

## ВВЕДЕНИЕ

В целом ряде задач современной науки и техники требуется высокая скорость обработки информации, не достижимая при использовании традиционных методов электроники и вычислительной техники. Наибольшие трудности возникают в том случае, когда к устройствам обработки предъявляются жёсткие требования по габаритам, энергопотреблению и стоимости. Примерами рассматриваемых задач являются следующие: обработка широкополосных сигналов в радио и гидролокации, обработка и распознавание изображений в реальном масштабе времени, обработка данных сейсморазведки и другие. Так, при съёмке Земли из космоса с целью изучения природных ресурсов, получают снимки с числом разрешимых точек  $\sim 10^4 \times 10^4$ . Для распознавания объектов определённой конфигурации на этих снимках с помощью цифровой техники приходится последовательно перебирать и обрабатывать все участки большого изображения размером с опознаваемый объект, поскольку обычные ЭВМ являются машинами последовательного действия. Анализ показывает, что время, затрачиваемое на обработку такого снимка, при этом значительно превосходит период появления снимков на спутнике, то есть обработка в реальном времени невозможна.

С целью увеличения скорости обработки больших массивов информации в последние годы уделяется значительное внимание разработке цифровых матричных и многоканальных аналоговых процессоров. Однако электронные вычислители такого типа оказываются пока сложными и дорогими. Значительно проще, дешевле и экономичнее устройства оптической обработки информации. Оптический сигнал, в отличие от электрического, одномерного, является двумерным, поэтому такие системы естественным образом подходят для параллельной обработки больших массивов информации типа изображений и к ним сводимым.

Блок-схема устройства оптической обработки показана на рис.1. На входе оптической системы расположен входной преобразователь, который осуществляет модуляцию двумерного светового потока от источника света как во времени, так и по пространству. Примерами входных преобразователей являются фотоплёнка с изображением или многоканальный акустооптический модулятор, в котором распространяются ультразвуковые волны, возбуждаемые электрическими сигналами.

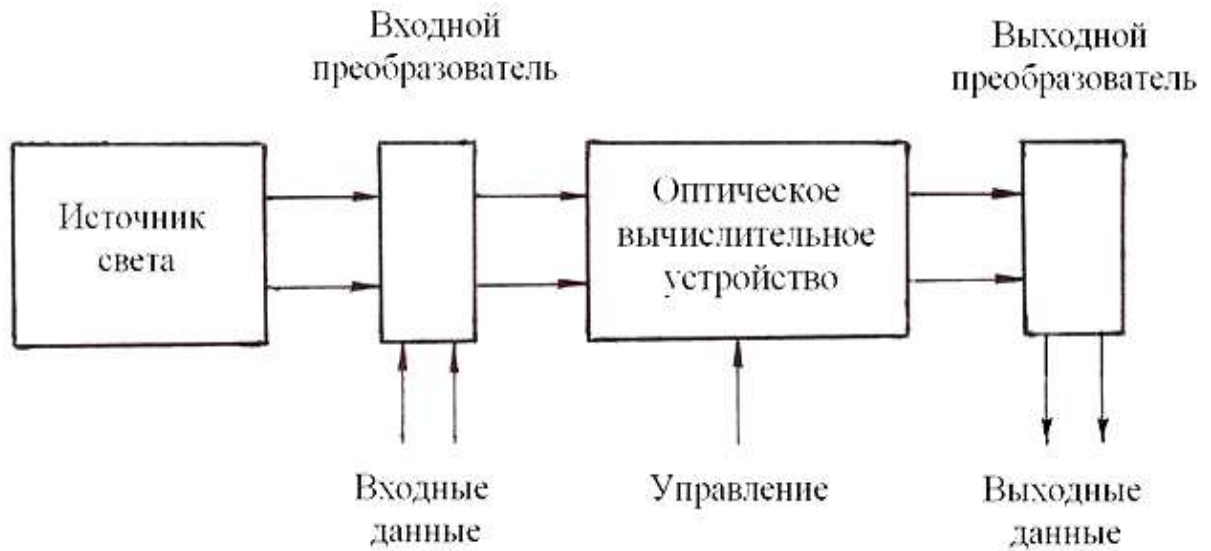


Рис.1. Блок-схема устройства оптической обработки информации

Оптическое вычислительное устройство состоит из линз различного типа, диафрагм, голографических фильтров и других оптических элементов, воздействующих на проходящий световой поток, в чём и заключается оптическая обработка. Существуют оптические элементы, параметры которых управляются электрическими сигналами, что позволяет достаточно быстро менять алгоритм обработки в системе.

Выходной сигнал оптической системы подаётся на выходной преобразователь, в качестве которого используется, например, двумерный дисплей или многоэлементный матричный фотоэлектрический преобразователь. В последнем случае световое распределение превращается в электрические сигналы, которые могут быть подвергнуты дальнейшей обработке с помощью ЭВМ.

Достоинством оптических систем является их возможность практически мгновенно, со скоростью прохождения света через устройство, осуществлять достаточно сложные операции над двумерными массивами данных типа умножения, преобразования Фурье, свёртки, корреляции и другие. Эквивалентная производительность оптических вычислителей достигает при этом  $\sim 10^{12}$ - $10^{15}$  оп/с [1]. Габариты, энергопотребление и стоимость таких устройств оказываются на 1...2 порядка меньше аналогичных электронных, если задача вообще разрешима с помощью электронных методов.

К недостаткам оптических систем обработки следует отнести невысокую точность вычислений (1...10)% и относительную жёсткость реализуемых

алгоритмов. В целом, такие устройства целесообразно применять, когда точность не играет определяющей роли, а жизненно необходимой является высокая скорость вычислений. Алгоритмы обработки в оптических вычислителях в основном ограничены интегральными операциями, однако они могут быть частично расширены в гибридных системах, когда оптические системы используются совместно с одной или несколькими ЭВМ.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

### 1.1. Оптический сигнал

Оптическим сигналом называют световую волну, несущую определённую информацию. Световые волны являются электромагнитными волнами и удовлетворяют уравнениям Максвелла, а их распределение в пространстве и времени зависит от трёх пространственных координат и времени. Для описания электромагнитных волн достаточно описания только электрической или только магнитной волны, так как они жёстко связаны между собой. Для случая монохроматического источника света, обычно используемого в системах оптической обработки информации, распределение поля электрической или магнитной волны может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{u}_t(x, y, z, t) &= \bar{P}(x, y, z)u_t(x, y, z, t) = \\ &= \bar{P}(x, y, z)a(x, y, z) \cos [2\pi n t + j(x, y, z)]\end{aligned}\tag{0.1}$$

Для определённости в дальнейшем будем считать, что (0.1) описывает электрическое поле. Здесь  $\bar{P}(x, y, z)$  - единичный вектор, определяющий поляризацию волны;  $u_t(x, y, z, t)$  - скалярная величина, численно равная мгновенному значению напряжённости электрического поля;  $a(x, y, z)$  - амплитуда колебаний этого поля,  $\nu$  - частота колебаний,  $j(x, y, z)$  - фаза.

Обычно работают с использованием световых полей одной поляризации, при этом достаточно использовать скалярную форму записи световой волны:

$$u_t(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos [2\pi n t + j(x, y, z)] \quad (0.2)$$

Для удобства расчётов принято пользоваться комплексной формой записи

$$\mathcal{E}_t(x, y, z, t) = u(x, y, z) e^{j2\pi n t}, \quad (0.3)$$

где  $u(x, y, z) = a(x, y, z) e^{j\phi(x, y, z)}$  - комплексная амплитуда светового поля в точке  $(x, y, z)$ . При этом физический смысл имеет действительная часть выражения (0.3).

В оптических системах обычно работают с двумерными распределениями света в плоскостях, перпендикулярных оптической оси  $z$ . При этом оптический сигнал в плоскости  $z = \text{const}$  полностью определяется комплексной амплитудой вида

$$u(x, y) = a(x, y) e^{j\phi(x, y)} \quad (0.4)$$

Выражение для оптического сигнала (1.4) аналогично комплексной форме записи электрического сигнала:  $i(t) = A(t) e^{j\phi(t)}$ , в котором время заменено на пространственные координаты. При этом оптический сигнал является функцией не одной, а двух переменных.

## 1.2. Преобразование Фурье в оптике

В оптике большое значение имеет преобразование Фурье, поскольку оптические системы состоят из линз, а при когерентном освещении амплитуды света в передней и задней фокальных плоскостях линзы, как будет показано, связаны преобразованием Фурье. В отличие от электроники, где используют преобразование Фурье функции одной переменной, в оптике имеют дело с преобразованием Фурье от функций двух переменных:

$$F[g(x, y)] = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} g(x, y) e^{-j2\pi(xh + yv)} dx dy = G(x, h). \quad (0.5)$$

Преобразование Фурье  $G(x, h)$  называется двумерным спектром функции  $g(x, y)$ , а  $x, h$  - пространственными частотами. Если преобразование Фурье существует, то функцию  $g(x, y)$  можно разложить по пространственным частотам в виде обратного преобразования Фурье:

$$g(x, y) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} G(x, h) e^{j2\pi(xh + yk)} dx dh.$$

Достаточными условиями существования преобразования Фурье являются: абсолютная интегрируемость функции  $g(x, y)$ , конечное число максимумов в любой ограниченной области входных переменных, отсутствие разрывов 2-го рода. Как правило, для существования преобразования Фурье достаточно условия физической осуществимости исходной функции.

Для некоторых функций, для которых одно из условий существования не выполнено, преобразование Фурье, тем не менее, существует, если его рассматривать, как предел фурье-образов последовательности функций. Такой функцией является, например, дельта-функция Дирака, функции  $f(x, y) = 1$ ,  $f(x, y) = \cos(2\pi\xi_0 x)$  и др.

Дельта-функция удовлетворяет следующим условиям:

$$d(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0, y = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} d(x, y) dx dy = 1$$

и имеет разрыв 2-го рода в начале координат. Если рассматривать дельта-функцию, как предел некоторой последовательности обычных функций, например,

$$d(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ N^2 \exp \left[ -\frac{1}{N} (x^2 + y^2) \right] \right\},$$

то фурье-образ дельта-функции находится как предел фурье-образов этой последовательности функций:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{d(x,y)\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_{-N}^N \left\{ N^2 \exp\left[ -j2\pi(x^2 + y^2) \right] p \right\} dx dy \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_{-N}^N p \frac{x^2 + y^2}{N^2} dx dy = 1.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье, выражаемые в виде ряда теорем.

1. Теорема линейности.

$$\mathcal{F}[ag(x,y) + bh(x,y)] = a\mathcal{F}[g(x,y)] + b\mathcal{F}[h(x,y)],$$

т.е. фурье-образ суммы двух функций равен сумме их фурье-образов.

2. Теорема подобия.

$$\mathcal{F}\{g(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{x}{a}, \frac{h}{b}\right),$$

т.е. "растяжение" координат в пространственной области  $(x,y)$  приводит к сокращению координат в области частот  $(x,h)$  и к изменению общей амплитуды спектра.

3. Теорема смещения.

$$\mathcal{F}[g(x-a,y-b)] = G(x,h)e^{-j2\pi(xa+hb)},$$

т.е. смещение функции в пространственной области вызывает линейный фазовый сдвиг в области частот.

4. Теорема свёртки. Если  $\mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(x,h)$  и

$$\mathcal{F}\{h(x,y)\} = H(x,h), \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{g(x,y) \otimes h(x,y)\} &= \mathcal{F} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,y_1) h(x-x_1,y-y_1) dx_1 dy_1 \\
 &= G(x,h)H(x,h).
 \end{aligned}$$

где  $\otimes$  -знак свёртки. Свёртка двух функций в пространственной области эквивалентна более простой операции умножения их фурье-образов.

5. Свойство симметрии

$$F[g^*(x, y)] = G^*(-x, -h).$$

6. Теорема корреляции.

$$F \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} g(x, y) h^*(x - x', y - y') dx dy = G(x, h) H^*(x, h).$$

Эту теорему можно рассматривать как частный случай теоремы свёртки.

7. Теорема Парсеваля.

$$\int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} |g(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} |G(x, h)|^2 dx dh.$$

Эта теорема обычно интерпретируется как закон сохранения энергии.

8. Фурье от произведения двух функций.

$$F \{g(x, y)h(x, y)\} = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} G(x, h) H(x - x', h - h') dx dh = G(x, h) H(x, h).$$

9. Интегральная теорема Фурье.

В каждой точке непрерывной функции  $g(x, y)$ :

$$FF^{-1} \{g(x, y)\} = F^{-1}F \{g(x, y)\} = g(x, y).$$

В каждой точке разрыва функции  $g$  два последовательных преобразования дают среднее значение величины  $g$  в окрестности этой точки.

Рассмотренные выше теоремы являются основными и не исчерпывают всех случаев применения фурье-преобразования. При необходимости новые свойства могут быть доказаны, как и приведённые теоремы, на основе определения преобразования Фурье.

### 3. Распространение и дифракция света

Рассмотрим, как изменяется световая волна при её прохождении участка свободного пространства. Если в пространстве нет источников, то электромагнитная волна удовлетворяет скалярному волновому уравнению:

$$\Delta^2 u_t(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_t(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (0.6)$$

где  $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа.

Подставляя сюда комплексное выражение светового поля известной частоты (1.2):  $u_t(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{u}(x, y, z) e^{j2\pi n t} \right\}$  получаем уравнение для комплексной амплитуды (уравнение Гельмгольца):

$$(\Delta^2 + k^2)u(x, y, z) = 0, \quad (0.7)$$

где  $k = 2\pi n / c = 2\pi / l$  - волновое число.

Одним из наиболее простых решений этого уравнения является плоская волна:

$$u(x, y, z) = a_0 e^{-jk\vec{n}\vec{r}} = a_0 e^{-2\pi j(x\cos a + y\cos b + z\cos g)}, \quad (0.8)$$

где  $x = \frac{\cos a}{l}$ ;  $h = \frac{\cos b}{l}$ ;  $z = \frac{\cos g}{l}$  (0.9)

- пространственные частоты, обратные периодам распределения волны по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\cos a$ ,  $\cos b$ ,  $\cos g$  - направляющие косинусы вектора нормали  $\vec{n}$ . Таким образом заданная плоская волна распространяется в направлении вектора  $\vec{n}$ , а поверхность равной фазы имеет вид плоскости (рис.1.1).

Плоскую волну, распространяющуюся в направлении, близком оси  $z$ , удобно представить в виде:

$$u(x, y, z) = u(x, y, 0) e^{-jkz(1-l^2x^2-l^2h^2)^{1/2}}, \quad x^2 + h^2 \ll 1/l^2, \quad (0.10)$$

где  $u(x, y, 0) = a_0 e^{-j2\pi x x} e^{-j2\pi y y}$  (0.11)



элементарная пространственная гармоника во входной плоскости  $z=0$ .  
 Выражение (0.10) получено с учётом  $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1$ .

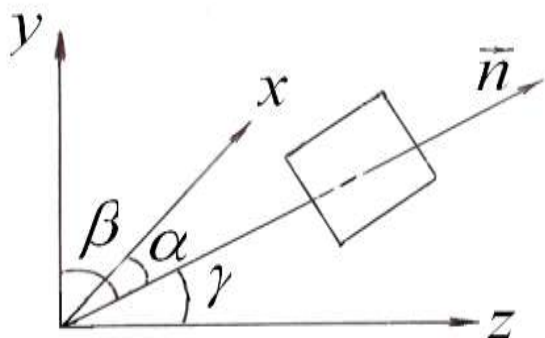


Рис.1.1. Плоская волна в декартовых координатах

Общее решение для распределения амплитуды световой волны будем искать в виде суперпозиции плоских волн (которая также удовлетворяет уравнению Гельмгольца):

$$u(x, y, z) = \iint_{x^2 + h^2 \leq 1/l^2} U_0(x, h) e^{-jkz(1-l^2x^2-l^2h^2)^{1/2}} e^{-j2p_{xx}} e^{-j2p_{hy}} dx dh. \quad (0.12)$$

Интегрирование производится в области  $x^2 + h^2 \leq 1/l^2$ , где существуют пространственные гармоники, соответствующие волне с длиной  $\lambda$ .

Значения коэффициентов  $U_0(x, h)$  при элементарных пространственных гармониках в интеграле суперпозиции могут быть найдены из граничных условий при  $z=0$ :

$$u(x, y, 0) = u_{\text{вх}}(x, y) = \iint_{-\Gamma}^{\Gamma} U_0(x, h) e^{-j2p_{xx}} e^{-j2p_{hy}} dx dh, \quad \text{откуда:}$$

$$U_0(x, h) = \iint_{-\Gamma}^{\Gamma} u(x, y, 0) e^{j2p_{xx}} e^{j2p_{hy}} dx dy. \quad (0.13)$$

Из формулы (0.12) следует, что распространение света в свободном пространстве от  $z=0$  до  $z=d$  эквивалентно действию фильтра пространственных частот вида:

$$H(x, h) = \begin{cases} e^{-jkd(1-l^2x^2-l^2h^2)^{1/2}}, & x^2 + h^2 \leq 1/l^2; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (0.14)$$

так что пространственный спектр светового поля в выходной плоскости имеет вид

$$U(x, h) \Big|_{z=d} = U_0(x, h)H(x, h). \quad (0.15)$$

Для параксиальных волн, для которых  $x, h = 1/l$ , используя разложение корня в экспоненте, получаем:

$$U(x, h) \Big|_{z=d} = U_0(x, h)e^{-jkd}e^{jpld(x^2+h^2)}. \quad (0.16)$$

Границы этого, так называемого параболического, приближения определяются фазовыми ошибками, вызываемыми отбрасыванием членов высшего порядка в разложении корня. Считая, что эти ошибки не превышают  $\pi/2$ , получим [2]:

$$x^4 < 2/l^3d.$$

Используя выражения (0.12) и (0.16), перейдем от спектрального представления светового поля в плоскости  $z=d$  к координатному:

$$u(x, y, d) = e^{-jkd} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} U_0(x, h) e^{jpld(x^2+h^2)} e^{-j2px} e^{-j2phy} dx dh.$$

Интеграл в полученном выражении представляет собой фурье-преобразование от произведения двух функций. В соответствии с теоремой свёртки, его можно представить как свёртку фурье-образов сомножителей:

$$u(x, y, d) = e^{-jkd} [u(x, y, 0) \text{ Д } (j/l d) e^{-(jp/l d)(x^2+y^2)}],$$

$$u(x, y, d) = (j/l d) e^{-jkd} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} u(x_0, y_0) \int_{\Gamma} e^{-(jp/l d)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]} dx_0 dy_0 \quad (0.17)$$

т.е.

Выражение (0.17) представляет собой приближение Френеля известной из оптики формулы Френеля-Кирхгофа, которая является математическим выражением

принципа Гюйгенса-Френеля. Строгое решение задачи даёт следующие значения границ, в которых приближение Френеля справедливо [3]:

$$\sqrt[3]{\frac{(a + r)^4}{l}} \leq d \leq \frac{l_{\min}^4}{l^3}, \quad (0.18)$$

где  $a$  - максимальный радиус апертуры,  $\rho$  - максимальный радиус в плоскости наблюдения  $d$ ,  $l_{\min}$  - наименьший размер неоднородностей распределения во входном распределении  $u(x, y, 0)$ , связанный с максимальной пространственной частотой  $\nu_{\max} = 1/l_{\min}$ .

В более дальней зоне, когда  $d \gg (x^2 + y^2)/l$ , формулу (0.17) можно переписать в более простом виде:

$$u(x, y, d) = (j / l d) e^{-jkd} e^{(jk / 2d)(x^2 + y^2)} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} u(x_0, y_0) e^{(jk / d)(xx_0 + yy_0)} dx_0 dy_0. \quad (0.19)$$

Полученное приближение называется приближением Фраунгофера. С точностью до коэффициента, выражение (0.19) совпадает с преобразованием Фурье от распределения комплексной амплитуды света во входной плоскости оптической системы  $u(x_0, y_0)$ . Зона дифракции Фраунгофера лежит за пределами  $d > 4a^2 / l$ , где  $2a$  - максимальный размер дифракционной апертуры [3].

В непосредственной близости от транспаранта, когда  $d \ll l_{\min}^2 / 5l$ , справедливо приближение тени (рис.1.2).

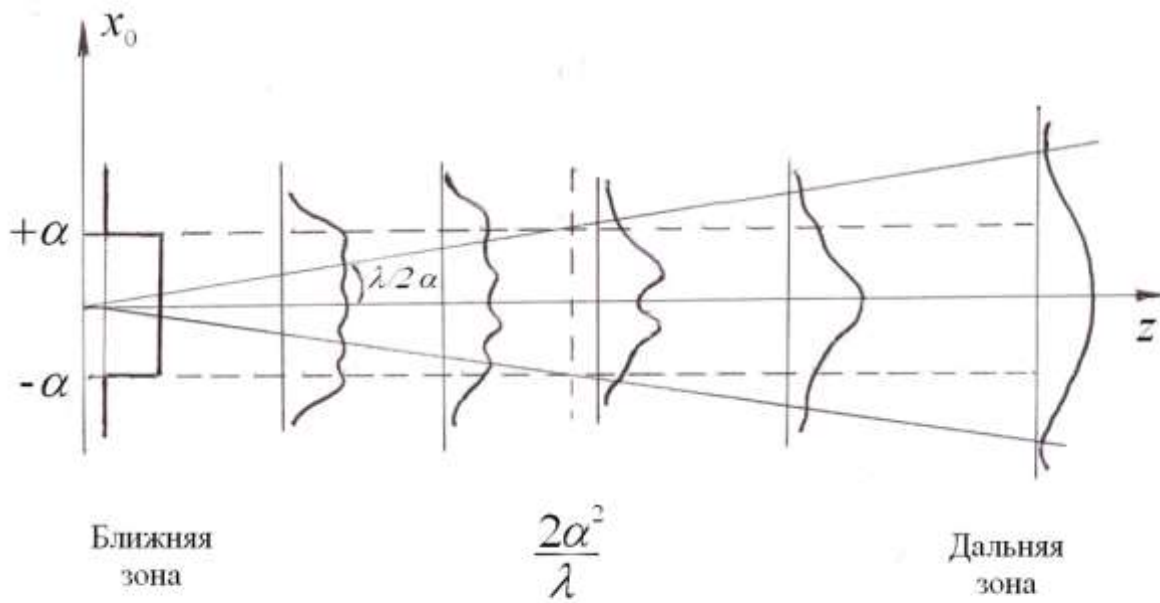


Рис.1.2. Зоны дифракции

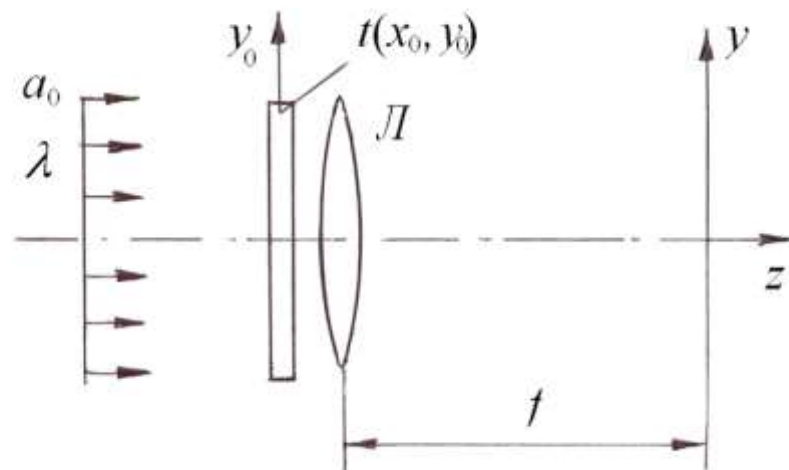


Рис.1.3. Оптическая система с тонкой линзой.  
 Транспарант расположен непосредственно перед линзой

#### 1.4. Линза как элемент, выполняющий преобразование Фурье

Возможность осуществления линзой преобразования Фурье лежит в основе большинства применений когерентной оптики. Прежде всего, это устройства спектрального анализа, в которых преобразование Фурье используется непосредственно. Кроме того, это вычисление свёртки и корреляции, так как эти операции могут быть выполнены с помощью преобразования Фурье, оптического умножения и обратного преобразования Фурье.

Рассмотрим, как получается преобразование Фурье с помощью простейшей когерентной оптической системы, состоящей из тонкой линзы с фокусным расстоянием  $f$  и плоского транспаранта с коэффициентом пропускания по амплитуде  $t(x_0, y_0)$ , расположенного непосредственно перед линзой. Транспарант освещается монохроматической плоской световой волной с длиной  $\lambda$  и амплитудой  $a_0$ , падающей нормально к плоскости транспаранта (рис. 1.3).

Световой сигнал перед транспарантом равен  $a_0$  (как и везде, мы опускаем постоянный фазовый множитель). После прохождения транспаранта амплитуда световой волны перед линзой становится равной  $u_{\text{л}}(x_0, y_0) = a_0 t(x_0, y_0)$ . Линзу считаем тонкой, т.е. световые лучи не смещаются при прохождении через неё, а только получают фазовую задержку, зависящую от толщины стекла в месте прохождения света и коэффициента преломления материала линзы. Можно считать в обычном параксиальном приближении (когда сферические поверхности заменяются параболическими), что коэффициент пропускания такой линзы равен  $t_{\text{л}}(x_0, y_0) = \exp[jDj(x_0, y_0)]$ , где  $Dj = p(x_0^2 + y_0^2) / lf = (k / 2f)(x_0^2 + y_0^2)$ ,  $f$  - фокусное расстояние линзы. Тогда световая волна непосредственно за линзой будет равна

$$u(x_0, y_0) = a_0 t(x_0, y_0) t_{\text{л}}(x_0, y_0) = a_0 t(x_0, y_0) e^{(jk/2f)(x_0^2 + y_0^2)}.$$

Далее свет распространяется в свободном пространстве, поэтому для нахождения светового поля на расстоянии  $d$  от линзы воспользуемся интегралом Френеля-Кирхгофа (0.17), подставляя  $u(x_0, y_0)$  в качестве исходного поля:

$$u(x, y, d) = (jka_0 / 2pd) e^{-jkd} \int_{-r}^r \int_{-r}^r t(x_0, y_0) e^{(jk/2f)(x_0^2 + y_0^2)} e^{- (jk/2d)[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx_0 dy_0. \quad (0.20)$$

При подстановке  $d=f$  выражение (1.20) можно упростить. В результате получаем, что с точностью до квадратичного фазового множителя амплитуда света в задней фокальной плоскости линзы ( $d=f$ ) равна преобразованию Фурье от коэффициента пропускания транспаранта (несущественный постоянный фазовый множитель опускаем):

$$u(x, y, f) = (jka_0 / 2pf) e^{- (jk/2f)(x^2 + y^2)} \int_{-r}^r \int_{-r}^r t(x_0, y_0) e^{(j2p/lf)(xx_0 + yy_0)} dx_0 dy_0 \quad (0.21)$$

Сравнивая это выражение с точной формулой преобразования Фурье

$$\int_{-r}^r \int_{-r}^r t(x_0, y_0) e^{-j2p(xx_0 + hy_0)} dx_0 dy_0,$$

видим, что пространственные частоты входного транспаранта  $(x, h)$  отображаются на плоскости  $(x, y, f)$  в масштабе:  $x = -x / lf$ ;  $h = -y / lf$ .

Квадратичный фазовый множитель перед интегралом в (0.21) не является существенным, если интересуются только распределением амплитуды спектра входного сигнала. Кроме того, его можно скомпенсировать, поместив в фокальную плоскость тонкую линзу с таким же фокусным расстоянием  $f$ .

Точное преобразование Фурье предполагает интегрирование в бесконечных пределах, однако предположения, сделанные при выводе, могут при этом нарушаться. Практически, бесконечные пределы можно сохранить в случае, когда коэффициент пропускания транспаранта отличен от нуля в ограниченной области вблизи оптической оси линзы, где не сказываются аберрации и виньетирование.

Транспарант, расположенный вплотную к линзе, является некоторой идеализацией. Теория дифракции позволяет вычислить распределение светового поля на выходе системы при произвольном расположении входной плоскости относительно линзы (рис.1.4).

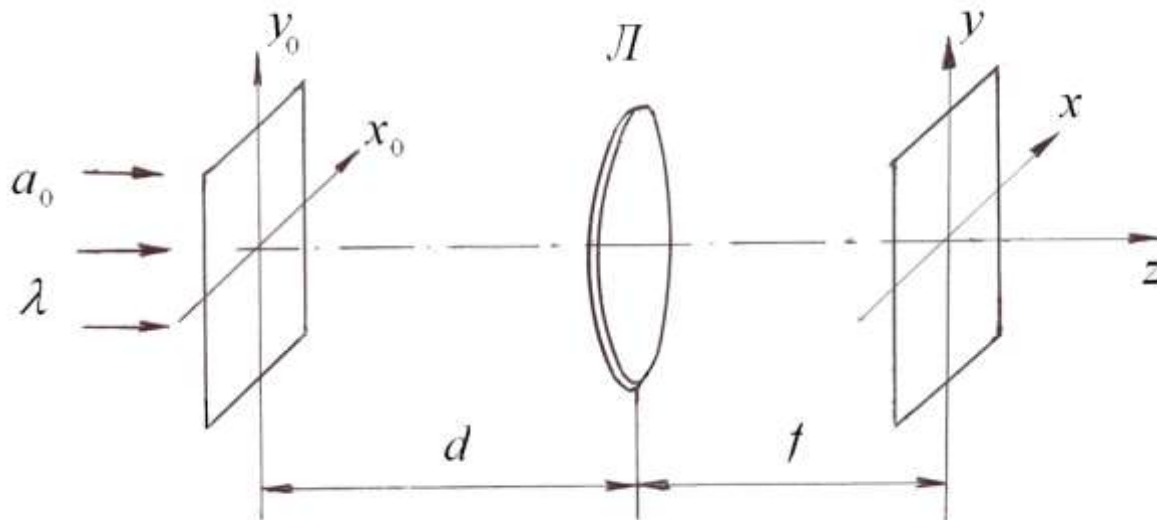


Рис.1.4. Оптическая система с тонкой линзой. Транспарант расположен перед линзой

Для упрощения расчётов воспользуемся результатами предыдущих вычислений. Ранее было показано, что пространственный спектр распределения поля при прохождении свободного пространства умножается на величину, равную, в приближении Френеля (и с точностью до постоянного фазового множителя),  $\exp[jpl d(x^2 + h^2)]$ , где  $\xi$  и  $\eta$  - пространственные частоты в разложении входного сигнала (см. выражение (1.16)). Таким образом, световое поле перед линзой будет иметь пространственный спектр

$$U_{\text{л}}(x, h) = a_0 T(x, h) e^{jpl d(x^2 + h^2)},$$

где  $T(x, h)$  - амплитуда разложения по элементарным пространственным гармоникам коэффициента пропускания исходного транспаранта  $t(x_0, y_0)$  (см. выражение (1.13)). Было также показано (см.(1.21), что поле в фокальной плоскости линзы связано, с точностью до постоянного фазового множителя, с обратным фурье-образом поля в непосредственной близости слева от линзы в соответствии с формулой

$$U(x, h, f) = \frac{jk}{2pf} e^{-jpl f(x^2 + h^2)} U_{\text{л}}(x, h),$$

где  $x = x / l f$ ,  $h = y / l f$ . Подставляя в последнее выражение  $U_{\perp}(x, h)$ , получим:

$$U(x, h, f) = \frac{jk}{2pf} a_0 e^{jpl(x^2+h^2)(d-f)} T(x, h). \quad (0.22)$$

Переходя от пространственных частот к координатам, можно записать:

$$u(x, y, f) = \frac{jk}{2pf} a_0 e^{(jp/lf)(d/f-1)(x^2+y^2)} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} t(x_0, y_0) e^{(j2p/lf)(xx_0+yy_0)} dx_0 dy_0. \quad (0.23)$$

Из выражения (0.23) следует, что поле в задней фокальной плоскости линзы равно точному преобразованию Фурье от входного сигнала, когда входной транспарант находится в её передней фокальной плоскости ( $d=f$ ), так как квадратичный фазовый множитель при этом исчезает.

Можно рассмотреть также и другие случаи взаимного расположения транспаранта и линзы. Например, фурье-преобразование формируется также и при расположении транспаранта позади линзы (рис.1.5).

Масштаб этого преобразования, как показывает расчёт, меняется в зависимости от расстояния  $d$ :  $x = -x / l d$ ;  $h = -y / l d$ , что может быть использовано при распознавании образов, основанном на сравнении спектров эталонного транспаранта и распознаваемого изображения, масштаб которого может изменяться. Можно показать, что фурье-преобразование при когерентном освещении получается в любой оптической системе, в которой происходит фокусировка светового пучка, и именно в плоскости фокусировки формируется пространственный спектр транспаранта, а его масштаб и сферический фазовый множитель определяются положением входного транспаранта на оптической оси.

На основе использованной методики расчёта можно проанализировать работу и других оптических систем, оценить влияние неточностей установки оптических элементов, исследовать влияние вибраций и т.д. Для проведения такого рода расчётов был разработан специальный операторный метод, формализующий и упрощающий изложенную методику [4,5].



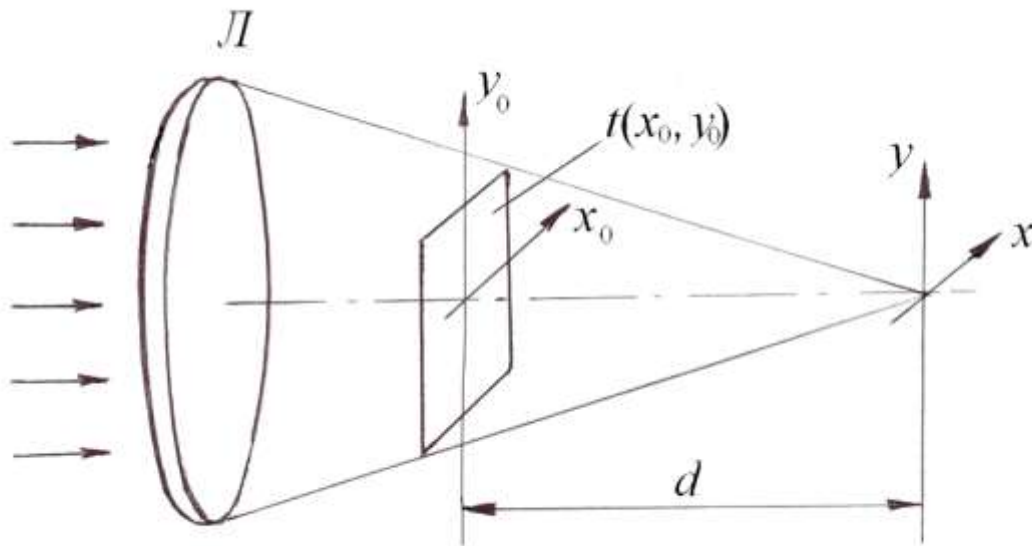


Рис.1.5. Оптическая система с тонкой линзой. Транспарант расположен позади линзы

### 1.5. Преобразование оптического сигнала с помощью пространственно-инвариантной системы

Наряду с преобразованием Фурье, когерентные оптические системы позволяют осуществлять и другие, широко используемые интегральные математические операции, такие как операция свёртки и корреляции. С помощью операции свёртки, в частности, может быть описан процесс формирования изображения. Проанализируем работу подобных оптических устройств, учитывая, что процесс распространения света можно считать линейным процессом.

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции

$$\mathcal{L}[k_1 u_1(x_1, y_1) + k_2 v_1(x_1, y_1)] = k_1 \mathcal{L}(u_1) + k_2 \mathcal{L}(v_1),$$

где  $\mathcal{L}$  -линейный оператор, характеризующий систему. Используя это соотношение, выходной сигнал системы можно найти, раскладывая входной сигнал на элементарные сигналы и зная отклик системы на такой элементарный

сигнал. Разложение входного сигнала оптической системы удобно провести по дельта-функциям:

$$u_1(x_1, y_1) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} u_1(x_1, y_1) \delta(x_1 - x_1, y_1 - y_1) dx_1 dy_1.$$

Запишем отклик системы, используя оператор  $L$ :

$$u_2(x_2, y_2) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} u_1(x_1, y_1) \delta(x_1 - x_1, y_1 - y_1) dx_1 dy_1. \quad (0.24)$$

Учитывая свойство линейности оператора  $L$ , выражение (0.24) можно представить в виде

$$u_2(x_2, y_2) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} u_1(x_1, y_1) \delta(x_1 - x_1, y_1 - y_1) dx_1 dy_1. \quad (0.25)$$

Отклик системы на сигнал типа  $\delta$ -функции называется импульсным откликом системы

$$\delta(x_1 - x_1, y_1 - y_1) = h(x_2, y_2; x_1, y_1). \quad (0.26)$$

В оптике он также называется функцией рассеяния точки, так как в схеме формирования изображения представляет собой изображение точечного источника. Подставляя (1.26) в (1.25), получаем интеграл суперпозиции

$$u_2(x_2, y_2) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} u_1(x_1, y_1) h(x_2, y_2; x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Рассмотрим подкласс линейных систем, которые называются пространственно-инвариантными; для таких систем справедливо следующее соотношение:

$$h(x_2, y_2; x_1, y_1) = h(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

В таких системах форма импульсного отклика не зависит от положения  $\delta$ -импульса на входе системы. Примером может служить система формирования изображения, для которой вблизи оптической оси выполняется свойство инвариантности.

Для линейной пространственно-инвариантной системы интеграл суперпозиции представляет собой свёртку

$$u_2(x_2, y_2) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} u_1(x_1, y_1) h(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dy_1 = u_1 \text{ Д } h. \quad (0.27)$$

Применив теорему свёртки к этому равенству, получим:

$$U_2(x, h) = U_1(x, h)H(x, h), \quad \text{где}$$

$$U_2(\xi, \eta) = F[u_2(x, y)]; \quad U_1(\xi, \eta) = F[u_1(x, y)]; \quad H(\xi, \eta) = F[h(x, y)]$$

- фурье-образы соответствующих функций и импульсного отклика системы. Последний называют передаточной функцией системы.

В отличие от электрических цепей, в когерентных оптических системах фурье-преобразование входного распределения физически реализуется в виде сигнала в плоскости пространственных частот, поэтому анализ и синтез таких систем удобно проводить в этой плоскости. Например, чтобы изменить импульсный отклик линейной пространственно-инвариантной системы достаточно в плоскости пространственных частот поставить какой-либо транспарант, как показано на рис.1.6.

В такой системе фурье-преобразование входного сигнала умножается в плоскости пространственных частот на коэффициент пропускания фильтра. Обратное фурье-преобразование от этого произведения, осуществляемое линзой  $L_2$ , даёт на выходе сигнал, пропорциональный свёртке входного сигнала и импульсного отклика фильтра. Такое устройство (см. рис.1.6) называется конвольвером. Оно может также осуществлять операцию корреляции при соответствующем изменении функции пропускания фильтра.

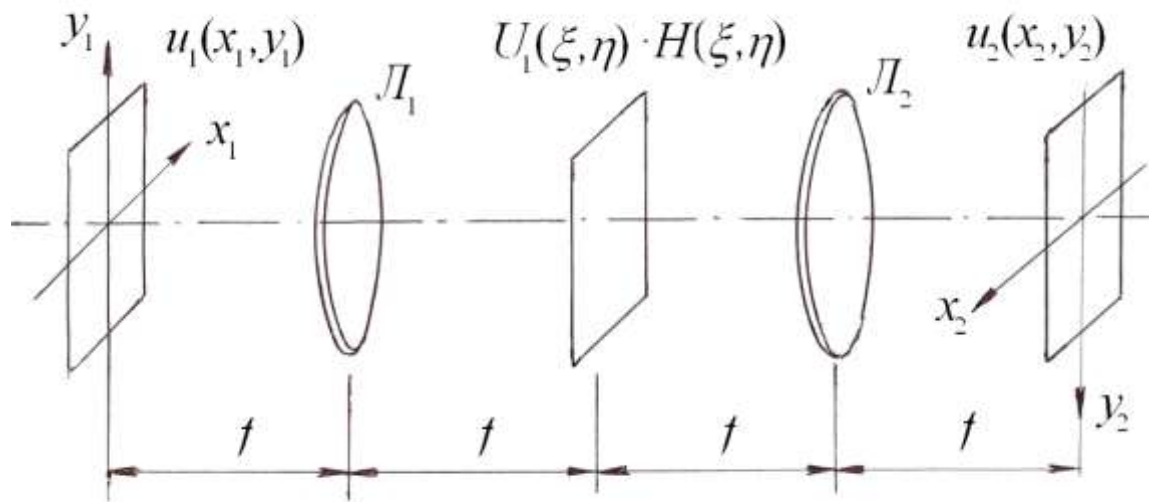


Рис.1.6. Схема оптической пространственной фильтрации

### 1.6. Дискретизация оптического сигнала. Теорема выборки

Для обработки и анализа информации непрерывные распределения оптических полей часто заменяют их дискретной выборкой. С дискретным представлением связаны многие устройства ввода оптической информации, имеющие конечное разрешение, а также устройства вывода, такие как матричные фотоприёмники и др. Чем меньше шаг дискретизации, тем, вообще говоря, точнее будет передан непрерывный сигнал. Однако для достаточно плавных сигналов, а точнее, для сигналов с ограниченным спектром, сигнал может быть восстановлен по дискретной выборке полностью, если шаг выборки не превосходит предельного значения. Сформулированное предложение является теоремой выборки Котельникова-Шеннона. Определим это предельное значение шага дискретизации.

Пусть функция  $f(x, y)$  подвергается дискретизации с помощью прямоугольной сетки с шагом  $\Delta x$  и  $\Delta y$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Дискретное значение этой функции удобно записать с помощью гребенчатой функции

$$comb(x) = \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} d(x - n) \text{ в виде}$$

$$f_d(x, y) = comb(x / Dx) comb(y / Dy) f(x, y).$$

Учитывая, что фурье-образ произведения двух функций равен свёртке их фурье-образов, можно записать:

$$F_d(x, h) = F [comb(x / Dx) comb(y / Dy)] \text{ Д } F(x, h). \quad (0.28)$$

Используя свойства преобразования Фурье и  $\delta$ -функции, перепишем (1.28) в следующем виде:

$$F_d(x, h) = \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} \sum_{m=-\Gamma}^{\Gamma} F[(x - n / Dx), (h - m / Dy)]. \quad (0.29)$$

Из (1.29) следует, что спектр выборочной функции  $f_d(x, y)$  представляет собой сумму спектров функции  $f(x, y)$ , построенных в плоскости частот  $x, h$  возле каждой точки с координатами  $[n / (Dx), m / (Dy)]$  (рис.1.7).

Расстояния между соседними точками равно  $1/\Delta x$  и  $1/\Delta y$  по осям  $\xi$  и  $\eta$ . Смещённые друг относительно друга спектры могут перекрываться. Однако, если спектр функции  $f(x, y)$  ограничен, то при условии

$$1 / Dx \leq 2x_{\max}; \quad 1 / Dy \leq 2h_{\max} \quad (0.30)$$

спектры не перекрываются. В этом случае достаточно в спектральной плоскости оптической системы поставить фильтр в виде диафрагмы, которая пропускает спектр, соответствующий слагаемому с номерами  $n=m=0$ , и позади фильтра останется спектр, соответствующий исходной функции. Если осуществить обратное преобразование Фурье этого спектра, то мы получим исходную функцию, восстановленную из дискретизированной. Таким образом, для неискажённого восстановления исходной функции, согласно (1.30), требуется брать её отсчёты не реже, чем через интервалы  $Dx = 1 / 2x_{\max}; Dy = 1 / 2h_{\max}$ .

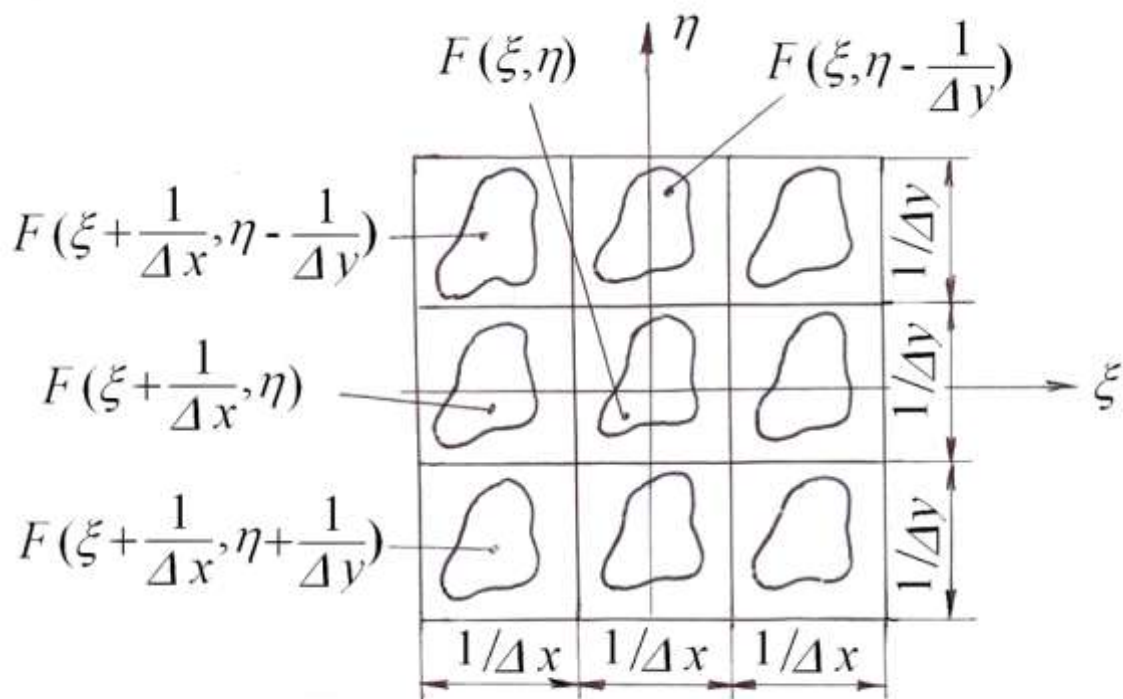


Рис.1.7. Спектр выборочной функции