

Задачи прогнозирования при планировании сетей

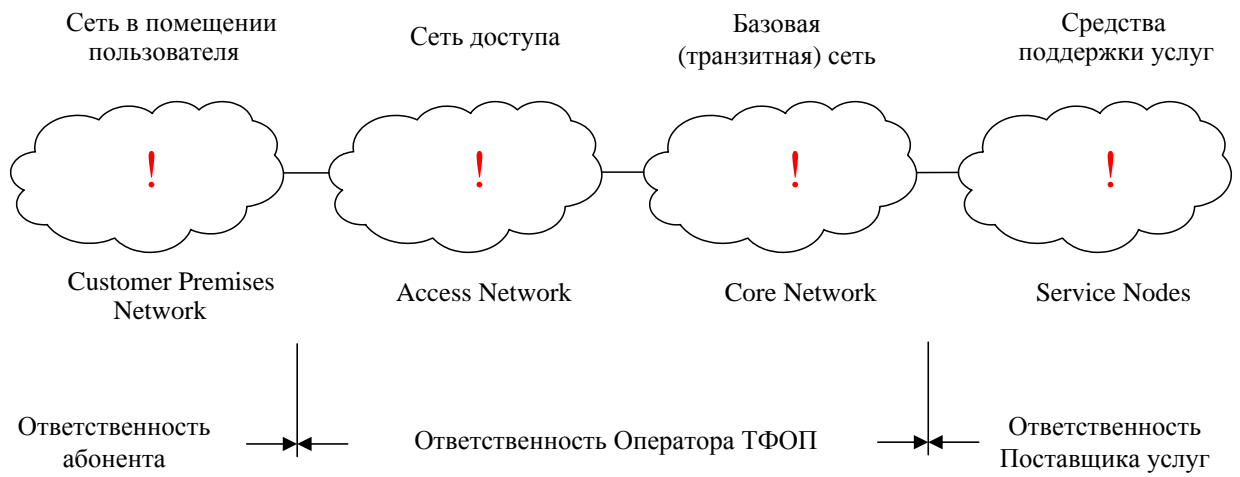
План лекции

1. Модель сети, предложенная МСЭ-Т.
2. Общие понятия распределения нагрузки в сети связи. Задача определения ЧНН.
3. Задача классификации событий процесса обслуживания вызовов. Расчет нагрузочных характеристик сети.
4. Определение интенсивности потоков заявок на компоненты сети.
5. Формализованные методы прогнозирования.
6. Интуитивные методы прогнозирования.

Модель сети, предложенная МСЭ-Т

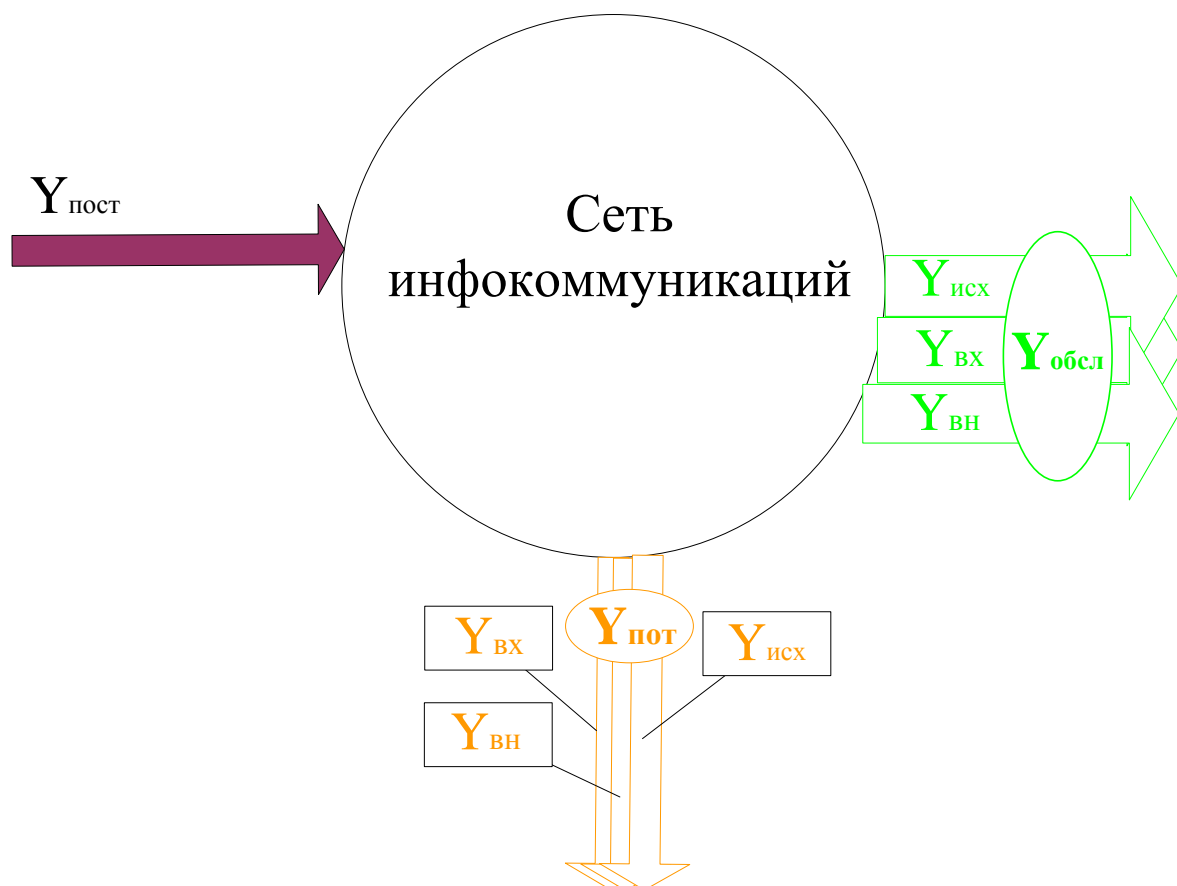
В отечественной и зарубежной научно-исследовательской литературе часто используется модель инфокоммуникационной системы, разработанная МСЭ-Т [1]. Она состоит из четырех основных компонентов, приведенных на нижеследующем рисунке. В ряде монографий и статей, базовая сеть именуется транспортной или транзитной сетью, однако данная интерпретация является более точной, в особенности, учитывая англоязычный термин «Core Network» - ядро сети.

Далее, во избежание не корректных интерпретаций термина «транспортная сеть», необходимо пояснить, что отечественными специалистами введен принцип разделения сетей связи на первичную и вторичную, обозначающих *транспортную* и *коммутируемую* сети связи, которые в отличие от терминологии, используемой зарубежными специалистами (в частности для североамериканской ТФОП), не указывают на уровни сетевой иерархии, а обозначают функции, выполняемыми сетевыми элементами.



Модель сети телекоммуникаций, предложенная МСЭ-Т

Общие понятия распределения нагрузки в сети связи. Задача определения ЧНН.



Общая схема распределения нагрузки в сети инфокоммуникаций

Выше представлена общая схема распределения нагрузки в сети инфокоммуникаций.

$Y_{\text{пост}}$ – поступающая на сеть нагрузка;

$Y_{\text{обсл}}$ – обслуженная сетью нагрузка;

Обслуженная сетью нагрузка включает в себя такие величины, как

$Y_{\text{исх}}$ – исходящая нагрузка;

$Y_{\text{вх}}$ – входящая нагрузка;

$Y_{\text{вн}}$ – внутрисетевая нагрузка;

Величина потерянной нагрузки $Y_{\text{пот}}$ включает в себя величины потерянной *исходящей, входящей и внутрисетевой нагрузки.*

Прежде чем перейти к рассмотрению задач планирования сети, необходимо сказать, что все расчеты и прогнозы делаются в час наибольшей нагрузки (ЧНН) сети. В современных сетях инфокоммуникаций определение ЧНН зачастую является достаточно комплексной задачей, так как

каждая из сетей, объединенных на инфокоммуникационном пространстве имеет свои особенности. В частности, в сетях мобильной связи, а также интеллектуальных сетях важной составляющей сетевой нагрузки является нагрузка не ориентированная на соединение («not connection oriented traffic»). Эта нагрузка является сигнальной нагрузкой пакетной сети сигнализации ОКС 7 на абонентские базы данных, которыми в сетях мобильной связи являются VLR, HLR/HSS, EIR и база данных аутентификации абонента ПС АУс (Authentication Centre). Не ориентированная на соединение сигнальная нагрузка может создавать свой ЧНН, не совпадающий по времени с сетевым ЧНН, что также необходимо учитывать при планировании сетей мобильной связи, так как данная нагрузка может теоретически превышать аналогичную сигнальную нагрузку создаваемую в ЧНН.

Кроме того, существенную нагрузку могут создавать используемые абонентами

Дополнительные Виды Обслуживания (ДВО), которыми могут являться традиционные ДВО унаследованные из ТФОП и ЦСИО, а также услуги, специфические для сетей мобильной связи («Переносимость номера», «стационарный мобильный телефон» и т.д.).

В данном случае, наряду со стандартной методикой определения ЧНН, на помощь проектировщику сети могут прийти средства экспертных оценок (в частности максимальной сигнальной нагрузки создаваемой «блуждающими» абонентами) и имитационного моделирования нагрузочных характеристик сетей мобильной связи. При этом эксперты принимают во внимание всевозможные факторы, влияющие на поступающую на сеть нагрузку, а именно, спортивные и культурно-массовые мероприятия, праздничные и выходные дни, круглосуточную дорожную активность и т.д.

На этапе развития сети могут устанавливаться новые наземные станции и

при их функционировании в приблизительно одинаковых условиях с существующими MSC, за основу оценки нагрузки потенциальных абонентов могут быть взяты соответствующие средние значения нагрузок, определенные в ЧНН аналогичных АТС.

Далее кратко опишем методику **определения ЧНН (рекомендации Е.500)**.

Шаг 1 По каждому из дней года определяется среднесуточное значение нагрузки, а именно:

$$Y_{cp,j} = \sum_{i=1}^{24} \frac{Y_{ij}}{24} \quad j = \overline{1, \dots, 356}$$

Шаг 2 Выбор из значений среднесуточной нагрузки $\{Y_{cp,j}\}$ тридцати наибольших значений $\{Y_{cp,j} | j \in \overline{1, \dots, 356}\}$.

Шаг 3 Для выбранных дней наибольшей нагрузки находим среднюю почасовую нагрузку по одноименным часам. Результат выполнения данного шага удобно иллюстрировать в табличном виде.

Таблица почасового измерения нагрузки за сутки по каждому из 30-и наиболее нагруженных дней года.

	1	2	3	4	5	6	15	16	17	18	..	24
1						$\overline{Y_{cp}}$							
2	$\overline{Y_{cp}}$												
3					$\overline{Y_{cp}}$								
4								$\overline{Y_{cp}}$					
5									$\overline{Y_{cp}}$				
6											$\overline{Y_{cp}}$		
...													
30										$\overline{Y_{cp}}$			

Примечание: Средние значения нагрузки, указанные в таблице, выбраны произвольно.

В аналитическом виде, действия данного шага можно выразить следующим образом:

$$\max_i \left\{ \sum_{j \in I^*} \frac{Y_j^i}{30} \right\}, \quad \text{где } i - \text{индекс часа};$$

j – индекс выбранных наиболее нагруженных суток в году;

I – множество наиболее нагруженных дней года;

Шаг 4 Нахождение максимального среднего значения нагрузки из 24-х часов по каждому из 30 дней. Час, соответствующий максимальному среднему значению нагрузки выбирается в качестве ЧНН.

Задача классификации событий процесса обслуживания вызовов

Для корректного планирования сети инфокоммуникаций необходим расчет ее нагрузочных характеристик, включая поступающую, обслуженную и потерянную нагрузку. Для решения этой задачи требуется учитывать следующие множества вероятностей событий ПОВ, а именно:

P_1 – множество вероятностей событий, появившихся как результат поведения абонента;

P_2 – множество вероятностей событий, появившихся как результат поведения оборудования сети и определяющий потерянную нагрузку;

P_3 – множество удельных весов распределения поступающей нагрузки по видам связи.

Далее, кратко опишем типы элементов каждого из приведенных выше множеств.

Так, тип элементов множества P_1 во многом зависит от природы рассматриваемой сети.

Для ТФОП рассматриваются следующие элементы множества P_1 :

- $P_{зн}$ – вероятность занятости вызываемого абонента;
- $P_{но}$ – вероятность неответа вызываемого абонента;
- $P_{ош}$ - вероятность ошибки вызывающего абонента;

При рассмотрении сети мобильной связи, дополнительно к приведенным выше элементам множества P_1 , могут быть введены следующие элементы:

- $P_{од}$ – вероятность изменения зоны местонахождения ПС;
- $P_{рег}$ - вероятность изменения зоны обслуживания УКПС ПС, находящейся в свободном активном состоянии;
- $P_{пв1}$ – вероятность смены ПС соты при нахождении ПС в разговорном состоянии;

- $P_{пв2}$ - вероятность смены ПС зоны обслуживания УКПС, при нахождении ПС в разговорном состоянии;
- $P_{отк}$ - вероятность отказа ПС от связи до завершения установления исходящего от него соединения.

Элементы множества P_2 во многом зависят от принятых проектных решений, пропускной способности и технических возможностей сети, а также надежности функционирования сетевого оборудования.

К элементам этого множества относятся вероятности следующих событий:

- $P_{со}$ – вероятность отказа от обслуживания вследствие сбоя оборудования;
- $P_{зан}$ – вероятность отказа от обслуживания вследствие отсутствия свободной соединительной линии;

- $P_{\text{но}}$ – вероятность отказа от обслуживания вследствие приема недостоверной информации.

К элементам множества P_3 , определяющего удельные веса распределения нагрузки по видам связи, можно отнести следующие:

- $P_{\text{исх}}$ - доля исходящих от абонентов сети вызовов;
- $P_{\text{вх}}$ - доля входящих к абонентам вызовов;
- $P_{\text{вн}}$ – доля вызовов, замыкающихся внутри сети.

Можно предложить подход, позволяющий в комплексе определить все основные нагрузочные характеристики рассматриваемой сети.

К ним относятся следующие:

λ_i - интенсивность потока заявок, поступающих на совокупность ЭОВ в ПОВ.

Λ_l - интенсивность потока заявок, поступающих на совокупность ЭОВ в ПОВ.

Λ_r - интенсивность потока заявок, поступающих на каждую компоненту сети в ПОВ.

$\Lambda_{сети}$ - нагрузка, поступающая на сеть от абонентов и других сетей электросвязи.

Учет количества и типов источников нагрузки N

При расчете нагрузочных характеристик необходимо учитывать количество и тип источников нагрузки на сеть. В первую очередь это связано с тем, что для различных типов источников нагрузки ($N_{тип\ источника}$) различается такой показатель, как *среднее число вызовов в ЧНН* - $S_{тип\ источника}$.

Традиционно, в стационарной телефонии различают следующие *категории источников нагрузки*:

- Общественные (учрежденческие) телефоны N_o ;
- Аппараты индивидуального использования $N_{инд}$;
- Квартирные аппараты коллективного использования N_k ;
- Таксофоны местного или универсального назначения $N_{ма}$;
- СЛ от учрежденческих телефонных станций $N_{сл}$.

Среднее количество вызовов, усредненное от одного источника, вычисляется следующим образом:

$$c = \frac{c_o N_o + c_k n_k + c_{инд} N_{инд} + c_{ма} N_{ма} + c_{сл} N_{сл}}{N}$$

Примерные данные среднего числа вызовов в ЧНН от одного источника нагрузки соответствующей категории являются

следующими: $C_o = 3,5 \div 5$; $C_{инд} = 0,5 \div 1$;
 $C_k = 1,5 \div 2$; $C_{ма} = 15 \div 30$;

Приведенные выше данные определены на базе многолетних результатов измерений на местных городских телефонных сетях. Они принимаются за основу расчета нагрузочных характеристик узлов коммутации местных телефонных сетей, позволяя оценить общую нагрузку, поступающую на узел коммутации.

Для оценки интенсивности потоков заявок на реализацию отдельных процедур ПОВ определению также подлежат коэффициенты, суть элементы множества P_1 , определяемые поведением абонента. Считается, что при удовлетворительной работе сети соответствующие коэффициенты имеют такие значения, как $P_{разг} = 0,65 \div 0,75$;
 $P_{тех} = 0,005 \div 0,01$; $P_{ош} = 0,02 \div 0,05$; $P_{но} = 0,08 \div 0,12$; $P_{зн} = 0,12 \div 0,15$.

Расчет приведенных выше нагрузочных характеристик производится по следующим формулам:

$$\Lambda_{сети} = N \times C, \text{ где}$$

N – общее количество абонентов сети;

C – среднее количество попыток вызова от одного абонента;

$$\lambda_i = \Lambda_{сети} \times P_i, \text{ где}$$

P_i - вероятность использования i -го ЭОВ (вероятность использования i -й вершины графа процесса обслуживания вызовов).

$$\Lambda_I = \Lambda_{сети} \times \sum_{i=1}^I p_i, \text{ где}$$

I – общее количество ЭОВ, реализуемых сетью.

Таким образом, вычисление Λ_I сводится к определению P_i . В определении P_i множество P_3 определяет подграфы, а множества P_2 и P_3 определяют конкретную вершину подграфа. При этом возможны

случаи, когда нескольким вершинам необходимо присвоить значения одного и того-же элемента множества P_2 . В этом случае выполнение ЭОВ считается равновероятным, и каждой из вершин присваивается равная доля от значения элемента множества P_2 , а именно, для каждого подграфа определяются значения:

$$P_{\text{зан}} = P_{\text{зан}}/n_{\text{зан}};$$

$$P_{\text{со}} = P_{\text{со}}/n_{\text{со}};$$

$$P_{\text{но}} = P_{\text{но}}/n_{\text{но}};$$

.....

$$P_{\text{тех}} = P_{\text{тех}}/n_{\text{тех}};$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

При этом, для проведения численных расчетов, необходимо руководствоваться установленными рекомендациями МСЭ-Т, либо администрацией рассматриваемой сети электросвязи, нормами качества обслуживания вызовов.

Вероятность использования вершин графа $G_{\text{пов}}$, начиная с нулевой вершины, может определена как:

$$P_i = \prod_{x=1}^i p_{(x-1),x}, \text{ где}$$

$(x-1)$ – число вершин в графе на пути от исходной вершины ($x=1$) до рассчитываемой ($x=i$).

$P_{(x-1),x}$ - вероятность перехода от $(x-1)$ -й вершины к x -й.

Определение интенсивности потока заявок на компоненты сети

Интенсивность потоков заявок на компоненты сети определяется следующим функционалом:

$$\Lambda_R = F(\{\lambda_i\}, G_{cfn}, \|k\|_{r \times i}),$$

где

λ_i - интенсивность потоков заявок на i -й этап обслуживания вызовов;

G_{cfn} - граф структурно-функционального построения сети;

$\|k\|_{r \times i}$ - матрица распределения числа обращений (k_{ri}) к каждой компоненте сети в течении выполнения ЭОВ;

R – общее число компонент сети.

I – общее число ЭОВ реализуемых рассматриваемой сетью электросвязи.

Определение величины k_{ri} имеет отношение к задаче распределения функций между компонентами сети. Функции выполняются, как совокупность действий компонент сети по реализации заявки на i -м ЭОВ. При этом, в течении реализации ЭОВ, каждая компонента сети может выполнять одну или более функций из общего числа функций Y . Поэтому, для определения величины k_{ri} , необходимо произвести «окраску» дуг графа $G_{пов}$. Под «окраской» понимается нумерация функциональных связей, отражающих последовательность формирования заявок от одной компоненты к другой в процессе реализации ЭОВ. Используя граф структурно-функционального построения сети $G_{сфп}$ и распределение функций ПОВ для каждого ЭОВ, составляются бинарные матрицы вида $\|A^i\|_{r \times j}$. Для каждого рассматриваемого конкретного ЭОВ значения k_{ri} при наличии соответствующих матриц, определяются следующим образом:

$$k_{ri} = \sum_{j=1}^J a_{rj}^i, \text{ где}$$

$$r = \overline{1, \dots, R};$$

$$j = \overline{1, \dots, J};$$

Таким образом, имея в распоряжении фиксированную структуру графа $G_{\text{сфп}}$, матрицу $\|K\|_{R \times I}$, интенсивность потоков заявок на совокупность компонент сети может найдена исходя из следующего выражения:

$$\Lambda_R = \sum_{r=1}^R \Lambda_r = \sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^I k_{ri} \lambda_i$$

В обобщенном виде, матрица распределения числа обращений к компонентам сети в течении реализации ЭОВ может быть представлена в следующем виде:

Матрица $\|A^i\|_{R \times J}$

	ФОВ 1	ФОВ 2	ФОВ N	k_{ri}
Компонента 1	1				1
Компонента 2		1		1	2
Компонента 3	1				1
.....					
Компонента N				1	1

Соответственно, приведенная выше матрица представляет собой распределение числа обращений к компонентам сети k_{ri} в течение реализации i -о этапа обслуживания вызова.

Одна из причин качественного развития сети — заинтересованность группы пользователей, приносящей Оператору существенные доходы, в новых видах услуг. Ряд требований этой группы пользователей

стимулирует радикальные изменения в различных компонентах телекоммуникационной сети. В настоящее время самые существенные изменения происходят в сетях доступа. Желательно, чтобы качественные изменения были выявлены при разработке прогнозов, которые необходимы для выбора рациональных принципов дальнейшего развития инфокоммуникационной системы.

В процессе планирования телекоммуникационных сетей используются различные методы. Выбор метода осуществляется с учетом поставленной задачи, характера рассматриваемого процесса и доступной статистической информации.

Оценки пропускной способности сети важны для оптимального выбора проектных решений, касающихся транспортных ресурсов и типа коммутационного оборудования. Исходные данные для таких оценок могут быть получены только на

основе прогнозов трафика. Этот трафик, в свою очередь, может быть рассчитан, если известны прогнозы, связанные с перечнем поддерживаемых услуг. Важную роль играют показатели качества обслуживания для перспективной телекоммуникационной сети. Например, часть абонентов заинтересована в радикальном улучшении надежности связи, что приводит к резервированию основных элементов сети.

Для пропускной способности сети, перечня поддерживаемых ею услуг и показателей качества обслуживания очень важно – с практической точки зрения – получить два вида прогностических оценок. Во-первых, Оператор должен знать краткосрочный прогноз на ближайшие годы. Во-вторых, для разработки разумной технической политики Оператору необходим также и долгосрочный прогноз на десять-пятнадцать лет, то есть на период срока службы сложных видов телекоммуникационного оборудования.

В процессе планирования телефонной сети важными прогностическими оценками считаются численность потенциальных абонентов и параметры нагрузки. Знание этих данных плюс многолетний опыт эксплуатации ТФОП упрощает решение большинства задач прогнозирования. Для NGN задачи прогнозирования существенно усложняются. Достаточно привести пример с пользователями Internet. Для проектирования сети важно знать не только численность пользователей Internet, но и их распределение с точки зрения используемых транспортных ресурсов. Если пользователь обращается в Internet с помощью оборудования xDSL, то результаты расчета транспортных ресурсов заметно отличаются от оценок, полученных для доступа через модем.

Прогнозирование обычно выполняется для телекоммуникационной системы в целом, а для конкретной задачи используется лишь часть полученных результатов. Задачи прогнозирования целесообразно

рассматривать в полном объеме, то есть с точки зрения проектирования, построения, эксплуатации и развития инфокоммуникационной системы.

Формализованные методы прогнозирования

Формализованные методы прогнозирования эффективны в тех случаях, когда хорошо известна предыстория исследуемого процесса.

В настоящее время большинство прогнозов осуществляется с помощью методов экстраполяции и экспертных оценок. Каждый из этих двух методов реализуется различными способами, выбор которых зависит от исследуемого процесса и поставленной задачи.

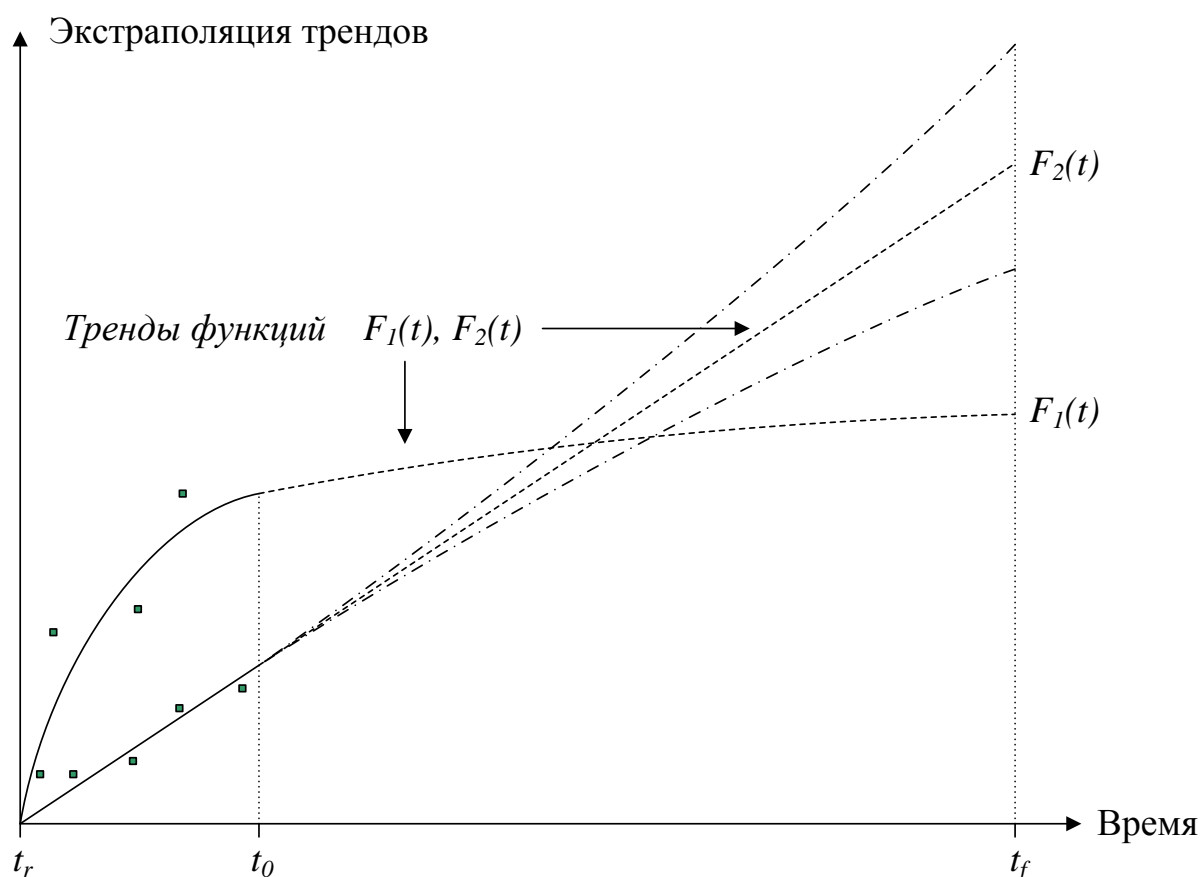
Усложнение разработки прогнозов – помимо проблем с достоверностью необходимой

статистической информации – объясняется обстоятельствами такого рода:

- некоторые виды новых услуг столь специфичны, что для их прогнозирования очень сложно подобрать адекватные аналоги;
- ряду сегментов инфокоммуникационного рынка (характерный пример – мобильная связь) свойственны процессы развития, которые существенно отличаются от тенденций, тщательно изученных Операторами других стран.

На нижеследующем рисунке представлены примеры прогнозирования процессов, представленных функциями $F_1(t)$ и $F_2(t)$ [4]. Предполагается, что статистические данные, накопленные за период времени $[t_r, t_0]$, позволяют определить аналитические выражения для функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Статистические данные отображены квадратиками на отрезке $[t_r, t_0]$. Поставленная задача сводится к вычислению значения

обоих функций для периода прогнозирования $[t_0, t_f]$. Соответствующие тренды изображены пунктирными линиями. Кроме того, при решении подобных задач прогнозирования, как правило определяют доверительные интервалы, представленные на нижеследующем рисунке для функции $F_2(t)$ пунктирной линией.



Пример прогнозирования двух процессов

Для прогнозирования некоторых величин целесообразно использовать метод, основанный на учете одного из самых важных экономических показателей – *валового внутреннего продукта (ВВП)* на душу населения. В ряде работ обоснована оценка спроса на инфокоммуникационные услуги, выраженная через функцию $D(t)$:

$$D(t) = \left(\frac{G_t}{G_0} \right)^b F_j(t)$$

Величины G_t и G_0 отражают ВВП на душу населения для прогнозируемого момента времени t и начальной точки на оси «Время». Коэффициент b определяет степень влияния роста ВВП на уровень платежеспособного спроса для оцениваемой услуги. Функция $F_j(t)$ является одной из прогностических кривых. Часто эти кривые относятся к S-образным моделям [4], хорошо отражающим

развитие процесса, проходящего три
основные этапа:

- Медленный старт;
- Интенсивный рост;
- Фаза насыщения.

Набор функций, входящих в эту формулу
весьма обширен. В частности, в технической
литературе рассматриваются такие
зависимости:

$$F_1(t) = a x + b$$

$$F_2(t) = a x^2 + bx + c$$

$$F_3(t) = a + ce^{-bt}$$

$$F_4(t) = \left(\frac{a}{1 + ce^{-bt}} \right)$$

$$F_5(t) = ae^{-ce^{-bt}}$$

$$F_6(t) = a \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$F_7(t) = a \int_0^t \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$F_8(t) = \frac{a - c_1 e^{-bt}}{1 + c_2 e^{-bt}}$$

$$\ln\left(\frac{F_9(t)}{1 - F_9(t)}\right) = c + bt$$

Выбор приемлемого тренда часто осуществляется при помощи метода наименьших квадратов. Обычно данный

метод используется для решения задач такого рода:

- Для плоскости задано некоторое множество из N точек с координатами (x_i, y_i) ;
- Точное прохождение через данные точки какой-либо кривой, выражающей функциональную зависимость вида $y_i=f(x_i)$ не представляется возможным без погрешностей;
- Необходимо выбрать функцию $f(x)$, обеспечивающую минимальную погрешность при описании исследуемого процесса.

Метод наименьших квадратов предлагает выбрать функцию, для которой будет справедливо условие следующего вида:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 = \min.$$

При этом считается, что ошибки измерения распределены по нормальному закону и требуется максимизировать вероятность того, что результаты измерений, суть случайные величины (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) примут совокупность значений (y_1, y_2, \dots, y_n) .

Исходные данные.

Имеется таблица экспериментальных данных следующего внешнего вида.

Таблица экспериментальных данных

i	x_i	y_i
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
.....
i	x_i	y_i
.....
n	x_n	y_n

Выбирается внешний вид функции $y = \varphi(x)$, которая зависит от нескольких числовых параметров a, b, c , которые необходимо найти по методу наименьших квадратов. Запишем функцию y как функцию не только аргумента x , но и параметров a, b, c .

$$y = \varphi(x; a, b, c, \dots). \quad (1)$$

Параметры a, b, c необходимо выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)]^2 = \min. \quad (2)$$

Шаг 1

Находятся значения a, b, c , обращающие левую часть выражения (2) в минимум. Для этого выражение (2) необходимо продифференцировать по a, b, c и приравнять производные к нулю. В

результате имеем нижеследующую систему уравнений.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right)_i &= 0, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_i = \varphi'_a(x_i; a, b, c, \dots)$ значение частной производной φ по параметру «а» в точке x_i . Аналогичным образом берутся производные по параметрам «b» и «с» в точке x_i .

При рассмотрении в качестве примера подбора по методу наименьших квадратов параметров линейной функции $y = ax + b$, имеем

$$y = \varphi(x; a, b) = ax + b. \quad (4)$$

В результате дифференцирования выражения (4) по «a» и «b».

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= x; & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_i &= x_i; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} &= 1; & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)_i &= 1. \end{aligned}$$

Шаг 2 Результаты дифференцирования подставляются в формулы приведенной выше системы уравнений (3), в результате чего имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Шаг 3 Раскрываем скобки каждого уравнения в (5) и производим суммирование

, в результате чего имеем следующую систему уравнений:

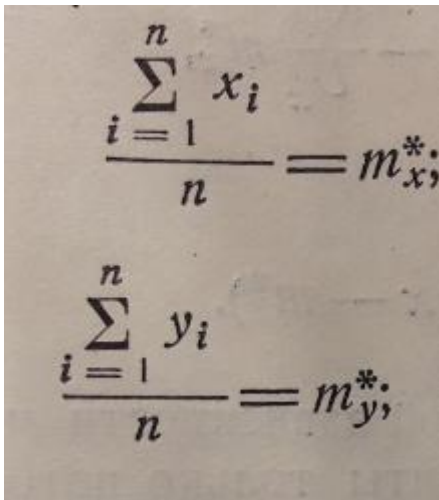
$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - bn &= 0. \end{aligned} \right\} (6)$$

Шаг 4 Разделим оба уравнения на n , в результате чего система уравнений (6) преобразуется к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} &= 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - b &= 0. \end{aligned} \right\} (7)$$

Суммы, входящие в уравнения (7) представляют из себя статистические моменты:

Статистический первый начальный момент или же *математическое ожидание* величин x и y :



The image shows two handwritten mathematical formulas on a piece of paper. The first formula is $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = m_{x^*}$ and the second formula is $\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = m_{y^*}$.

(8)

Статистический второй начальный момент:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \alpha_2^* [X];$$

(9)

Статистический первый начальный момент величин x и y .

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} = \alpha_{1,1}^* [X, Y].$$

(10)

Шаг 5

Подставляем выражения (8), (9) и (10) в приведенную выше систему уравнений (7), в результате чего получаем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1}^* [X, Y] - a\alpha_2^* [X] - bm_x^* &= 0, \\ m_y^* - am_x^* - b &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(11)

Шаг 6

Выразим b из второго уравнения и подставим в первое, которое решим относительно a . В результате, имеем:

$$a = \frac{\alpha_{1,1}^* [X, Y] - m_x^* m_y^*}{\alpha_2^* [X] - (m_x^*)^2} \quad (12)$$

Шаг 7

Выражение (12) можно упростить, если ввести в него центральные моменты.

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}^* [X, Y] - m_x^* m_y^* &= K_{xy}^*, \\ \alpha_2^* [X] - (m_x^*)^2 &= D_x^*, \end{aligned} \quad (13)$$

Шаг 8

Перепишем выражение (12) с учетом введенных в (13) центральных моментов. В результате имеем:

$$a = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*}; \quad b = m_y^* - a m_x^*, \quad \text{где} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} m_x^* &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; & m_y^* &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}; \\ K_{xy}^* &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)}{n}; \\ D_x^* &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

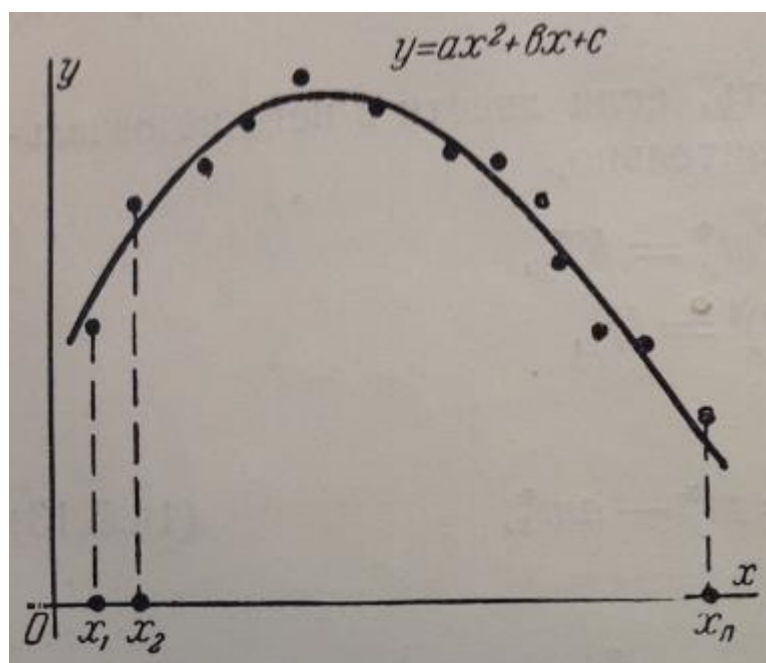
Шаг 9

Перепишем выражение (4)

$y = \varphi(x; a, b) = ax + b.$ с учетом вычисленных параметров a и b (14). В результате имеем следующее выражение:

$$y = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} x + m_y^* - \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} m_x^*, \quad (16)$$

Подбор параметров параболы второго порядка методом наименьших квадратов принципиально не отличается от подбора параметров приведенной выше линейной зависимости. Внешний вид экспериментальных данных, функциональная зависимость и аппроксимирующая экспериментальные данные параболическая зависимость представлены на следующем ниже рисунке.



Парабола второго порядка

Более детальная информация по вопросам сглаживания экспериментальных данных линейными функциями, а также параболическими зависимостями согласно методу наименьших квадратов, содержатся в книге [5].

Интуитивные методы прогнозирования

Для повышения достоверности предсказания исследуемой величины целесообразно использовать несколько методов прогноза. Практически во всех случаях эффективен метод экспертных оценок. В последние годы широкое распространение для решения задач прогнозирования получил метод Делфи (Delphi Method). Коллективное обсуждение проблем часто искажается из-за того, что некоторые эксперты, участвующие в

дискуссии, невольно оказывают влияние на аудиторию. Метод Делфи основан на полном отказе от коллективной дискуссии, что исключает влияние таких психологических факторов как согласие с позицией более активных либо авторитетных коллег или желание присоединиться к мнению большинства. Это преимущество достигается за счет роста времени получения результатов.

Раздельная обработка результатов, полученных от двух групп экспертов, означает следующее:

- для каждой группы экспертов с помощью известных методов математической статистики устанавливается близость ответов;
- в результате формируются два варианта ответа на вопрос, сформулированный перед каждой группой экспертов;
- затем с помощью методов математической статистики или иным

способом устанавливается близость двух усредненных ответов;

- если степень совпадения усредненных ответов приемлема с точки зрения организатора опроса, то задачу прогнозирования можно считать решенной (в противном случае нужны дополнительные исследования).

Следует выделить новые методы, которые могут быть успешно использованы для прогнозирования. Один из таких методов – использование фильтра Калмана. Этот фильтр представляет собой рекурсивное устройство оценки. Алгоритм работы такого устройства позволяет корректировать полученный результат за счет анализа каждой новой выборки, определенной на оси "Время". Другой метод базируется на нейронных сетях. Их построение и анализ в последние годы эффективно используются для решения ряда задач.

Интуитивные методы прогнозирования полезны при изменении характера

исследуемого процесса. Существенные ошибки прогнозирования возникают в тех случаях, когда исследуемый процесс имеет точку перегиба. Характерный пример такого процесса – спрос на услуги телеграфной связи. В середине XX века продолжался рост трафика в сетях телеграфной связи. Затем наступил устойчивый спад спроса на все услуги, которые связаны с телеграфией. Если воспользоваться статистическими данными конца семидесятых годов, то долгосрочный прогноз предусматривал бы рост телеграфного трафика в XXI веке. Этот пример свидетельствует об опасности "слепой" экстраполяции тенденций.

На нижеследующем рисунке показана гистограмма, содержащая три множества данных. Множество $\{X_2\}$ содержит набор данных, используемый для прогнозирования на перспективу. Множество $\{X_1\}$ включает ретроспективный набор данных, которые не

нужны для прогнозирования на перспективу, т.е. для определения множества $\{X_3\}$.

Суть прогнозирования прошлого заключается в реализации алгоритма, который может быть представлен следующей последовательностью операций [4]:

- анализ множества $\{X_2\}$ позволяет выявить тенденцию, которая может быть экстраполирована на перспективу за счет выбора вида функции $F(t)$ методом наименьших квадратов или иным способом;
- Функция $F(t)$ используется и для расчета значений исследуемого процесса на множестве $\{X_1\}$;
- Если выбранная аппроксимация хорошо совпадает с реальными данными для множества $\{X_1\}$, то выбор функции $F(t)$ считается удачным и далее именно она используется для прогнозирования – определения элементов множества $\{X_3\}$;

- Если выбранная аппроксимация не совпадает с анализируемым процессом для множества $\{X_1\}$, то следует провести дополнительные исследования для выбора подходящей функции $F(t)$;

«Прогнозирование прошлого» позволяет решить ряд важных задач. В частности, можно оценить статистические данные за прошлые годы, если они не собирались или не доступны.

Развитие прогнозирования (1)

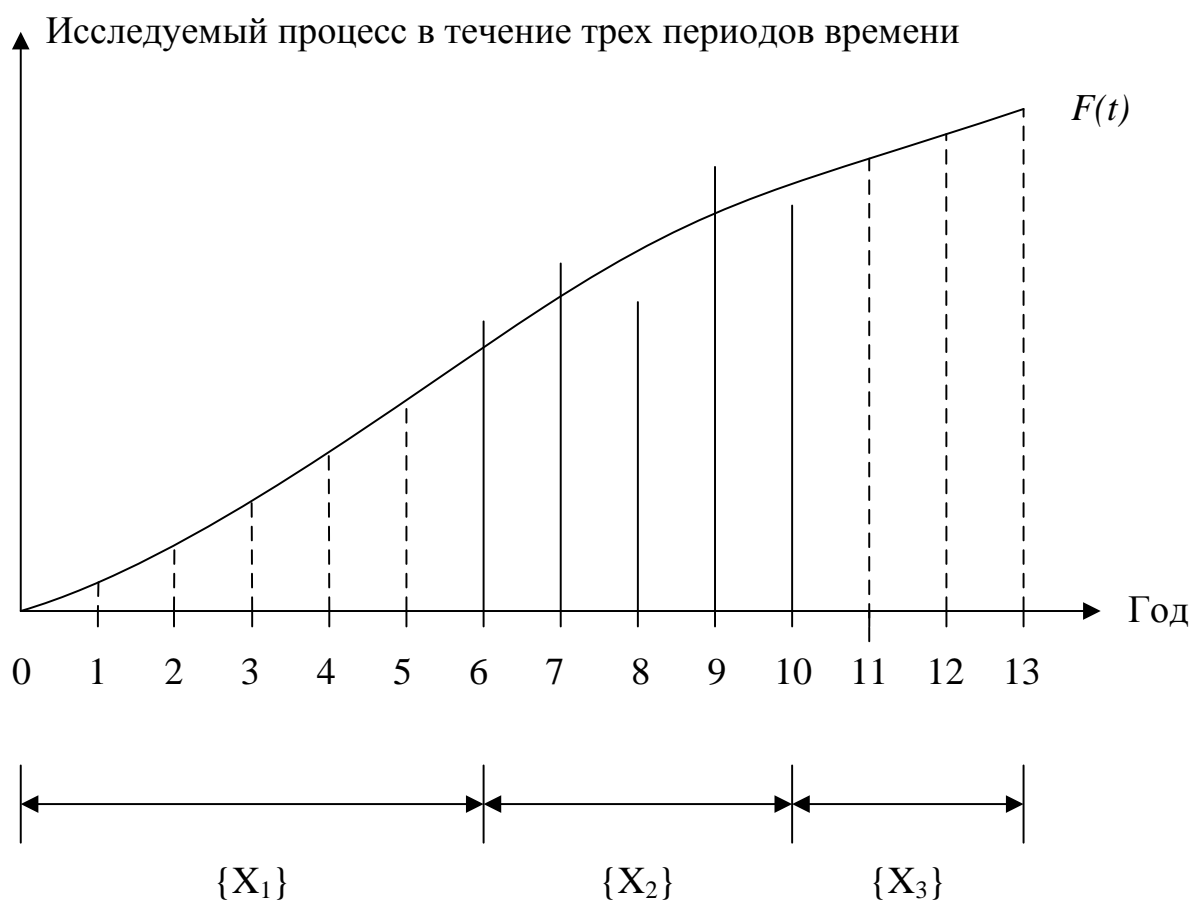


Иллюстрация прогнозирования прошлого

Платежеспособный спрос на инфокоммуникационные услуги в значительной мере определяется финансовыми ресурсами, что утверждал А. Джипп в своей статье «Благосостояние нации и телефонная плотность». В этой работе была доказана зависимость между

телефонной плотностью χ и ВВП на душу населения – G :

Коэффициент k_1 представляет собой нормирующий множитель.

Диаграмма Джиппа:

$$\chi = f(G) \approx k_1 G$$

В нижеследующей формуле телефонная плотность χ заменена средним значением трафика речи при дальней связи (международной и междугородней), который генерируется одним абонентом от ВВП на душу населения. K_2 является нормирующим множителем.

$$Y_s = F(G) \approx k_2 G$$

Однако, отмечается тенденция снижения телефонной плотности с ростом ВВП. В частности, данный факт обусловлен оттоком части абонентов ТФОП в ССПСОП и активное использование услуг мобильной связи. Кроме того, часть абонентов предпочла услуги IP телефонии, различные диалоговые приложения Интернет и Скайп.

Точность прогноза можно повысить за счет тщательного анализа причинно-следственных связей. Подобный подход представляется очень важным – особенно при качественных изменениях в телекоммуникационной системе. Другой путь повышения точности искомых оценок основан на развитии формализованных методов прогнозирования. Он эффективен как дополнение тех методов, которые базируются на исследовании причинно-следственных связей.

