2.2. Моделирование обнаружения сдвига гауссовского распределения

Рассмотрим эффективность применения различных порогов при обнаружении сдвигов математического ожидания на шумовом гауссовском поле, которое изображено на рис. 2.8. Шумовое поле содержит области, в которых имеются сдвиги распределения шума.

Математические ожидания шума различны для четырех прямоугольных областей шумового поля, показанных на рис. 2.9. Исходное шумовое поле сформировано при следующих значениях математических ожиданий: $m_0 = 0$ (в первой и третьей областях), $m_1 = 2{,}584$ (во второй), $m_2 = -2{,}584$ (в четвертой). Изменение математического ожидания на вертикальном сечении исходного шумового поля показано на рис. 2.10. Дисперсия гауссовского шума равна $\sigma_0^2 = 100$. Изображения, представленные на рисунках, включают необходимые масштабные преобразования исходного шумового поля с тем, чтобы отобразить случайные величины в положительной области яркостей.

Для формирования решающей статистики осуществлялось линейное накопление исходного шумового поля в скользящем окне 9×9 (представляющем маску S_{ij}), так что размер выборки оказался равным $N = 81$. Результат накопления (текущее среднее арифметическое в окне) представляет решающую статистику $\bar{y}_{i,j} = (1/N)\sum_{S_{ij}} y_{i,j}$ и показан на рис. 2.11. Нормированная статистика равна $u_{i,j} = \bar{y}_{i,j}\sqrt{N}/\sigma_0$. Дефлекция решающей статистики (отношение сигнал/шум на выходе накопителя) в первой и третьей областях $d_N = 0$, во второй области она равна $d_N = 2{,}326$, а в четвертой $d_N = -2{,}326$.

Далее приводится сравнительный анализ выборочных характеристик для различных алгоритмов. Значения выборочных характеристик, полученные в результате моделирования, помечены «~» (тильдой).

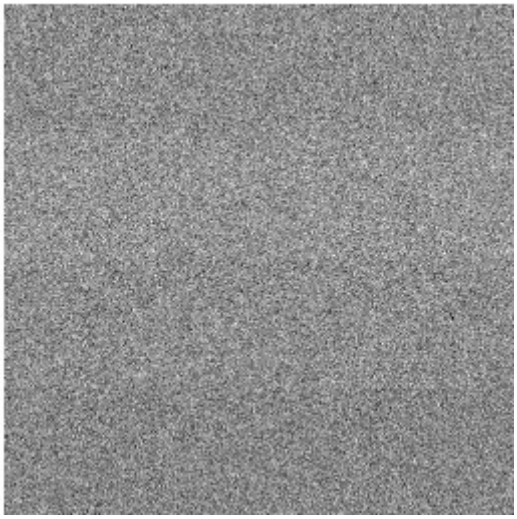


Рис. 2.8. Шумовое поле, содержащее сдвиги математического ожидания

E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Thresh_0.mcd

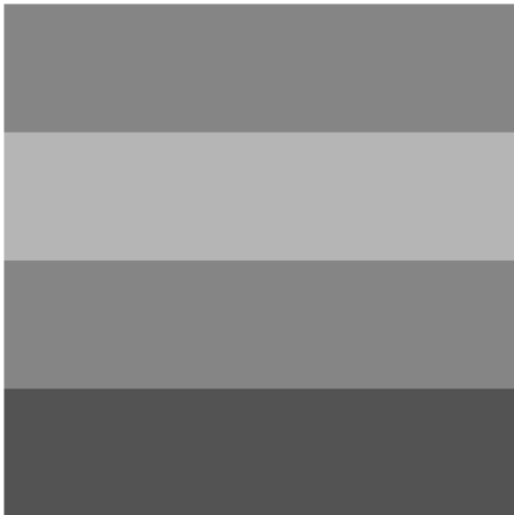


Рис. 2.9. Уровни математических ожиданий в различных областях шумового поля

E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Thresh_0.mcd

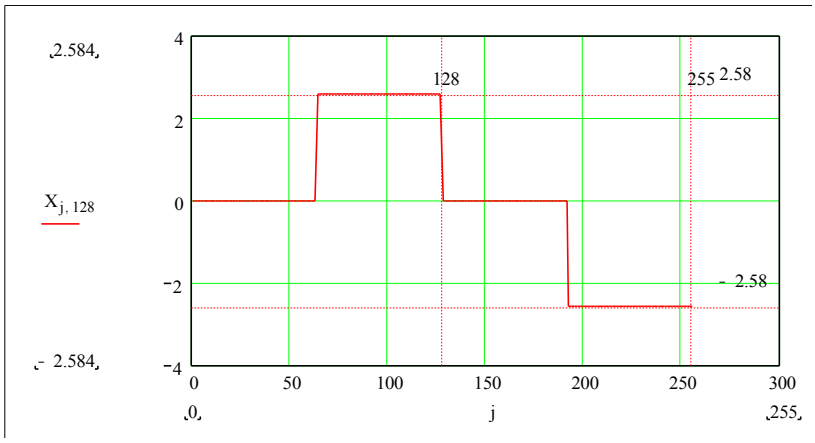


Рис. 2.10. Изменение математического ожидания по вертикальному сечению рис. 2.9

E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Thresh_0.mcd

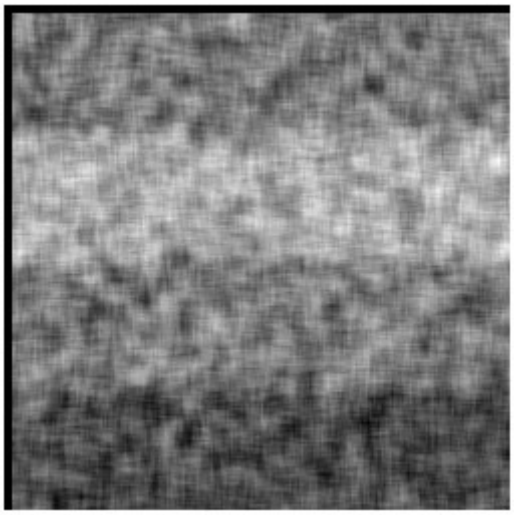


Рис. 2.11 Результат линейного накопления в скользящем окне 9x9

E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Thresh_0.mcd

Таблица 2.4

	F_1	D_1	$p_{\Sigma 1}$	F	D	p_Σ
$U_{NP} = 2{,}326$ $Y_{NP} = 2{,}584$	0,01	0,5	0,255	0,01	0,25	0,38
$U_{ML} = 1{,}163$ $Y_{ML} = 1{,}292$	0,122	0,878	0,122	0,122	0,439	0,342
$U'_{ML} = 3{,}09$ $Y'_{ML} = 3{,}433$	0,001	0,222	0,389	0,001	0,111	0,445

NBA_3_2_4.mcd

На рис. 2.12 и 2.13 представлены результаты пороговой обработки с помощью односторонних порогов, рассчитанных на обнаружение положительного сдвига. Значения порогов для статистик $u_{i,j}$ и $\bar{y}_{i,j}$, а также расчетные значения характеристик обнаружения приведены в табл. 2.4.

Значения F_1, D_1 и $p_{\Sigma 1}$ соответствуют обнаружению положительного сдвига с $d_N = 2{,}326$ по первым двум областям поля, а значения F, D и p_Σ представляют средние характеристики по всему полю для положительного сдвига с $d_N = 2{,}326$ и отрицательного сдвига с $d_N = -2{,}326$.

Односторонний порог Неймана–Пирсона $U_{NP} = 2{,}326$ или $Y_{NP} = U_{NP}\sigma_0 / \sqrt{N} = 2{,}326 \cdot 10/9 = 2{,}584$ выбран так, чтобы обеспечить вероятность ложной тревоги при отсутствии сдвига $F = 0{,}01$.

Этот порог дает теоретические вероятности правильного обнаружения $D_1 = 0{,}5$ и вероятность ошибки $p_{\Sigma 1} = 0{,}255$ при положительном сдвиге и указанной дефлекции $d_N = 2{,}326$ (рис. 2.12).

В этом случае измеренные характеристики оказались равными $\tilde{F}_1 = 0{,}015$, $\tilde{D}_1 = 0{,}503$, а суммарная вероятность ошибки $\tilde{p}_{\Sigma 1} = 0{,}256$. Однако отрицательные сдвиги с $d_N = -2{,}326$ не обнаруживались, что уменьшило среднюю вероятность правильного обнаружения по всему полю до значения $\tilde{D} = 0{,}252$ и увеличило суммарную ошибку до $\tilde{p}_{\Sigma} = 0{,}381$.

Байесовский односторонний порог $U_B = 1{,}163$ или $Y_B = 1{,}292$ позволяет уменьшить теоретическую вероятность ошибки при обнаружении положительного сдвига до значения $p_{\Sigma 1} = 0{,}122$, обеспечивая $F_1 = 0{,}122$ и $D_1 = 0{,}878$. Измеренные значения оказались равными $\tilde{F}_1 = 0{,}013$, $\tilde{D}_1 = 0{,}85$ и $\tilde{p}_{\Sigma 1} = 0{,}14$. Однако для двусторонней альтернативы $d_N = \pm 2{,}326$ отрицательные сдвиги также не обнаруживались, что уменьшило вероятность правильного обнаружения по всему полю до значения $\tilde{D} = 0{,}425$ и увеличило суммарную ошибку до $\tilde{p}_{\Sigma} = 0{,}357$ (рис. 2.13).

Если байесовский порог рассчитывается на другое значение дефлекции $d'_N = (\vartheta - m_0)\sqrt{N} / \sigma_0 = 6{,}18$, то он оказывается равным $U'_B = 3{,}09$, или $Y'_B = 3{,}433$. При фактическом значении $d_N = (m_{1И} - m_0)\sqrt{N} / \sigma_0 = 2{,}326$ это приводит к возрастанию вероятности ошибки. Измерения для положительного сдвига показали $\tilde{F}_1 = 0{,}002$, $\tilde{D}_1 = 0{,}23$, $\tilde{p}_{\Sigma 1} = 0{,}386$, т. е. вероятность ошибки выросла более чем в два раза вследствие высокой чувствительности рассматриваемого алгоритма к изменению порога.

Для двусторонней альтернативы $d_N = \pm 2{,}326$ вероятность правильного обнаружения падает до $\tilde{D} = 0{,}115$, а вероятность ошибки увеличивается до $\tilde{p}_{\Sigma} = 0{,}443$.

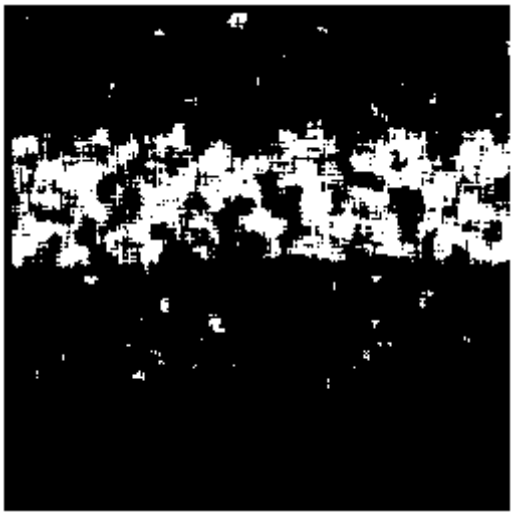


Рис. 2.12. Обнаружение с односторонним порогом Неймана-Пирсона
E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Thresh_0.mcd

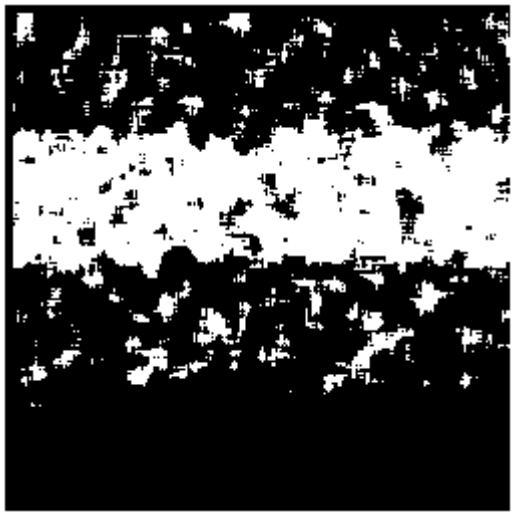
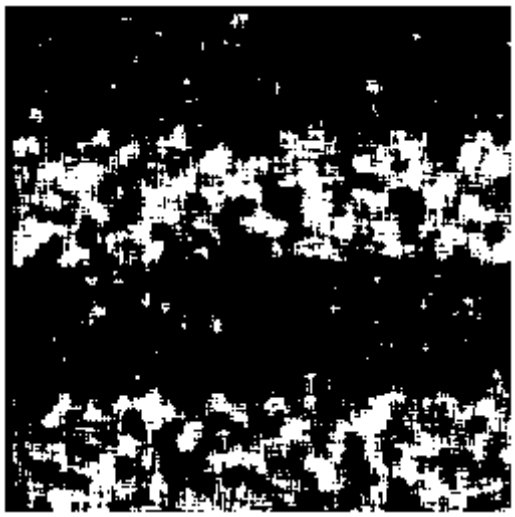


Рис. 2.13. Обнаружение с односторонним байесовским порогом
E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Thresh_0.mcd



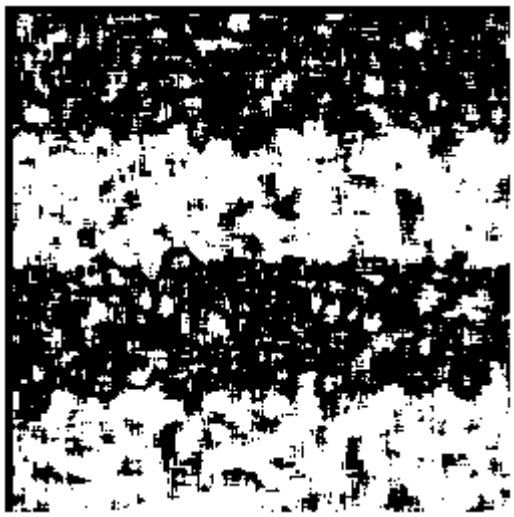


Рис. 2.14. Обнаружение с двусторонним порогом Неймана–Пирсона
E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Thresh_0.mcd

Рис. 2.15. Обнаружение с двусторонним байесовским порогом
E:\Mathcad\Image\Two-change\N1_Ch2_9x9_Thresh_0.mcd

На рис. 2.14 и 2.15 показана работа двусторонних порогов, которые успешно обнаруживают сдвиги обоих знаков при $d_N = \pm 2{,}326$. Теоретические значения характеристик обнаружения приведены в табл. 2.5, где последняя строчка содержит пороги для значения $d'_N = \pm 6{,}18$.

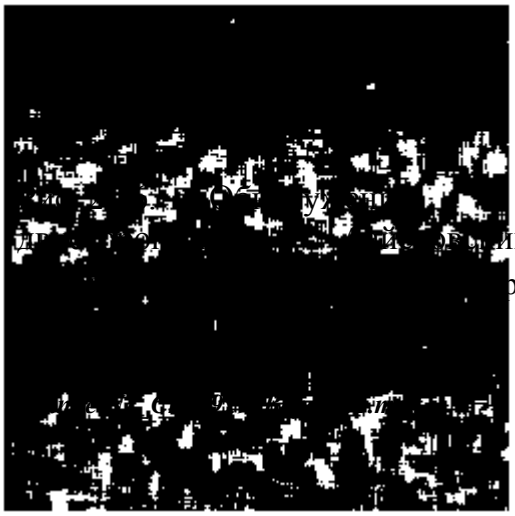
Таблица 2.5

	F	D	p_Σ
$U_{NP2} = 2{,}576$ $Y_{NP2} = 2{,}862$	0,01	0,401	0,304
$U_{ML2} = 1{,}48$ $Y_{ML2} = 1{,}644$	0,139	0,801	0,169
$U'_{ML2} = 3{,}2$ $Y'_{ML2} = 3{,}556$	0,001	0,191	0,405

Двусторонний порог Неймана–Пирсона $U_{NP2} = 2{,}576$ или $Y_{NP2} = 2{,}862$ обеспечивает теоретические вероятности $F = 0{,}01$, $D = 0{,}401$ и $p_\Sigma = 0{,}304$. Измерения по всему полю (рис. 2.14) показали $\tilde{F} = 0{,}017$, $\tilde{D} = 0{,}375$ и $\tilde{p}_\Sigma = 0{,}321$. Уменьшение вероятности правильного обнаружения по сравнению с односторонним порогом представляет собой плату за несмещенность алгоритма (рис. 2.12).

Двусторонний симметричный байесовский порог максимального правдоподобия $U_{ML2} = 1{,}48$ или $Y_{ML2} = 1{,}644$ также обеспечивает несмещенность (рис. 2.15) и дает следующие теоретические характеристики обнаружения: $F = 0{,}139$, $D = 0{,}801$ и $p_\Sigma = 0{,}169$. В результате измерения по полю имеем $\tilde{F} = 0{,}155$, $\tilde{D} = 0{,}774$ и вероятность ошибки $\tilde{p}_\Sigma = 0{,}191$.

Если порог максимального правдоподобия рассчитывается на значение $d'_N = \pm 6{,}18$, т. е. $U'_{ML2} = 3{,}2$, $Y'_{ML2} = 3{,}556$, характеристики при $d_N = \pm 2{,}326$ также оказываются хуже, чем для двустороннего порога Неймана–Пирсона: $F = 0{,}0013$, $D = 0{,}191$ и $p_\Sigma = 0{,}405$. Измерения показали $\tilde{F} = 0{,}0026$, $\tilde{D} = 0{,}168$, $\tilde{p}_\Sigma = 0{,}417$. Соответствующее ухудшение качества обнаружения сдвигов отражено на рис. 2.16.



с
им
ри

Моделирование подтверждает существенное влияние величины и знака сдвига на качество обнаружения.

Далее будет показано, как можно учесть дополнительную априорную информацию о сдвиге, используя априорное распределение и байесовский подход преодоления априорной неопределенности [1], в целях повышения устойчивости алгоритма обнаружения к изменению величины сдвига.