1.3 Параметрические и непараметрические задачи обнаружения и различения сигналов

Параметрические задачи связаны с использованием *параметрических моделей* для событий и наблюдений. Параметрические модели могут быть двух видов. Одни представляют *прямое* описание случайного процесса, например, через стохастическое дифференциальное или разностное уравнение. Прямой метод связан с использованием так называемого «формирующего» фильтра. Другие модели используют *косвенное* описание посредством плотностей вероятности $f_i(y,\theta)$ для каждой i - й гипотезы, где θ – набор параметров (иногда используют термин *вектор*, что предусматривает введение некоторого математического пространства), который может быть различным для разных гипотез. Гипотеза H_0 об отсутствии сигнала заключается в том, что плотность распределения вероятности наблюдения имеет вид $f_0(y,\theta)$ и зависит лишь от «помеховой» части вектора θ.

Простая гипотеза полностью определяет значения параметров модели, например $H_i : \theta = \theta_i,\ i = 0,1,...,M-1.$ В частности, для нулевой гипотезы H_0 можно положить $\theta_0 = 0$ (нуль-вектор).

Сложная гипотеза оставляет неопределенными часть параметров, т. е. она представляет целый класс простых гипотез. В частности, сложная гипотеза для скалярного параметра θ может быть *односторонней* $H_i : \theta > \theta_i$ или *двусторонней* $H_j : \theta \neq \theta_j$.

Классический алгоритм обнаружения $\Lambda(y) \geq \Lambda_T$ бывает невозможно построить без задания значений некоторых неизвестных параметров. Такие параметры являются *существенными*. Если выбран критерий оптимальности и найдено оптимальное решающее правило (алгоритм обработки) для различения простых гипотез, то это правило обычно неудовлетворительно работает для сложных гипотез. Это проявляется в изменениях вероятностей ошибок и в увеличении среднего риска при отклонениях параметров от номинальных значений. Степень изменений характеристик алгоритма определяет *значимость* того или иного параметра.

Часто среди параметров θ выделяют *полезные* (информативные) λ и *мешающие* (неинформативные) ϕ. Значения мешающих параметров проверяемой гипотезой не определяются [6]. По-

скольку распределения решающих статистик включают мешающие параметры, то вероятности ошибок обнаружения будут условными, зависящими от значений этих параметров. Изменения мешающих параметров будут приводить к изменениям рабочих характеристик и характеристик обнаружения.

Для байесовского критерия оптимальности средний риск $R(\theta;\delta)$ зависит от параметра модели θ и используемого решающего правила δ. *Минимум среднего риска* (байесовский риск) для определенного значения параметра достигается применением оптимального алгоритма (который называется байесовским) $\delta_B(\theta)$, тогда байесовский риск $R_B(\theta) = R(\theta;\delta_B) = \min\limits_{\delta} R(\theta;\delta)$.

Если истинное значение $\theta_И$ параметра распределения отличается от значения θ, которое использовалось при построении алгоритма, то средний риск $R(\theta_И;\delta(\theta))$ возрастает по сравнению с байесовским риском. В качестве меры *значимости* параметра (*устойчивости* или *чувствительности* решающего правила $\delta(\theta)$ к изменениям параметра модели) можно ввести *относительное увеличение* среднего риска $\zeta_R(\theta_И,\theta) = \{R(\theta_И;\delta(\theta)) - R_B(\theta_И)\}/R_B(\theta_И)$.

Для критерия Неймана–Пирсона вероятность ложной тревоги (ВЛТ) $F(\theta_И;\delta(\theta))$ и вероятность правильного обнаружения (ВПО) $D(\theta_И;\delta(\theta))$ оказываются условными, и зависят от неизвестного значения $\theta_И$.

Степень влияния параметра или чувствительность алгоритма можно также характеризовать относительными изменениями этих вероятностей. Если некоторый алгоритм оказывается *наиболее мощным* (обладает наибольшей ВПО при заданной ВЛТ) при всех значениях мешающего параметра, то он называется *равномерно наиболее мощным* (РНМ). В этом случае параметр оказывается *несущественным*, так как его изменение не меняет структуры алгоритма. Поскольку безусловные РНМ решающие правила существуют весьма редко, обычно ищутся РНМ алгоритмы в ограниченных классах правил.

Среди множества параметров плотностей вероятности выделяют параметры *сдвига* и *масштаба*. Плотности, обладающие такими параметрами, представляются в виде $f((y-\mu)/\beta)$, где μ и β обозначают соответственно сдвиг и масштаб наблюдения. Другие параметры являются параметрами *формы* плотности. Для симметричных плотностей сдвиг совпадает с математическим

ожиданием и с медианой распределения. В ряде случаев, например при ограниченных областях значений наблюдений y, параметр сдвига плотности отдельно указать невозможно. Такие распределения также могут содержать параметры, влияющие на границы областей изменения переменной.

Обнаружение и различение сигналов при параметрической априорной неопределенности тесно связано с *оцениванием* неизвестных параметров плотностей. Следует отметить, что *задача оценивания* является *более общей* и более сложной по отношению к задаче обнаружения и различения. Последнюю задачу можно рассматривать как оценивание *дискретного* параметра λ, принимающего конечное множество значений. При обнаружении этот параметр $\lambda = 0$ в отсутствии сигнала и $\lambda = 1$ при его наличии.

Неизвестные параметры плотностей в большинстве случаев являются непрерывными. Один из общих подходов к решению задачи в условиях неопределенности включает оценивание неизвестных параметров по основной или обучающей выборке и использование полученных оценок вместо неизвестных значений. Близость оценок к истинным значениям существенно влияет на качество обнаружения и различения.

Оценки неизвестных параметров бывают *точечными* и *интервальными*. В первом случае оценка указывает значение параметра. Эта величина является случайной, поскольку формируется в результате обработки наблюдений. Во втором случае указывается случайный интервал значений, в котором истинное значение параметра находится с заданной вероятностью, либо неслучайный интервал, в который с заданной вероятностью попадает случайный параметр.

Свойства точечных оценок изучены в гораздо большей степени, чем свойства интервальных. Качество оценки определяется введенным *критерием оценивания*, т. е. скалярным неслучайным показателем, экстремум которого обеспечивается *оптимальной* оценкой. Часто используются *несмещенные* оценки, математическое ожидание которых совпадает с истинным значением.

В зависимости от случайной или неслучайной природы параметра применяются *байесовские* или *условно-экстремальные* критерии качества оценивания. Наиболее распространенными критериями оценивания являются *минимум среднего квадрата ошибки* и *минимум дисперсии несмещенной оценки*. Последний критерий характеризует *эффективные* оценки.

Эффективные оценки при конечных выборках существуют далеко не всегда. Нахождение эффективной оценки облегчается в случаях, когда относительно параметра θ существует *достаточная статистика* $u(y)$. При этом плотность распределения *фак-*

торизуется, т. е. представляется в виде произведения двух функций: $f(y,\theta) = g(u,\theta)h(y)$. Одна из этих функций зависит от наблюдений, но не зависит от параметра, а вторая зависит от параметра, но от наблюдений зависит только через достаточную статистику.

Трудности формирования оптимальных оценок приводят к использованию различных *методов оценивания*, которые, вообще говоря, не дают оптимальности оценки. К таким методам относятся:

– *метод максимального правдоподобия*,
– *методы наименьших квадратов* и *наименьших модулей*,
– *метод минимума хи-квадрат,*
– *метод моментов,* и ряд других.

Если не удается получить строго оптимальную оценку, то желательно получить ее хорошие асимптотические свойства. Качество оценки обычно улучшается с увеличением числа выборок N. Оценка θ_N^* будет *состоятельной*, если при $N \to \infty$ последовательность оценок $\{\theta_N^*\}$ *сходится* к истинному значению *по вероятности*, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty} P[|\theta_N^* - \theta_И| > \varepsilon] = 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Сходимость по вероятности не слишком сильная. Она не означает, что каждая последовательность случайных оценок стремится к истинному значению. Сходится лишь последовательность *вероятностей* больших уклонений оценок от истинного значения. Более узкий класс составляют *асимптотически несмещенные*, *асимптотически эффективные* и *асимптотически достаточные* оценки. Часто такие оценки оказываются *асимптотически нормальными*, т. е. их предельное распределение стремится к гауссовскому.

В условиях малой информации об аналитическом виде плотности вероятности наблюдений большой практический интерес представляют выборочные начальные и центральные моменты. Выборочные начальные и центральные моменты вычисляются по формулам:

$$a_n = \sum y_k^n / N, \qquad b_n = \sum (y_k - \bar{y})^n / N.$$

Свойства этих статистик зависят от вида распределения $f(y)$. Известно, что среднее арифметическое является достаточной статистикой для математического ожидания в широком классе распределений, включающем гауссовское, экспоненциальное, пуассоновское и др.

Для выборки из гауссовского распределения совместно достаточные оценки $\bar{y} = \sum y_k / N$ и $s^2 = \sum (y_k - \bar{y})^2 / N$ взаимно неза-

висимы. Несмещенной оценкой дисперсии является $s'^2 = \sum (y_k - \bar{y})^2 / (N-1)$.

Важность параметрических моделей заключается в возможности расчета *потенциальных* (предельно достижимых) характеристик качества алгоритмов.

Непараметрические гипотезы и задачи используют ту или иную форму *упорядоченности* значений процессов, например, симметрию их вероятностных распределений, одинаковость формы распределений и др. Наличие полезного сигнала проявляет себя как нарушение (или, наоборот, появление) этой упорядоченности. При этом гипотезы не могут быть описаны с помощью конечного числа параметров. Известны основные типы непараметрических задач [2, 4]:

- обнаружение сдвига распределения;
- обнаружение изменения масштаба распределения;
- обнаружение зависимости выборочных значений;
- проверка симметрии плотности распределения;
- проверка однородности или стационарности выборки;
- проверка *согласия* вида распределения с заданным видом.

Обычный путь решения непараметрической задачи заключается в поиске решающих статистик, не зависящих от распределения помехи в достаточно широких пределах изменения этого распределения. Разработаны методы синтеза непараметрических (в более узком смысле) алгоритмов, которые не требуют знания функций распределения. К таким алгоритмам относятся *знаковые*, *ранговые* и их модификации.

Следует отметить, что характеристики обнаружения непараметрических алгоритмов все же зависят от конкретного распределения процессов, особенно при наличии сигнала. Эти алгоритмы призваны обеспечить постоянство (стабилизацию) вероятности ложной тревоги при обнаружении для *любых* распределений помехи, и это является их важнейшим свойством. Такие непараметрические алгоритмы являются частью класса *подобных* алгоритмов.

В этом смысле они «*свободны от распределения*» помехи. Часто именно это называют *непараметрическим свойством*. Однако некоторые параметрические алгоритмы также обладают этим свойством при определенных условиях. Поэтому граница между параметрическими и непараметрическими алгоритмами в какой-то степени является условной.

Непараметрические гипотезы невозможно охарактеризовать конечным числом параметров. Они всегда являются сложными. Непараметрические задачи отражают крайнюю степень априор-

ной неопределенности в описании процессов. За эту крайность приходится расплачиваться довольно серьезными ограничениями, например предположением о независимости и одинаковости распределений выборочных значений. По существу эти ограничения выражают иную форму представления имеющихся априорных знаний (модели), отличную от параметрического описания неизвестных распределений. Нарушение этих ограничений может привести к потере алгоритмами их непараметрического свойства.

Выбор параметрической или непараметрической модели зависит от имеющихся знаний о свойствах процессов и определяет путь решения задачи обнаружения или различения с помощью методов, связанных с этими моделями.