2.3. Байесовский подход при обнаружении неизвестного сдвига гауссовского распределения

Для удобства будем использовать *меру точности* наблюдений $r = 1/\sigma_0^2$ вместо дисперсии σ_0^2. Характеристики алгоритма обнаружения сдвига распределения $u_1 \geq U_T$ с односторонним порогом и алгоритма $|u_1| \geq U_{T2}$ с двухсторонним порогом весьма чувствительны к величинам порогов. Для получения более устойчивых алгоритмов обнаружения рассмотрим *байесовский подход* к преодолению априорной неопределенности.

Пусть $\vartheta = m_0 + \Delta$ есть заданное значение, которое используется при установке байесовского порога вместо неизвестного истинного $m_1 = m_0 + \Delta_{\text{И}}$. Величину ϑ можно рассматривать как неизвестный параметр задачи, входящий в порог.

Байесовский подход предполагает, что параметр ϑ является случайной величиной, определенной на интервале $(-\infty, \infty)$. Введем для ϑ априорное распределение, например гауссовскую плотность

$$\pi(\vartheta) = (\tau/2\pi)^{1/2} \exp(-\tau(\vartheta - \theta)^2/2),$$

где τ является *априорной мерой точности* распределения, величина $\tau = 1/\sigma_\vartheta^2$ обратна априорной дисперсии σ_ϑ^2, а θ есть априорное математическое ожидание случайного параметра, который содержит неизвестный сдвиг.

Как отмечалось в [1], величины τ и θ являются *гиперпараметрами*. Их значения будем считать заданными. При неизвестном значении θ в алгоритме можно использовать заданное значение θ_1 или ввести вероятностное распределение уже для гиперпараметра θ. Байесовский подход будет конструктивным, если устойчивость нового алгоритма к изменениям рассматриваемых параметров окажется выше, а рабочий интервал для параметра будет больше, чем у исходного алгоритма.

Удобно ввести величину $\nu^2 = \tau/Nr = \sigma_0^2/N\sigma_\vartheta^2$, которая представляет собой отношение дисперсии среднего арифметического $\bar{y}$ к априорной дисперсии случайного сдвига ϑ. Она представляет относительную априорную точность параметра ϑ.

Большие значения ν^2 соответствуют высокой *априорной точности* задания неизвестного сдвига τ по отношению к мере точности наблюдений. При $\nu^2 \to \infty$ сдвиг фактически задан точно. В

случае, когда $\nu^2 \to 0$, априорное распределение не дает никакой дополнительной информации о сдвиге для решения задачи.

Следует отметить, что введение предположения о случайности параметра существенно меняет плотность вероятности наблюдений, поэтому гипотезу о наличии *случайного* сдвига обозначим через $H_1^{(3)}$.

Статистически усредненная при гипотезе $H_1^{(3)}$ плотность вероятности наблюдений имеет вид

$$\langle f_1(y)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y,\vartheta)\pi(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{N/2}\left(\frac{\tau}{\tau + Nr}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{r}{2}\sum y_k^2 - \frac{\tau\theta^2}{2} + \frac{(\tau\theta + Nr\bar{y})^2}{2(\tau + Nr)}\right)$$

Плотность вероятности при гипотезе H_0

$$f_0(y) = \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{N/2}\exp\left(-\frac{r}{2}\sum y_k^2 - \frac{Nrm_0^2}{2} + m_0 Nr\bar{y}\right).$$

Новое отношение правдоподобия $\langle\Lambda\rangle = \langle f_1(y)\rangle / f_0(y)$ использует усредненную плотность вероятности. Для принятия решения оно сравнивается с порогом Λ_T, который, как и ранее, зависит от выбранного критерия оптимальности. Отношение правдоподобия зависит от наблюдений только через среднее арифметическое $\bar{y}$, которое и в этом случае является достаточной статистикой.

При различных введенных гипотезах среднее арифметическое будет иметь следующие распределения:

$$H_0 : \bar{y} \sim N(m_0, 1/Nr),\quad H_1^{(1)} : \bar{y} \sim N(m_1, 1/Nr),\quad H_1^{(3)} : \bar{y} \sim N(\theta, \sigma_A^2),$$

где $\sigma_A^2 = 1/Nr + 1/\tau = (\nu^2 + 1)/\tau$. Обозначив $a^2 = 1 + 1/\nu^2$, получаем $\sigma_A^2 = a^2/Nr$, где $a^2 = 1$ при высокой априорной точности и $a^2 \to \infty$ при малой априорной точности.

Очевидно, что новая задача различения гипотез $H_1^{(3)}$ и H_0 связана не только с изменением математического ожидания статистики $\bar{y}$, но и с увеличением дисперсии гауссовской плотности в a^2 раз, при этом относительное увеличение дисперсии равно $\gamma = (\sigma_A^2 - \sigma_0^2)/\sigma_0^2 = 1/\nu^2$. Такие задачи были рассмотрены в [1].

Рассматриваемая модель характеризуется увеличением дисперсии решающей статистики $\bar{y}$ с уменьшением априорной точности ν^2. Зависимость величины a^2 от ν^2 изображена на рис. 2.17. При $\nu^2 = 0{,}1$ дисперсия увеличивается в 10 раз.

С ростом априорной точности ν^2 значение a^2 стремится к единице, а значение случайного сдвига стремится к априорному математическому ожиданию θ. В этом случае оптимален односторонний байесовский порог $U_{ML} = (\theta - m_0)/2$ для статистики $\bar{y} - m_0$, что соответствует случаю полностью известного сдвига.

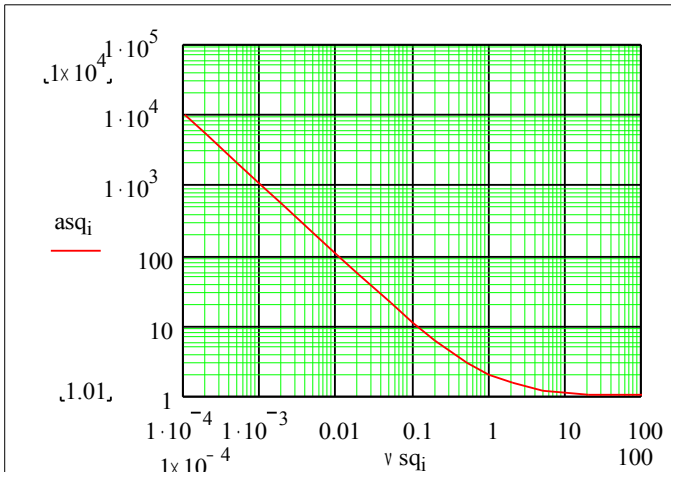

Рис. 2.17. Зависимость величины a^2 от значения априорной точности ν^2

E:\Mathcad\Image\Image_Ch_N1\Bayes\Bayes_Two-sided Thresholds_1.mcd

Оптимальный байесовский алгоритм для новой задачи можно записать в виде $u_3^2 \geq U_3^2$, или $|u_3| \geq U_3$, или как выполнение хотя бы одного из неравенств $u_3 \geq U_3$ или $u_3 \geq -U_3$, где оптимальная статистика равна $u_3 = \sqrt{Nr}(\bar{y} - \rho)$. Она включает величину $\rho = m_0 - \nu^2(\theta - m_0) = m_0(\nu^2 + 1) - \theta \cdot \nu^2$, и отличие в обработке заключается в добавлении к решающей статистике u_1 смещения $\nu^2 b = \nu^2\sqrt{Nr}(\theta - m_0) = \nu^2(\xi_\theta + d_N)$ перед операцией сравнения с симметричными порогами. Здесь введены величина относительного отклонения априорного среднего от истинного значения сдвига $\xi_\theta = \sqrt{Nr}(\theta - m_1)$ и параметр $b = \sqrt{Nr}(\theta - m_0)$, который при $\xi_\theta = 0$, т. е. при $\theta = m_1$, равен дефлекции решающей статистики.

Квадрат байесовского порога равен

$$U_{3B}^2 = (\nu^2 + 1)[\ln(\Lambda_B^2 a^2) + \nu^2 b^2].$$

Для критерия максимального правдоподобия $\Lambda_{ML} = 1$ и квадрат порога записывается в виде

$$U_{3ML}^2 = (\nu^2 + 1)[\nu^2 b^2 + \ln a^2] = (\nu^2 + 1)[\nu^2(\xi_\theta + d_N)^2 + \ln a^2].$$

Алгоритм обнаружения (различения) можно переписать в следующем виде: решение о наличии сигнала принимается в случае $u_1 \geq U_{3B} - \nu^2 b$ или $u_1 \leq -U_{3B} - \nu^2 b$, т. е. решающая статистика сравнивается с двумя несимметричными порогами, которые зависят от двух параметров ν^2 и b. Один из порогов $U_3^+ = U_{3B} - \nu^2 b$ будет *верхним*, а другой $U_3^- = -U_{3B} - \nu^2 b$ – *нижним*. В другой форме алгоритм имеет вид $\bar{y} - m_0 \geq Y_3^+$ или $\bar{y} - m_0 \leq Y_3^-$, где верхний и нижний пороги равны $Y_3^+ = Y_{3B} - \nu^2(\theta - m_0)$, $Y_3^- = -Y_{3B} - \nu^2(\theta - m_0)$. Структура байесовского различителя представлена на рис. 2.18.

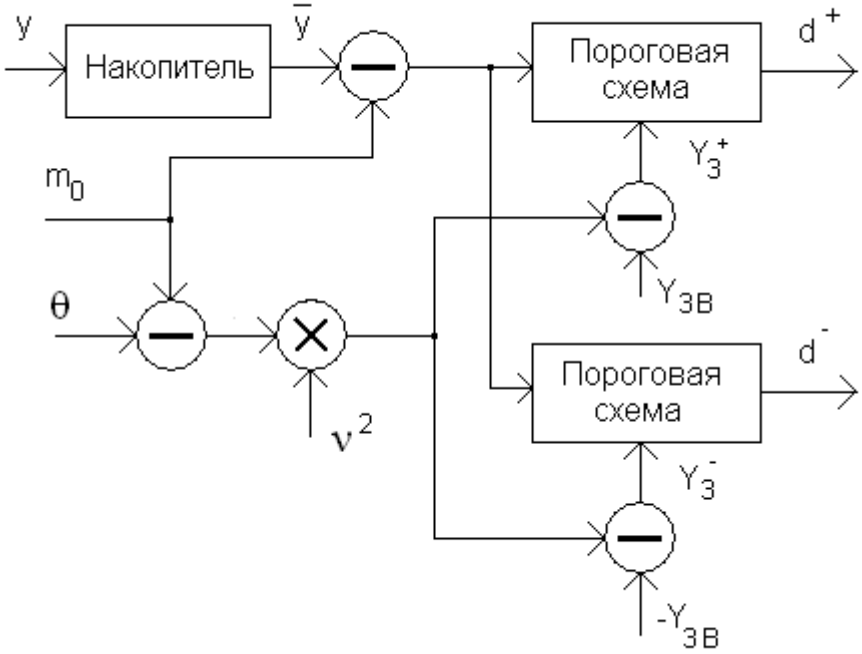

Рис. 2.18. Структура байесовского различителя сдвигов

Смысл обработки при обнаружении случайного сдвига становится ясным, если несколько преобразовать полученный алгоритм [2]. Перейдя в выражении для плотности $\langle f_1(y) \rangle$ к переменной $\bar{y} - \theta$, можно получить другую форму байесовского алгоритма, справедливую при любых значениях θ:

$$(\theta - m_0)\bar{y} + (\bar{y} - \theta)^2 / 2(\nu^2 + 1) \geq (1/Nr)\ln(\Lambda_B a) + (\theta^2 - m_0^2)/2 \cdot$$

Легко видеть, что алгоритм осуществляет одновременное обнаружение сдвига и увеличения масштаба гауссовского распределения для среднего арифметического $\bar{y}$ [1]. Решающая статистика представляет взвешенную сумму $\bar{y}$ и $(\bar{y}-\theta)^2$.

Если априорная мера точности τ неизвестного параметра растет (т. е. априорная дисперсия уменьшается), ν^2 стремится к бесконечности, а a^2 стремится к единице. Тогда при $\theta \neq m_0$ алгоритм совпадает с правилом проверки простой гипотезы против простой альтернативы $\vartheta = \theta$. В частности, для положительного сдвига $\theta > m_0$ алгоритм обнаружения по критерию максимального правдоподобия будет $\bar{y} \geq (m_0 + \theta)/2$.

Если же априорное среднее $\theta = m_0$, т. е. $b = 0$, то случайный сдвиг оказывается положительным или отрицательным с равными вероятностями. Этот случай соответствует полному отсутствию информации о знаке сдвига. Оптимальный алгоритм обнаружения принимает вид $u_1^2 \geq (\nu^2 + 1)\ln a^2$. Он также может быть представлен двухпороговой структурой с симметричными порогами $|\bar{y} - m_0| \geq Y_{3ML}$ или $|u_1| \geq U_{3ML}$. Такой же эффект имеет место и в случае $\theta \neq m_0$, но малой априорной точности этой информации, т. е. при $\nu^2 \to 0$, $a^2 \to \infty$, при этом значения U_{3ML} растут с уменьшением ν^2.

Алгоритм обнаружения в этом случае отличается только значением порога от РНМ для двусторонней альтернативы. Если порог РНМ алгоритма может принимать любое значение, исходя из заданной вероятности ложной тревоги, то симметричный байесовский порог $\pm U_{3ML} = \pm\sqrt{(\nu^2 + 1)\ln a^2}$ определяется величиной априорной точности. Величина U_{3ML} уменьшается с ростом априорной точности, но всегда больше единицы и при $\nu^2 \to \infty$ стремится к значению $1{,}111$.

Представляет интерес исследование поведения порогов в общем случае для алгоритма с двумя несимметричными порогами $u_1 \geq U_3^+$ или $u_1 \leq U_3^-$.

Рассмотрим случай $\theta \geq m_0$. Зависимости верхнего и нижнего порогов максимального правдоподобия $U_3^+ = U_{3ML} - \nu^2 b$ и $U_3^- = -U_{3ML} - \nu^2 b$ от величины ν^2 априорной точности представлены на рис. 2.19 сплошными линиями.

Линии 1–5 соответствуют значениям параметра $b = 6{,}18$, $4{,}652$, $2{,}326$, $1{,}163$ и $0{,}326$.

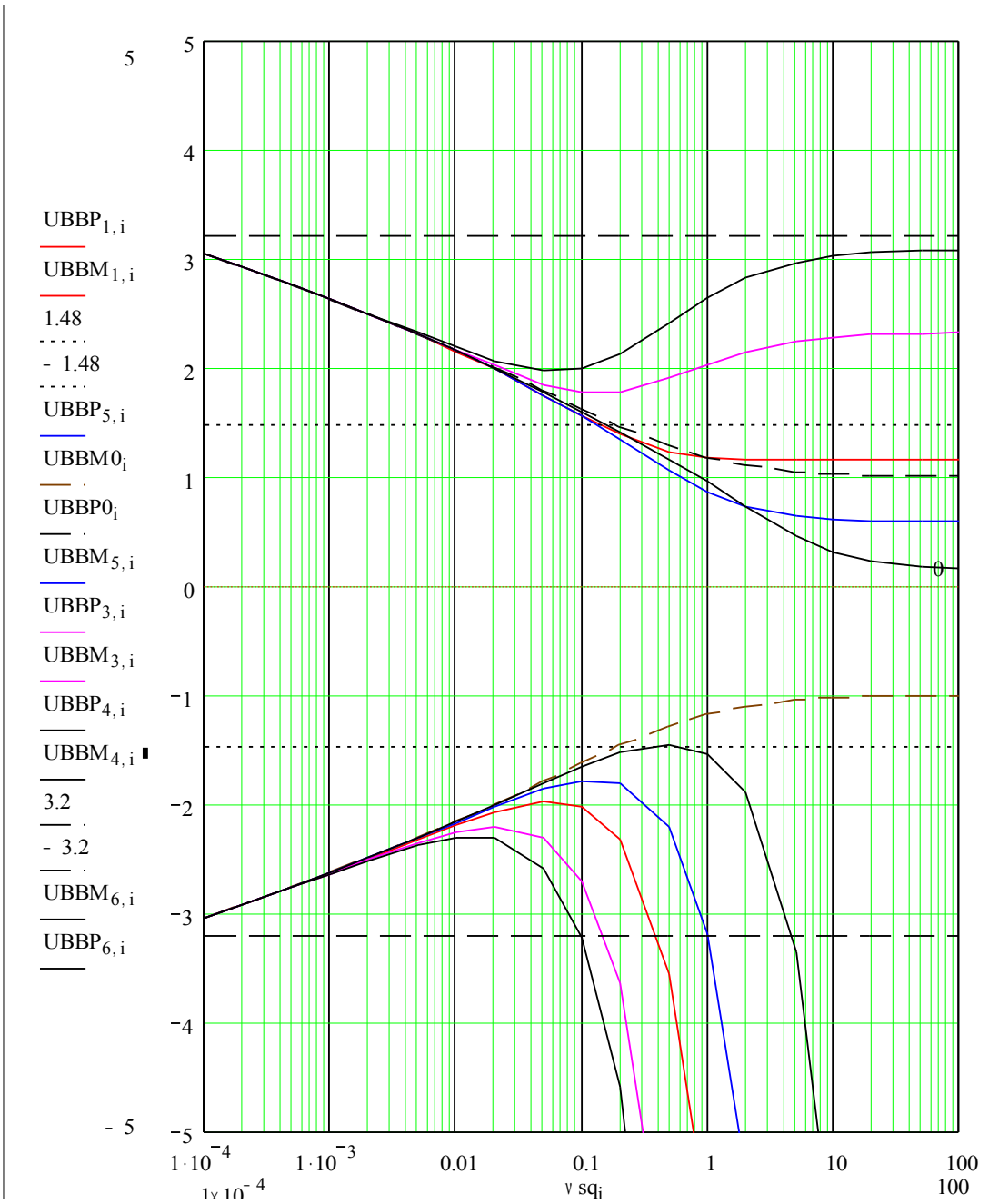

Рис. 2.19 Поведение порогов алгоритма обнаружения на основе байесовского подхода ***Bayes_Two-sided_Threshold.mcd***

В случае высокой априорной точности задания сдвига, т. е. при $\gamma^2 > 1$ нижний порог уходит в область отрицательных значений. Поскольку в этом случае с большой определенностью сдвиг будет положителен, то фактически байесовский обнаружитель становится однопороговым, причем верхний порог стремится к соответствующему оптимальному байесовскому порогу U_{ML} для одностороннего обнаружителя.

С уменьшением априорной точности нижний порог возрастает и начинает играть существенную роль. С некоторого значения γ^2 верхний и нижний пороги оказываются симметричными.

Такое поведение несимметричных порогов позволяет учесть имеющуюся априорную информацию о сдвиге и получить за счет этого выигрыш в вероятности ошибки по отношению к симметричным порогам.

Если $\theta \le m_0$, поведение порогов меняется местами, при $\gamma^2 > 1$ верхний порог стремится к бесконечности, а нижний приближается к оптимальному значению для однопороговой структуры.

В случае $\theta = m_0$, как уже указывалось, пороги $\pm U_{3ML}$ симметричны. Они показаны штриховыми линиями 6.

Для оценки степени изменения значений порогов на рисунке 2.19 пунктирными горизонтальными линиями показаны значения $\pm 1{,}48$, соответствующие байесовским симметричным порогам $\pm U_{ML2}$, рассчитанным на значение дефлекции $d_N = \pm 2{,}326$. Горизонтальными штриховыми линиями показаны соответствующие пороги $\pm 3{,}2$ для $d_N = \pm 6{,}18$.

Зависимость несимметричных порогов U_3^+ и U_3^- от значения дефлекции показана на рис. 2.20 для $\gamma^2 = 0{,}1$. Штриховые диагональные линии соответствуют значениям $d_N/2$ и $-d_N/2$. Симметричные пороги близки к этим значениям. Заметим, что в частности для $d'_N = 6{,}18$ значение верхнего порога U_3^+ оказывается меньшим, чем в случае симметричных байесовских порогов $U_{ML2} = \pm 3{,}2$.

Таким образом, байесовский подход позволяет установить связь между степенью априорной неопределенности в задании значения сдвига, и значениями оптимальных байесовских порогов. Он позволяет проследить плавный переход от структур с двусторонними порогами к однопороговым по мере роста априорной точности задания сдвига.

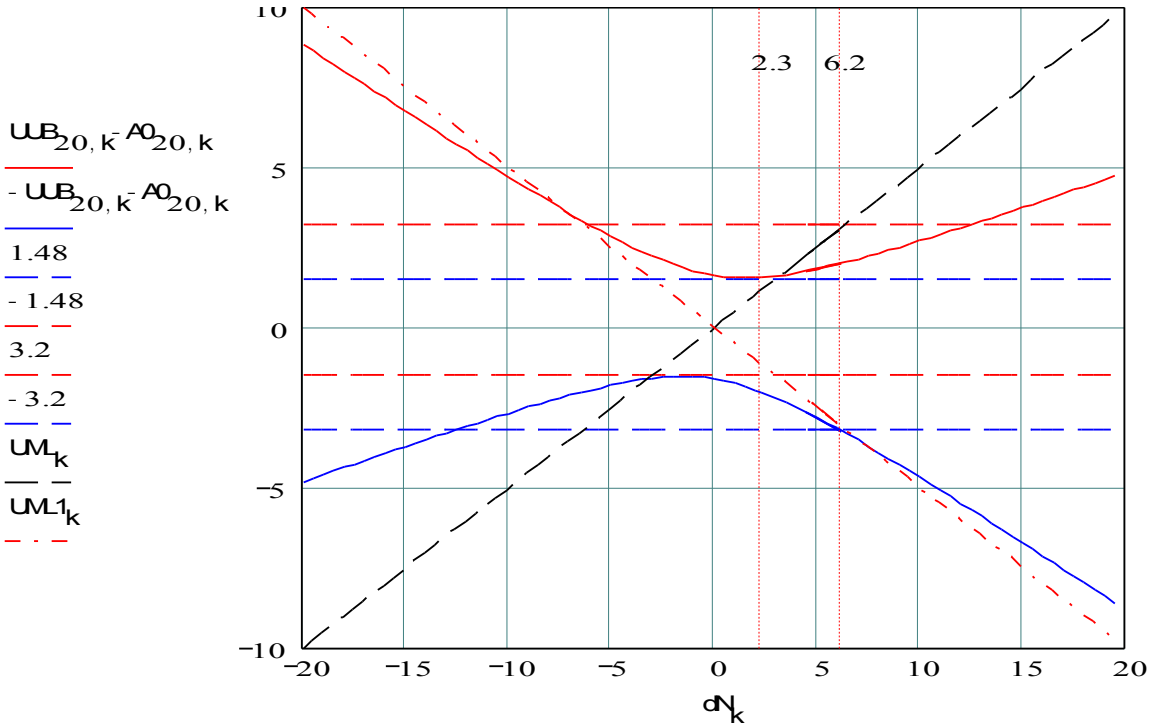

Рис. 2.20. Зависимость несимметричных порогов от значения дефлекции при $\nu^2 = 0{,}1$

MONOGRAPH\Det_Posobie3\Mathcad_2\NBA_3_3_1.mcd