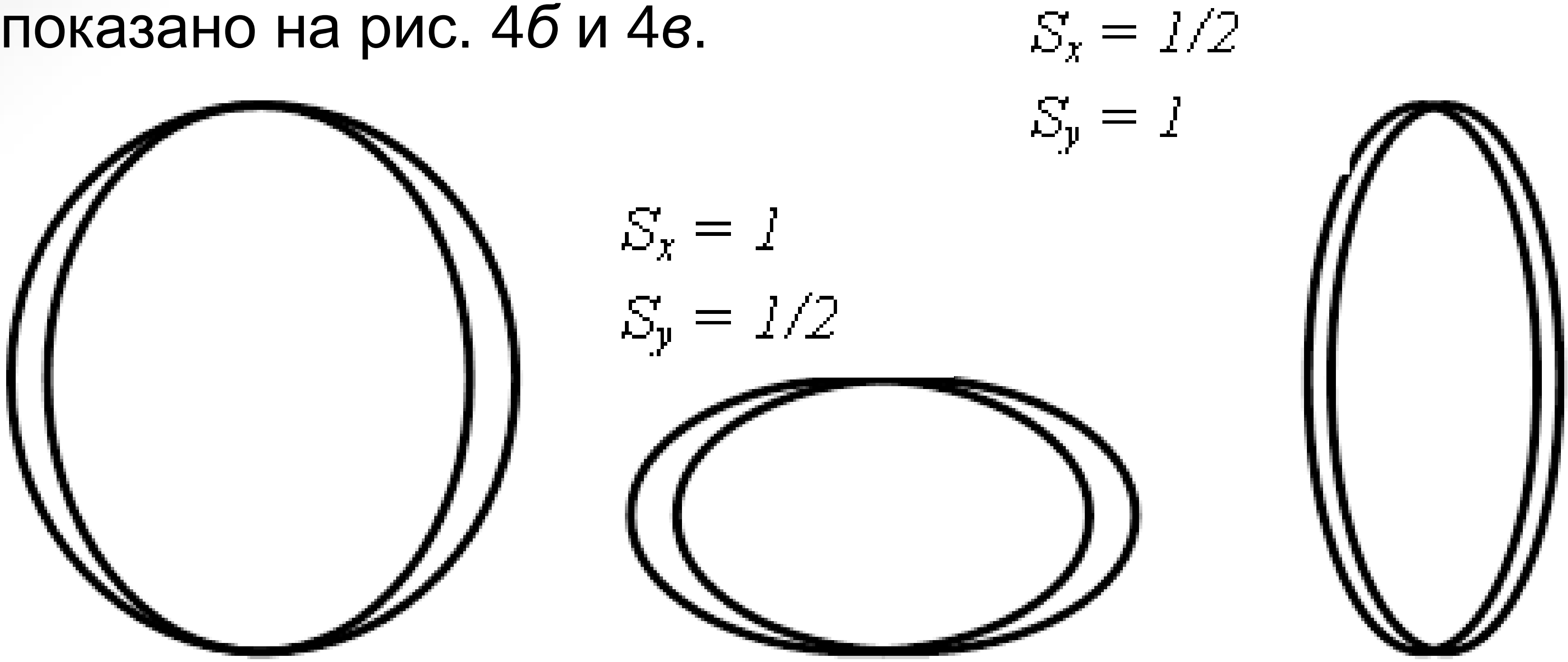
- Треугольник (20, 0), (60, 0), (40, 100) приобретает вид (30, 0), (90, 0), (60, 150), как показано на рис. 3.

Рис 3. Преобразование методом масштабирования при $S_x = S_y = 1,5$.





- Если **S**$_x$ и **S**$_y$ не равны между собой, то это приводит к искажению изображений за счет неодинакового изменения размеров по направлениям, параллельным координатным осям. Например, рис. 4*а* может быть искажен так, как показано на рис. 4*б* и 4*в*.



- *а)* *б)* *в)*

Рис. 4. Примеры искажения изображений.

Зеркальные изображения объекта можно получить, если задавать отрицательные значения S_x и S_y. Зеркальные изображения на рис. 5, *а* могут принимать вид, показанный на рис. 5, *б*, 5, *в* и 5, *г*.

$S_x = -1$, $S_y = 1$ — *б*

$S_x = 1$, $S_y = -1$ — *в*

$S_x = -1$, $S_y = -1$ — *г*

а *б* *в* *г*

Рис. 5. Примеры зеркальных изображений.

- Очень редки случаи, когда необходимо выполнить лишь *простое преобразование*, например поворот относительно начала отсчета или масштабирование относительно начала отсчета. *В общем случае* приходится выполнять более сложные преобразования, например *повороты относительно произвольных точек*. ***Поворот*** относительно произвольной точки можно выполнить как *последовательность трех простых преобразований:* ***сдвига, последующего поворота и еще одного обратного сдвига***.
- ***При совмещении не должен быть нарушен порядок выполнения преобразований!***
- Рассмотрим следующую последовательность: повернуть исходный треугольник на 90°, затем сдвинуть его на

T_x = - 80, T_y = 0. В результате получается треугольник, показанный на рис. 6. Если выполнить преобразования в обратном порядке, то получим другое изображение (рис.7).

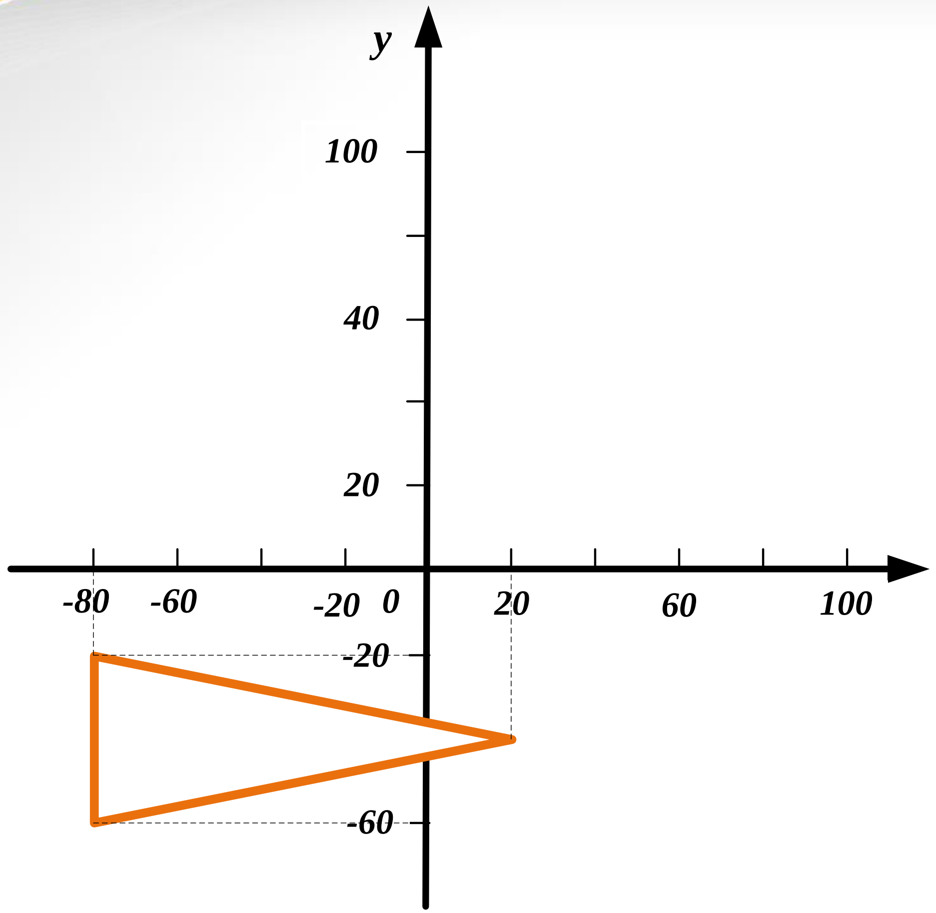


Рис. 6. Последовательность «поворот 90° - сдвиг T_x = - 80, T_y = 0».

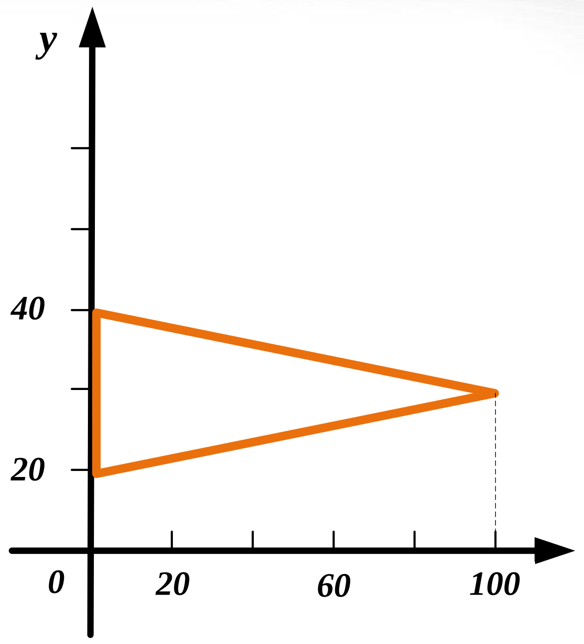


Рис. 7. Последовательность «сдвиг T_x = - 80, T_y = 0 - поворот 90°».

- *Основная цель* совмещения состоит в том, чтобы *представить последовательность преобразований как одно преобразование*. Приведенная выше последовательность состоит из преобразования:
  - $x' = y,$ (1.4)
  - $y' = -x.$
- За которым следует:
  - $x'' = x' - 80,$ (1.5)
  - $y'' = y'.$
- Совмещенное же преобразование принимает вид:
  - $x'' = y - 80,$ (1.6)
  - $y'' = -x.$

Совмещенное преобразование имеет *ряд преимуществ*. Его можно представлять *более компактно*, чем последовательность нескольких преобразований, причем обычно вычисления для совмещенного преобразования можно *выполнить при меньшем числе арифметических операций*, чем для последовательного выполнения отдельных преобразований.

Однако правила составления уравнений для совмещенных преобразований достаточно сложны. Они *значительно упрощаются*, если для описания преобразований *применять матрицы*.

2. Матричное представление

Двумерные преобразования можно представить в однородном виде с помощью *матрицы* 3×3.
Преобразование точки (x, y) в новую точку (x' y') как *последовательность сдвигов, поворотов и масштабирований* в этом случае представляется в виде:

$$[x' y' 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.7)$$

где матрица 3х3 полностью определяет необходимое преобразование. Матрица, представляющая преобразование, *является отдельным объектом*. Этой матрице можно присвоить имя, что позволяет обозначать одним именем целое преобразование.

Добавление третьего, единичного, элемента к вектору (x, y) позволяет преобразовывать этот вектор с помощью матрицы 3х3.

2.1. Матричные формулы преобразования

Параметры матриц преобразований 3х3 можно подобрать так, чтобы матрица представляла *простейшие преобразования сдвига, поворота и масштабирования*.

Сдвиг:

$$[x' \; y' \; 1] = [x \; y \; 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.8)$$

Поворот:

$$[x' \; y' \; 1] = [x \; y \; 1] \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.9)$$

Масштабирование:

$$[x' \; y' \; 1] = [x \; y \; 1] \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.10)$$

Формулы эквивалентны уравнениям (1.1)-(1.3). Преимущество матричных формул состоит в том, что совмещение последовательных преобразований при этом упрощается.

2.2. Эффективность

При генерировании изображения для дисплея может понадобиться производить *преобразования для большого числа точек*. Этот процесс следует выполнять по возможности наиболее *эффективно*. На первый взгляд вычисление:

$$[\,x\ y\ 1\,]\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.11)$$

требует выполнения *девяти умножений и шести сложений*. Однако в полученном выше выражении третий столбец матрицы 3x3 всегда имеет вид:

$$\begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{matrix} \qquad (1.12)$$

даже если матрица является результатом многочисленных совмещений. Поэтому вычисления для $\boldsymbol{x'}$ и $\boldsymbol{y'}$ сокращаются и имеют вид:

$$\boldsymbol{x' = ax + by + c} \qquad (1.13)$$

$$\boldsymbol{y' = dx + ey + f}$$

Это требует меньшего количества арифметических операций (четыре умножения и четыре сложения), чем при умножении полного вектора.

- Такое сокращенное вычисление в матричных обозначениях приобретает вид:

$$[x' \ y'] = [x \ y \ 1]\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}. \qquad (1.14)$$

- Теперь матрица преобразования имеет размер 3 x 2. В системах преобразования матрицы 3 x 2 использованы для задания двумерных преобразований. Следует, однако, иметь в виду, что *нельзя выполнить совмещение преобразований, представленных матрицами 3 x 2*, путем перемножения этих матриц: до перемножения ***следует вновь перевести их в вид 3 x 3, для чего нужно добавить третий столбец.***

Заключение

Системы двухмерного моделирования распознают геометрические формы, определяемые точками, прямыми или кривыми только ***на плоскости***.

Каждый вид некоторого объекта (главный вид, вид сверху и т.д.) может быть выполнен лишь ***как отдельная фигура***, которая рассматривается системой вне связи с любыми другими видами.

Системы проекционного моделирования более примитивны, чем трехмерные, однако они довольно широко распространены, а их сравнительно малая стоимость является существенным фактором при выборе такой системы. С помощью двухмерных систем создается большинство конструкторских документов.

Все команды любой двухмерной системы (или графического редактора) можно разделить на ***три вида:***

- ***Команды черчения;***
- ***Команды редактирования;***
- ***Команды нанесения размеров, условных обозначений и текста (оформления чертежа).***

Задание для самостоятельной работы

1. Проверьте следующее утверждение: преобразование отрезка прямой, проведенного из точки A в точку B, эквивалентно отрезку прямой между преобразованными точками A и B. Рассмотрите только преобразования сдвига, поворота и масштабирования.

2. Использование матричных формул позволяет выполнить и другие преобразования, которые не рассматривались, например: $\boldsymbol{x' = x + ay,}$

$$\boldsymbol{y' = y.}$$

Можете ли вы охарактеризовать эти преобразования?

3. Положим, что известна точка (x', y') и что она получена преобразованием неизвестной точки (x, y) по известной матрице Q. Опишите механизм отыскания исходной точки (x, y). Как можно использовать этот механизм в машинной графике?