2.5. Обнаружение сдвига при неизвестной дисперсии. Равномерно наиболее мощный инвариантный, несмещенный и подобный алгоритм

Рассмотрим гауссовскую задачу обнаружения сдвига при независимых наблюдениях [1]: проверяется сложная гипотеза $H_0 : y_k \sim N(m_0, \sigma_0^2)$ против сложной альтернативы $H_1^{(1)} : y_k \sim N(m_1, \sigma_0^2)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где математические ожидания m_0 и m_1 известны, а значение σ_0^2 не определено. Параметр $\Delta = m_1 - m_0$ является полезным, а σ_0^2 – мешающим. Оба параметра считаются неслучайными.

При известных параметрах из отношения правдоподобия следует алгоритм обнаружения $\Delta \bar{y} > k'_T$, где $k'_T = \sigma_0^2 \ln \Lambda_T / N + (m_1^2 - m_0^2)/2$. При гипотезе $H_1^{(1)}$ статистика $\bar{y} = \sum y_k / N$ достаточна для полезного параметра Δ. Мешающий параметр σ_0^2 является существенным [1] как в случае байесовского критерия оптимальности (за исключением случая $\Lambda_{ML} = 1$ для критерия максимального правдоподобия), так и в случае критерия Неймана–Пирсона, где при $\Delta > 0$ порог для алгоритма $\bar{y} \geq Y_{NP}$ равен $Y_{NP} = m_0 + c_F \sigma_0 / \sqrt{N}$.

Для устранения влияния мешающего параметра σ_0 используем концепцию *инвариантности*. Известно, что $s^2 = \sum (y_k - \bar{y})^2 / N$ есть эффективная оценка неизвестной дисперсии σ_0^2. Она инвариантна к сдвигам выборки, поэтому ее распределение не зависит от изменений сдвига. Случайная величина $\chi_\nu^2 = s^2 N / \sigma_0^2 = \sum (y_k - \bar{y})^2 / \sigma_0^2$ имеет χ^2–распределение с $\nu = N - 1$ степенями свободы. Рассмотрим статистику $v_1 = (\bar{y} - m_0)/\sqrt{s^2}$, инвариантную относительно изменений масштаба наблюдений. Ее распределение не зависит от дисперсии σ_0^2, однако она сохраняет чувствительность к сдвигу, и ее можно использовать для обнаружения этого сдвига. Хотя существует множество других инвариантов относительно масштаба, далее будет показано, что v_1 является в определенном смысле лучшей среди них для решения задачи обнаружения.

При отсутствии полезного сигнала (сдвига) среднее арифметическое $\bar{y} \sim N(m_0, \sigma_0^2 / N)$, а случайная величина $u_1 = (\bar{y} - m_0)\sqrt{N} / \sigma_0$ имеет стандартное гауссовское распределение $u_1 \sim N(0,1)$. Отношение $t = u_1 / \sqrt{\chi_\nu^2 / \nu}$ определяет хорошо известную t-

статистику Стьюдента, распределение которой табулировано [5]. Нетрудно видеть, что $t = \sqrt{N-1}(\bar{y} - m_0)/s = v_1\sqrt{N-1}$, поэтому рассматриваемый инвариантный алгоритм обнаружения сдвига может формировать t-статистику и иметь односторонний порог $t \geq t_{F,\nu}$ для положительного сдвига или двусторонний порог $|t| \geq t_{F/2,\nu}$ для сдвига с неизвестным знаком. Здесь $t_{F,\nu}$ – фиксированный порог, который определяется заданной вероятностью ложной тревоги F и равен $100F$-процентной точке распределения Стьюдента с $\nu = N-1$ степенями свободы [1, 8, 9], а $t_{F/2,\nu}$ есть $100(F/2)$-процентная точка.

Плотности вероятности t-распределения Стьюдента приведены на рис. 2.27 для $\nu = 2$ (линия 1), $\nu = 5$ (линия 2), $\nu = 20$ (линия 3).

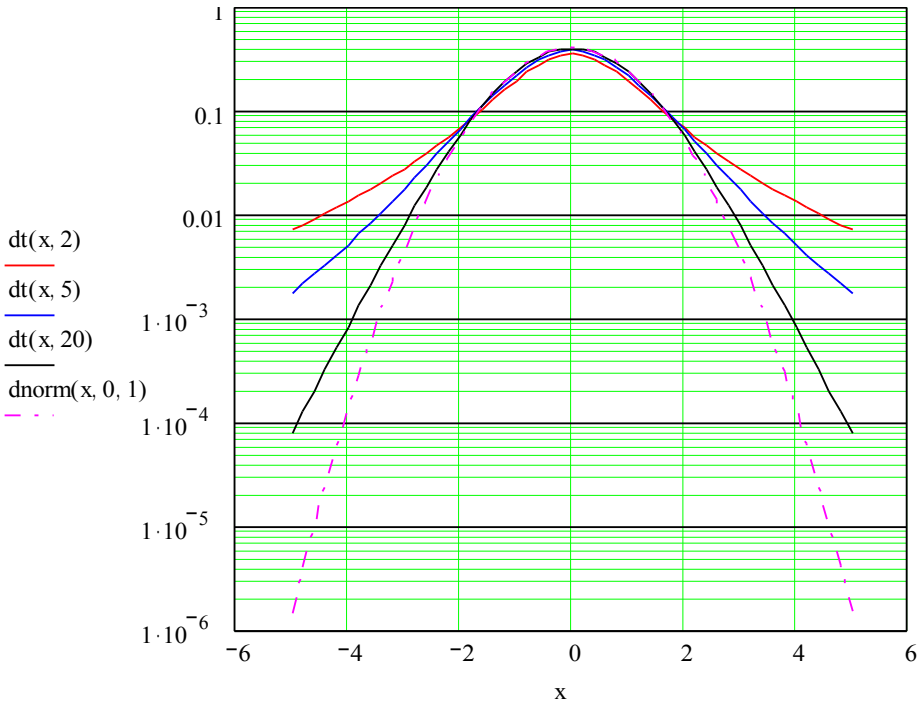

Рис. 2.27 Плотности вероятности для распределения Стьюдента

Плотности симметричны и стремятся к стандартной гауссовской плотности при увеличении числа степеней свободы (штрихпунктирная линия). При малых степенях свободы плотности имеют более «тяжелые» хвосты, чем гауссовская, что влечет бóльшие вероятности ложной тревоги для тех же значений порогов. Процентные точки $t_{F,\nu}$ и $t_{F/2,\nu}$ больше, чем соответствующие значения c_F и $c_{F/2}$ для гауссовского распределения. Они приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

$\nu = N - 1$	$F = 10^{-2}$	$F = 10^{-3}$	$F = 10^{-4}$
8	$t_F = 2{,}896$ $t_{F/2} = 3{,}355$	$t_F = 4{,}501$ $t_{F/2} = 5{,}041$	$t_F = 6{,}442$ $t_{F/2} = 7{,}12$
48	$t_F = 2{,}407$ $t_{F/2} = 2{,}682$	$t_F = 3{,}269$ $t_{F/2} = 3{,}505$	$t_F = 4{,}027$ $t_{F/2} = 4{,}243$
80	$t_F = 2.374$ $t_{F/2} = 2.639$	$t_F = 3.195$ $t_{F/2} = 3.416$	$t_F = 3.899$ $t_{F/2} = 4.096$
$N \to \infty$	$c_F = 2.326$ $c_{F/2} = 2.576$	$c_F = 3.09$ $c_{F/2} = 3.291$	$c_F = 3.719$ $c_{F/2} = 3.891$

dN05.mcd

Алгоритмы $t \geq t_{F,\nu}$ и $|t| \geq t_{F/2,\nu}$ обеспечивают постоянство вероятности ложной тревоги F_0 при постоянной, но неизвестной дисперсии σ_0^2, т. е. они являются CFAR-алгоритмами (Constant False Alarm Rate) [1], имеющими наибольшие вероятности правильного обнаружения в классе инвариантных алгоритмов, т. е. являются *равномерно наиболее мощными (РНМ) инвариантными*. Они также попадают в класс *подобных* алгоритмов, и в этом классе также являются *РНМ-несмещенными.*

Нахождение оптимального по критерию Неймана–Пирсона алгоритма в классе *подобных* связано с выделением полезного и мешающего параметра и соответствующих достаточных статистик.

Плотность вероятности для наблюдений $y = (y_1, \dots, y_N)$ при гипотезе $H_1^{(1)}$ принадлежит *экспоненциальному семейству* и содержит в показателе экспоненты выражение

$$-(1/2\sigma_0^2)\sum (y_k - m_1)^2 = -(1/2\sigma_0^2)\sum (y_k - m_0 - \Delta)^2$$
$$= (-N/2\sigma_0^2)\sum (y_k - m_0)^2/N + (N\Delta/\sigma_0^2)\cdot \bar{y} - N\Delta m_0/\sigma_0^2 - N\Delta^2/2\sigma_0^2$$

Из свойств экспоненциального семейства следует, что для мешающего параметра $\phi = -N/2\sigma_0^2$ при гипотезе H_0 существует достаточная статистика $s_0^2 = \sum (y_k - m_0)^2/N$, распределение которой *полно* [1]. Это обеспечивает единственность оценки неизвестного

параметра. Следовательно, существуют подобные области, связанные с постоянными значениями этой статистики. Статистики $\bar{y}$ и s_0^2 совместно достаточны при гипотезе $H_1^{(1)}$ для совокупности полезного и мешающего параметров (λ, ϕ), где $\lambda = N\Delta / \sigma_0^2$. Это означает, что они используют всю доступную из наблюдений информацию о неизвестных параметрах.

Условное распределение $w_0(\bar{y} \mid s_0^2)$ статистики $\bar{y}$ при H_0 не будет зависеть от σ_0^2. Таким образом, сложная гипотеза H_0 сводится к простой. Однако поиск условного распределения в данном случае не прост.

Дело упрощается, если существует статистика, которая не зависит от s_0^2 при гипотезе H_0 и при каждом фиксированном s_0^2 монотонна по $\bar{y}$ [10]. Этой статистикой и является *статистика Стьюдента*

$$t = \sqrt{(N-1)} \cdot (\bar{y} - m_0) / s .$$

Статистика Стьюдента *инвариантна* к изменениям дисперсии σ_0^2. Она не зависит от s_0^2 при гипотезе H_0, поскольку ее распределение не зависит от σ_0^2. Заметим, что стоящая в знаменателе статистика s^2 инвариантна к сдвигу выборки, в отличие от статистики s_0^2.

Согласно [10], искомый РНМ *подобный* и *несмещенный* алгоритм обнаружения положительного сдвига $\Delta > 0$ при неизвестной дисперсии σ_0^2 имеет вид $t \geq t_{F,y}$. Несмещенность алгоритма следует из монотонности t-статистики по значениям $\bar{y}$.

Появление t-статистики поясняется в [5]. Для $\Delta > 0$ критическая область (принятия решения в пользу $H_1^{(1)}$) состоит из больших значений $\bar{y}$ при любых значениях других параметров. Нетрудно видеть что

$$s_0^2 = s^2 + (\bar{y} - m_0)^2 = s^2[1 + (\bar{y} - m_0)^2 / s^2].$$

При фиксированных значениях s_0^2 это соответствует малым значениям s^2 или большим значениям $(\bar{y} - m_0)^2 / s^2$.

Алгоритм обнаружения положительного сдвига можно переписать в виде $\bar{y} \geq m_0 + t_{F,y}\, s / \sqrt{N-1}$ или $\bar{y} \geq Y_A$, где Y_A есть «адаптивный» порог. Он является случайной величиной, использующей оценку неизвестного СКО: $Y_A = m_0 + t_{F,y}\, \sigma_0^* / \sqrt{N}$. Эта оценка $\sigma_0^* = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (y_k - \bar{y})^2 / (N-1)}$ совпадает с квадратным корнем из несмещенной и эффективной оценки

$Ns^2/(N-1)$ для дисперсии σ_0^2. Структура обнаружителя изображена на рис. 2.28.

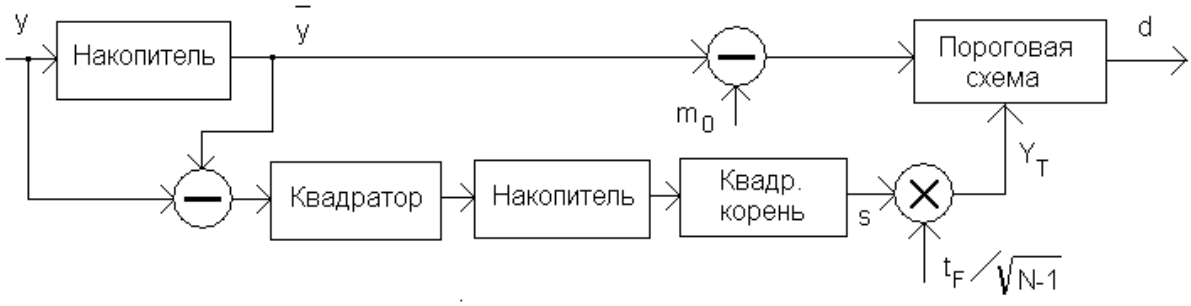

Рис. 2.28. Структура обнаружителя с адаптивным порогом

Для $\Delta < 0$ критическая область состоит из малых значений $\bar{y}$ и РНМ несмещенный подобный алгоритм принимает вид $t \le t_{1-F,\nu}$.

Для проверки двусторонней альтернативы $\Delta \ne 0$ алгоритм можно записать в виде $t^2 \ge t^2_{F/2,\nu}$, или $(\bar{y}-m_0)^2 \ge t^2_{F/2,\nu}s^2/(N-1)$, или $|\bar{y}-m_0| \ge t_{F/2,\nu}s/\sqrt{(N-1)}$. Теперь он работоспособен при разных знаках неизвестного сдвига Δ .

Рассмотрим характеристики *одностороннего* алгоритма $t \ge t_{F,\nu}$, который носит название $t-Detector$, при обнаружении положительного сдвига $\Delta > 0$ в случае неизменной дисперсии.

При малых N значения $t_{F,\nu}$ существенно выше, чем значение c_F. Это связано с большим разбросом оценок σ_0^*. В случае известного σ_0^2 порог $Y_{NP} = m_0 + c_F\sigma_0/\sqrt{N}$ являлся константой. Флуктуации адаптивного порога при замене σ_0 ее оценкой σ_0^* и приводят к необходимости увеличения порогового коэффициента. Вследствие больших значений адаптивного порога Y_A по сравнению с Y_{NP} возникают потери в эффективности обнаружения сдвига распределения.

При гипотезе $H_1^{(1)}: y_k \sim N(m_1, \sigma_0^2)$ решающая статистика t имеет *нецентральное* t-распределение Стьюдента с $\nu = N-1$ степенью свободы и *параметром нецентральности* $d_N = \sqrt{N}\Delta/\sigma_0$.

Характеристики обнаружения рассчитываются по таблицам нецентрального распределения Стьюдента [11].

Можно предложить приближенный способ расчета пороговых дефлекций. Алгоритм $t \geq t_{F,\nu}$ можно представить в виде $\xi - \eta \cdot t_{F,\nu} / \sqrt{N-1} \geq 0$, где $\xi = \sqrt{N}(\bar{y} - m_0)/\sigma_0$ – гауссовская случайная величина, а $\eta = s\sqrt{N}/\sigma_0 = \sqrt{\sum (y_k - \bar{y})^2 / \sigma_0^2}$. В последнем выражении под корнем стоит случайная величина, имеющая при гипотезе H_0 распределение χ^2 с $N-1$ степенями свободы. Распределение квадратного корня $\sqrt{\chi^2_{N-1}}$ приведено в [8]. Оно представляет частный случай m-распределения Накагами. Случайные величины ξ и η взаимно независимы, что позволяет определить распределение разности $\xi - \eta \cdot t_{F,\nu} / \sqrt{N-1}$.

При не очень малых N можно приближенно вычислить пороговые дефлекции $d_N = \sqrt{N}\Delta / \sigma_0$, соответствующие вероятности правильного обнаружения $D = 0{,}5$. Основным допущением является то, что распределение для $\sqrt{\chi^2_{N-1}}$ с увеличением N становится симметричным, и медиана распределения разности $\xi - \eta \cdot t_{F,\nu} / \sqrt{N-1}$ при достаточно больших дефлекциях практически совпадает с математическим ожиданием. Математическое ожидание $M_1\{\xi\}$ при гипотезе $H_1^{(1)}$ равно $M_1\{\xi\} = \sqrt{N}\Delta / \sigma_0 = d_N$, а математическое ожидание $M_1\{\eta\} = \int_0^\infty x^{1/2} f(x) \mathrm{d}x$, где $f(x)$ есть плотность χ^2_{N-1}-распределения, равно $\sqrt{2} \cdot \Gamma(N/2) / \Gamma((N-1)/2)$. Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Приравнивая нулю выражение $M_1\{\xi\} - t_{F,\nu} \cdot M\{\eta\} / \sqrt{N-1}$, получаем пороговую дефлекцию в виде

$$d_N^{(0,5)} = \frac{t_{F,\nu}\sqrt{2}}{\sqrt{N-1}} \cdot \frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma((N-1)/2)}.$$

График зависимости $d_N^{(0,5)} / t_{F,\nu}$ от числа выборок N приведен на рис. 2.29. Практически для $N > 30$ можно считать, что $d_N^{(0,5)} \approx t_{F,\nu}$

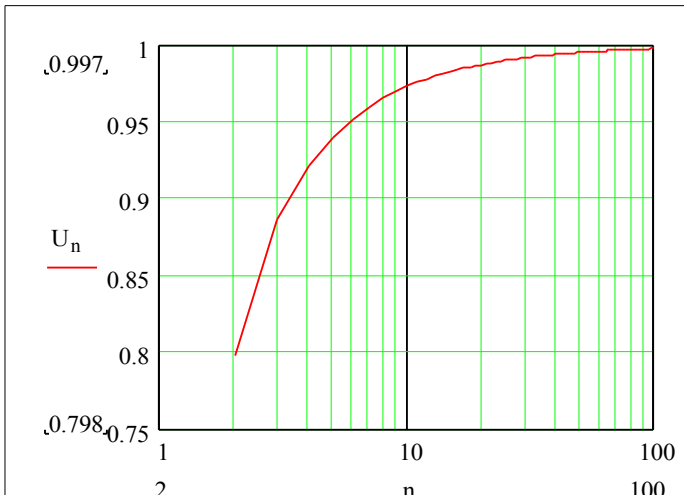

Рис. 2.29. Зависимость $d_N^{(0,5)} / t_{F,\nu}$ от числа выборок N

E:\Mathcad\Math_doc\Student\dN05.mcd

Рассчитанные значения $d_N^{(0,5)}$ приведены в табл. 2.8. Они превышают соответствующую пороговую дефлекцию для случая известной дисперсии, которая равна процентной точке c_F стандартного нормального распределения. Результаты расчетов показывают, что потери невелики и убывают с ростом числа выборок N. Однако этот вывод должен быть проверен для больших уровней вероятности правильного обнаружения $D > 0{,}5$.

При $N > 30$ можно использовать гауссовскую аппроксимацию Р. Фишера [11] для распределения случайной величины $\sqrt{2\chi^2_{N-1}} \sim N(\sqrt{2N-1}, 1)$. Это дает еще один способ приближенных расчетов.

Таблица 2.8

F	$d_N^{(0,5)}$	$d'^{(0,5)}_N$	$d'^{(0,9)}_N$	c_F	$c_F + c_{1-0,9}$

	$N = 9$	$N = 25$	$N = 81$	$N = 81$	$N = 81$	$N \to \infty$	$N \to \infty$
10^{-2}	2,808	2,466	2,367	2,388	5,68	2,326	3,606
10^{-3}	4,363	3,431	3,185	3,205	7,492	3,09	4,37

Случайная величина $\xi - t_{F,\nu}\sqrt{2\chi^2_{N-1}}/\sqrt{2(N-1)}$ приближенно имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием $d_N - t_{F,\nu}\sqrt{2N-1}/\sqrt{2(N-1)}$ и дисперсией $1 + t^2_{F,\nu}(N - 1/2)/(N-1) \approx 1 + t^2_{F,\nu}$, тогда в первом приближении можно полагать $d'^{(0,5)}_N \approx t_{F,\nu}$, $d'^{(D,F)}_N \approx t_{F,\nu} + c_{1-D}\sqrt{1 + t^2_{F,\nu}}$. Для $D = 0{,}9$ имеем $c_{1-D} = 1{,}28$. Значения $d'^{(0,5)}_N$ и $d'^{(0,9)}_N$, для $N = 81$ приведены в табл. 2.8. В случае известной дисперсии (при $N \to \infty$), как и следовало ожидать, пороговая дефлекция $d^{(D,F)}_N = c_F + c_{1-D}$ имеет существенно меньшие значения.

Увеличение пороговой дефлекции в случае использования t-статистики означает потери в эффективности обнаружения по сравнению с использованием статистики $\bar{y}$ и фиксированного порога в ситуации, когда дисперсия известна. Ранее [1, подразд. 1.7] было установлено, что в случае изменения σ_0 пороговая дефлекция увеличивается на величину $c_F\xi_\sigma$, где $\xi_\sigma = (\sigma_0 - \sigma_{0И})/\sigma_{0И}$ – относительное изменение среднеквадратического отклонения.

Сравнивая пороговые дефлекции алгоритмов с фиксированным порогом и Стьюдента, можно найти значения ξ_σ, начиная с которых использование t-статистики будет целесообразным. Для $N = 9$ и $F = 10^{-3}$ пороговая дефлекция для $D = 0{,}5$ увеличивается с $3{,}09$ до $4{,}165$, и применение РНМ несмещенного алгоритма оправдано, если относительные изменения σ_0 превышают 30%. В случае $N = 81$ это имеет смысл уже при изменениях σ_0 на 3%.

Рассмотрим *двусторонний* алгоритм $|\bar{y} - m_0| \geq t_{F/2,\nu}s/\sqrt{(N-1)}$, обеспечивающий обнаружение сдвигов разных знаков. Процентные точки $t_{F/2,\nu}$ имеют несколько большие значения, чем процентные точки $t_{F,\nu}$ для одностороннего алгоритма. Вследствие более высокого порога для двустороннего алгоритма увеличивается и пороговая дефлекция. В первом приближении можно считать $d^{(0,5)}_N \approx t_{F/2,\nu}$.

На рис. 2.30 приведены зависимости пороговых дефлекций от числа выборок N для обнаружителя с односторонним порогом (линии 1 и 3) и

с двусторонним порогом (линии 2 и 4). Линии 1 и 2 соответствуют $F = 10^{-2}$, а линии 3 и 4 соответствуют $F = 10^{-3}$. Горизонтальные пунктирные и штрих-пунктирные линии показывают предельные значения, равные процентным точкам $c_{F,\nu}$ и $c_{F/2,\nu}$ соответственно.

Различие в пороговых дефлекциях одностороннего и двустороннего алгоритмов невелико, а потери вследствие оценивания неизвестного параметра σ_0 являются несущественными, если число выборок превышает 30.

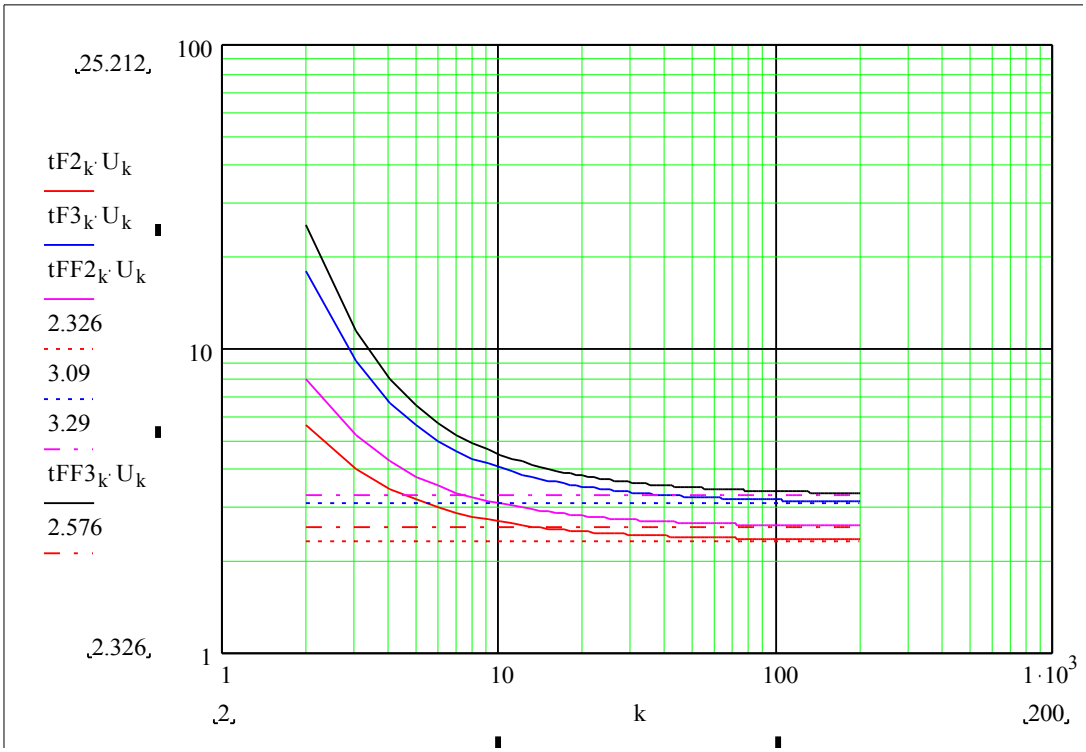

Рис. 2.30. Зависимости пороговых дефлекций $d_N^{(0,5)}$ от числа выборок N

E:\Monograph\Det_Posobie3\Mathcad_2\dN05.mcd