1.8. Обнаружение изменения дисперсии и сдвига гауссовского распределения при общей альтернативе

Гипотеза $H_1^{(2)}$.

Обнаружение изменения дисперсии при отсутствии сдвига

При $\Delta = 0$, т. е. при равенстве математических ожиданий ($m_1 = m_0$), значение $d = 0$, и для оптимального обнаружения изменения дисперсии используется статистика s_0^2, включающая *квадратичный* накопитель $\sum y_k{}^2$. Алгоритм обнаружения *увеличения* дисперсии $(\gamma > 0)$ имеет вид $u_2 \geq U_2$, где $u_2 = Ns_0^2 / \sigma_0^2 = \sum (y_k - m_0)^2 / \sigma_0^2$, а порог включает указанные параметры и зависит от выбранного критерия оптимальности.

Статистика u_2 имеет при H_0 центральное χ^2-распределение с N степенями свободы, поэтому порог U_2 представляет соответствующую процентную точку этого распределения (прил. 2). При гипотезе $H_1^{(2)}$ центральное χ^2- распределение с N степенями свободы будет иметь статистка $u_2/(1+\gamma)$. Характеристика обнаружения изменения дисперсии в зависимости от γ представлена на рис. 1.12 сплошной линией для $F = 10^{-2}$, $N = 10$. Пороговые значения $\gamma^{(D,F)}$ для $F = 10^{-2}$ и различных N приведены в табл. 1.

Таблица 1

N	1	2	5	10	20	50	100
$\gamma^{(0,5)}$	13,576	5,642	2,466	1,484	0,943	0,5435	0,367
$\gamma^{(0,9)}$	418	42,6	8,354	3,765	2,019	1,02	0,649

Дефлекция статистики u_2 равна $\gamma\sqrt{N/2}$, однако часто в качестве параметра обнаружения используется величина $N\gamma$, которая определена в [3] как «сила сигнала». В этом случае пороговые значения $N\gamma^{(D,F)}$ оказываются зависящими от N, как показано на рис. 1.13, где нижняя линия соответствует уровню $D = 0{,}5$, а верхняя – уровню $D = 0{,}9$.

Имеет место оптимизационная задача, связанная с определением числа выборок, обеспечивающего минимум порогового зна-

чения. Эта задача соответствует *задаче оптимального разнесения* в системах связи, а также *задаче оптимальной энергии в импульсе* в радиолокации [3].

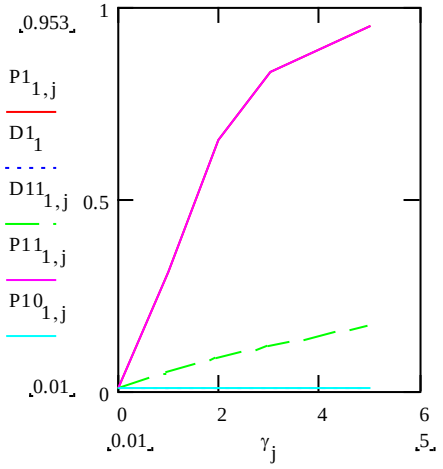


Рис. 1.12
Характеристики обнаружения изменения дисперсии для квадратичного и линейного алгоритмов, $N = 10$, $F = 10^{-2}$, $d = 0$

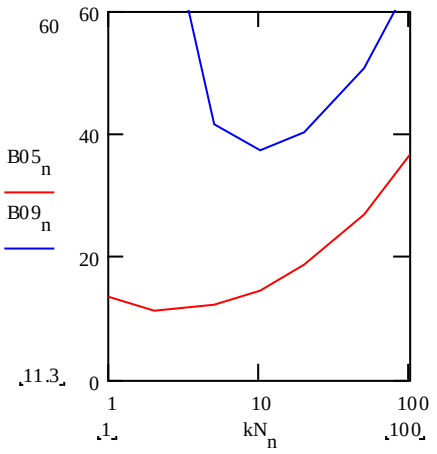


Рис. 1.13
Зависимость пороговых значений $N\gamma^{(0,5)}$ (нижняя кривая) и $N\gamma^{(0,9)}$ (верхняя кривая) от числа выборок N для $F = 10^{-2}$

Если знак изменения дисперсии при альтернативе $H_1^{(2)}$ неизвестен, то односторонний алгоритм оказывается *смещенным*. Несмещенный алгоритм проверки H_0 против сложной альтернативы $\gamma \neq 0$ будет иметь два порога.

При отсутствии сдвига плотности и при $\gamma \neq 0$ линейный накопитель слабо реагирует на увеличение масштаба и малоэффективен при гипотезе $H_1^{(2)}$. Его характеристика $D = 1 - \Phi(c_F / \sqrt{(1+\gamma)})$ в зависимости от $\gamma > 0$ приведена штриховой линией на рис. 1.12.

Гипотеза H_1.

Обнаружение известных значений сдвига и изменения дисперсии

В этом случае оптимальным является взвешенный линейно-квадратичный алгоритм $d_N u_1 + (\gamma/2) u_2 \geq k_1$. Если известно, что $\gamma \neq 0$ (дисперсии различны), то при любом сдвиге Δ оптимальный алгоритм можно переписать в виде [6]:

$$\sum_{k=1}^{N} (y_k - \rho)^2 \geq k_2,$$

где $\rho = m_0 - \Delta/\gamma$, $\qquad k_2 = \sigma_1^2 k_T/\gamma + N\rho^2 - N[m_0^2 - (m_1^2 - m_0^2)/\gamma]$.

При гипотезе H_0 случайные величины $y_k - \rho$ нормальны с математическими ожиданиями Δ/γ и дисперсиями σ_0^2. Величина $u = (1/\sigma_0^2)\sum_{k=1}^{N}(y_k - \rho)^2$ имеет нецентральное χ^2-распределение $\chi_N'^2(a_0)$ с N степенями свободы и параметром нецентральности $a_0 = Nd^2/\gamma^2$. При гипотезе H_1 математические ожидания случайных величин $y_k - \rho$ становятся равными $\Delta(\gamma+1)/\gamma$, а дисперсии – равными $\sigma_1^2 = \sigma_0^2(1+\gamma)$. Величина $u/(1+\gamma)$ будет иметь распределение $\chi_N'^2(a_1)$, где новый параметр нецентральности $a_1 = Nd^2(\gamma+1)/\gamma^2$.

Таким образом, задача сводится к различению двух одномерных *нецентральных* χ^2*-распределений* (или двух нецентральных Γ-распределений) с $N/2$ степенями свободы и разными параметрами нецентральности.

Нецентральное распределение $\chi_N'^2(a)$ с приемлемой для практики точностью можно аппроксимировать центральным [26], для которого имеются обширные таблицы. Пусть χ_f^2 есть центральное распределение с f степенями свободы. Если $c\chi_f^2$ имеет те же самые математическое ожидание и дисперсию, что и $\chi_N'^2(a)$, то $c = \dfrac{N+2a}{N+a}$, $f = \dfrac{(N+a)^2}{N+2a}$. После такой аппроксимации получаем задачу различения двух одномерных *центральных* χ^2-распределений с разными степенями свободы.

При гипотезе H_0 статистика u аппроксимируется статистикой $c_0\chi^2_{f_0}$, которая сравнивается с порогом Неймана–Пирсона U_{NP}, пропорциональным квантили центрального χ^2-распределения с f_0 степенями свободы. При гипотезе H_1 статистика аппроксимируется величиной $(1+\gamma)c_1\chi^2_{f_1}$. Значения c_0, f_0, c_1, f_1 вычисляются по вышеприведенным формулам, куда подставляются a_0 и a_1 соответственно.

Сплошная линия 1 на рис. 1.14 построена этим способом для оптимального линейно-квадратичного алгоритма $u \geq U_{NP}$ для $N=10$, $\gamma=1$. Эти характеристики можно сравнить с характеристиками линейного и квадратичного алгоритмов.

Сравнение характеристик алгоритмов

Характеристика обнаружения линейного алгоритма, использующего статистику u_1, приведена на рис. 1.14 пунктирной линией 4 для случая $\gamma=0$, $N=10$. Если наряду со сдвигом меняется дисперсия, т. е. $\gamma \neq 0$, то вероятность правильного обнаружения линейного алгоритма дается формулой $D=\Phi((d_N-c_F)/\sqrt{1+\gamma})$. С увеличением γ характеристики этого алгоритма ухудшаются в области $D>0{,}5$, что отражает штриховая линия 5, построенная для $\gamma=1$. Пороговые значения дефлекции равны $d_N^{(D,F)}=c_{1-D}\sqrt{1+\gamma}+c_F$, и при $\gamma>0$ увеличиваются с ростом γ.

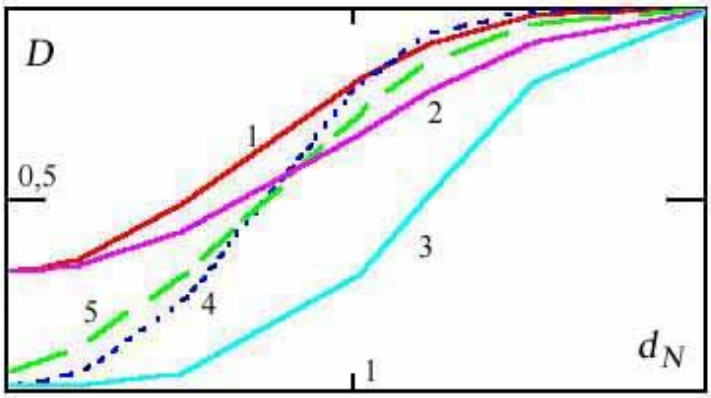


Рис. 1.14
Характеристики обнаружения в общей гауссовской задаче

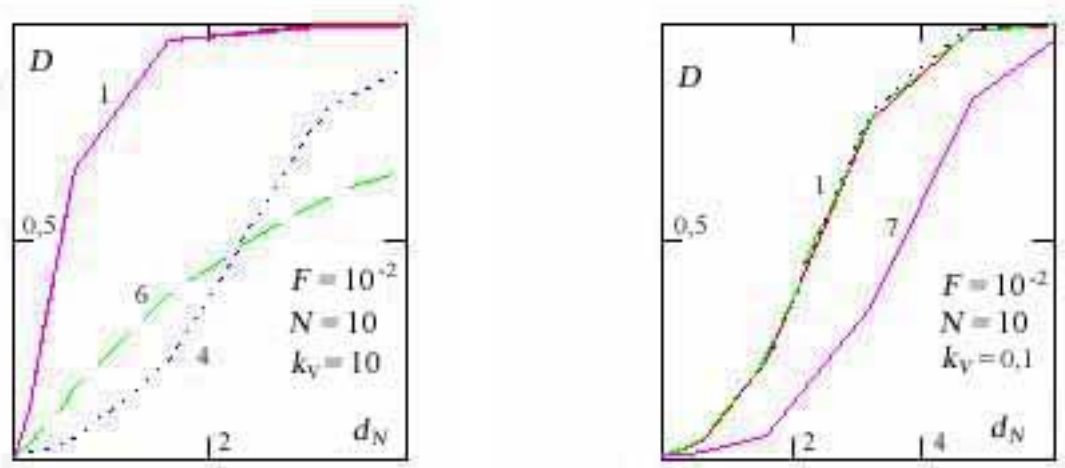
В случае статистики u_2 одновременное увеличение сдвига и масштаба повышает вероятность обнаружения по сравнению со случаем $d=0$, так как величина $u_2/(1+\gamma)$ приобретает нецентральное χ^2- распределение $\chi'^2_N(a)$ с N степенями свободы и параметром нецентральности $a=Nd^2/(1+\gamma)$. Задача обнаружения при этом может быть записана в виде $H_0: a=0$, $H_1: a>0$.

Однако этот алгоритм несколько уступает линейно-квадратичному. Поэтому соответствующая линия 2 (рис.1.14) располагается ниже линии 1. Наличие одного сдвига без изменения дисперсии резко снижает эффективность обнаружения квадратичного алгоритма по сравнению с линейным. Характеристика обнаружения алгоритма $u_2 \geq U_2$ для $\gamma=0$ изображена линией 3. Тем не менее, этот алгоритм оказывается несмещенным и работоспособен при произвольном знаке сдвига.

Анализ характеристик обнаружения для общего линейно-квадратичного алгоритма в случае одновременного увеличения математического ожидания и дисперсии показывает, что существенные выигрыши в эффективности достигаются в тех случаях, когда хотя бы один из полезных параметров уменьшается и принимает «подпороговые» значения. При этом линейная статистика u_1 мало эффективна при увеличении дисперсии, а квадратичная статистика u_2 плохо обнаруживает сдвиги математического ожидания.

Представляют интерес случаи функциональной связи математического ожидания и дисперсии. Пусть математическое ожидание положительно и дисперсия пропорциональна математическому ожиданию $\sigma^2=cm$, где c есть коэффициент пропорциональности, $c>0$. Такая связь характерна, например, для пуассоновских наблюдений (см. [25]). В этом случае γ пропорционален начальному коэффициенту вариации $k_v=\sigma_0/m_0$, т. е. $\gamma(d)=d\cdot k_v$. Чем больше $k_v=\sqrt{c/m_0}$, тем быстрее увеличивается γ с ростом дефлекции d. На рис. 1.15 приведены характеристики оптимального алгоритма обнаружения при $N=10$ для значений $k_v=10$ и $k_v=0{,}1$ соответственно.

В первом случае очевидно преимущество квадратичного накопителя по сравнению с линейным. Характеристика квадратичного алгоритма совпадает с характеристикой оптимального алго-



ритма (рис. 1.15, линия 1). Характеристика линейного алгоритма приведена штриховой линией 6.

Рис. 1.15 Характеристики обнаружения
при линейной связи среднего и дисперсии

Пунктиром 4 на рис. 1.15 дана характеристика линейного алгоритма при отсутствии изменения дисперсии ($\gamma = 0$). Сравнение показывает значительное негативное влияние увеличения γ на характеристики линейного алгоритма.

Во втором случае линейный накопитель близок к оптимальному обнаружителю (линия 1), а квадратичный накопитель дает худший результат (линия 7). Таким образом, в зависимости от начального коэффициента вариации лучшей оказывается линейная или квадратичная структура.

Приведенный анализ гауссовской задачи при независимых наблюдениях показывает влияние значений полезных параметров Δ и γ как на структуру, так и на характеристики рассмотренных алгоритмов. Это указывает на существенность и значимость этих параметров. Значения этих параметров определяют влияние каждой из двух достаточных статистик (линейной и квадратичной) на эффективность обнаружения.

Приближенные формулы для пороговых значений $\gamma^{(D,F)}$ статистики $u_2 = Ns_0^2 / \sigma_0^2 = \sum (y_k - m_0)^2 / \sigma_0^2$

При $N > 100$ можно указать приближенные формулы для пороговых значений $\gamma^{(D,F)}$. Они используют гауссовскую аппроксимацию $N(m = N, \sigma^2 = 2N)$ для распределения χ_N^2 при альтернативе $H_1^{(2)}$. Если задано N и порог $U_2(N)$ выбран из таблицы П2.2 в прил. 2, то формулы $\gamma^{(0,5)} \approx U_2(N)/N - 1$ и $\gamma^{(0,9)} \approx U_2(N)/(N - c_{1-D}\sqrt{2N}) - 1$ позволяют приближенно вычислить пороговые значения $\gamma^{(D,F)}$ для ВПО $D = 0{,}5$ и $D = 0{,}9$ соответственно.

Например, для $F = 10^{-2}$ и $N = 100$ получаем $\gamma^{(0,5)} \approx 0{,}358$ вместо табличного значения 0,367, и $\gamma^{(0,9)} \approx 0{,}658$ вместо табличного значения 0,649 (Табл. 1).

В случае общей альтернативы H_1 используется гауссовская аппроксимация $N(m = N + a, \sigma^2 = 2N + 4a)$ для нецентрального распределения $\chi_N'^2(a)$. Теперь $(\gamma + d^2)^{(0,5)} \approx U_2(N)/N - 1$, где определяется пороговое значение для суммы параметров обнаружения $\gamma + d^2$.

Очевидно, что квадрат сдвига и изменение дисперсии можно в данном случае обменивать друг на друга для достижения требуемых характеристик обнаружения.

Можно грубо определить пороговые размеры выборки $N^{(0,5,F)} \approx U_2/(1+\gamma)$, при которых достигается ВПО $D = 0{,}5$. В частности, для $F = 10^{-2}$ при $\gamma = 0{,}367$ и $d = 0$ получаем $N^{(0,5)} \approx 99$ вместо значения 100, которое использовалось в таблице центрального распределения χ^2.

В случае общей альтернативы H_1 пороговые размеры выборки для $D = 0{,}5$ в первом приближении равны $N^{(0,5,F)} \approx U_2/(1 + d^2 + \gamma)$.