2.6. Моделирование обнаружения сдвига при неизвестной дисперсии.

Моделирование обнаружения сдвигов при неизвестной дисперсии проведено для шумового поля, которое было рассмотрено в подразд. 2.2. Это поле с несколько другими параметрами изображено на рис. 2.31. Здесь $m_0 = 0$ в первой и третьей области, $m_1 = 7{,}753$ во второй области, а в четвертой $m_2 = -7{,}753$. Дисперсия гауссовского шума равна $\sigma_0^2 = 100$. На рис. 2.32 приведены результаты накопления поля в скользящем окне 3×3, таким образом дефлекция равна $d_N = \pm 2{,}326$.

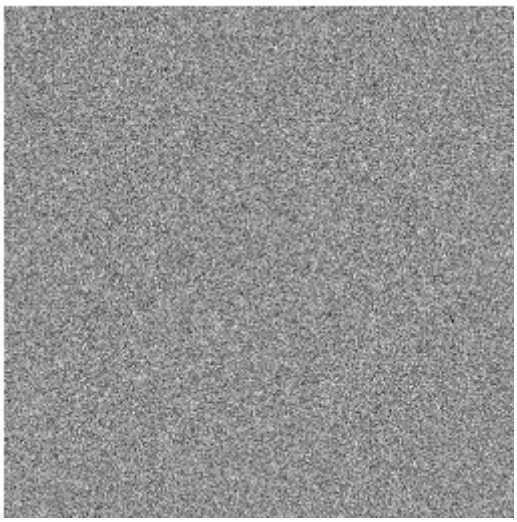


Рис. 2.31 Шумовое поле, содержащее сдвиги математического ожидания
N1_Ch2_3x3_Student_0.mcd

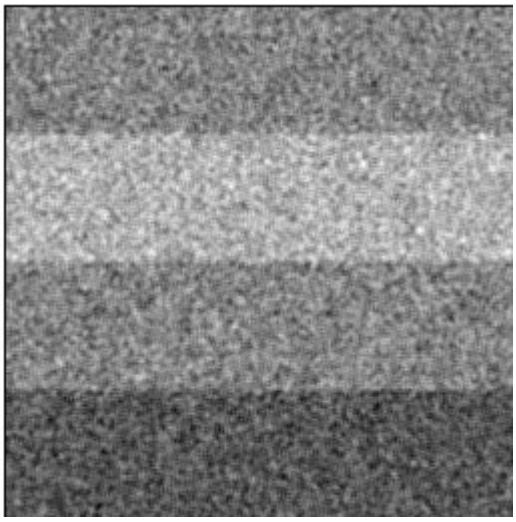
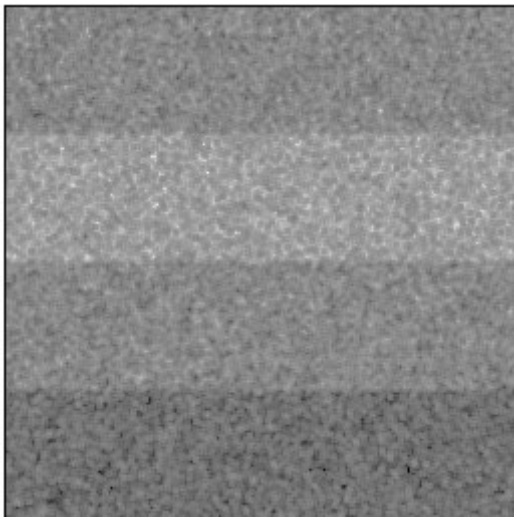


Рис. 2.32 Результат линейного накопления в скользящем окне 3x3
N1_Ch2_3x3_Student_0.mcd

На рис. 2.33 приведен результат формирования статистики Стьюдента $\bar{y}/s$ в скользящем окне 3×3.



N1_Ch_3x3_Stud_0.mcd

Рис. 2.33. Результат моделирования статистики Стьюдента в скользящем окне 3x3 ***N1_Ch2_3x3_Student_0.mcd***

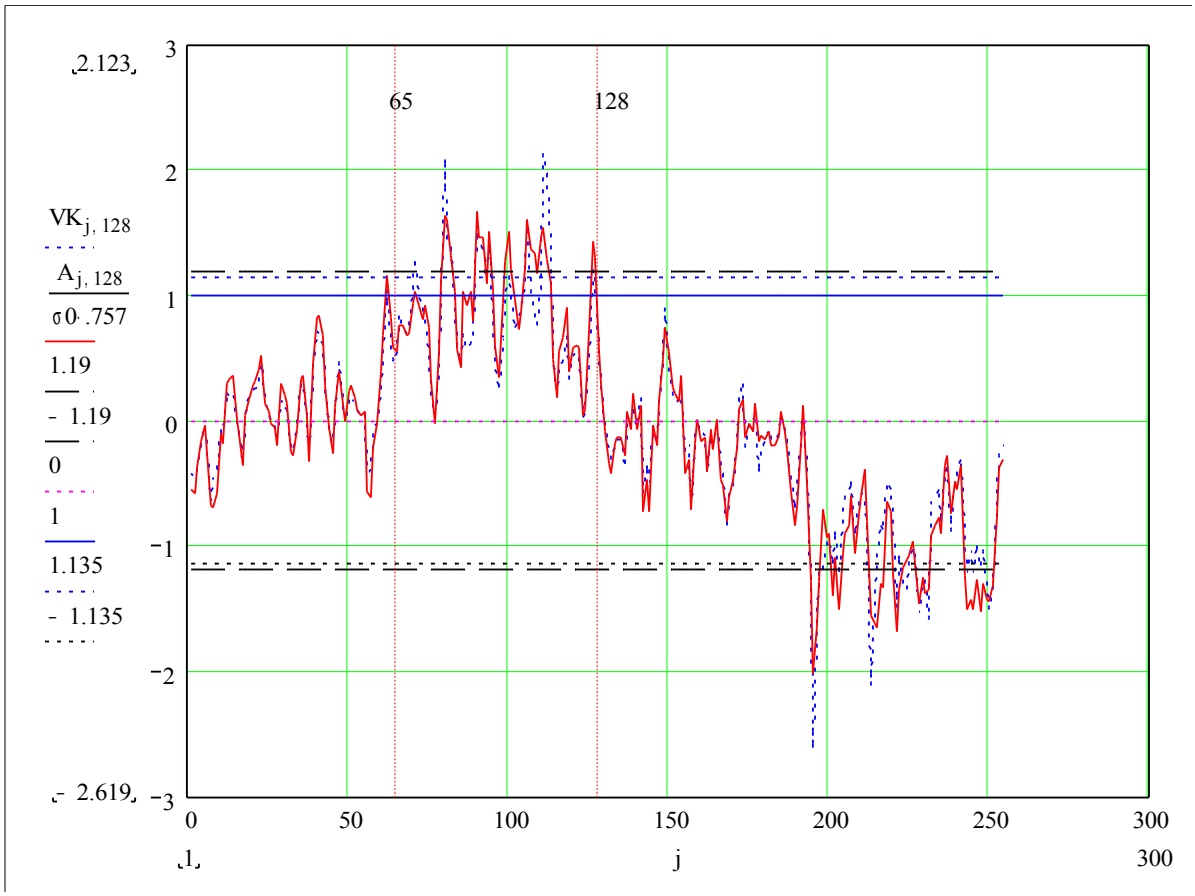


Рис. 2.34. Вертикальное сечение полей после линейного накопления и статистики Стьюдента

N1_Ch_3x3_Stud_0.mcd

На рис. 2.34 сплошной линией изображен процесс изменения поля $\bar{y}/\sigma_0$ после линейного накопления в скользящем окне 3×3 при движении по вертикали сверху вниз. Пунктиром показано соответствующее изменение статистики Стьюдента $\bar{y}/s$. Для выравнивания порогов обнаружения процесс $\bar{y}/\sigma_0$ умножен на масштабирующий коэффициент $1{,}024/0{,}775 = 1{,}321$, который поясняется далее.

Существенные флуктуации статистики Стьюдента $\bar{y}/s$ по сравнению с $\bar{y}/\sigma_0$ влекут снижение эффективности обнаружения, что является платой за инвариантность алгоритма по отношению к дисперсии шума σ_0^2.

Горизонтальная сплошная линия отмечает фиксированный односторонний порог $1{,}024$, который обеспечивает вероятность ложной тревоги $F = 10^{-2}$ для обеих статистик. Две пунктирные линии $\pm\, 0{,}86\cdot 1{,}321 = \pm\, 1{,}135$ соответствуют фиксированному двухстороннему порогу для $\bar{y}/\sigma_0$, а две штриховые линии $\pm\, 1{,}19$ двустороннему порогу для статистики Стьюдента.

На рис. 2.35 и 2.36 приведены результаты сравнения двух статистик с односторонним порогом.

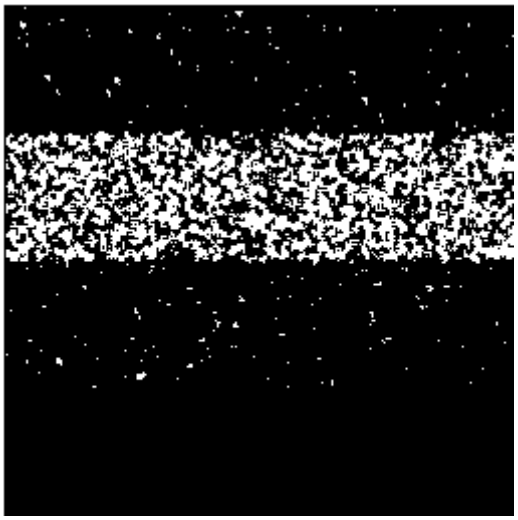


Рис. 2.35. Результат сравнения линейной статистики с односторонним порогом
N1_Ch2_3x3_Student_0.mcd

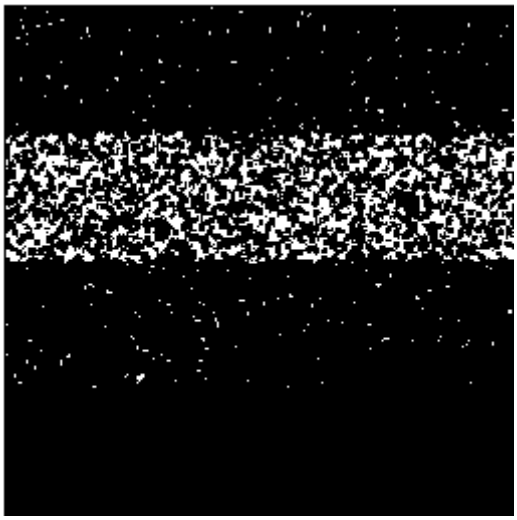


Рис. 2.36. Результат сравнения статистики Стьюдента с односторонним порогом

N1_Ch2_3x3_Student_0.mcd

На рис. 2.35 представлен алгоритм с фиксированным порогом $\bar{y}/\sigma_0 \geq Y_{NP}/\sigma_0$, где $Y_{NP}/\sigma_0 = 0{,}775$, который обеспечивает вероятность ложной тревоги $F = 10^{-2}$ и при $d_N = 2{,}326$ (в верхней половине поля) дает теоретическую вероятность правильного обнаружения $D = 0{,}5$, что подтверждается моделированием.

На рис. 2.36 представлен алгоритм, использующий статистику Стьюдента $\bar{y}/s \geq t_{F,8}/\sqrt{8}$, где $t_{F,8} = 2{,}896$ и $t_{F,8}/\sqrt{8} = 1{,}024$. В этом случае $F = 10^{-2}$, но оценка вероятности правильного обнаружения (по верхней половине поля) равна только $\tilde{D}_1 = 0{,}35$. Значения относительных порогов использованы для выравнивания масштабов на рис. 2.34.

Отрицательный сдвиг при $d_N = -2{,}326$ односторонними порогами не обнаруживается. Несмещенность обеспечивается двусторонними порогами.

Работа двусторонних порогов показана на рис. 2.37 и 2.38. Линейная статистика при данной дефлекции дает оценку вероятности правильного обнаружения по полю $\tilde{D} = 0{,}393$, а статистика Стьюдента – только $\tilde{D} = 0{,}234$.

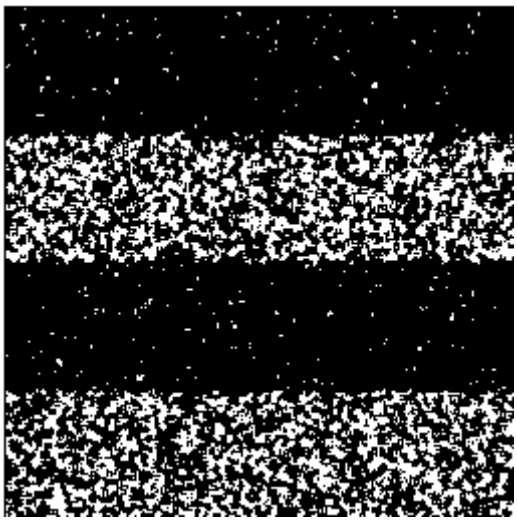


Рис. 2.37Результат сравнения линейной статистики с двусторонним порогом
N1_Ch2_3x3_Student_0.mcd

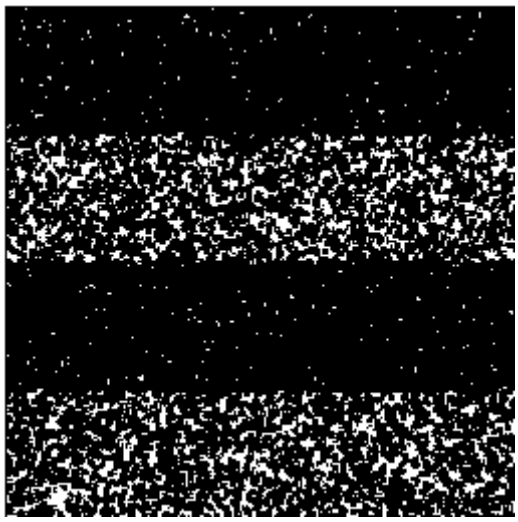


Рис. 2.38 Результат сравнения статистики Стьюдента с двусторонним порогом
N1_Ch2_3x3_Student_0.mcd

Потери уменьшаются с увеличением размеров скользящего окна. Другой путь уменьшения потерь представляет использование двухвыборочных алгоритмов.

Преимущество алгоритма, использующего статистику Стьюдента, перед алгоритмом с фиксированным порогом проявляется в случаях существенных изменений дисперсии шума σ_0^2. На рис. 2.39 представлена работа алгоритма $|\bar{y}/\sigma_0| \geq 1{,}03$ в случае двукратного уменьшения дисперсии, а на рис. 2.40 – в случае двукратного увеличения дисперсии. При этом сохранялось постоянное значение дефлекции $d_N = 4{,}165$.

В первом случае вероятность правильного обнаружения уменьшилась до 0,09. Во втором случае произошло увеличение вероятности ложной тревоги до 0,07. В обоих случаях алгоритм, использующий статистику Стьюдента сохранял свои характеристики (Рис. 2.38) благодаря свойству инвариантности t - статистики.

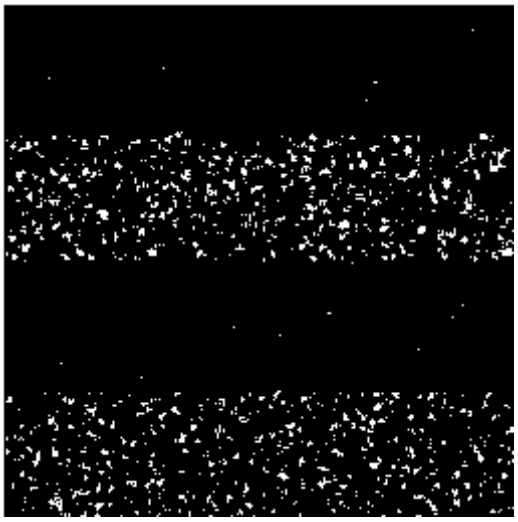


Рис. 2.39. Работа алгоритма $|\bar{y}/\sigma_0| \geq 1{,}03$ при двукратном уменьшении дисперсии

N1_Ch2_3x3_Student_2.mcd

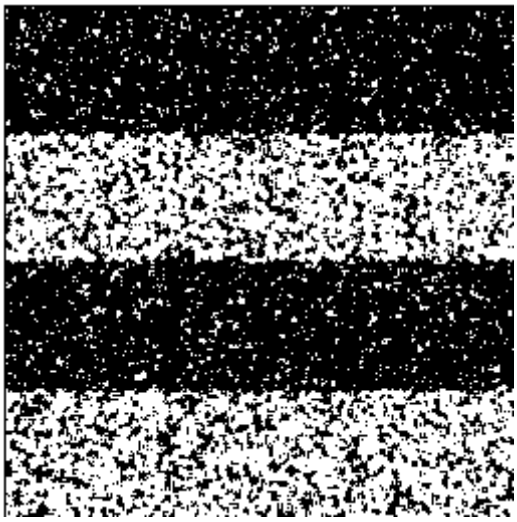


Рис. 2.40. Работа алгоритма $|\bar{y}/\sigma_0| \geq 1{,}03$ при двукратном увеличении дисперсии

N1_Ch2_3x3_Student_1.mcd