2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГАУССОВСКИХ ЗАДАЧ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

2.1. Обнаружение неизвестного сдвига гауссовского распределения

Рассмотрим задачу обнаружения сдвига распределения [1] по выборке из N независимых значений $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ с гауссовскими распределениями: $H_0 : y_k \sim N(m_0, \sigma_0^2)$, $H_1^{(1)} : y_k \sim N(m_1, \sigma_0^2)$, $k = 1, \dots, N$.

Задача содержит три параметра: m_0, σ_0^2 и сдвиг $\Delta = m_1 - m_0$. Рассмотрим случай обнаружения неизвестного сдвига Δ при известных значениях m_0 и σ_0^2. Как подчеркивалось в [7], информация о знаке сдвига является весьма существенной, поэтому случаи известного и неизвестного знака рассмотрены отдельно.

Обнаружение сдвига известного знака

При известном знаке сдвига, например, для $\Delta > 0$, оптимальный (по любому известному критерию) обнаружитель получается из отношения правдоподобия. Он включает линейное накопление $\bar{y} - m_0 \geq Y_T$, где $\bar{y} = \sum_{k=1}^{N} y_k / N$ – среднее арифметическое, а порог Y_T рассчитывается исходя из выбранного критерия оптимальности (рис.2.1).

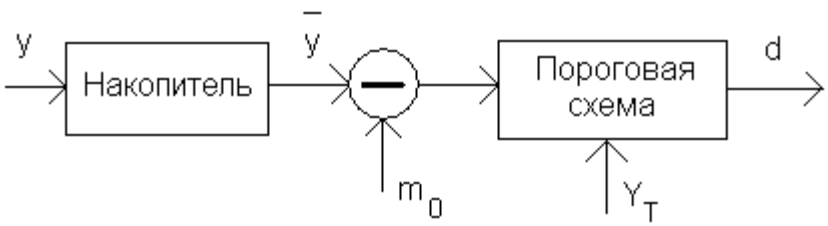

Рис. 2.1. Структура обнаружителя сдвига известного знака

Порог по критерию Неймана–Пирсона $Y_{NP} = c_F \sigma_0 / \sqrt{N}$ рассчитывается через $(100 \cdot F)$– процентную точку стандартного нормального распределения c_F. Для удобства часто используется нормированная форма алгоритма обнаружения $u_1 \geq U_{NP}$, где решающая статистика $u_1 = \sqrt{N}(\bar{y} - m_0)/\sigma_0$ имеет при гипотезе H_0 стандартное нормальное распределение $N(0,1)$, а порог $U_{NP} = c_F$.

Пороги U_{NP} и Y_{NP} являются *односторонними.* Алгоритм обнаружения $\bar{y} - m_0 \geq Y_{NP}$ оказывается *равномерно наиболее мощным* (РНМ), обеспечивающим наибольшую вероятность правильного обнаружения для различных значений положительных сдвигов.

Для критерия Неймана-Пирсона неизвестная величина положительного сдвига не является существенным параметром и не влияет на структуру оптимального алгоритма. Однако существенным остается знак сдвига Δ . Если на самом деле сдвиг отрицателен, то этот алгоритм оказывается *смещенным*, т. е. вероятность правильного обнаружения при наличии сдвига будет меньше, чем вероятность ложной тревоги при отсутствии сдвига [1].

Выходное отношение сигнал/шум по напряжению определяется как *дефлекция* решающей статистики, т. е. отношение разности математических ожиданий при двух гипотезах к среднеквадратическому значению при отсутствии сигнала. В данном случае дефлекция $d_N = \sqrt{N}(m_1 - m_0)/\sigma_0$ является *параметром обнаружения*. Отсюда следует, что величина сдвига и его знак являются значимыми параметрами, влияющими на характеристики обнаружения.

Для байесовских критериев оптимальности возникают трудности с установкой порога, зависящего от Δ , даже если известен знак сдвига. Оптимальный алгоритм для известного сдвига $\Delta > 0$ имеет вид $u_1 \geq U_B$, где односторонний байесовский порог

$$U_B = d_N / 2 + \ln \Lambda_B / d_N = \\ = (m_1 - m_0)\sqrt{N} / 2\sigma_0 + (\sigma_0 / \sqrt{N}) \ln \Lambda_B / (m_1 - m_0)$$.

Для ненормированной формы алгоритма $\bar{y} - m_0 \geq Y_B$ порог равен $Y_B = (m_1 - m_0)/2 + (\sigma_0^2 / N) \ln \Lambda_B / (m_1 - m_0)$. Здесь Λ_B есть байесовский порог для отношения правдоподобия [1].

В случае критерия максимального правдоподобия $\ln \Lambda_{ML} = 0$, и байесовские пороги выражаются формулами $U_{ML} = d_N / 2$ и $Y_{ML} = (m_1 - m_0)/2$.

Зависимости *суммарной вероятности ошибки* $p_\Sigma = (F + 1 - D)/2$ (среднего риска для критерия максимального правдоподобия) от порога U_T для алгоритма $u_1 \geq U_T$ представлены на рис. 2.2.

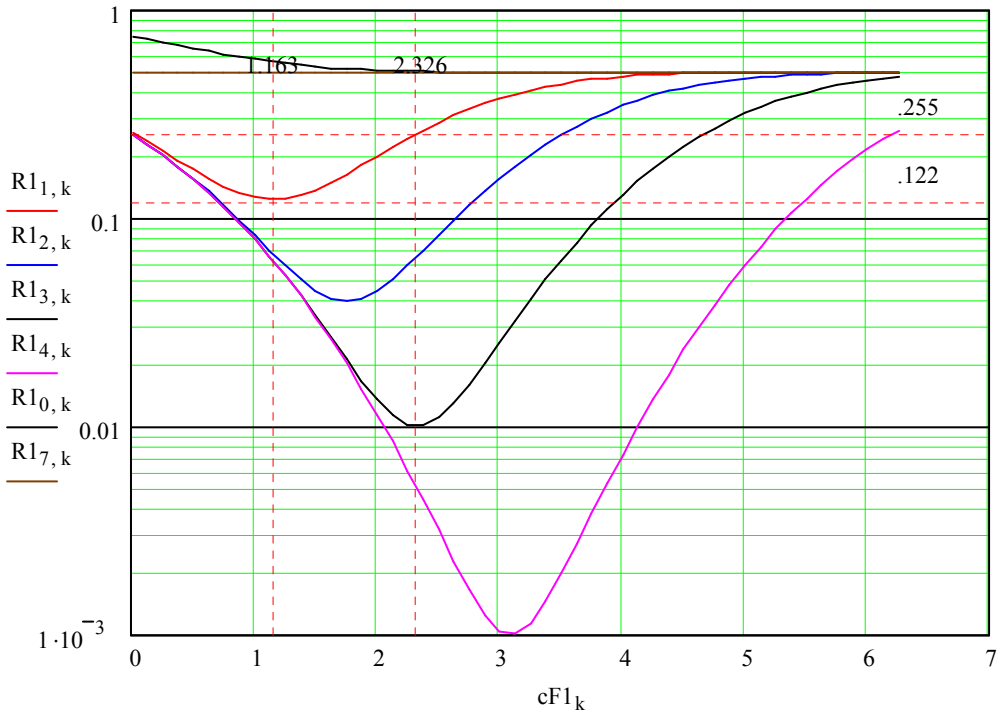

Рис. 2.2. Зависимости суммарной вероятности ошибки от значения одностороннего порога

MONOGRAPH\...\Bayes_Two-sided_Threshold_1.mcd

Табл. 2.1

Дефлекция решающей статистики d_N	Порог максимального правдоподобия $U_{ML} = d_N / 2$	Минимальная ошибка p_Σ для порога U_{ML}	Суммарная ошибка p_Σ для порога Неймана–Пирсона $U_{NP} = 2{,}326$
2,326	1,163	0,122	0,255
3,5	1,75	0,04	0,065
4,652	2,326	0,01	0,01
6,18	3,09	0,001	0,005

Линии 1–4 соответствуют положительным сдвигам и значениям $d_N = 6{,}18$, $d_N = 4{,}652$, $d_N = 3{,}5$ и $d_N = 2{,}326$. Минимальные вероятности ошибки достигаются при байесовских порогах $U_{ML} = d_N / 2$, а для отличных от них порогов Неймана–Пирсона вероятности ошибки имеют большие значения. Горизонтальная линия 5 соответствует нулевому сдвигу $d_N = 0$ и постоянной вероятности ошибки $0{,}5$, а линия 6 показывает рост риска смещенного алгоритма в случае отрицательного сдвига $d_N = -2{,}326$.

Если значение сдвига неизвестно, то неизвестны и значения $m_1 = m_0 + \Delta$ или дефлекции $d_N = \sqrt{N} \cdot \Delta / \sigma_0$, входящие в байесовский порог. Это приводит к неточности задания порога, что вызывает рост суммарной вероятности ошибки [1].

Некоторые значения суммарной вероятности ошибки приведены в табл. 2.1. Если оптимальный байесовский порог отличается от порога Неймана–Пирсона, то он обеспечивает выигрыш в значении суммарной вероятности ошибки.

На рис. 2.1.3 показано влияние дефлекции d_N на вероятность ошибки при разных значениях порога: $U_T = 1{,}163$ – кривая 1, $U_T = 1{,}75$ – кривая 2, $U_T = 2{,}326$ – кривая 3, $U_T = 3{,}09$ – кривая 4. Штриховая линия показывает значения байесовских рисков (минимальных ошибок). Каждая сплошная линия имеет точку касания со штриховой линией для значения дефлекции, равного $2U_T$.

Представляющие практический интерес значения вероятности правильного обнаружения лежат обычно в диапазоне от $0{,}5$ до $0{,}99$. Соответствующие *пороговые* значения дефлекции попадают в интервал от $2{,}33$ до $4{,}65$, который выделен на рисунке.

Оказывается, что для алгоритма обнаружения $u_1 \geq U_T$ нельзя указать значение порога U_T, обеспечивающее равномерно наименьшую ошибку при изменении дефлекции в указанном интервале.

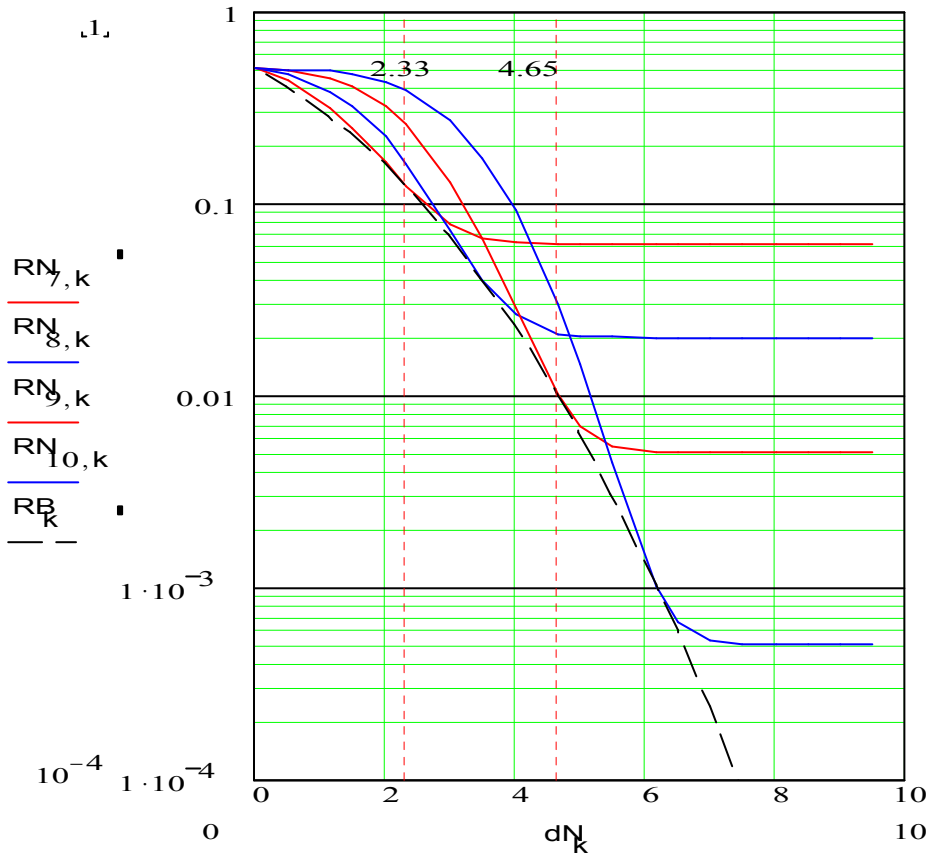

Рис. 2.3. Зависимости суммарной вероятности ошибки от дефлекции решающей статистики

MONOGRAPH\...\nBA_3_2_3_1.mcd

Обнаружение и различение сдвига неизвестного знака

Если знак сдвига не известен, то для различения (или для двухальтернативного обнаружения) сдвигов алгоритм должен иметь два симметричных порога. Решение d^+ о положительном сдвиге принимается при $\bar{y} - m_0 \geq Y_{T2}$, а решение d^- – в случае $\bar{y} - m_0 \leq -Y_{T2}$. Соответствующая структура изображена на рис. 2.4.

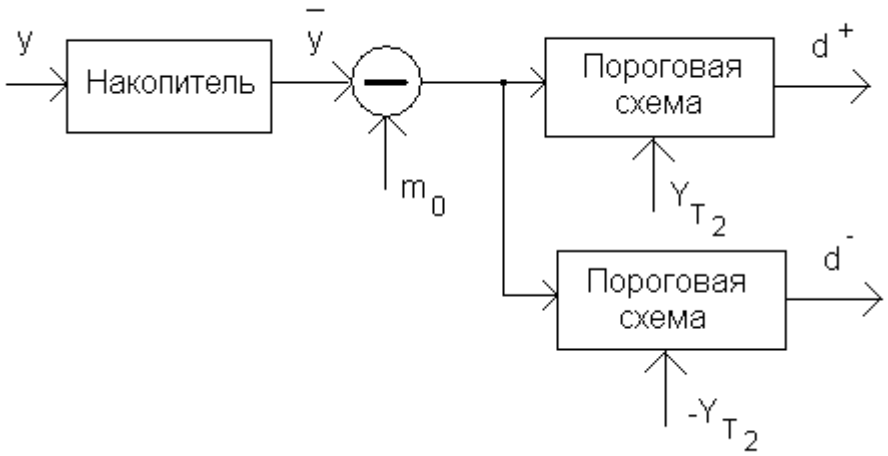

Рис. 2.4. Структура различителя сдвигов разных знаков

При решении задачи обнаружения сдвига для всех возможных изменений $\Delta \neq 0$, или для $m_1 \neq m_0$ не существует равномерно наиболее мощного (РНМ) решающего правила для проверки гипотезы $H_0 : \Delta = 0$ против сложной двусторонней альтернативы. Однако для критерия Неймана-Пирсона существует РНМ алгоритм обнаружения среди *несмещенных* решающих правил, и он имеет вид [10]:

$$|u_1| \geq c_{F/2}.$$

Вместо абсолютной величины можно использовать квадратичное преобразование $u_1^2 \geq c_{F/2}^2$. Здесь $c_{F/2}$ – процентная точка, соответствующая вероятности $F/2$. Ее значения приведены в табл. 2.2 вместе со значениями процентных точек c_F, которые входят в пороги для односторонней альтернативы.

В общем виде алгоритм обнаружения $|u_1| \geq U_{T2}$ эквивалентен варианту с *двусторонним* симметричным порогом. При этом решение d_1 принимается в случае $u_1 \geq U_{T2}$ или $u_1 \leq -U_{T2}$.

Таблица 2.2

F	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
c_F	2,326	3,09	3,719	4,265	4,753
$c_{F/2}$	2,576	3,291	3,891	4,417	4,892

График зависимости суммарной вероятности ошибки $p_\Sigma = (F + 1 - D)/2$ от значения двустороннего порога U_{T2} для алгоритма $|u_1| \geq U_{T2}$ при $d_N = 2{,}326$ представлен на рис. 2.5 сплошной линией. Для сравнения пунктиром показана соответствующая зависимость для одностороннего порога. Минимальная вероятность ошибки увеличилась с 0,122 ($F = 0{,}122$, $D = 0{,}878$) до 0,169 ($F = 0{,}139$, $D = 0{,}801$).

Некоторое увеличение вероятности ошибки представляет плату за *несмещенность* и способность обнаруживать сдвиги обоих знаков, т. е. за инвариантность к знаку сдвига.

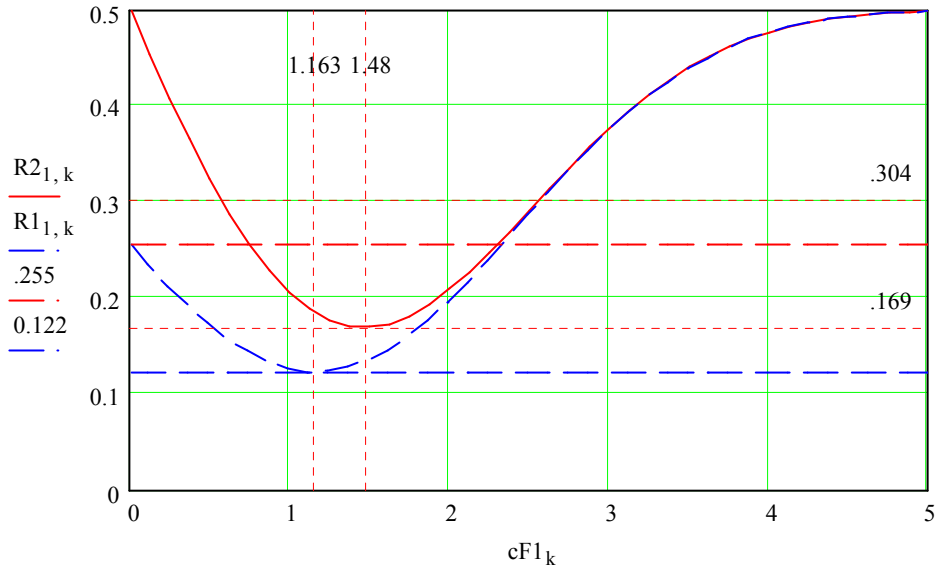

Рис. 2.5. Зависимости суммарной вероятности ошибки от значения порога

MONOGRAPH\Det_Posobie3\Mathcad_2\Bayes_Two-sided_Threshold.mcd

С увеличением отношения сигнал/шум байесовский минимум вероятности ошибки сдвигается, как и в первом случае, в сторону больших значений порога. На рис. 2.6 линии 1–4 соответствуют следующим значениям $d_N = \pm 6{,}18$; $\pm 4{,}652$; $\pm 3{,}5$; $\pm 2{,}326$. Штриховые линии показывают характеристики соответствующих однопороговых алгоритмов (рис. 2.2).

Горизонтальная штриховая линия показывает ошибку $p_\Sigma = 0{,}405$ для двустороннего порога Неймана–Пирсона $U_{NP2} = 3{,}2$, при этом $F = 0{,}00137$ и $D = 0{,}191$.

Минимумы вероятности ошибки соответствуют двусторонним байесовским порогам U_{ML2} по критерию максимального правдоподобия, значения которых несколько бóльшие, чем значения для односторонних порогов.

В табл. 2.3 приведены значения двусторонних порогов и минимальные вероятности ошибки при их использовании. Чувствительность байесовских алгоритмов с двусторонними порогами к установке оптимального значения порога оказывается практически такой же, как у однопороговых.

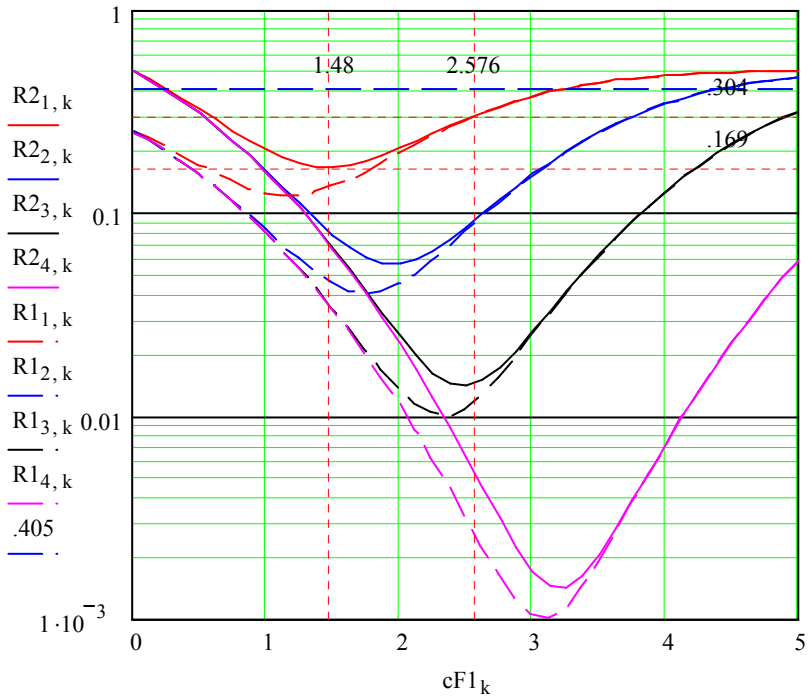

Рис. 2.6. Зависимости суммарной вероятности ошибки от значения двустороннего порога

D:\Mathcad\Image\Change\ \Image_Ch_N1\Bayes\Thresholds_1.mcd
D:\Mathcad\Image\...\Image_Ch_N1\Bayes\Bayes_Two-sided_Threshold.mcd
MONOGRAPH\Det_Posobie3\Mathcad_2\Bayes_Two-sided_Threshold.mcd

Таблица 2.3

Дефлекция решающей статистики d_N	Двусторонний порог максимального правдоподобия U_{ML2}	Минимальная ошибка p_Σ для порога U_{ML2}	Суммарная ошибка p_Σ для порога Неймана-Пирсона $U_{NP2} = 2{,}576$
$\pm 2{,}326$	1,48	0,169	0,304
$\pm 3{,}5$	1,95	0,056	0,094
$\pm 4{,}652$	2,48	0,014	0,0145
$\pm 6{,}18$	3,2	0,0014	0,0051

На рис. 2.7 показано влияние дефлекции d_N на вероятность ошибки двухпороговых алгоритмов при разных значениях порога: $U_{T2} = 1{,}48$ – кривая 1, $U_{T2} = 2{,}576$ – кривая 2, $U_{T2} = 3{,}2$ – кривая 3. Аналогичные кривые для однопороговых алгоритмов представлены штриховыми линиями.

Пороговые дефлекции для алгоритма $|u_1| \geq U_{T2}$ оказываются несколько бо′льшими, чем в предыдущем случае. Интервал значений, представляющих практический интерес, выделен на рисунке. Как и ранее, нельзя указать единственное значение U_{T2}, обеспечивающее равномерно наименьшую ошибку в указанном интервале.

Таким образом, в задаче обнаружения сдвига гауссовского распределения значения оптимальных порогов существенно зависят от априорной информации относительно возможных значений сдвига. Неточность установки порогов существенно увеличивает вероятность ошибки. Чувствительность обнаружителей к неточности установки порога вследствие неизвестного сдвига является неприятным свойством, поэтому задачей является разработка более устойчивых структур.

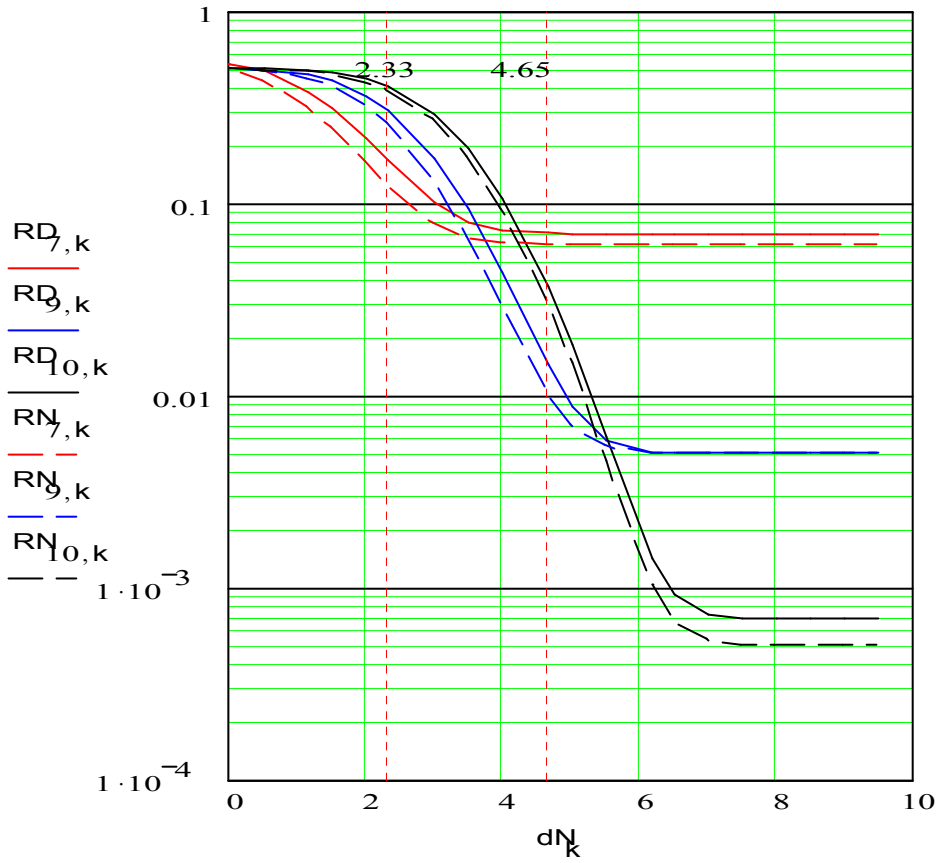

Рис. 2.7. Вероятности ошибки двухпороговых и однопороговых тобнаружителей
\nBA_3_2_3_1.mcd