



# **Моделирование информационных систем**

**Санкт-Петербург**

# СПб ГУТ)))

Санкт-Петербургский государственный университет  
телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича



2013



# **Моделирование систем**

**КУРС 3, СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 230400.65**

**Лектор**

**Белов Михаил Петрович**

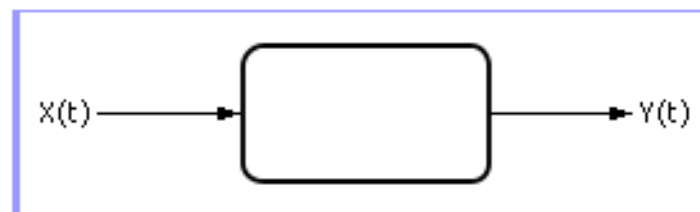
**к.т.н., профессор кафедры Информационных  
управляющих систем**



Тема

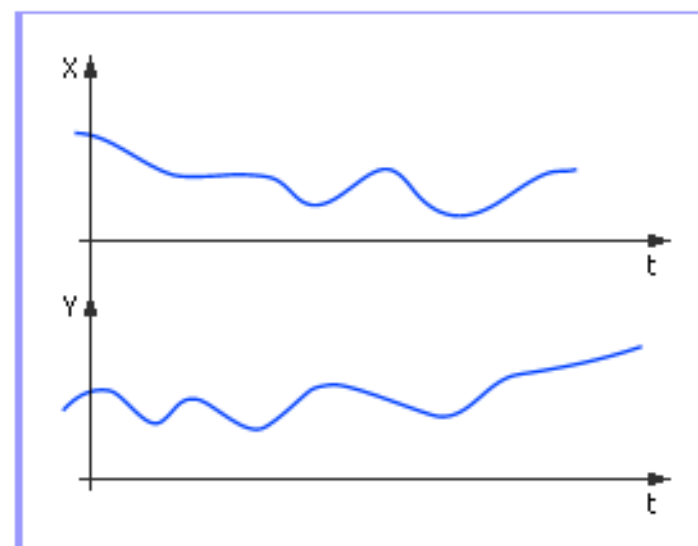
Динамические системы

**Задача 1.** На входе и выходе черного ящика (рис. 4.1) имеются зависимости параметров  $X$  и  $Y$  от времени  $t$ . Задача состоит в том, чтобы адекватно определить черный ящик.



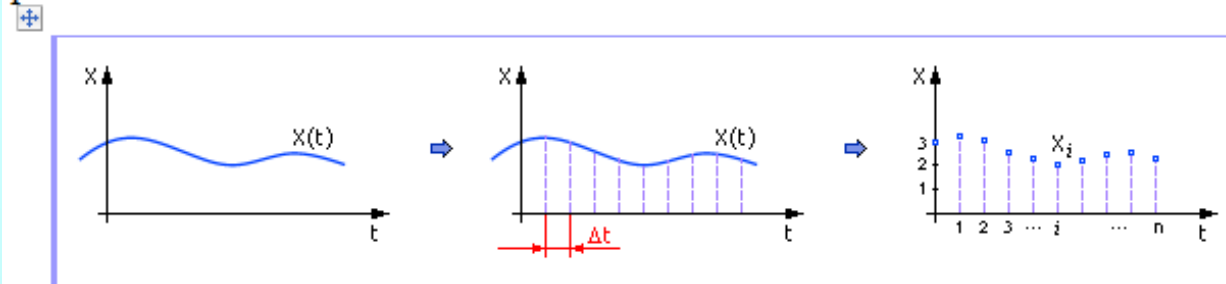
**Рис. 4.1. Черный ящик, содержащий динамическую систему. Условное обозначение**

Графики зависимостей  $X(t)$  и  $Y(t)$  могут быть самыми разными, например, такими, как показано на рис. 4.2.



**Рис. 4.2. Временные зависимости – входной и выходной сигналы**

Поскольку моделирование систем подразумевает численные расчеты на компьютере, то аналоговый сигнал переводят в дискретный вид. Для этого с определенной частотой исходный сигнал дискретизируют, как показано на рис. 4.3.



**Рис. 4.3. Дискретизированный временной сигнал**

По этим данным строят таблицу отсчетов (см. табл. 4.1, где  $\Delta t = 0.1$ ). □

Таблица 4.1.

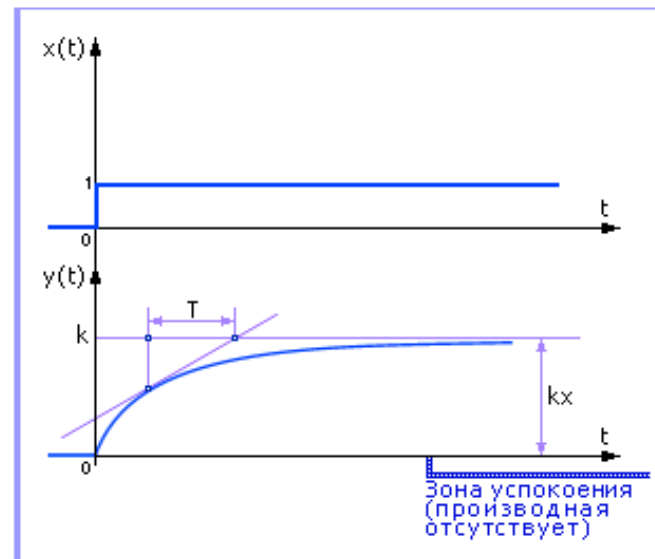
Табличное представление временного сигнала

<u><math>i</math></u>	0	1	2	3	...	<u><math>i</math></u>	...	<u><math>n</math></u>
<u><math>t</math></u>	0	0.1	0.2	0.3	...	$\Delta t \cdot i$	...	$\Delta t \cdot n$
<u><math>x_i</math></u>	3	3.2	3.1	2.6	...	<u><math>x_i</math></u>	...	<u><math>x_n</math></u>

Совокупность значений переменной в таблице, упорядоченных во времени, часто называют **динамическим рядом**. Естественно, часть информации при такой операции теряется. Чем меньше расстояние между отсчетами, чем больше частота дискретизации, тем меньше потери информации. Частоту дискретизации принимают такой, чтобы не потерять высокочастотные составляющие в сигнале, отдельные пики.

Любая динамическая система характеризуется рядом параметров. Обычно (чаще всего) параметрами называют коэффициенты при производных (первой, второй и т. д.) в записи модели. Чем большая степень старшей производной присутствует в записи модели, тем больший порядок динамической системы, тем глубже ее память, и тем больше коэффициентов (параметров) надо определить, чтобы идентифицировать систему.

Как определить параметры динамической системы? Сначала нужно оценить порядок динамической системы: он совпадает со степенью наибольшей из производных  $Y$  по отношению к  $t$ . Допустим, что на вход системы, до этого находившейся в нулевых начальных условиях, подали единичный сигнал  $X(t)$ , как показано на рис. 4.4.



**Рис. 4.4. Входной и выходной сигнал, типичный для системы первого порядка**



Переход от нуля до  $kx$  происходит во времени. Переход — процесс динамический, то есть в сигнале присутствует изменение, которое описывается производной, и выход оказывается меньше входа на некоторую величину  $f$ :

$$y = kx - f(dy/dt).$$

Когда система достигнет на выходе значения равного  $kx$ , то изменений не будет, значение производной станет равной нулю.  $y = kx$ .

$y = kx$  — частный случай инерционного звена.

Если на выходе будет наблюдаться экспоненциальный сигнал, то система будет называться системой первого порядка (или звеном первого порядка). Для ее описания достаточно одной производной (а в решении модели будет присутствовать один интеграл):

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx$$

У такой системы два параметра —  $T$  и  $k$ .

Заметим, что один интеграл у линейных динамических систем всегда «порождает» одну экспоненту, двойной интеграл — сумму двух экспонент, и так далее.



Чтобы определить, является ли кривая экспонентой, в каждой ее точке проводится касательная до пересечения с линией установившегося уровня (на **рис. 4.4** это линия  $y(t) = k$ ); в случае, если кривая является экспонентой, величина  $T$  в любой точке будет постоянной.

Определить  $T$ , используя график, можно еще так. Проведите линию, параллельную оси  $t$  на уровне  $0.95k$ . Из точки, где эта линия пересечет экспоненту, опустите перпендикуляр на ось  $t$ . Отрезок от 0 до точки пересечения перпендикуляра с осью  $t$  будет равен  $3T$ .

$T$  характеризует инерционность системы (память). При малой величине  $T$  система слабо зависит от предыстории и вход мгновенно заставляет измениться выход. При большом значении  $T$  система медленно реагирует на входной сигнал, а при очень большом значении  $T$  система выдает неизменный выходной сигнал, практически не реагируя на входные воздействия.

Коэффициент  $k$  характеризует способность системы к усилению (при  $k < 1$  — к ослаблению) уровня входного сигнала. Чтобы определить коэффициент  $k$  на графике, достаточно дождаться успокоения сигнала на выходе системы и вычислить отношение уровня выходного сигнала к уровню входного. Математически это означает, что все слагаемые, содержащие производные, равны нулю (система успокоилась, движения нет), а оставшееся слагаемое  $Y = k \cdot X$  определяет значение  $k$ .

## Звено первого порядка

Звено первого порядка обладает двумя параметрами: инерционностью  $T$  и коэффициентом усиления  $k = Y(t = \infty)/X$ .

Чем больше производных учитывается в записи модели, тем со звеном большего порядка мы имеем дело, тем больше коэффициентов при производных следует определить.

Введем понятие передаточной функции как модели динамической системы. По определению передаточная функция — это отношение выхода к входу:

$$W = Y/X.$$

Передаточная функция звена первого порядка имеет вид:

$$W = k/(Tp + 1),$$

где « $p$ » — символ дифференцирования, тождественно равный « $d/dt$ ». Символ « $p$ » также называется алгебраизованным оператором дифференцирования. Тогда, используя определение передаточной функции, имеем:

$$Y/X = k/(Tp + 1).$$

Далее получим:

$$(Tp + 1) \cdot Y = k \cdot X$$

ИЛИ

$$T \cdot \frac{dY}{dt} + Y = k \cdot X$$

ИЛИ

$$T \cdot \Delta Y / \Delta t + Y = k \cdot X.$$

В разностном виде уравнение можно записать как

$$T \cdot (Y_{i+1} - Y_i) + Y_i \cdot \Delta t = k \cdot X_i \cdot \Delta t.$$

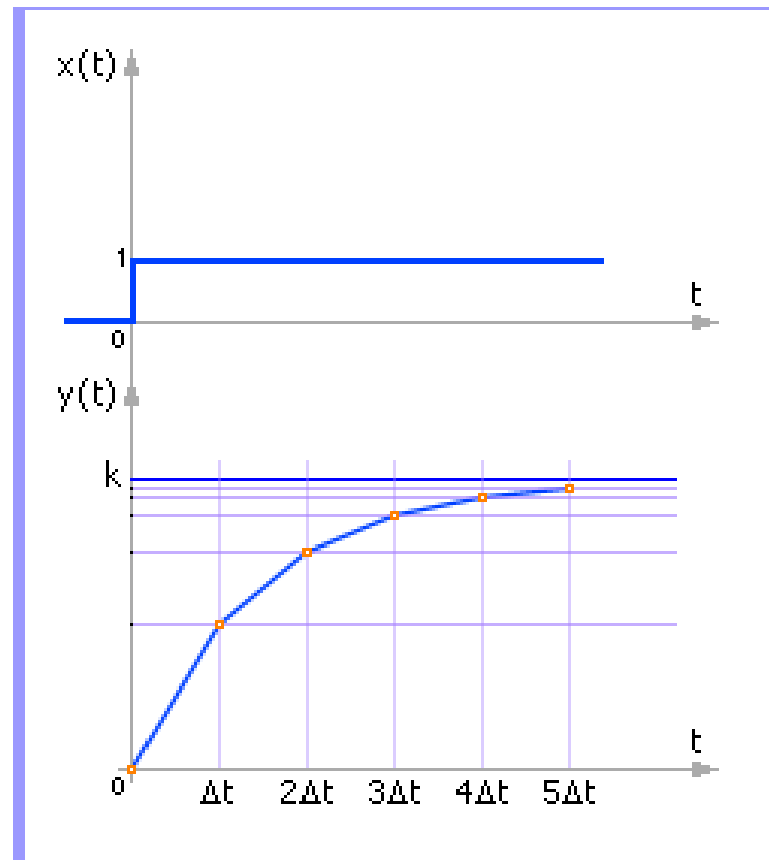
Или, выразив настоящее через прошедшее:

$$Y_{i+1} = A \cdot X_i + B \cdot Y_i.$$

Здесь  $A = k \cdot \Delta t / T$  и  $B = 1 - \Delta t / T$  — весовые коэффициенты.  $A$  указывает на вес компоненты  $X$ , определяющей влияние внешнего мира на систему,  $B$  указывает на вес компоненты  $Y$ , определяющей память системы, влияние на ее поведение истории.

В частности, если  $B = 0$ , то  $Y_{i+1} = A \cdot X_i$ , и мы имеем дело с безынерционной системой  $Y = k \cdot X$ , мгновенно реагирующей на входной сигнал и увеличивающей его в  $k$  раз.

Если коэффициент  $B = 0.5$ , то есть  $1 - \frac{\Delta t}{T} = 0.5$  или  $\frac{\Delta t}{T} = 0.5$ , то получаем, что коэффициент  $A = k \cdot \frac{\Delta t}{T} = k \cdot 0.5$  и, следовательно,  $Y_{i+1} = 0.5 \cdot k \cdot X_i + 0.5 \cdot Y_i$ . При постоянном (единичном) входном сигнале  $X$  будет получен график, как на рис. 4.5.



**Рис. 4.5. Реакция звена первого порядка на единичный входной сигнал для дискретного случая**

Экспонента, изображенная на графике, при большом  $n$  (в пределе  $n = \infty$ ) стремится к значению входного (единичного) сигнала  $X$ , умноженного на коэффициент усиления  $k$ , что подтверждается расчетом:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= 0.5 \cdot k \cdot X_n + 0.5 \cdot Y_n = 0.5 \cdot k \cdot X_n + 0.5 \cdot (0.5 \cdot k \cdot X_{n-1} + 0.5 \cdot Y_{n-1}) = \\ &= \dots = (0.5^1 + 0.5^2 + \dots + 0.5^{n+1}) \cdot k \cdot X_0 + 0.5^{n+1} \cdot Y_0 = 1 \cdot k \cdot X_0. \end{aligned}$$

Напомним, что выражение  $(0.5^1 + 0.5^2 + \dots + 0.5^{n+1})$  является геометрической прогрессией, сумма которой при  $n = \infty$  равна 1. А стоящее при  $Y_0$  выражение  $0.5^{n+1}$  обращается в 0 при  $n = \infty$ .

Если еще усилить влияние прошлого ( $B = 1$ ), то система начнет интегрировать саму себя (выход подан на вход системы), добавляя все время входной сигнал, что соответствует экспоненциальному неограниченному росту выходного сигнала:  $Y_{i+1} = A \cdot X_i + Y_i$ . По смыслу это соответствует положительной обратной связи. При  $B = -1$  имеем модель:  $Y_{i+1} = A \cdot X_i - Y_i$ , по смыслу соответствующую отрицательной обратной связи. При определении модели требуется найти неизвестные коэффициенты  $k$  и  $T$ .

## Звено второго порядка (колебательное звено)

Такие звенья описываются дифференциальным уравнением вида:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$

Если на вход звена подать единичную функцию Хэвисайда от времени  $1[t]$ , при нулевых начальных условиях системы, то реакция на выходе будет называться **переходной функцией (или переходной характеристикой)**, которую часто обозначают как  $h(t)$ . Сигнал  $1[t]$  — это, в некотором смысле, эталонный испытательный сигнал. Существуют и другие эталонные испытательные сигналы. Например, бесконечный импульс нулевой длины (дельта-функция Дирака), гармонический сигнал, периодические прямоугольные импульсы.

Преобразуем по Лапласу это уравнение:

$$a_0 \cdot p^2 \cdot \underline{Y(p)} + a_1 \cdot p \cdot Y(p) + a_2 \cdot Y(p) = b \cdot U(p)$$

или, иначе:

$$(a_0 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_2) \cdot \underline{Y(p)} = b \cdot U(p).$$

Определим передаточную функцию звена:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{b/a_2}{\frac{a_0}{a_2} p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + 1} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2 \xi T p + 1}$$

Если записать уравнение без входного воздействия (нулевые входные воздействия  $U = 0$ ) и сократить  $Y$ , то есть:  $T^2 p^2 + 2 \xi T p + 1 = 0$ , то такое уравнение будет называться **характеристическим**, поскольку характеризует исключительно внутренние свойства звена. Обратите внимание, что в записи звена содержатся три параметра:

$$T^2 = \frac{a_0}{a_2}, \quad 2 \xi T = \frac{a_1}{a_2}, \quad k = \frac{b}{a_2}$$

$T$  – постоянная времени (в секундах);

$\xi$  – коэффициент затухания (безразмерная величина);

$k$  – передаточный коэффициент.

В зависимости от величины  $\xi$  звенья второго порядка классифицируются по видам:

- $\xi = 0$  – консервативное звено второго порядка;
- $0 < \xi < 1$  – колебательное звено второго порядка;
- $\xi \geq 1$  – апериодическое звено второго порядка.



**А периодическое звено 2-го порядка**

**( $\xi \geq 1$ )**

Характеристическое уравнение звена следующее:

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0.$$

И оно имеет действительные отрицательные корни:

$$p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}$$

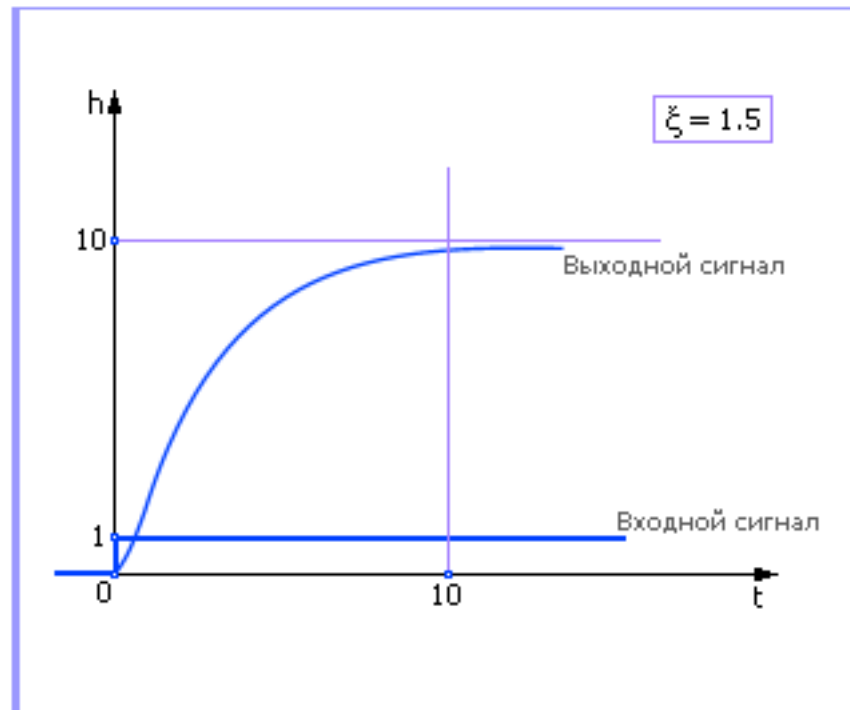
Данное звено можно представить в виде последовательно соединенных звеньев с различными постоянными времени:

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

Тогда при  $T_1 > T_2$  переходная характеристика звена имеет вид:

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

То есть в решении присутствуют затухающие экспоненты. Типичное поведение звена с такими параметрами показано на рис. 4.6.



**Рис. 4.6. Реакция аperiodического звена  
на единичный входной сигнал**

В частном случае, когда  $\xi = 1$ , оба корня будут одинаковыми, отрицательными:

$$p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\frac{1}{T}$$

## Колебательное звено 2-го порядка

(  $0 < \xi < 1$  )

Характеристическое уравнение звена следующее:

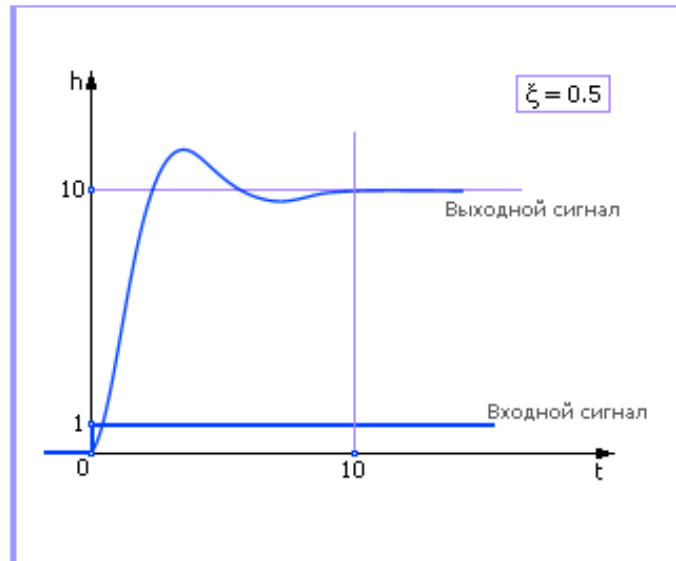
$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0.$$

Корни разные, комплексно-сопряженные, с отрицательной вещественной частью:

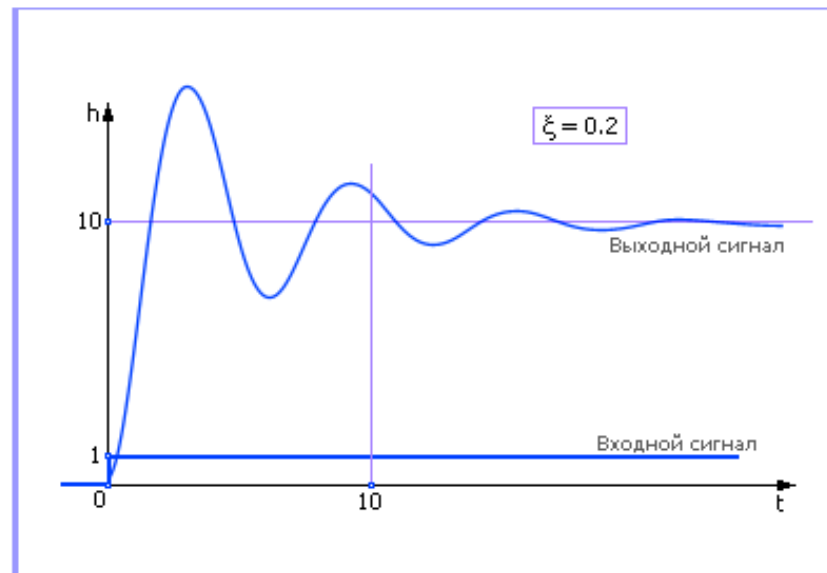
$$p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = \frac{-\xi \pm j \sqrt{1 - \xi^2}}{T} = a \pm jb$$

, где  $a = -\xi/T$ ,  $b = \sqrt{1 - \xi^2}/T$ .

Так как корни мнимые, то в поведении звена присутствует колебательная составляющая. Именно за эту особенность поведения звено получило название колебательного (см. рис. 4.7 и рис. 4.8).



**Рис. 4.7. Реакция колебательного звена на входной единичный сигнал ( $\zeta = 0.5$ )**



**Рис. 4.8. Реакция колебательного звена на входной единичный сигнал ( $\zeta = 0.2$ )**

Из графиков видно, что с ростом  $\xi$  колебательность звена уменьшается, исчезая при  $\xi \geq 1$

Переходная функция звена имеет вид:

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] = k [1 - A e^{\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi)]$$

где

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \omega_0 = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

При малых  $\xi$  значение  $A$  приближается к 1, а значение  $\varphi$  — к  $90^\circ$ . По физическому смыслу  $\omega_0$  представляет собой собственную частоту колебаний.

**Консервативное звено 2-го порядка**  
( $\xi = 0$ )

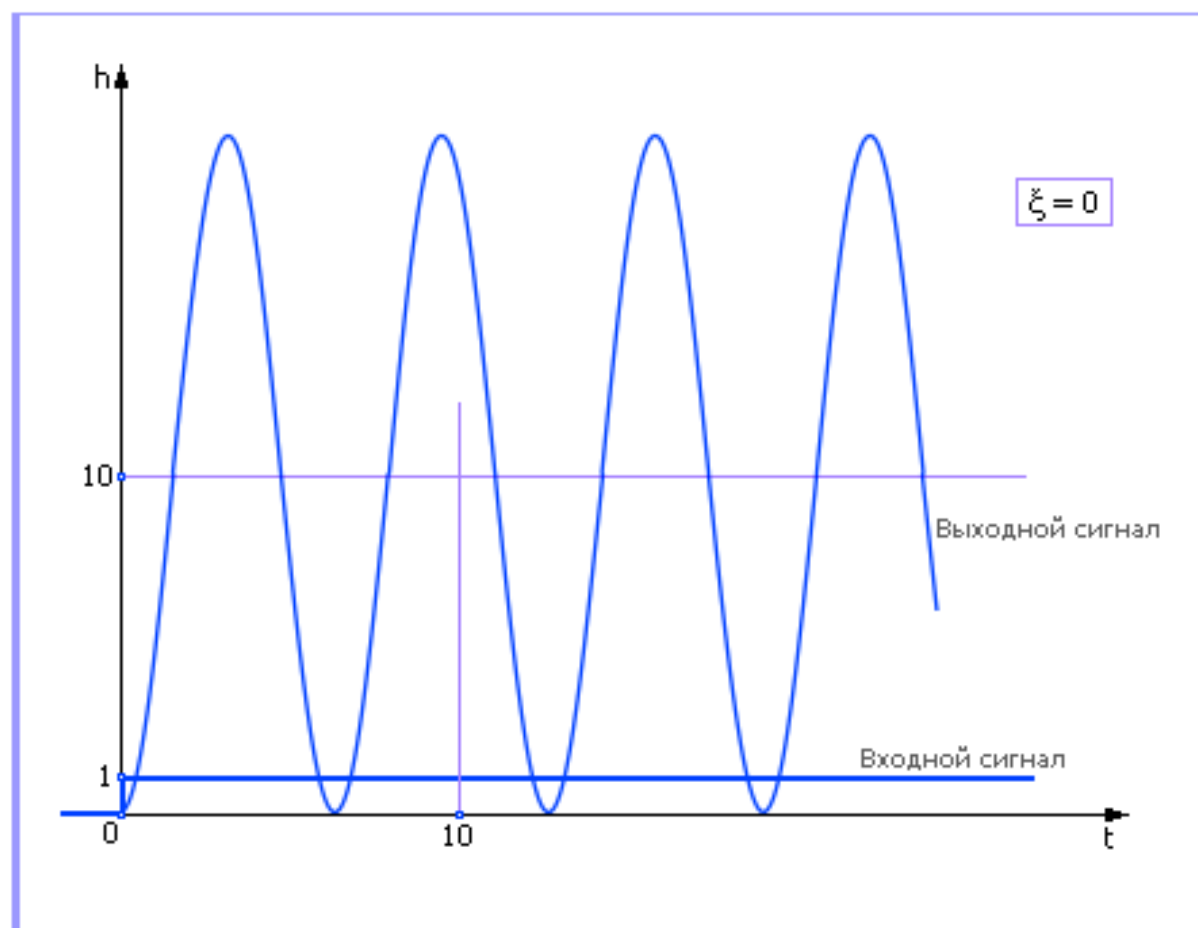
Характеристическое уравнение звена следующее:

$$T^2 p^2 + 1 = 0.$$

Корни одинаковые, комплексно-сопряженные, с нулевой вещественной частью:

$$p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = \frac{-\xi \pm j \sqrt{1 - \xi^2}}{T} = a \pm jb$$

Так как корни чисто мнимые, то поведением звена являются незатухающие колебания ( $\xi = 0$ ), см. рис. 4.9.



**Рис. 4.9. Реакция колебательного звена на входной единичный сигнал  
( $\xi = 0$ )**

Переходная функция звена имеет вид:  $h(t) = k \cdot (1 - \cos(t/T))$ .

Из графика экспериментальным путем можно определить единственный параметр  $T = T_0 / (2 \cdot \pi)$ .



# Тема

Модель в виде фильтра Каллмана



Каллманом была доказана теорема о том, что любой динамический сигнал может быть представлен в виде:

$$Y_i = A_1 \cdot X_i + A_2 \cdot X_{i-1} + \dots + B_1 \cdot Y_{i-1} + B_2 \cdot Y_{i-2} + \dots + C.$$



**Рис. 6.1. Графическое представление фильтра Каллмана на схемах**

Идея фильтра Каллмана заключается в том, что выход системы в  $i$ -ый момент времени определяется входным сигналом, его предысторией и предысторией самого состояния системы.

Чем больше имеется членов ряда, то есть чем больше переменных  $Y$  учитывается в записи модели, тем глубже память системы. Заметим, что наличие члена  $Y_{i-1}$  в модели динамической системы соответствует наличию первой производной,  $Y_{i-2}$  — второй производной и т. д.



Находим ошибку между значением экспериментально снятой точки и теоретическим ее значением (гипотезой):

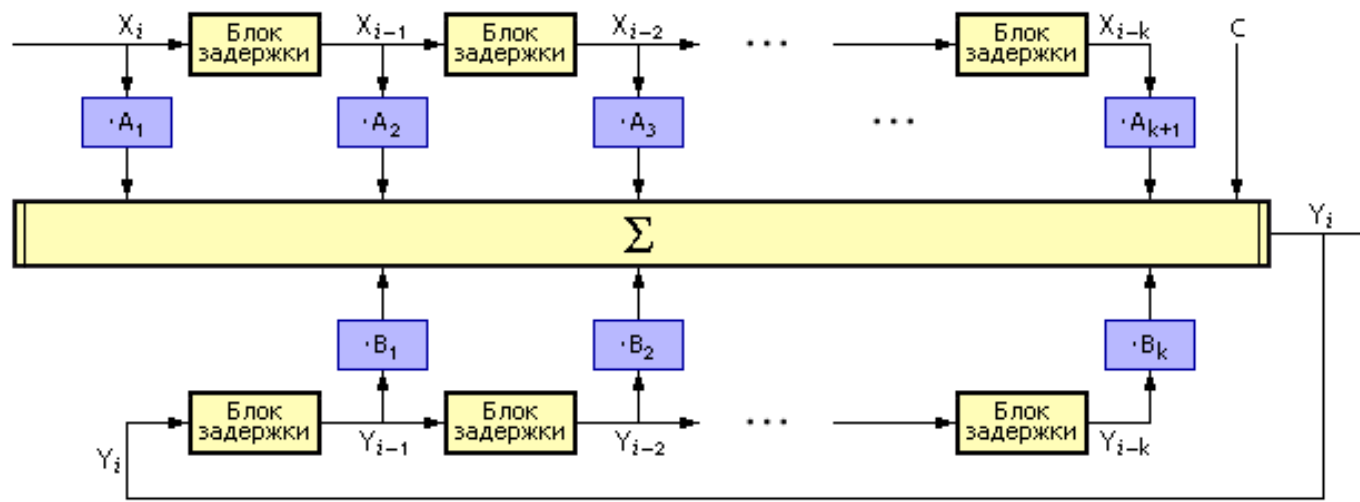
$$E_m = Y_m - A_1 \cdot X_m - A_2 \cdot X_{m-1} - \dots - B_1 \cdot Y_{m-1} - B_2 \cdot Y_{m-2} - \dots - C.$$

Суммарная ошибка  $F$  (сумма берется по всем экспериментальным точкам) должна быть минимизирована относительно определяемых переменных  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C$ :

$$F = \sum_{i=1}^m E_i^2 \Rightarrow \min_{A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C}$$

После взятия частных производных от  $F$  по  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C$ , приравнивания их к нулю и составления системы уравнений получается линейная множественная регрессионная модель, из которой определяются неизвестные коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C$  модели.

Поскольку коэффициенты модели определены, построим реализацию (см. рис. 6.2), имитирующую поведение системы, описанной фильтром Калмана.



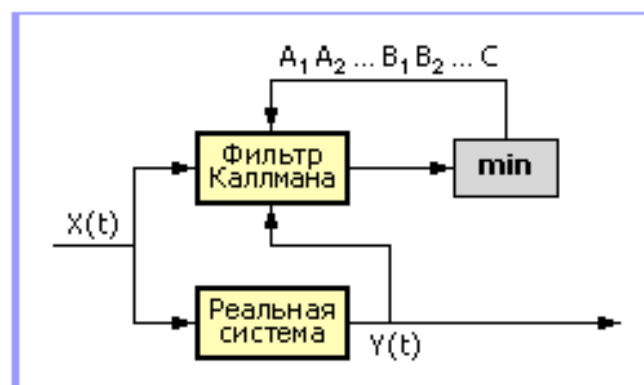
**Рис. 6.2. Вариант технической реализации фильтра Калмана**

«Блок задержки» в представленной реализации необходим для того, чтобы сдвинуть сигнал на такт и получить соседний отсчет для следующей переменной ряда модели. В зависимости от среды реализации блок задержки можно организовать разными способами.

Например, в случае реализации блока задержки в среде моделирования Stratum-2000, первый способ может быть основан на перезаписи информации из одной переменной (ячейки) в другую, на что требуется один такт. Таким образом, можно организовать задержку сигнала на любое число тактов. Например, задержка сигнала  $X$  относительно  $Y$  будет составлять 3 такта, если выполнить следующую последовательность операций:  $A1 := X$ ;  $A2 := A1$ ;  $Y := A2$ .

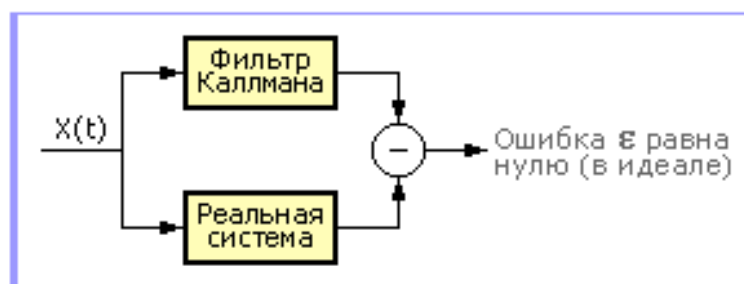
Во втором способе задержка организуется при помощи массива: на каждом такте нужно, чтобы цифры были перемещены в соседние ячейки.

На **рис. 6.3** приведена схема настройки (автоматического нахождения коэффициентов).



**Рис. 6.3. Схема автоматической настройки коэффициентов модели «на ходу»**

На **рис. 6.4** приведена схема проверки фильтра Калмана.



**Рис. 6.4. Схема проверки работы модели фильтра Калмана**

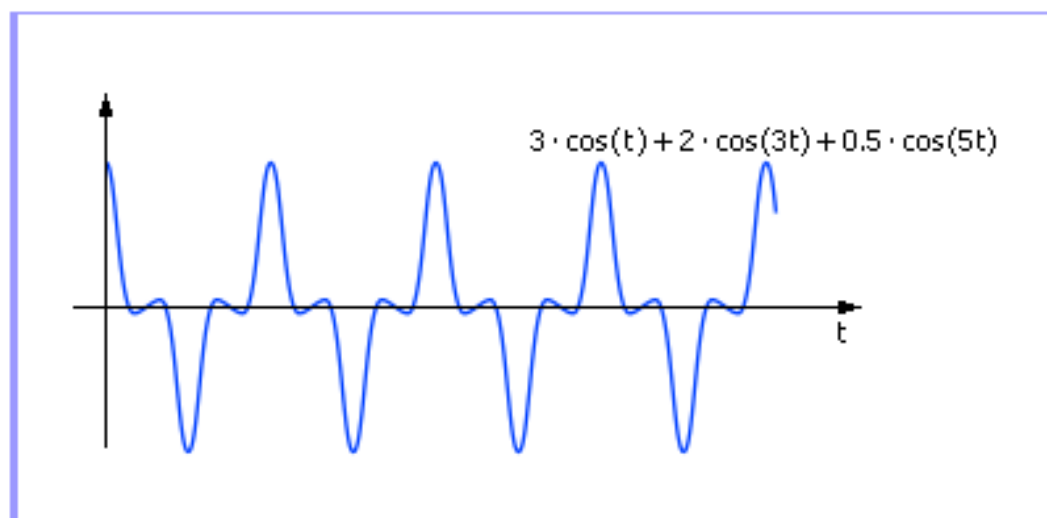


# Тема

Модель динамической системы в виде  
Фурье представления (модель сигнала)

Этот способ моделирования динамических систем основывается на том, что в любом сигнале присутствуют гармонические составляющие. В зависимости от частоты, составляющие называются **гармониками** (первая, вторая и так далее). Сумма гармоник с соответствующими весами составляет **модель сигнала**.

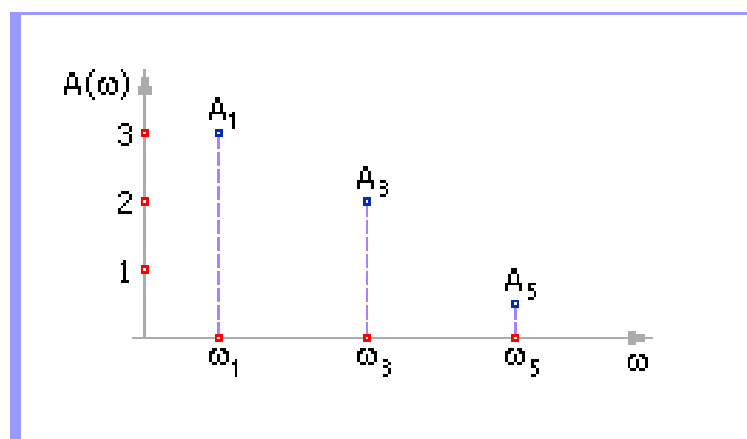
Пусть, например, в некотором сигнале присутствует сумма трех гармоник:  $3 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \cos(3t) + 0.5 \cdot \cos(5t)$ . Это значит, что в сигнале присутствует первая гармоника с амплитудой 3, третья гармоника с амплитудой 2, пятая гармоника с амплитудой 0.5. Сам суммарный сигнал выглядит так, как показано на **рис. 7.1**.



**Рис. 7.1. Пример гармонического сигнала**



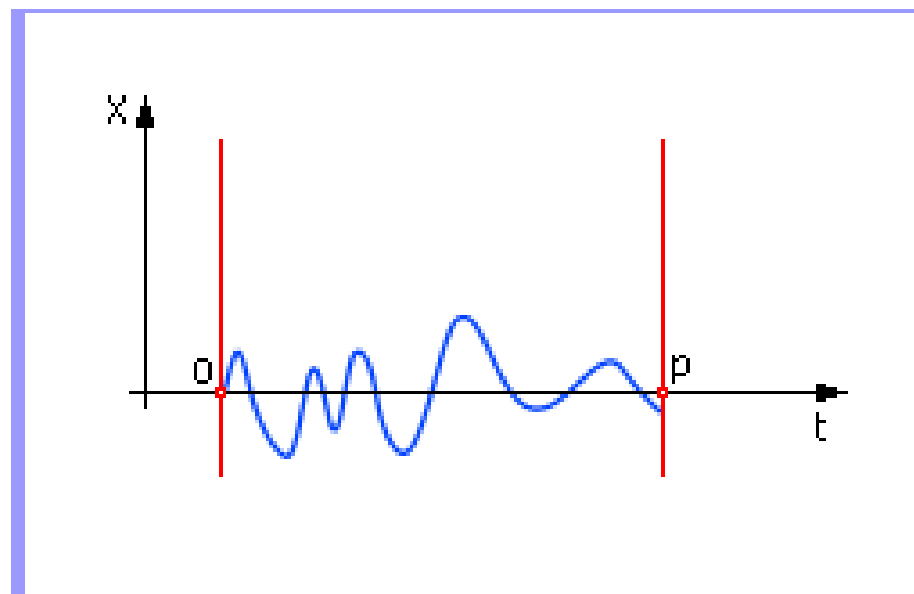
Спектр этого сигнала показан на **рис. 7.2**. Ясно, что в нашем примере больший вес (амплитуду) в сигнале имеет (более других представлена) первая гармоника, наименьший вес имеет пятая гармоника.



**Рис. 7.2. Пример спектра гармонического сигнала**

Любой сигнал, сколь сложен бы он ни был, может быть представлен суммой гармоник. Более простой сигнал представляется меньшим числом гармоник, более сложный — большим. Быстро меняющийся сигнал, содержащий резкие пики, имеет в своем составе гармоники высоких порядков. Чем больше гармоник представлено в модели сигнала, тем точнее, в общем случае, модель отражает реальный сигнал.

Пусть задан некий сигнал  $X(t)$  (рис. 7.3).



**Рис. 7.3. Временной сигнал на входе преобразования Фурье (возможный вид)**

Определимся со временем рассмотрения сигнала: если сигнал *периодический*, то время рассмотрения равно периоду  $p$  сигнала; если сигнал *непериодический*, то периодом сигнала считается все время его рассмотрения.

$$A_0 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) dt$$

$$A_1 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) dt$$

$$B_1 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right) dt$$

$$A_2 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \cos\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) dt$$

$$B_2 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \sin\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) dt$$

...

...

$$A_i = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \cos\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) dt$$

$$B_i = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \sin\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) dt$$

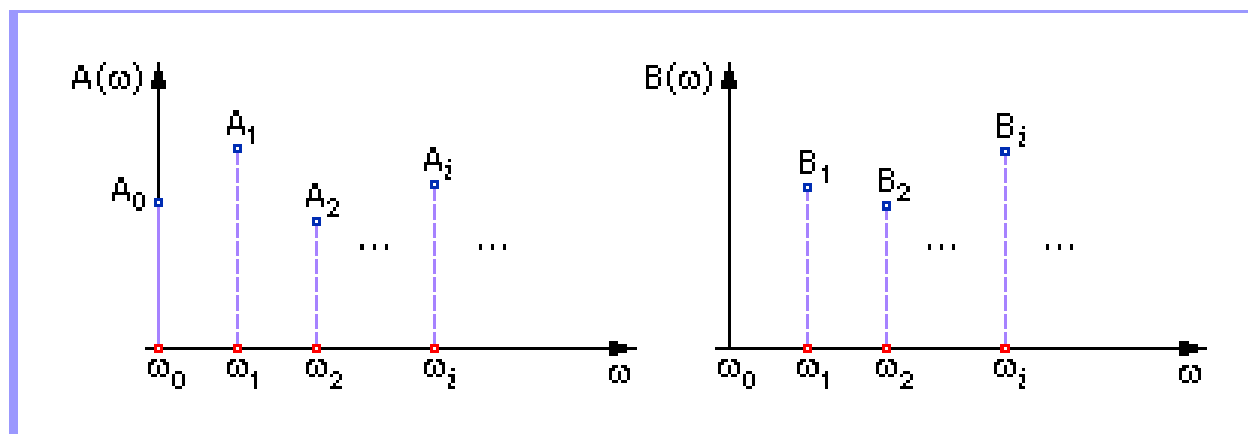
$A_i$  и  $B_i$  — это веса соответствующих гармоник, присутствующих в сигнале;  $i$  — номер гармоники. Формулы их расчета называются **прямым преобразованием Фурье**.

Значение  $2\pi \cdot i/p = \omega_i$  — это частота  $i$ -ой гармоники. Отметим также, что частота  $i$ -ой гармоники связана с частотой первой гармоники простым соотношением:  $\omega_i = i \cdot \omega_1$ .

Отметим важную особенность данного способа представления: вместо всего сигнала во всех его подробностях достаточно хранить вектор чисел, представляющих весовые коэффициенты составляющих его гармоник:  $(A_0, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots)$ . То есть эти числа полностью характеризуют исходный сигнал, так как по ним сигнал можно полностью восстановить формулой **обратного преобразования Фурье**:

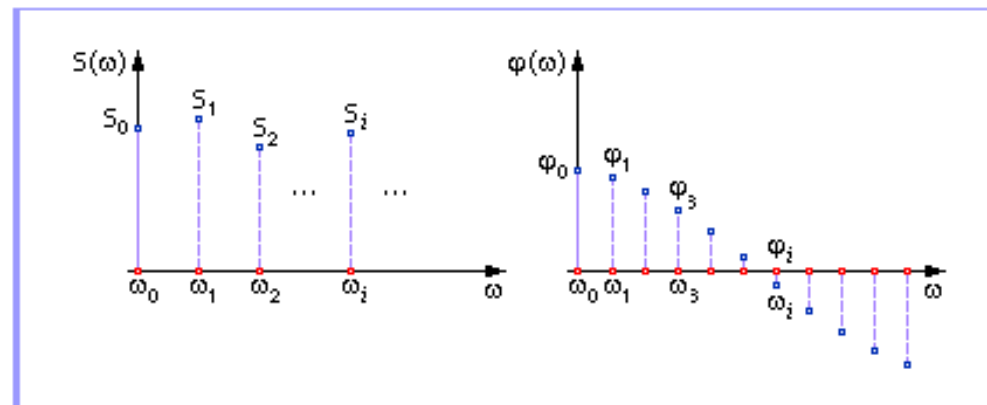
$$x(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + B_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) + \dots \\ + A_i \cos\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) + B_i \sin\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) + \dots$$

Именно эти числа используются также при обработке сигнала в модели динамической системы. Изображение этих чисел на графике в зависимости от номера гармоники (частоты) называется **спектром сигнала (рис. 7.4)**. Спектр показывает, насколько присутствует в сигнале соответствующая составляющая. Спектр — это частотная характеристика сигнала.



**Рис. 7.4. Сигнал, представленный в частотной области на выходе преобразования Фурье, спектр сигнала (возможный вид)**

Система чисел  $A_i$  и  $B_i$  является полной характеристикой сигнала. Такой же полной характеристикой сигнала является система чисел  $S$  и  $\varphi$ , которые также образуют спектр (**рис. 7.5**).  $S$  — это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),  $\varphi$  — фазо-частотная характеристика (ФЧХ).



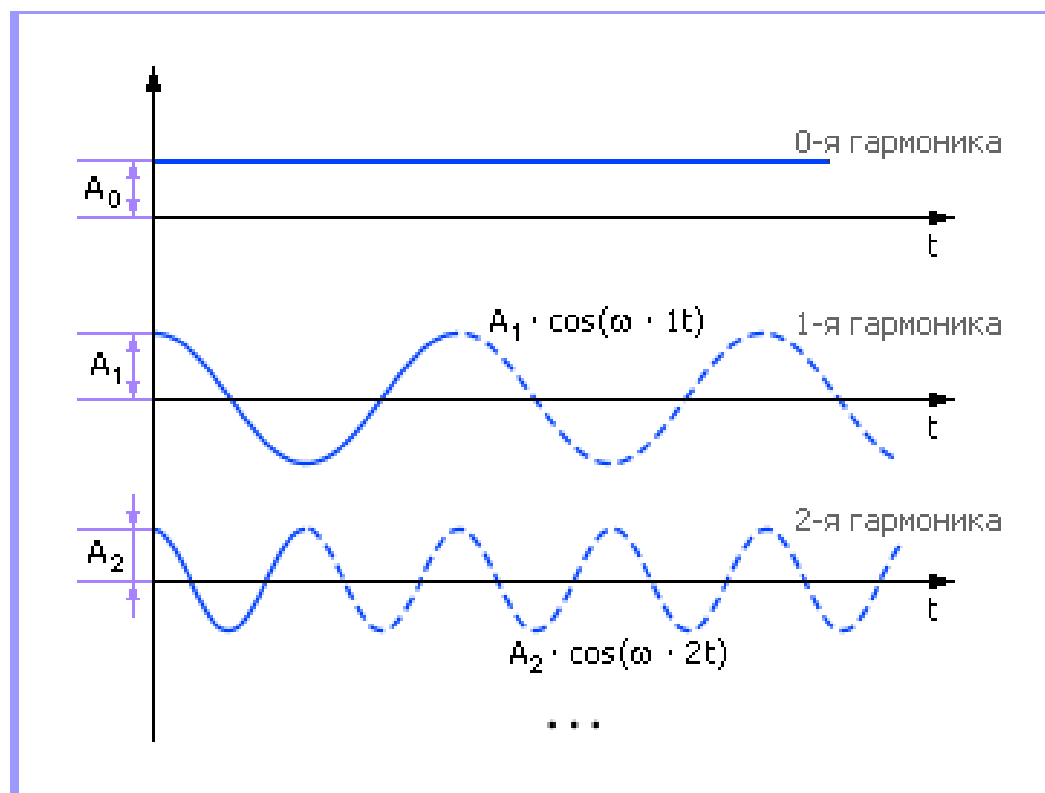
**Рис. 7.5.** Сигнал, представленный в частотной области, амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристика сигнала (возможный вид)

Системы « $A$  и  $B$ » и « $S$  и  $\varphi$ » являются полностью равнозначными. Переход из системы « $A$  и  $B$ » в систему « $S$  и  $\varphi$ » производится по следующим формулам:  $S_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$  — абсолютная амплитуда сигнала;  $\varphi_i = \arctg(B_i/A_i)$  — фаза сигнала, при сложении гармоник нужно учитывать сдвиг фаз (сдвиг фаз проиллюстрирован на **рис. 7.8**).

В случае с системой « $S$  и  $\varphi$ » обратное преобразование Фурье имеет вид:

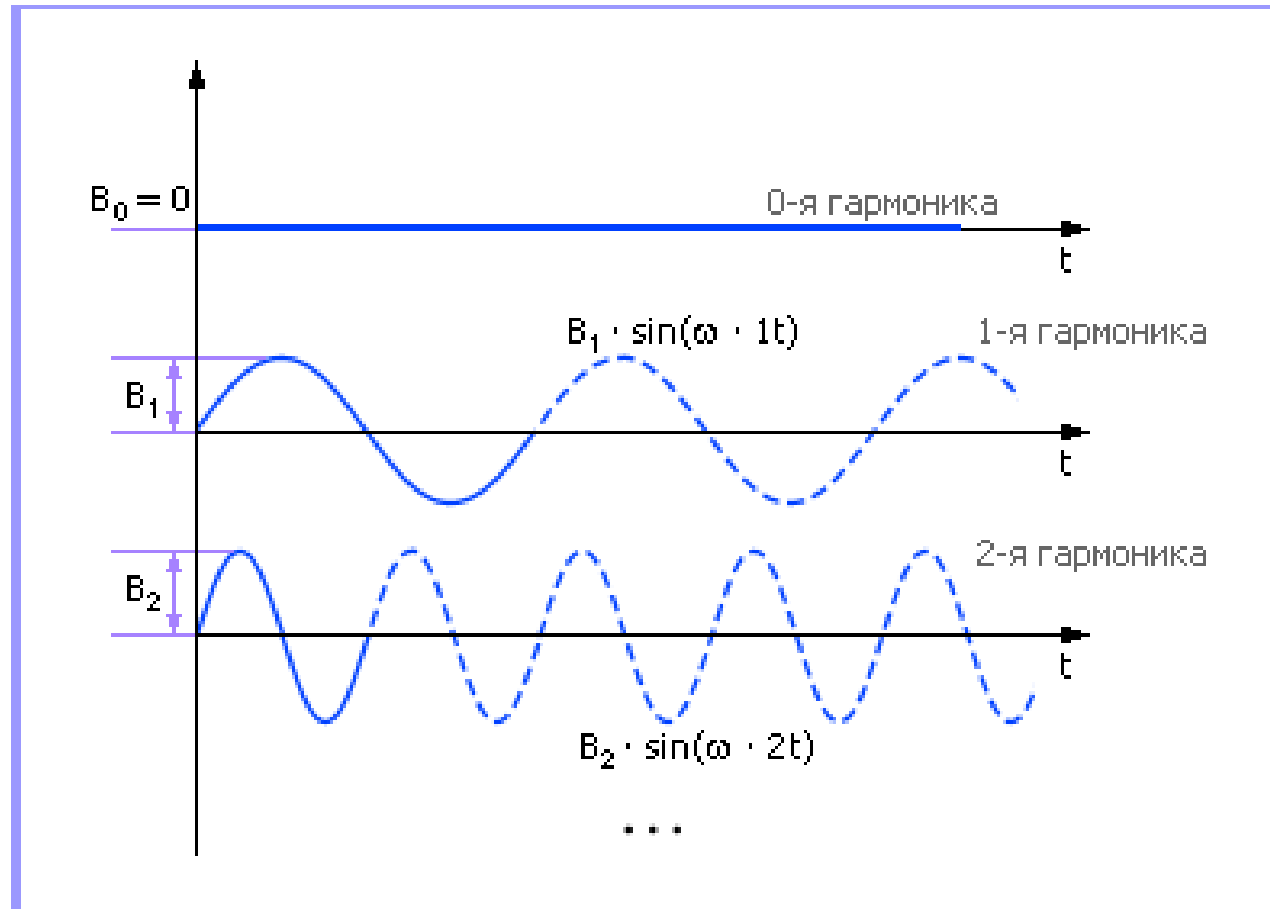
$$x(t) = \sum_{i=1}^k S_i \cdot \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

**Рис. 7.6** и **рис. 7.7** разъясняют смысл коэффициентов  $A$  и  $B$  разных гармоник. Эти коэффициенты — амплитуды синусов и косинусов соответствующих частот (гармоник). Во временной области графически они соответствуют размаху гармонических колебаний (**рис. 7.6** и **рис. 7.7**); в частотной — высоте спектральной полосы на соответствующей частоте (**рис. 7.4**).



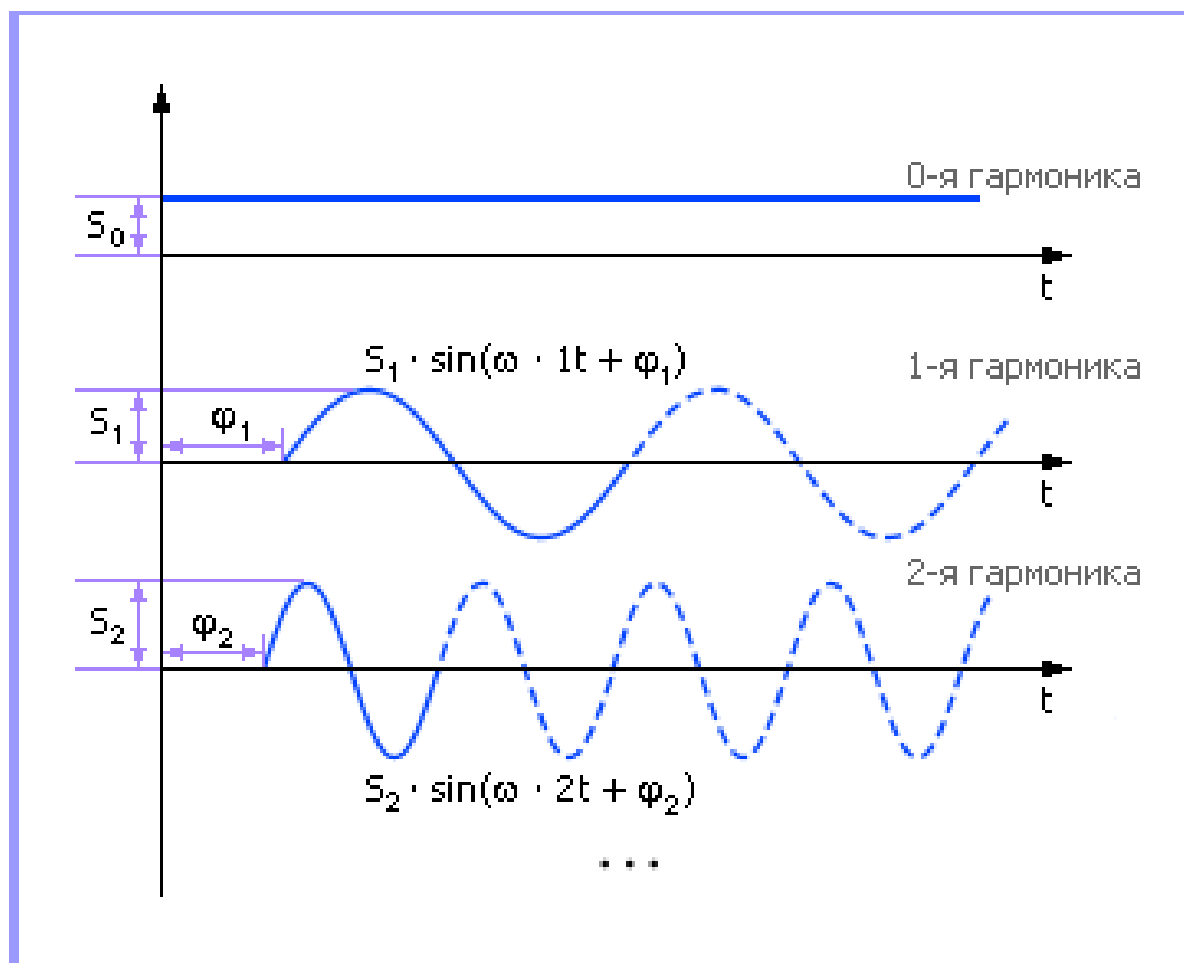
**Рис. 7.6. Геометрическая иллюстрация параметров  $A$  и  $\omega$  для косинусной составляющей гармонического сигнала**





**Рис. 7.7. Геометрическая иллюстрация параметров  $B$  и  $\omega$  для синусной составляющей гармонического сигнала**

Смысл чисел  $S_i$  и  $\varphi_i$  разъяснен на рис. 7.8.



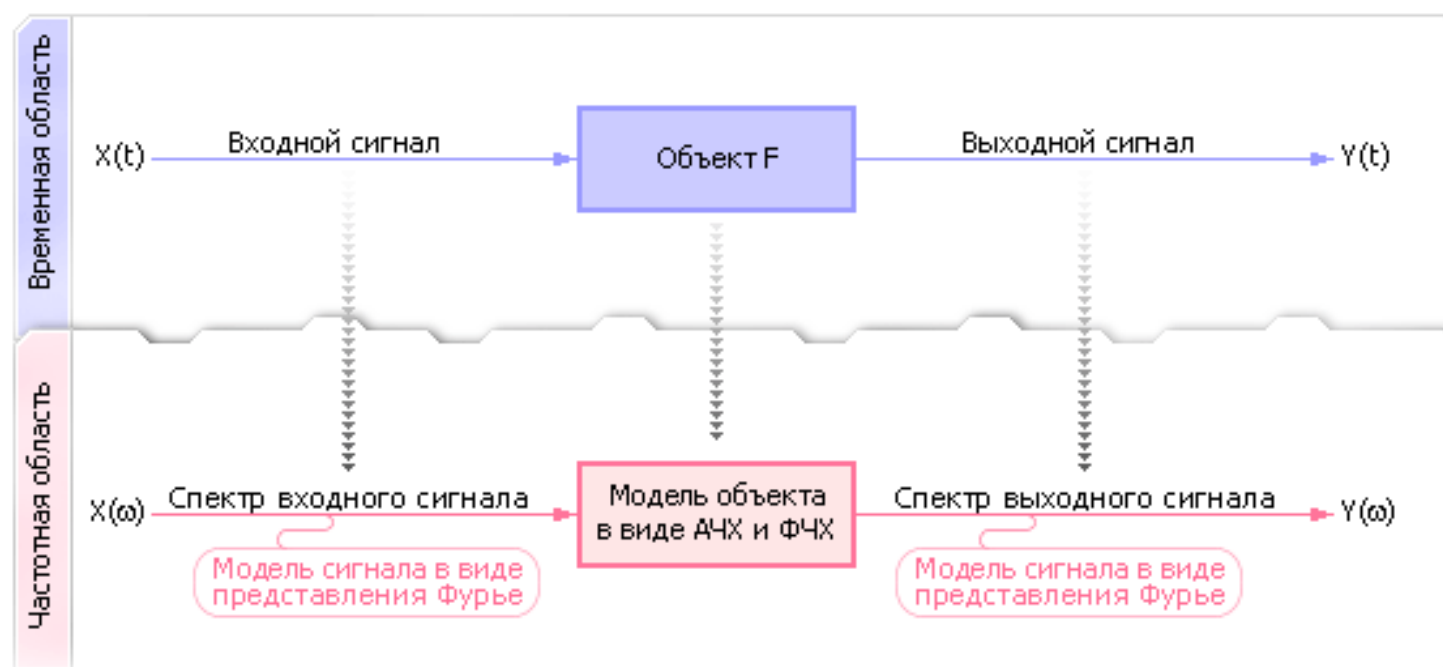
**Рис. 7.8. Геометрическая иллюстрация параметров  $S$  и  $\varphi$  для составляющей гармонического сигнала**



# Тема

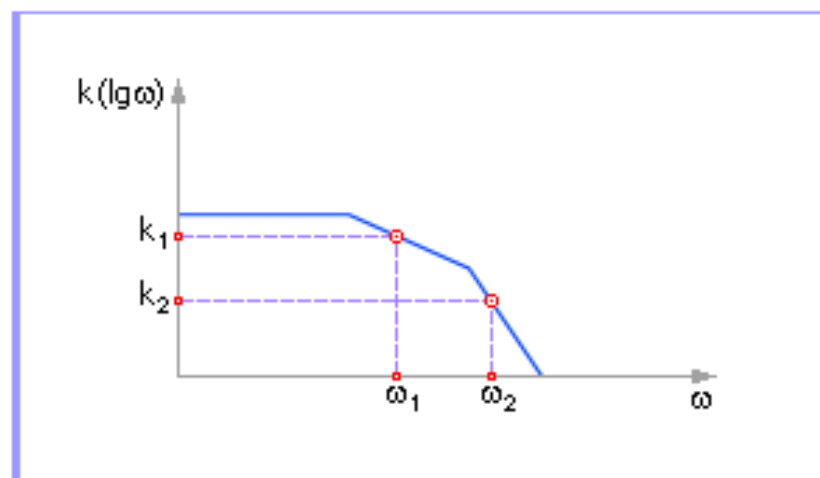
Модель динамической системы в виде  
Фурье представления (модель объекта)

Пусть имеется входной динамический сигнал  $X(t)$  и объект  $F$ , преобразующий этот сигнал в выходной  $Y(t)$  (см. рис. 8.1). Если объект описывается дифференциальными уравнениями, то таким преобразованием является интегрирование входного сигнала и вычисление  $Y(t)$ . Интегрирование, как было ранее показано, — операция, требующая значительных вычислительных ресурсов и имеющая значительную погрешность при реализации на цифровых машинах.



**Рис. 8.1. Схема моделирования динамического объекта при переходе из временной области представления в частотную**

Модель объекта в частотном виде называется **передаточной функцией** или АЧХ (амплитудно-частотной характеристикой). Объекты, для которых известны АЧХ, обычно называют **типовыми звеньями** (усилительное звено, апериодическое, колебательное и т. д.). Пусть, для примера, характеристика объекта в частотной области следующая (см. **рис. 8.2**).



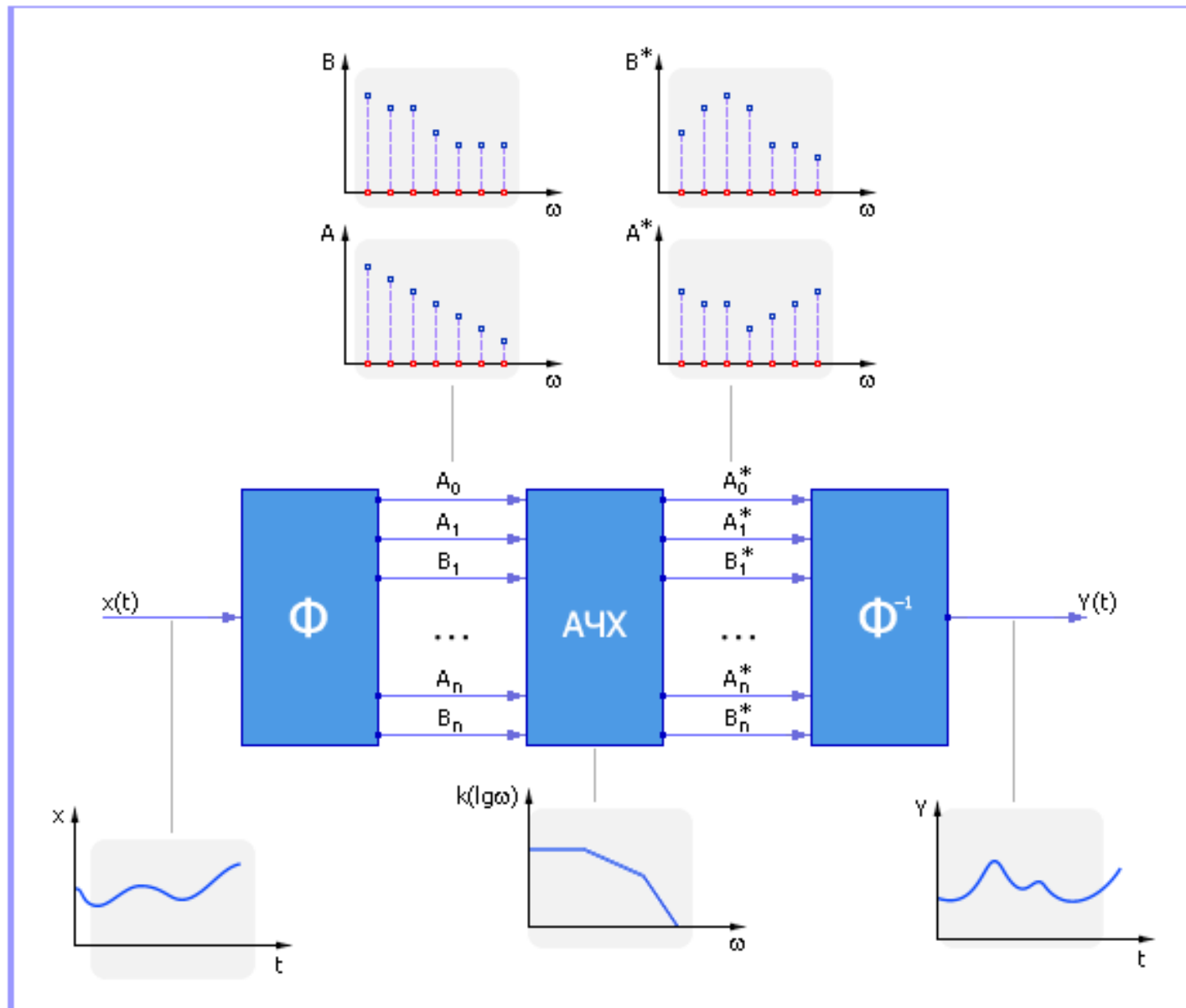
**Рис. 8.2. АЧХ (возможный вид)**

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) показывает, насколько пропускается объектом на выход соответствующая гармоника. Значение  $k_i$  характеризует коэффициент усиления гармонического сигнала на определенной частоте  $\omega_i$ .

Моделирование прохождения сигнала через объект в этом виде заключается в умножении коэффициента  $A_i$  гармоники с частотой  $\omega_i$  входного сигнала  $X(t)$  на коэффициент усиления  $k_i$  при той же гармонике с частотой  $\omega_i$  в АЧХ:  $A_i^* = A_i(\omega_i) \cdot k_i(\omega_i)$ . (Для коэффициента  $B$  преобразование аналогично.) В результате получается коэффициент  $A_i^*$  выходной гармоники данной частоты  $\omega_i$ . Процедура выполняется для всех частот, представленных во входном сигнале и АЧХ. После получения спектра выходного сигнала можно восстановить сигнал как временную зависимость с помощью формулы обратного преобразования Фурье.

**Заметим главное:** моделирование прохождения сигнала через динамический объект свелось к операции умножения двух переменных, точнее, к операции поэлементного умножения вектора одних переменных на вектор других переменных.

Схема преобразования показана на рис. 8.3.

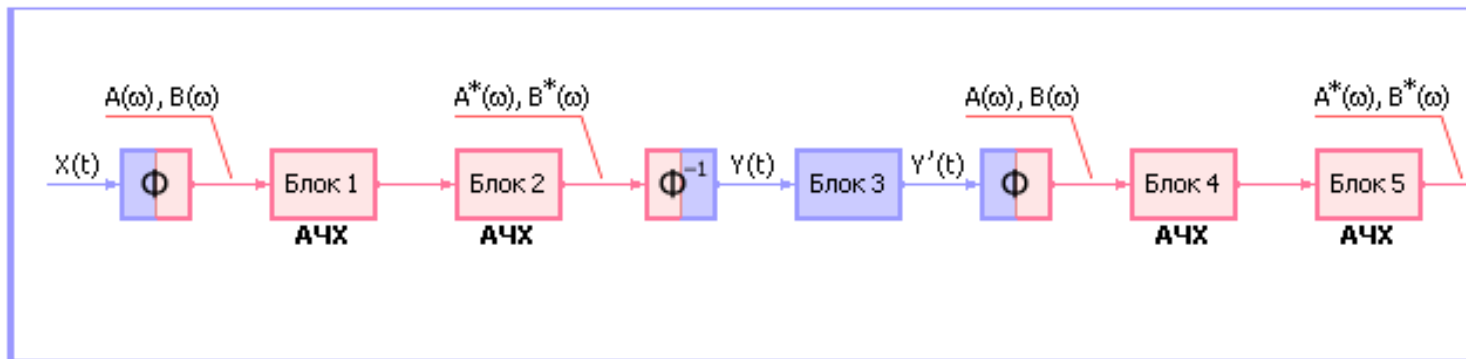


**Рис. 8.3. Схема процедуры преобразования сигнала при использовании метода Фурье**

Пусть мы имеем радио-электронное устройство (РЭУ), состоящее из 5 блоков (см. **рис. 8.4**). Блоки 1, 2, 4, 5 — линейные и представлены соответствующими известными АЧХ; блок 3 — нелинейный, поэтому АЧХ для него неизвестна. Примером линейного блока может служить апериодическое звено, колебательное звено и т. д. (см. Лекцию 05. Динамические регрессионные модели, заданные в виде передаточной функции). Примером нелинейного блока может служить устройство ограничения сигнала (срез) по амплитуде.

Как видно из рис. 8.4, сначала входной сигнал  $X(t)$  прямым преобразованием Фурье переводится в частотную область и проходит в виде спектра через АЧХ 1 и 2 *линейного* блока, затем обратным преобразованием Фурье сигнал после 2 блока переводится во временную область. Проходим *нелинейный* блок 3 во временном представлении. Результат работы блока 3 снова преобразуем прямым преобразованием Фурье в частотную область и проходим через АЧХ блоков 4 и 5. В конце полученный спектр преобразуется с помощью обратного преобразования Фурье во временную область, — вид сигнала,  $Z(t)$ , является результатом моделирования.





**Рис. 8.4. Пример моделирования тракта, содержащего нелинейные блоки, с использованием метода Фурье**

Метод, который мы рассмотрели, является одним из самых быстродействующих. Это связано с заменой операций интегрирования и дифференцирования, встречающихся в моделях динамических звеньев, на операции сложения и умножения при переходе в частотную область. Такая процедура обеспечивает точность и быстродействие модели.

Для метода важно, с какой частотой вы дискретизируете сигнал при разложении в ряд Фурье. Если частота дискретизации мала, то есть отсчеты в сигнале следуют редко, с большими интервалами, то часть сигнала остается потерянной, так как между отсчетами может оказаться резко возросший и опавший пик, информация о котором пропадет. То есть говорят, что малая частота дискретизации срезает высокие частоты в сигнале. (Пик — это и есть высокочастотная составляющая, которая может быть потеряна).

По теореме Котельникова, чтобы не потерять соответствующую гармонику, требуется дискретизировать сигнал с частотой не менее чем в 2 раза большей, чем самая высокая частота из представленных в аналоговом сигнале:

$$2W_{\max} \leq W_{\text{дискр.}}$$

где  $W_{\text{дискр.}} = 1/\Delta t_{\text{дискр.}}$  — частота дискретизации,  $W_{\max}$  — максимальная частота, присутствующая в сигнале.

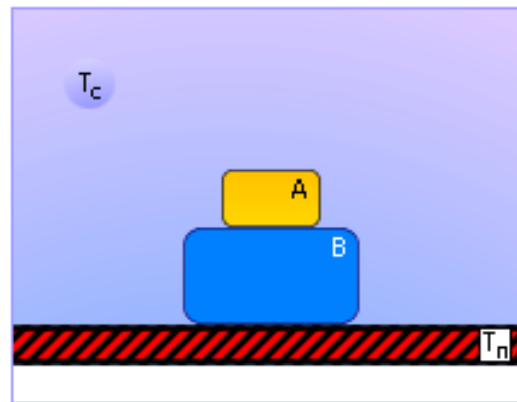


# Тема

Построение модели динамической системы в виде дифференциальных уравнений и расчет ее методом Эйлера

Выполним построение модели динамической системы в виде дифференциальных уравнений и расчет ее методом Эйлера на примере.

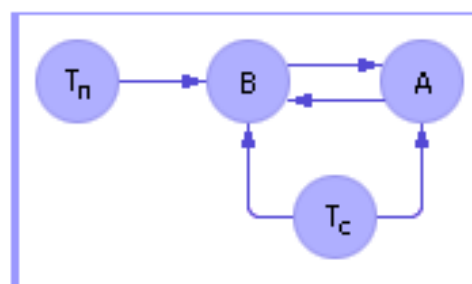
**Пример.** Пусть исследуется система двух материальных тел **A** и **B** с различными теплофизическими свойствами (см. **рис. 11.1**). Система контактирует с опорой с температурой  $T_n$  и помещена во внешнюю среду с температурой  $T_c$ . Интересует протекание процесса изменения температур тел.



**Рис. 11.1. Система взаимодействующих тел в задаче теплопроводности**

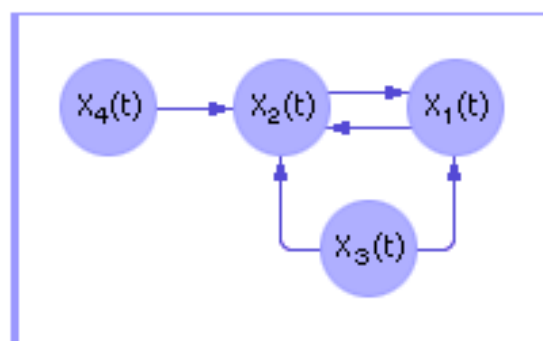
Как видно, в процессе жизни в системе изменяются (могут измениться) четыре показателя: температуры тел **A**, **B**,  $T_c$ ,  $T_n$ . Значит, мы имеем дело с четырьмя переменными, зависящими от времени (поскольку переменные меняют свои значения со временем). Введем эти переменные:  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ ,  $X_3(t)$ ,  $X_4(t)$ .

Для построения математической модели данной системы отразим процесс теплопередачи в виде графа зависимостей (рис. 11.2).



**Рис. 11.2. Граф зависимости переменных системы**

Если иметь в виду переменные  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ ,  $X_3(t)$ ,  $X_4(t)$ , то граф будет выглядеть так, как показано на рис. 11.3.



**Рис. 11.3. Граф зависимости переменных модели**

Стрелка от **A** к **B** обозначает изменение температуры  $X_2(t)$  объекта **B** под влиянием объекта **A**. Понятно, что ряд стрелок (например, от **B** к  $T_c$ , от **A** к  $T_n$  и др.) отсутствует, то есть нет влияния одних параметров на другие: тело **B** не в состоянии сколько-нибудь существенно нагреть открытую атмосферу, а тело **A** — массивную и потенциально бесконечную опору. Строго говоря, такое влияние есть, но оно настолько ничтожно, что разумно им пренебречь.

Поскольку переменных четыре, то нам необходимо, как минимум, четыре закона, описывающих их изменение. В общем виде, учитывая, от каких переменных зависит каждый показатель, получим:

- для тела **A** имеем зависимость температуры  $X_1(t)$  от температуры тела **B** и температуры атмосферы  $T_c$ :  $dX_1(t)/dt = f_1(X_2(t), X_3(t))$ ;
- для тела **B** имеем зависимость температуры  $X_2(t)$  от температуры тела **A**, температуры атмосферы  $T_c$  и опоры  $T_n$ :  $dX_2(t)/dt = f_2(X_1(t), X_3(t), X_4(t))$ .

Стрелки, входящие в соответствующий кружок, указывают на количество влияющих параметров, а то, откуда они исходят, определяет конкретные названия переменных.

Для среды закон имеет вид:  $X_3(t) = \text{const}$ , то есть, температура атмосферы  $T_c$  не зависит от остальных составляющих данной системы и, соответственно, не изменяется. Для опоры закон имеет вид:  $X_4(t) = \text{const}$ , то есть, температура опоры  $T_d$  не зависит от остальных составляющих данной системы и, соответственно, не изменяется.

Система законов в первом приближении сформирована. Остается определить их конкретный вид: раскрыть, что из себя представляют значения выражений  $f_1$  и  $f_2$ . Так как мы имеем дело с системой, зависящей от своего прошлого поведения на каждом последующем шаге, то мы применили для ее описания дифференциальные уравнения.

Основной динамический закон для описания изменения переменной (уравнение движения) имеет вид:

$$\frac{dX(t)}{dt} = w(x(t), y(t), z(t), \dots).$$

Физический смысл записи таков. Производная в левой части уравнения, по определению, показывает, насколько изменяется  $X$  с изменением времени  $t$ . В инженерии подобное изменение называется **скоростью, темпом, тенденцией**. Итак, чтобы записать закон изменения переменной в дифференциальных уравнениях, надо указать скорость изменения переменных.



Сначала рассмотрим первое уравнение:

$$dX_1(t)/dt = f_1(X_1(t), X_2(t), X_3(t)).$$

Появление  $X_1$  в правой части означает, что скорость изменения температуры зависит от собственного состояния тела. Что такое  $f_1$ ? — это функция, связывающая переменные  $X_1, X_2, X_3$  между собой. То есть, переменные соединены друг с другом знаками операций.

Взгляните на граф на **рис. 11.3**. Какие пары переменных взаимодействуют? Стрелки соединяют  $X_1(t)$  с  $X_2(t)$ ,  $X_1(t)$  с  $X_3(t)$ , то есть имеет место два процесса, влияющих на скорость. Мы рассматриваем процессы теплообмена тел. Известно, что два процесса теплообмена независимы, то есть не управляют друг другом. Значит, результаты двух процессов можно складывать, они как бы накладываются друг на друга. Действительно, тепло, переданное от одного тела, складывается с теплом, переданным от другого. Таким образом, имеем:

$$dX_1(t)/dt = g_1(X_1(t), X_2(t)) + g_2(X_1(t), X_3(t)).$$



Раскроем структуру оставшихся выражений  $g_1$  и  $g_2$ . Очень удобно, что  $g_1$  никак не зависит от  $g_2$  и может рассматриваться отдельно. Такое разделение возможно, так как процессы  $g_1$  и  $g_2$  независимы. Процесс  $g_1$  идет независимо от того, идет или нет процесс  $g_2$ . Независимость процессов и линейность (аддитивность) выражений — понятия связанные. Итак: так как процессы  $g_1$  и  $g_2$  независимы, то забудем на некоторое время о  $g_2$ .

Какой знак нужно поставить между  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  в выражении  $g_1$ ? Возможные варианты:

$$X_1(t) + X_2(t);$$

$$X_2(t) - X_1(t);$$

$$X_1(t) - X_2(t);$$

$$X_1(t) \cdot X_2(t);$$

$$X_1(t) / X_2(t);$$

$$X_2(t) / X_1(t);$$

$$X_1(t) \wedge X_2(t);$$

$$X_2(t) \wedge X_1(t)$$

и далее более сложные, например,  $X_1^2(t) \cdot \cos(X_2(t))/\exp(X_1(t))$ . Исследователь начнет с наиболее простых выражений — природа построена просто. И только если простейшие выражения не удовлетворяют исследователя, он переходит к более сложным вариантам описания.

**То, что было только что сказано выше, возведено в системотехнике в ранг принципа: «не вводи сущностей без надобности» (принцип Оккама).**

Итак, пусть:  $dX_1(t)/dt = X_1(t) + X_2(t)$ . Какие есть качественные варианты у этой физической системы?

- $X_1(t) > X_2(t)$ . Тело **А** теплее тела **В**. Теплопоток при контакте двух тел направлен от А к В. Тело **А** отдает тепло телу **В**. То есть в процессе контакта значение  $X_1(t)$  падает — уменьшается. (Нас интересует будущее именно  $X_1(t)$ , а не  $X_2(t)$  — см. уравнение:  $dX_1(t)/dt$ ). Посмотрим, так ли это в уравнении-гипотезе  $dX_1(t)/dt = X_1(t) + X_2(t)$ ? Сумма  $X_1(t) + X_2(t)$  может принимать как по-

ложительные, так и отрицательные значения, следовательно, значение  $dX_1(t)/dt$  также может быть как положительным, так и отрицательным, а это, в свою очередь, значит, что  $X_1(t)$  то растет, то падает. Но это противоречит физической картине, рассмотренной чуть выше: мы заключили, что при условии  $X_1(t) > X_2(t)$   $X_1(t)$  может только лишь уменьшаться. Поэтому вариант гипотезы  $dX_1(t)/dt = X_1(t) + X_2(t)$  неприемлем и надо пробовать другой.

Пусть теперь  $dX_1(t)/dt = X_2(t) - X_1(t)$ . Какие есть качественные варианты у этой физической системы?

- $X_1(t) > X_2(t)$ . Тело **A** теплее тела **B**. Теплопоток при контакте двух тел направлен от A к B. Тело **A** отдает тепло телу **B**. То есть в процессе контакта значение  $X_1(t)$  падает — уменьшается. Посмотрим, так ли это в уравнении?  $X_1(t) > X_2(t)$ , то есть  $X_2(t) - X_1(t) < 0$ , значит,  $dX_1(t)/dt < 0$ , следовательно,  $X_1(t)$  падает. Вывод не противоречит физической картине. Значит, пока данный вариант приемлем и надо проверить его на остальных качественных ситуациях.

- $X_1(t) < X_2(t)$ . Тело **A** холоднее тела **B**. Теплопоток при контакте двух тел направлен от B к A. То есть в процессе контакта значение  $X_1(t)$  растет — увеличивается. Посмотрим, так ли это в уравнении?  $X_1(t) < X_2(t)$ , то есть  $X_2(t) - X_1(t) > 0$ , значит,  $dX_1(t)/dt > 0$ , следовательно,  $X_1(t)$  растет. Вывод не противоречит физической картине. Значит, пока данный вариант приемлем и надо проверять его далее.

- $X_1(t) = X_2(t)$ . Температура тела **A** равна температуре тела **B**. Теплопоток при контакте двух тел равен нулю. То есть значение  $X_1(t)$  не изменяется — тело **A** не отдает и не принимает тепло. Посмотрим, так ли это в уравнении?  $X_1(t) = X_2(t)$ , значит,  $X_2(t) - X_1(t) = 0$ , значит,  $dX_1(t)/dt = 0$ , значит,  $X_1(t)$  не изменяется. Вывод не противоречит физической картине. Значит, данный вариант принимается, так как он правильно (пока только качественно!) отражает физическую картину во всех случаях.

Других вариантов существования системы нет, и рассмотрение оканчивается.

Забыв на некоторое время о  $g_1$ , также можно рассмотреть и  $g_2$ , что предлагается проделать читателю самостоятельно. В конечном итоге мы получим:

$$dX_1(t)/dt = (X_2(t) - X_1(t)) + (X_3(t) - X_1(t)).$$

Далее. Так как, во-первых, у разных материалов разность температур влияет на скорость изменения температуры тела различным способом и, во-вторых, скорости двух процессов (у двух разных пар материалов) могут быть разными, то скорректируем модель, используя коэффициент теплопроводности, который играет роль усилителя (ослабителя) процессов. Это коэффициент влияния связи на объект. При  $K = 0$  влияние отсутствует, связь отключается. При  $K = 0.0001$  влияние слабое. При  $K = 1000$  влияние связи огромно. Понятно, что коэффициент стоит при выражении процесса:  $K \cdot (X_2(t) - X_1(t))$ , где « $\cdot$ » означает знак некоторой операции, а именно — операции умножения. Эта операция дает *зависимость* одного члена от другого (в нашем случае  $K$  от  $X_2(t) - X_1(t)$ ).

При  $K = 0$ , какие бы значения ни принимало выражение  $X_2(t) - X_1(t)$ , результат  $K \cdot (X_2(t) - X_1(t))$  дает 0. При  $K = 0.1$  значение выражения принудительно ослабляется в 10 раз. То же самое верно и со стороны выражения  $X_2(t) - X_1(t)$  — это естественно, ведь общее выражение  $K \cdot (X_2(t) - X_1(t))$  симметрично. Значит, мультипликативная связь моделирует свойство *нелинейности* и взаимозависимости процессов (один может сводить на нет действие другого). Сложение таким свойством не обладает.

В итоге модель имеет вид:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)).$$

В конце следует проверить размерности уравнения; размерность левой части должна совпасть с размерностью правой. Напомним только, что производная имеет размерность показателя  $X$ , деленного на единицу времени.

Теперь мы в состоянии синтезировать аналогично второе уравнение (рекомендуем проверить правильность данного уравнения самостоятельно):

$$\underline{dX_2(t)/dt} = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)).$$

Уравнение изменения температуры атмосферы:  $\underline{dX_3(t)/dt} = 0$ . То есть  $X_3 = \underline{\text{const}}$  ( $X_3$  не изменяется).

Уравнение изменения температуры опоры:  $\underline{dX_4(t)/dt} = 0$ . То есть  $X_4 = \underline{\text{const}}$  ( $X_4$  не изменяется).

Вся система уравнений в сборе имеет вид:

$$\underline{dX_1(t)/dt} = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t));$$

$$\underline{dX_2(t)/dt} = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t));$$

$$\underline{dX_3(t)/dt} = 0;$$

$$\underline{dX_4(t)/dt} = 0.$$

По физическим соображениям ясно: сколько тепла вытекает из **A** в **B**, столько же тепла поступает в **B** из **A**, то есть  $K_{21} = K_{12}$ .

К записи общей модели остается добавить конкретные значения коэффициентов теплопроводности ( $K_{12} = K_{21}, K_{31}, K_{32}, K_{42}$ ) и начальное состояние системы:

$$X_1(0) = \underline{a},$$

$$X_2(0) = \underline{b},$$

$$X_3(0) = \underline{c},$$

$$X_4(0) = \underline{d},$$

где  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$  — числа, указывающие температуру соответствующего объекта в момент времени  $\underline{t} = 0$ .

**Важное замечание.** Прделанная выше работа по подтверждению гипотез, содержащихся в модели данного примера, естественно, не доказывает абсолютной правильности принятой модели. Проверки могут быть продолжены. Если при очередной проверке гипотеза будет отвергнута, то модель следует снова уточнить. Одной из дополнительных проверок может быть, например, проверка на открытость системы. Выполним такую проверку.



Заметим, что выше мы получили *открытую систему*, то есть такую, чье суммарное тепло не постоянно, а может изменяться. Это видно из асимметрии стрелок на графе. Проверим этот факт математически, формально, для чего сложим левые части всех уравнений и, отдельно, правые части. Слева мы имеем следующее:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} + \frac{dX_2(t)}{dt} + \frac{dX_3(t)}{dt} + \frac{dX_4(t)}{dt}$$

или

$$\frac{d(X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + X_4(t))}{dt}$$

или

$$\frac{dX_{\text{системы}}(t)}{dt}.$$

В правой части мы имеем следующее:

$$K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) + K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t))$$

или (с учетом того, что  $K_{21} = K_{12}$ )

$$K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)).$$

И, наконец, вместе:

$$\frac{dX_{\text{системы}}(t)}{dt} = K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)),$$

из чего следует, что левая часть явно не равна нулю и есть утечка или приток тепла в систему извне.

В случае закрытой системы уравнения имели бы вид:

$$dX_1(t)/dt = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t));$$

$$dX_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t));$$

$$dX_3(t)/dt = K_{13} \cdot (X_1(t) - X_3(t)) + K_{23} \cdot (X_2(t) - X_3(t)) + K_{43} \cdot (X_4(t) - X_3(t));$$

$$dX_4(t)/dt = K_{24} \cdot (X_2(t) - X_4(t)) + K_{34} \cdot (X_3(t) - X_4(t)).$$

При сложении это дает:  $dX_{\text{системы}}(t)/dt = 0$  — уравнение закрытой системы, в которую извне нечего не притекает и из которой ничего не истекает. Хотя внутри системы происходят изменения (перераспределение тепла), суммарная температура системы неизменна. Ни первая модель (модель открытой системы), ни вторая модель (модель закрытой системы) не являются «плохими». Просто достигнуты различные цели, даны различные представления исследователя о процессах, о системе в целом.

*Динамическая система*, которую мы рассматривали выше, — это общий случай. Весьма важно, что из нее всегда можно «даром» получить *статическую систему*, для чего нужно потребовать:  $X_i(t + \Delta t) = X_i(t)$ , в результате чего имеем:  $dX_i(t)/dt = 0$ . Другими словами, запись  $X_i(t + \Delta t) = X_i(t)$  означает, что прошлое равно настоящему, то есть состояние системы не меняется.

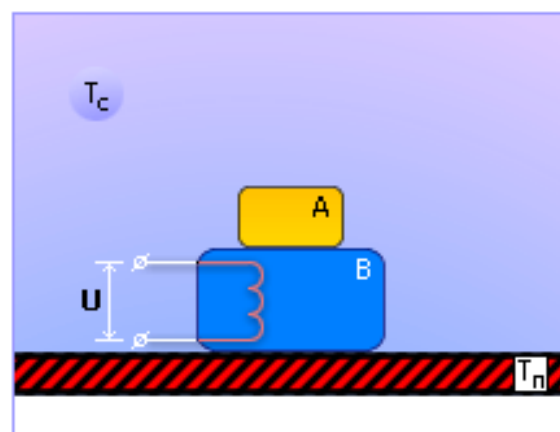
Тогда от уравнений остается:

$$K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) = 0$$

$$K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) = 0.$$

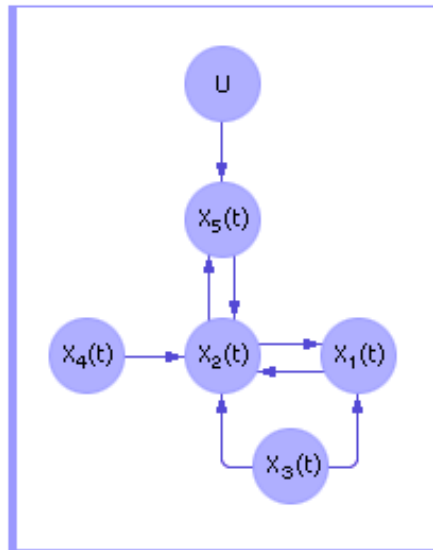
Это уравнения статики.

После построения базовой системы исследователь может вводить дополнительные конструктивные элементы в систему тел. Добавим, например, нагреватель (см. рис. 11.4).



**Рис. 11.4. Система взаимодействующих тел со слабым нагревателем в задаче теплопроводности**

Граф изменится, так как на тело **В** будет действовать дополнительный объект — нагреватель. Обозначим его температуру переменной  $X_5(t)$  (см. рис. 11.5).



**Рис. 11.5. Граф зависимости переменных модели со слабым нагревателем**

Изменения в записи будут касаться только второго уравнения, описывающего изменение переменной  $X_2$  во времени. Кроме того, нам понадобится уравнение нагревателя, так как в системе появилась дополнительная переменная  $X_5(t)$  (вершина графа) и закон ее изменения должен быть определен.

При записи уравнения следует различать, к какому типу относится источник тепла — слабому или сильному.

Рассмотрим сначала гипотезу о слабом источнике. Обратите внимание: если нагреватель будет греть сильнее тела **В**, то, конечно, тело **В** нагревается от нагревателя, но если нагреватель в какой-то момент окажется холоднее тела **В**, то тело **В** само отдает тепло нагревателю, как бы странно это, на первый взгляд, ни казалось.

Так как такой источник энергии может не только нагревать другие тела, но и нагреваться от них сам, он называется **слабым**. То есть от услуг такого источника энергии можно отказаться, поскольку он находится в равном с другими телами положении, может влиять на них и может испытывать их влияние. На **сильный** источник другие тела воздействовать не могут, а сам он — может на них воздействовать, НАВЯЗЫВАЯ ИМ СВОЮ ВОЛЮ БЕЗУСЛОВНО.

Понятно, что в уравнении для тела **В** появится дополнительное слагаемое, аналогичное ранее рассмотренным:

$$dX_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) + K_{52} \cdot (X_5(t) - X_2(t)).$$

Уравнение нагревателя может быть записано так:

$$\underline{dX_5(t)/dt} = (K \cdot U(t) - X_5(t))/L + K_{25} \cdot (X_2(t) - X_5(t)),$$

где  $U(t)$  — напряжение питания источника.

Начальные условия  $X_5(0)$  и функция работы источника  $U(t)$  должны быть заданы:

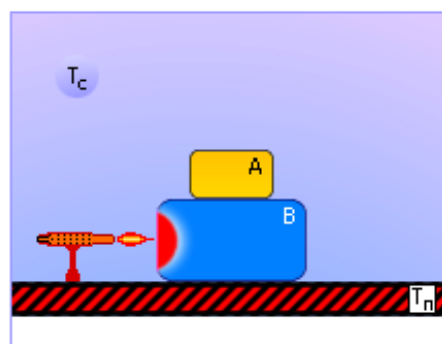
$$X_5(0) = \underline{h},$$

$$U(t) = \underline{f(t)}.$$

Уравнение связывает причину (напряжение источника питания) и следствие (температура нагревателя). Свойства этого элемента таковы, что при выходе на рабочий режим нагреватель поддерживает постоянную температуру. При включении нагревателя рабочая температура устанавливается со временем, постепенно нарастая, при выключении источника нагреватель постепенно остывает. Очевидно, что процесс нагрева и остывания нагревателя инерционный. Фактически, для описания этих свойств нагревателя достаточно записать апериодический закон (который мы ранее уже обсуждали в лекции 04) изменения его температуры  $X_5(t)$  по отношению ко входу  $U(t)$ , что мы и сделали. В уравнении учтен коэффициент усиления  $K$  между входом  $U(t)$  и выходом  $X_5(t)$ , инерционность процесса нагрева  $L$  и коэффициент теплопередачи  $K_{25}$  между телами  $X_2(t)$  и  $X_5(t)$ .

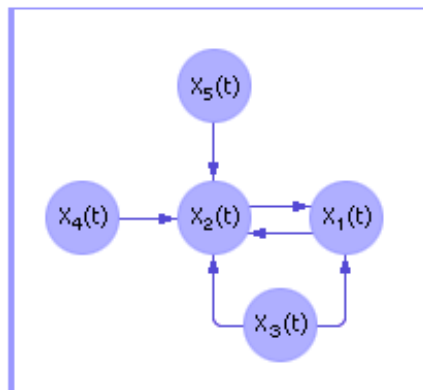


Теперь рассмотрим гипотезу о сильном нагревателе. Это случай, когда нагреватель устроен таким образом, что излученная им энергия не может отразиться телом **B**, или если энергия от тела **B** не может попасть к нагревателю, или если тело **B** не может «отказаться» от услуг нагревателя (см. рис. 11.6).



**Рис. 11.6. Система взаимодействующих тел с сильным нагревателем в задаче теплопроводности**

На рис. 11.7 изображен граф зависимостей для данного случая.



**Рис. 11.7. Граф зависимости переменных модели с сильным нагревателем**

Обратите внимание: неважно, нагрет ли нагреватель сильнее тела **B** или нет – тело **B** будет получать от него энергию в любом случае, причем, в том объеме, в каком эту энергию будет выделять нагреватель. В уравнении тела **B** появится дополнительное слагаемое:

$$dX_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) + K_{52} \cdot X_5(t).$$

Уравнение нагревателя может быть записано так:

$$dX_5(t)/dt = f(t).$$

Начальные условия  $X_5(0)$  и функция работы источника  $f(t)$  должны быть заданы:

$$X_5(0) = h.$$

Но вернемся к расчету движения во времени динамической системы, для которой есть все необходимые данные, есть начальное состояние ( $X_i(0) = \text{const}$ ). Можно по формулам (с использованием метода Эйлера, см. лекцию 10) вычислить скорость ее изменения и новое состояние:

новое состояние := старое состояние + скорость · отрезок времени.



Формально эта запись выглядит так:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

или (в дискретной форме)

$$[x(t + \Delta t) - x(t)]/\Delta t = f(x(t))$$

и, окончательно,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t)) \cdot \Delta t.$$

Зная новое состояние и считая его уже достигнутым, то есть старым состоянием, используем ту же формулу (подставляя, конечно, в нее уже новые значения). И так продолжаем, прибавляя все новый отрезок времени, двигаясь во времени.

Итак, мы перешли к вопросу о методе расчета дифференциальных моделей. Методом решения дифференциальных уравнений, в общем случае, является интегрирование их по независимой переменной времени  $t$ . Простейшим методом численного интегрирования дифференциальных уравнений является метод Эйлера.

Обратите внимание. При вычислении по методу Эйлера необходимо вычислять значения всех параметров системы *параллельно*, так как производная в каждый момент времени отдельного параметра зависит как от значения самого параметра в данный момент времени, так и от значения другого параметра в этот момент времени.

Рассмотрим практически применение метода Эйлера для расчета процесса изменения температур тел системы. Зададим значения коэффициентов модели:  $K_{12} = K_{21} = 0.2$ ,  $K_{31} = 0.1$ ,  $K_{32} = 0.05$ ,  $K_{42} = 0.1$ . Зададим начальные условия системы (в момент времени  $t = 0$ ):  $X_1(0) = 30^\circ \text{C}$ ,  $X_2(0) = 70^\circ \text{C}$ ,  $X_3(0) = 22^\circ \text{C}$ ,  $X_4(0) = 15^\circ \text{C}$ . Выбираем шаг моделирования  $\Delta t$  равный, например, 0.2 с. Примем конечное значение времени моделирования за  $T_k = 4$  с.

Подставим значения коэффициентов:

$$X_1(t + \Delta t) = X_1(t) + [0.2 \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + 0.1 \cdot (22 - X_1(t))] \cdot \Delta t$$

$$X_2(t + \Delta t) = X_2(t) + [0.2 \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + 0.05 \cdot (22 - X_2(t)) + 0.1 \cdot (15 - X_2(t))] \cdot \Delta t$$

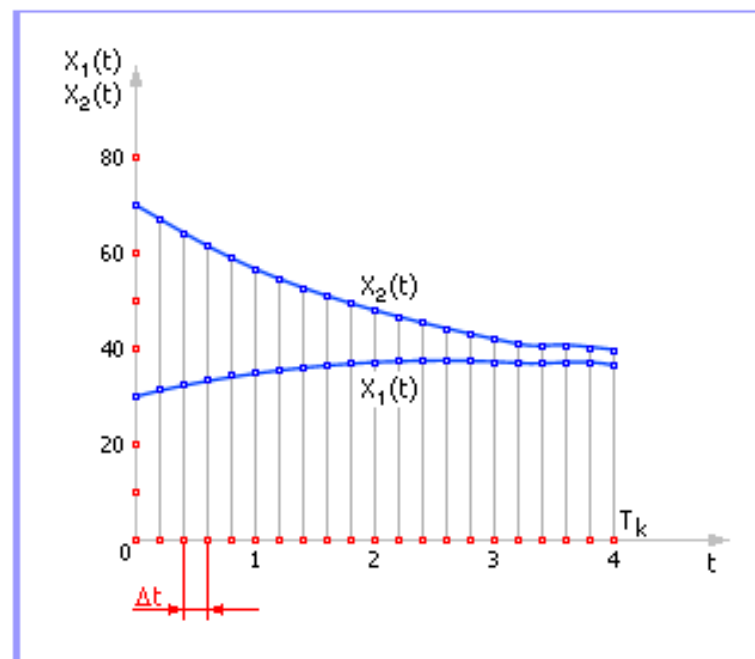
и приступаем к моделированию. Процесс моделирования и численные значения отражены в табл. 11.1.

Таблица 11.1. Таблица расчета изменения значений переменных системы во времени

$t$	$dX_1(t)/dt$	$dX_2(t)/dt$	$X_1(t)$	$X_2(t)$
0.0	7.20	-15.90	30	70
0.2	6.13	-14.50	31.44	66.82
0.4	5.18	-13.24	32.67	63.92
0.6	4.34	-12.10	33.70	61.27
0.8	3.60	-11.08	34.57	58.85

Во времени поведение системы будет выглядеть так, как показано на

рис. 11.8.



**Рис. 11.8. Расчетные траектории поведения системы тел в задаче теплопроводности**

Заметим, что на рис. 11.8 показана не вся траектория, а только ее часть. Рассчитайте всю траекторию, подумайте и ответьте на следующие вопросы:

- почему графики в итоге при большом времени рассмотрения стремятся к числу 18.5;
- почему значение переменной  $X_1$  сначала увеличивается, а потом падает;

- почему графики имеют переломы производных;
- что надо изменить в условиях задачи, чтобы график  $X_1$  все время убывал?

В зависимости от реализации «машинь», на которой автоматически будет имитироваться процесс, запись может выглядеть по-разному.

## Формальная математическая запись

Приведем ниже вариант формальной математической записи для случая открытой системы тел со слабым нагревателем.

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t))$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) + K_{52} \cdot (X_5(t) - X_2(t))$$

$$\frac{dX_3(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dX_4(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dX_5(t)}{dt} = (K \cdot U(t) - X_5(t))/L + K_{25} \cdot (X_2(t) - X_5(t))$$

$$X_1(0) = a$$

$$X_2(0) = b$$

$$X_3(0) = c$$

$$X_4(0) = d$$

$$X_5(0) = h$$

$$U(t) = f(t)$$

$$K_{12} = 0.2; K_{21} = 0.2; K_{31} = 0.1; K_{32} = 0.05; K_{42} = 0.1; K_{52} = 0.4; K_{25} = 0.4; K = 1;$$

$$L = 1$$

$$T_k = 4$$

При реализации на математической машине среды Stratum эта запись будет дополнена элементами (функциями) ввода и вывода информации и командами управления (например, «стоп»), а часть элементов будет спрятана (например, при задании начальных условий).

Иногда (когда это удобно) начальные условия могут быть помещены внутрь уравнений. Для этого в следующей записи мы воспользуемся дельта-функцией Дирака.

$$\underline{dX_1(t)/dt = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) + a \cdot \text{delta}(t)}$$

$$\underline{dX_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) + K_{52} \cdot (X_5(t) - X_2(t)) + b \cdot \text{delta}(t)}$$

$$\underline{dX_3(t)/dt = c \cdot \text{delta}(t)}$$

$$\underline{dX_4(t)/dt = d \cdot \text{delta}(t)}$$

$$\underline{dX_5(t)/dt = (K \cdot U(t) - X_5(t))/L + K_{25} \cdot (X_2(t) - X_5(t)) + h \cdot \text{delta}(t)}$$

$$\underline{U(t) := f(t)}$$

$$\underline{K_{12} := 0.2; K_{21} := 0.2; K_{31} := 0.1; K_{32} := 0.05; K_{42} := 0.1; K_{52} := 0.4; K_{25} := 0.4;}$$

$$\underline{K := 1;}$$

$$\underline{L := 1;}$$

$$\underline{T_k := 4}$$

$$\underline{t := t + \Delta t}$$

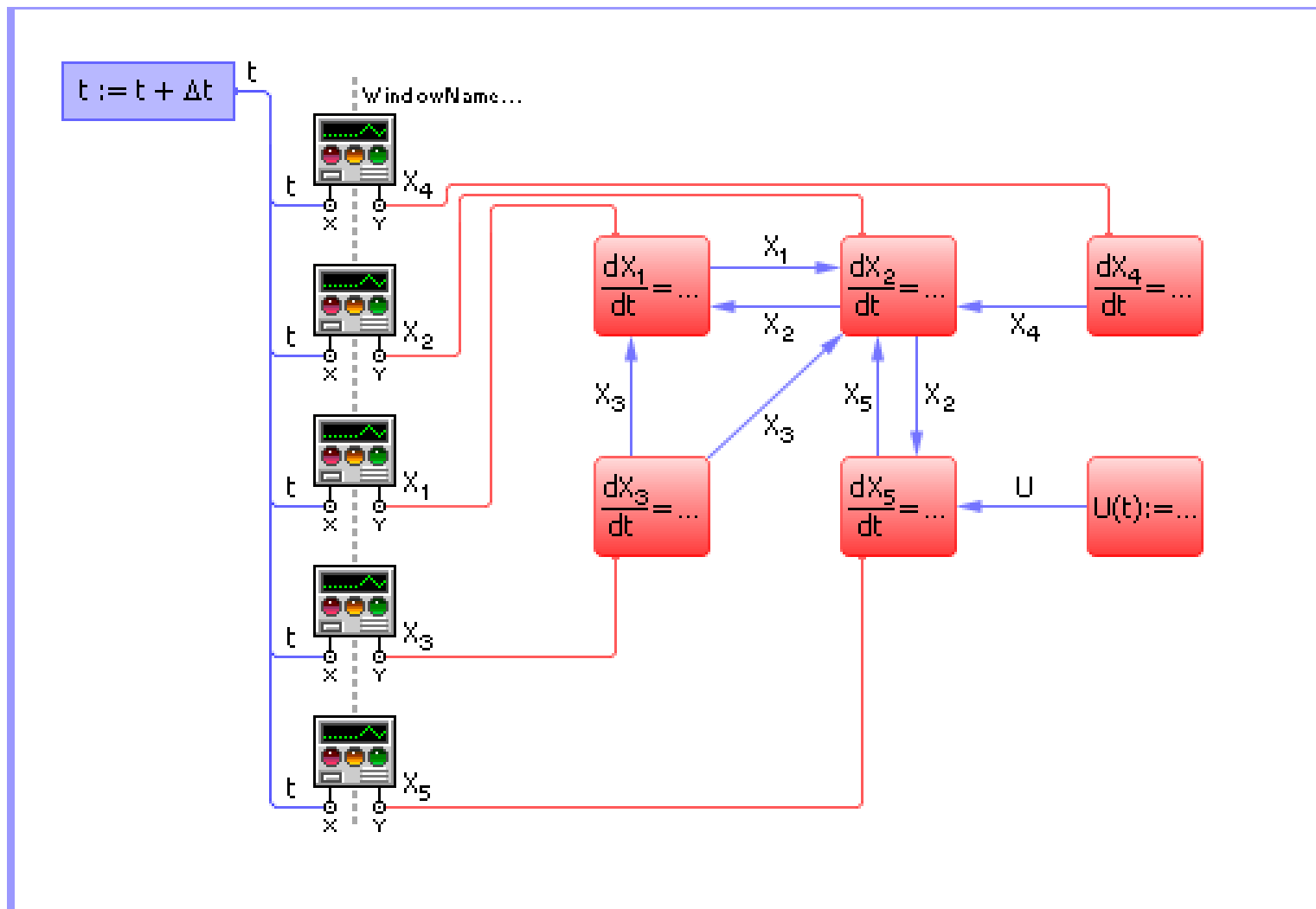
$$\underline{\text{osc2d}(T, X_1)}$$

$$\underline{\text{stop}(T > T_k)}$$



Напомним, что  $\text{osc2d}(T, X_1)$  — функция, рисующая на экране точку с координатами  $T$  и  $X_1$  для каждого момента времени. Выше данная функция приведена условно: в действительности надо использовать несколько функций для настройки окон, масштаба изображения, цвета, толщины, стиля линии и тому подобного. Подробно реализацию двухмерного осциллографа в среде «Stratum-2000» вы можете посмотреть в тексте имиджа `OSCspace2D`.

Приведенный выше вариант формальной математической записи подразумевает, что весь код заключен в рамках одного элемента (имиджа, если использовать термины среды «Stratum-2000»). Будет гораздо более наглядно, если распределить код по отдельным элементам, связав их между собой связями (см. **рис. 11.9**) — в этом случае структура проекта останется обозримой; кроме того, если потребуется изменить что-то в одном из блоков, то такой подход позволит не менять код в остальных блоках. Еще один плюс такого подхода — отдельные «кирпичики» схемы могут быть применены неоднократно в готовом виде в виде копии имиджа.

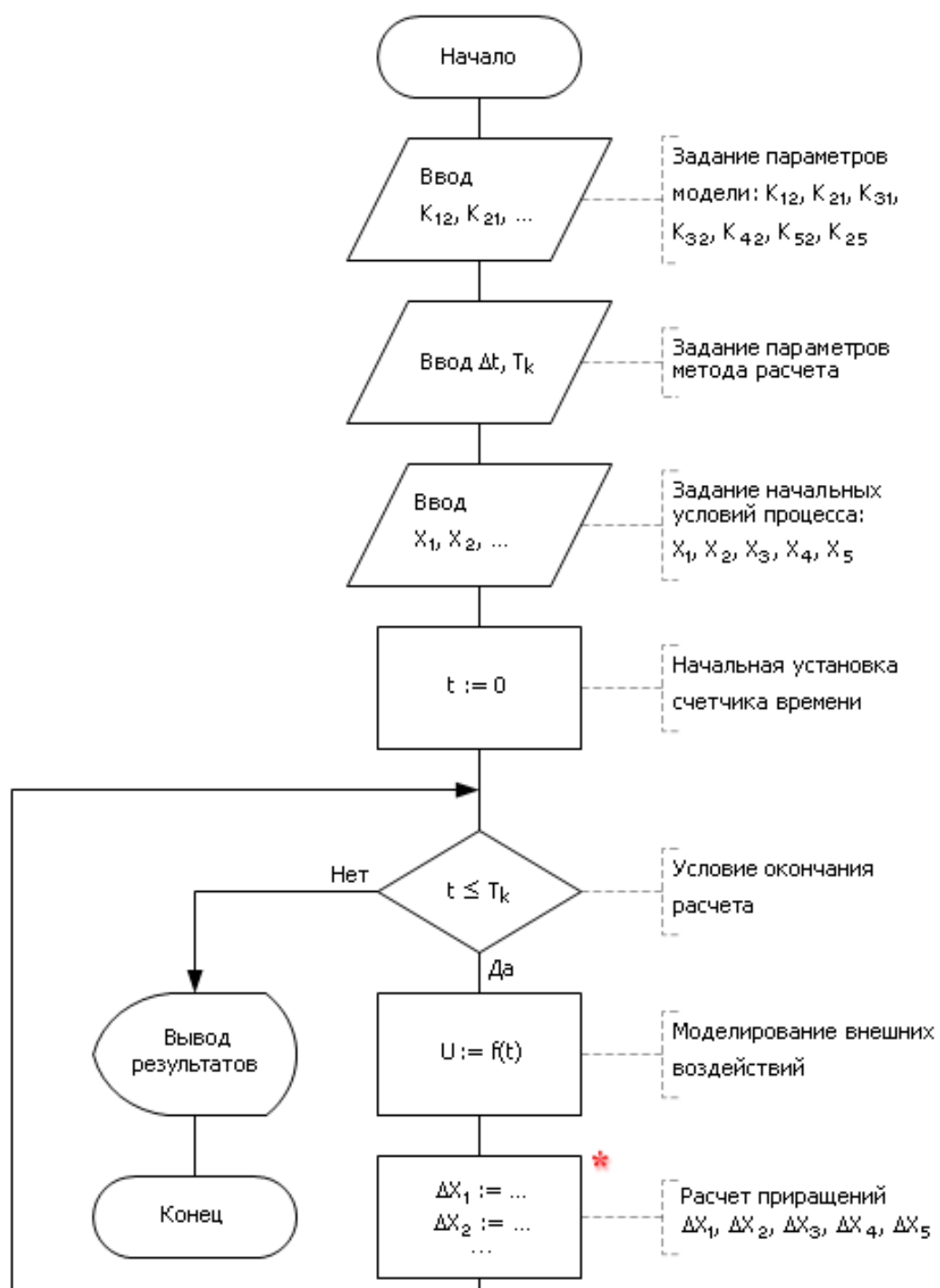


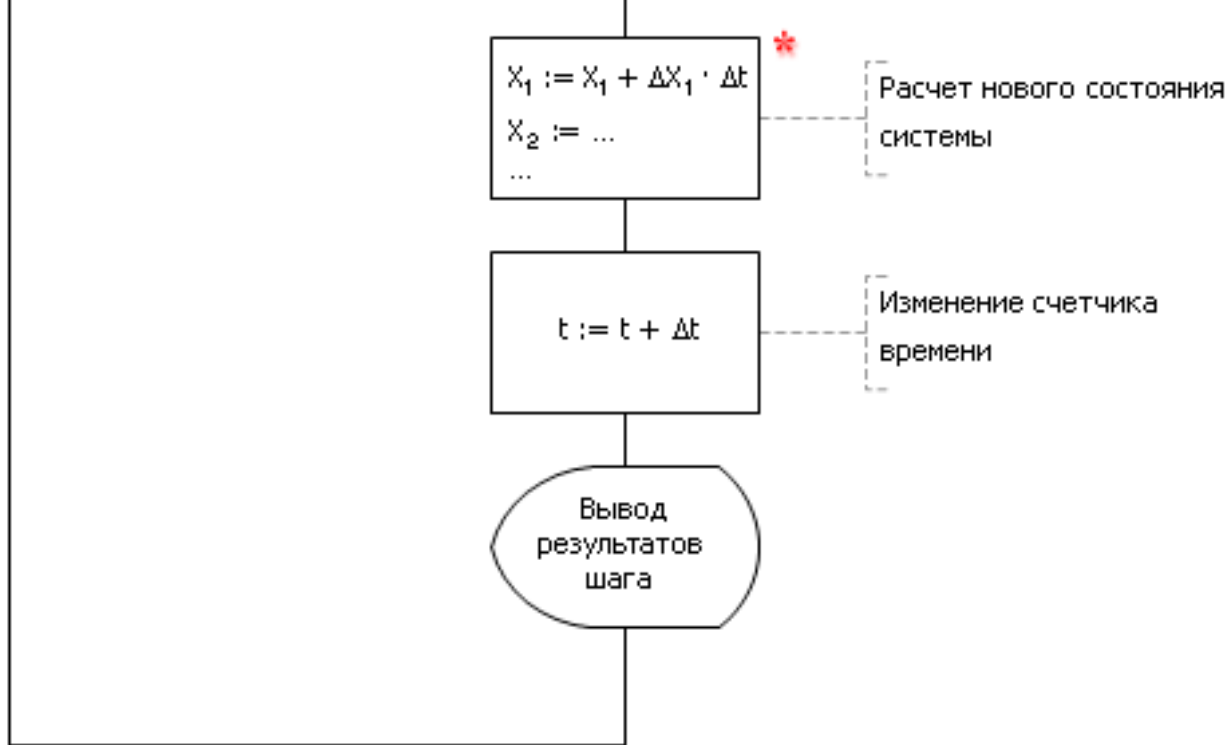
**Рис. 11.9. Схема проекта в среде Stratum-2000, реализующего полную модель теплопроводности системы тел с элементами интерфейса**



## Алгоритмическая реализация

В случае реализации на алгоритмической машине следует воспользоваться алфавитом алгоритмов: блоками начала и конца алгоритма, ввода-вывода информации, задания начальных условий, вычислительными блоками, блоками условия, конструкциями цикла. На **рис. 11.10** представлена блок-схема алгоритма, имитирующего теплообмен между телами.





\* Обратите внимание, что блок расчета приращений и блок расчета нового состояния системы разделены для того, чтобы обеспечить синхронизацию расчета. Случай, когда блоки совмещены, может давать неверные результаты, так как может возникнуть

**Рис. 11.10. Блок-схема алгоритма, имитирующего теплообмен между телами**

Заметьте, что для реализации нам понадобились следующие инструменты:

- устройства ввода информации (для задания параметров модели, параметров метода расчета, задания начальных условий процесса);
- устройство вывода информации;
- вычислительные блоки для реализации математических формул;
- цикл для имитации течения времени.

В теле цикла присутствуют:

- счетчик времени;
- условие выхода из цикла для контроля за временем моделирования;
- блок задания внешних воздействий;
- блок расчета приращений;
- блок расчета нового состояния системы;
- блок вывода текущих состояний.

В той или иной мере вышеназванные блоки обязательно присутствуют в каждом алгоритме данного типа.

Итак, построена **система обыкновенных дифференциальных уравнений в каноническом виде от единственной независимой переменной времени.**

**СИСТЕМА** — потому что в наличии имеется несколько уравнений.

**ОБЫКНОВЕННЫХ** — производная использована обычная, а не частная, так как использована одна переменная времени.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ** — в уравнении встречается выражение производной  $dX/dt$ .

**УРАВНЕНИЙ** — в выражениях имеется знак уравнивания.

**В КАНОНИЧЕСКОМ ВИДЕ** — производная не стоит под знаком какой-либо функции, встречается один раз и только в левой части уравнения. В правой части какие-либо производные отсутствуют.

**ЕДИНСТВЕННОЙ** — переменная, по которой берут производную, одна во всех уравнениях (время  $t$ ).

**НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ** — переменная  $t$  не зависит более ни от каких переменных и изменяется сама по себе.

**ЛЮБУЮ ДИНАМИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ МОЖНО ПРИВЕСТИ К ДАННОМУ ВИДУ!**