## 2.4. Эффективность байесовского подхода при обнаружении сдвига гауссовского распределения

Представляет интерес анализ эффективности применения алгоритма обнаружения с несимметричными порогами, полученного с использованием байесовского подхода.

Статистика $u_3$ при гипотезе $H_0$ распределена нормально с единичной дисперсией и математическим ожиданием $A_0 = \nu^2 b = \nu^2 \sqrt{Nr}(\theta - m_0) = \nu^2(\xi_\theta + d_N)$, т. е. $H_0 : u_3 \sim N(A_0, 1)$. При гипотезе $H_1^{(1)} : y_k \sim N(m_1, \sigma_0^2)$ математическое ожидание $u_3$ становится равным $A_1 = A_0 + d_N$, где $d_N = \sqrt{N}\Delta / \sigma_0$ – дефлекция. Дисперсия статистики остается равной единице.

Анализ суммарной вероятности ошибки произведен для задачи обнаружения неслучайного сдвига при гипотезе $H_1^{(1)}$.

На рис. 2.21 линией 1 показана зависимость вероятности ошибки для алгоритма обнаружения с несимметричными порогами $U_{3ML}^{+} = 1{,}565$ и $U_{3ML}^{-} = -2{,}031$, которые настроены на значение дефлекции, т. е. $b = d_N = 2{,}326$. При таком согласовании вероятность ошибки падает с ростом априорной точности и при $\nu^2 > 1$ стремится к значению вероятности ошибки $p_{\Sigma ML} = 0{,}122$ (штрихпунктирная горизонтальная линия) для оптимального одностороннего порога $U_{ML} = 1{,}163$.

Для сравнения показана горизонтальная штриховая линия, соответствующая ошибке $p_{\Sigma ML2} = 0{,}169$ при использовании байесовского двустороннего порога $U_{ML2} = 1{,}48$, который дает бóльшую ошибку при $\nu^2 > 0{,}1$.

При рассогласовании параметров $b$ и $d_N$ вероятность ошибки увеличивается. Однако это увеличение существенно при значениях $\nu^2 > 0{,}1$, и мало заметно при небольшой априорной точности. Линии 2, 3, 4 и 5 показывают характер изменения ошибки при значениях $d_N = 2{,}326$ и разных значениях $b = 0{,}326$, $4{,}652$, $6{,}18$ и $b = -2{,}326$, Видно, что в данном случае достаточно устойчивые характеристики и малые ошибки алгоритма получаются при $\nu^2 \approx 0{,}1$.

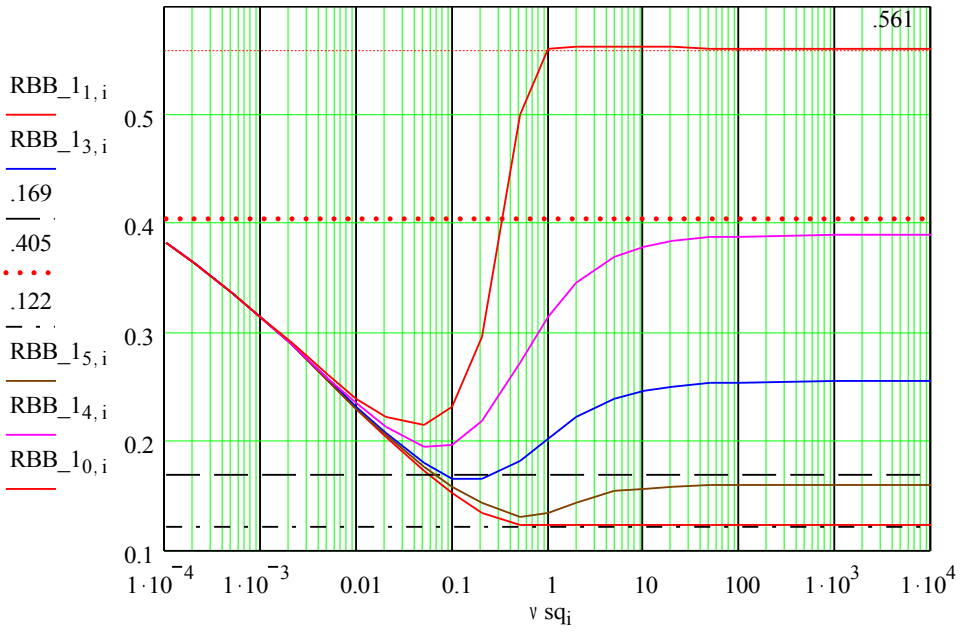


Рис. 2.21. Влияние априорной точности задания сдвига на вероятность ошибки ***Bayes_Two-sided_Threshold.mcd***

Если пороги настроены на значение $b = 6{,}18$ (линия 4), то ошибка при $\nu^2 = 0{,}1$ возрастает всего лишь до $0{,}197$. Для сравнения, если двусторонний байесовский порог $U'_{ML2} = 3{,}2$ рассчитан на $d'_N = 6{,}18$, то при $d_N = 2{,}326$ он даст вдвое бóльшую вероятность ошибки $p'_{\Sigma ML2} = 0{,}405$ (горизонтальная пунктирная линия). Даже тогда, когда несимметричные пороги рассчитаны на отрицательный сдвиг, т. е. на $b = -2{,}326$, они при $\nu^2 = 0{,}1$ обеспечивают вероятность ошибки всего лишь $0{,}232$ (линия 5).

Зависимости вероятностей ошибки от величины дефлекции приведены на рис. 2.4.2 для трех алгоритмов с двусторонними порогами, значения которых настроены на соответствующую дефлекцию. Для отрицательных сдвигов графики симметричны. Сплошная линия 1 соответствует байесовскому алгоритму $|u_1| \geq U_{ML2}$ с симметричными порогами, согласованными со значениями дефлекции.

Штриховая линия 2 описывает поведение алгоритма с двусторонним порогом Неймана-Пирсона $U_{NP2} = 2{,}576$, обеспечивающим вероятность ложной тревоги $F_0 = 0{,}01$.

Сплошная линия 3 соответствует алгоритму $|u_3| \geq U_{3ML}$, который эквивалентен алгоритму с несимметричными порогами $u_1 \geq U_3^+$ или $u_1 \leq U_3^-$, настроенными на $\nu^2 = 0{,}1$ и соответствующее значение дефлекции. Кривая показывает небольшой выигрыш по сравнению с симметричными порогами при небольших дефлекциях. В диапазоне значений дефлекций от 2,3 до 4,3 качество алгоритма приближается к качеству однопорогового байесовского алгоритма, вероятность ошибки которого показана пунктирной линией 4. Именно эти значения дефлекции представляют практический интерес, так как часто они являются пороговыми, обеспечивающими вероятность правильного обнаружения $0{,}5...0{,}9$. Выигрыш, который может дать алгоритм с несимметричными порогами, обязан учету имеющейся априорной информации относительно сдвига.

В связи с тем что входная дефлекция обычно неизвестна, пороги не будут согласованы с дефлекцией и необходимо исследовать чувствительность алгоритмов к неточности задания сдвига.

На рис. 2.23 штриховая линия 1 соответствует линии 1 на рис. 2.22, линия 2 соответствует алгоритму с несимметричными порогами при $\nu^2 = 0{,}1$, настроенными на $b = 2{,}326$, а линия 3 – несимметричным порогам, настроенным на $b = -2{,}326$.

Рис. 2.22. Зависимости вероятности ошибки от дефлекции в случае согласованных порогов ***\nBA_3_3_1.mcd***

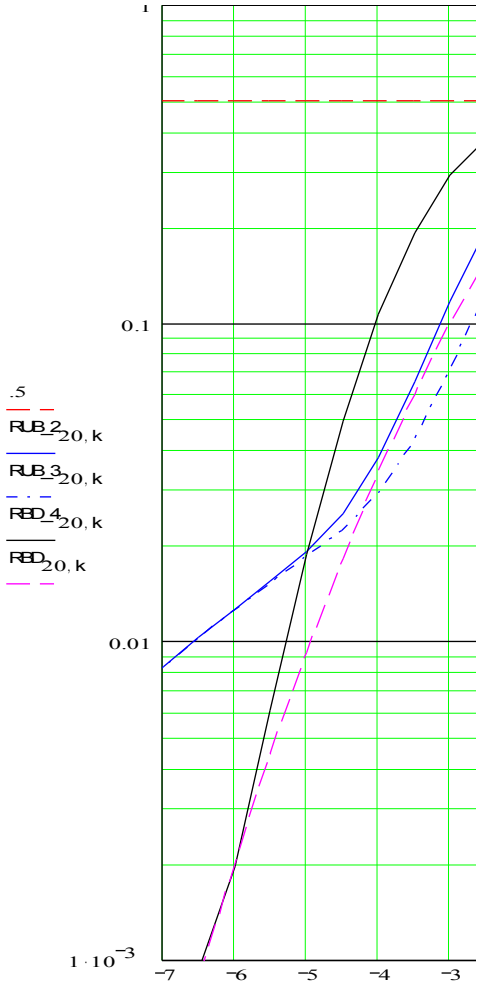


Рис. 2.23. Зависимости вероятности ошибки от дефлекции в случае несогласованных порогов

***\nBA_3_3_1.mcd***

При малых дефлекциях (примерно до $4{,}3$) налицо выигрыш по отношению к алгоритмам с симметричными порогами. Этот выигрыш сопровождается проигрышем в области отрицательных дефлекций.

Линия 3 построена для порогов, настроенных на $b = -2{,}326$, и отражает симметричную ситуацию, когда достигается выигрыш в области отрицательных дефлекций и проигрыш для положительных.

Можно видеть, что имеются интервалы изменения сдвига, в которых байесовский подход и алгоритм с несимметричными порогами обеспечивают меньшую вероятность ошибки, чем другие алгоритмы. Эти интервалы существенно зависят от дефлекции (отношения сигнал/шум). При увеличении дефлекции более $d_N = 4{,}5$ эффективность использования несимметричных порогов падает, так как вероятность ошибки резко увеличивается.

Таким образом, статистика $u_3$ в условиях априорной неопределенности относительно сдвига оказывается более устойчивой (в некоторой области, зависящей от априорной точности $\nu^2$), чем $u_1$. Это свойство непосредственно связано со свойством байесовской оценки сдвига, которую использует данный алгоритм.

При байесовском подходе вся информация о параметре $\vartheta$ содержится в апостериорной плотности

$$w(\vartheta \mid y) = f_1(y,\vartheta)\pi(\vartheta) / \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y,\vartheta)\pi(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \ .$$

В данном случае эта плотность является гауссовской при каждой реализации $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. Математическое ожидание апостериорной плотности $w(\vartheta \mid y)$ или *апостериорное среднее* $\theta_a = \theta + (\bar{y} - \theta)/(\nu^2 + 1)$, которое является *оптимальной байесовской оценкой* случайного параметра $\vartheta$ (при квадратичной функции потерь). Вес наблюдений в этой оценке падает с ростом априорной меры точности.

Оптимальная байесовская статистика $u_3$ для обнаружения случайного сдвига использует апостериорную оценку сдвига, поскольку $u_3 = (\nu^2 + 1)\sqrt{Nr}(\theta_a - m_0)$.

При большой априорной точности значение $\nu^2$ велико, и вес новых наблюдений, содержащихся в решающей статистике, уменьшается по сравнению с априорным значением сдвига.

Свойство байесовской статистики взвешивать априорную информацию и вновь поступающие наблюдения называется «сжимающим» [61]. *Сжимающие оценки* образуют более широкий класс и включают байесовские. Эти оценки активно применяются для реализации адаптивных алгоритмов.

Сжимающая оценка для $m_1$ может быть записана в общем виде $\theta_S = B \cdot \theta + (1 - B)\bar{y}$, где коэффициент сжатия $0 \le B \le 1$ определяет степень учета априорной информации. Для используемого байесовского подхода и оценки $\theta_a$ коэффициент сжатия равен $B = \nu^2/(\nu^2 + 1)$ (рис. 2.24). При высокой априорной точности оценка как бы «сжимается» к априорному среднему $\theta$. При $\nu^2 = 1$ значение $B = 1$, а при $\nu^2 = 0{,}1$ получаем $B = 0{,}091$.

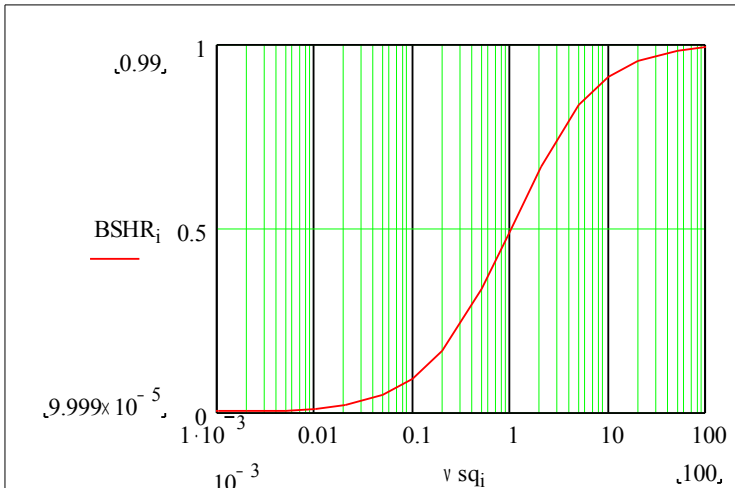


Рис. 2.24 Зависимость величины «коэффициента сжатия» $B$ от значения априорной точности $\nu^2$

***E:\Mathcad\Mathcad_doc\ \Bayes\Bayes_Two-sided Threshold.mcd***

Таблица 2.6

| | $F$ | $D$ | $p_\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| $U^{+-}_{3ML} = 1{,}565; -2{,}031$<br>$Y_{3ML} = 1{,}739; -2{,}256$ | 0,08 | 0,777 | 0,152 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $U'^{+-}_{3ML} = 1{,}997; -3{,}233$<br>$Y'^{+-}_{3ML} = 2{,}219; -3{,}592$ | 0,024 | 0,629 | 0,197 |

В табл. 2.6 приведены расчетные значения вероятности ложной тревоги, правильного обнаружения и среднего риска для алгоритма с линейным накоплением и несимметричными порогами, полученного с использованием байесовского подхода при $\nu^2 = 0{,}1$ и $d_N = 2{,}326$.

Несимметричные нормированные пороги $U_{3ML}^{+-} = 1{,}565; -2{,}031$ рассчитаны на положительный сдвиг $b = 2{,}326$, значения ненормированных порогов $Y_{3ML} = 1{,}739; -2{,}256$ получены для размера выборки $N = 81$ и $\sigma_0 = 10$. При положительных сдвигах алгоритм обнаружения с порогами $U_{3ML}^{+-} = 1{,}565; -2{,}031$ обладает суммарной вероятностью ошибки $0{,}152$, что несколько меньше, чем $0{,}169$ для обнаружителя с симметричными байесовскими порогами $U_{ML2} = \pm 1{,}48$.

Несимметричные пороги $U_{3ML}'^{+-} = 1{,}997; -3{,}233$ рассчитаны на $b' = 6{,}18$. При $d_N = 2{,}326$ вероятность ошибки $0{,}197$ ненамного больше значения $0{,}152$. Заметим, что в аналогичной ситуации симметричные пороги $U'_{ML2} = \pm 3{,}2$ приводят к увеличению вероятности ошибки до $0{,}405$.

Эффективность применения байесовского подхода при обнаружении сдвигов на шумовом поле иллюстрируется на рис. 2.25 и 2.26. Масштаб на рисунке подобран так, чтобы интервал яркостей был в диапазоне от 0 до 255. Исходное шумовое поле (рис. 2.8) содержит четыре области с разными значениями сдвига. Обработка сводится к накоплению в скользящем окне $9 \times 9$ (рис. 2.11) и сравнению с порогами.

Моделирование обнаружения сдвигов шумового поля показало следующие выборочные характеристики: $\tilde{F} = 0{,}097$, $\tilde{D} = 0{,}664$, $\tilde{p}_\Sigma = 0{,}217$ для порогов $U_{3ML}^{+-} = 1{,}565; -2{,}031$, рассчитанных на $b = 2{,}326$. Рис. 2.25 показывает незначительное ухудшение качества по сравнению с оптимальными симметричными порогами $U_{ML2} = \pm 1{,}48$ (рис. 2.15).

На рис. 2.26 показано обнаружение с использованием несимметричных порогов $U_{3ML}'^{+-} = 1{,}997; -3{,}233$, рассчитанных на $b = 6{,}18$. Эти пороги при $d_N = 2{,}326$ показали оценки вероятностей по шумовому полю $\tilde{F} = 0{,}033$, $\tilde{D} = 0{,}377$, $\tilde{p}_\Sigma = 0{,}328$, что значительно меньше значения $\tilde{p}_\Sigma = 0{,}417$, полученного ранее для симметричных байесовских порогов $U'_{ML2} = \pm 3{,}2$, и привели к лучшему качеству обнаружения положительных сдвигов в этом случае по сравнению с рис. 2.16.

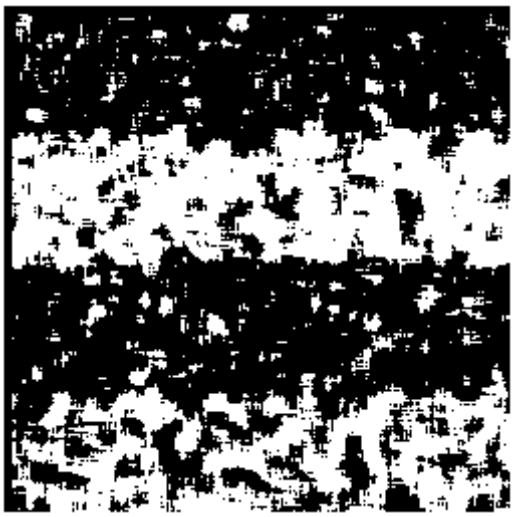

Рис. 2.25. Обнаружение с несимметричными байесовским порогами $U_{3ML}^{+-} = 1{,}565; -2{,}031$ при $d_N = 2{,}326$
***E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Bayes_01.mcd***

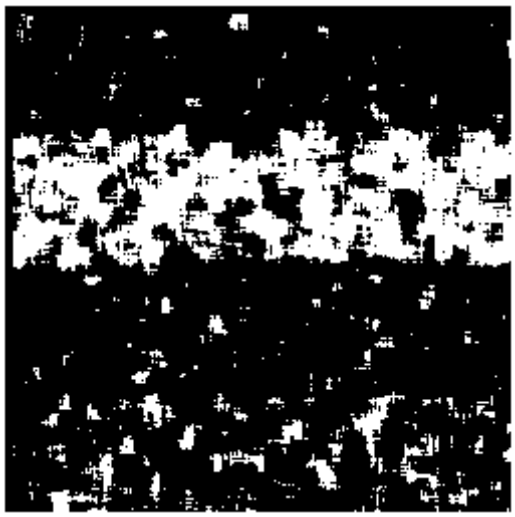

Рис. 2.26. Обнаружение с несимметричными байесовским порогами $U_{3ML}'^{+-} = 1{,}997; -3{,}233$ при $d_N = 2{,}326$
***E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Bayes_01.mcd***

Таким образом, байесовский подход позволяет получить алгоритм обнаружения, обладающий большей устойчивостью вероятности ошибки к изменениям мешающего параметра, которым здесь является неизвестный сдвиг. Обработка реализуется путем линейного накопления и сравнения с двумя несимметричными порогами. Асимметрия порогов связана с имеющейся априорной информацией относительно математического ожидания сдвига $\theta$.

Байесовский подход дает способ управления порогами для построения адаптивной структуры обнаружителя, в которой параметрами адаптации выступают априорное математическое ожидание сдвига $\theta$ и априорная точность $\gamma^2$ задания сдвига, или коэффициент сжатия $B$. Подход также позволяет установить связь между односторонним и двусторонним порогами и упорядочить ситуации с неизвестным сдвигом распределения по степени априорной неопределенности. Крайними случаями являются полностью известное значение и случайная величина с бесконечной дисперсией.