1.2. Гауссовские задачи с априорной неопределенностью в случае независимых наблюдений

Большое разнообразие задач с априорной неопределенностью и их сложность не позволяют сформулировать общий подход к использованию различных методов ее преодоления. Но все же можно выделить ряд задач, в которых применение принципов инвариантности, робастности и адаптации позволило получить эффективные решения, имеющие большое теоретическое и практическое значение.

Среди параметрических задач обнаружения и различения наиболее исследованы практически важные *гауссовские* задачи с малым числом мешающих параметров [1, ч. I, разд. 1].

Пусть $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ – независимая выборка из гауссовского распределения $N(m, \sigma^2)$ с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2. Событие, связанное с появлением полезного сигнала, может проявиться в изменении математического ожидания, изменении дисперсии или в одновременном изменении обоих параметров [1].

Обнаружение и различение сдвигов при неизменной дисперсии

В случае обнаружения сдвига $\Delta = m_1 - m_0$ математического ожидания проверяется гипотеза $H_0 : f_0(y_k) \sim N(m_0, \sigma_0^2)$ против альтернативы $H_1^{(1)} : f_1(y_k) \sim N(m_1, \sigma_0^2)$. Полезный параметр $d = \Delta / \sigma_0$ (относительный сдвиг) является входным *отношением сигнал/шум по напряжению*. Мешающие параметры m_0 и σ_0 могут быть известны или неизвестны.

Если сдвиг может быть только одного знака, то альтернатива будет *односторонней*, вариант ступенчатого изменения полезного параметра изображен на рис. 1.1. Задачу обнаружения положительного сдвига можно записать в виде $H_0 : m = m_0$, $H_1^{(1)+} : m > m_0$ или $H_0 : d = 0$, $H_1^{(1)+} : d > 0$.

Пример моделирования положительного сдвига математического ожидания в наблюдении приведен на рис. 1.2. В данном случае $m_0 = 0$, $m_1 = 23{,}26$, $\sigma_0 = 10$, полезный параметр равен $d = 2{,}326$.

Соответствующие плотности вероятности представлены на рис. 1.3.

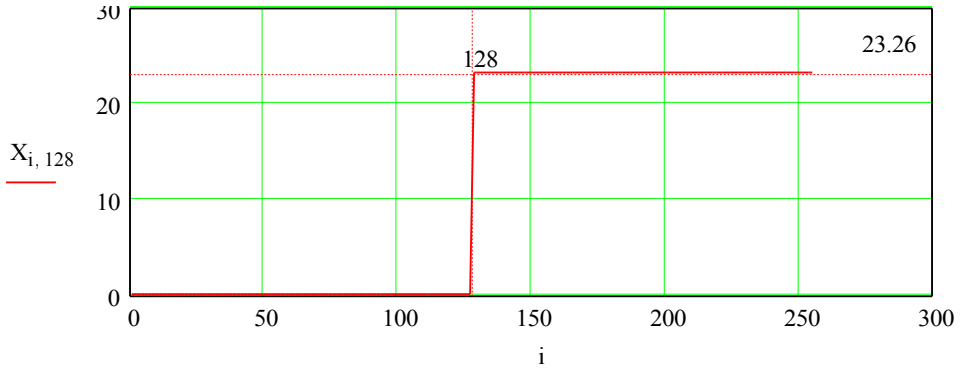

Рис. 1.1. Ступенчатое изменение полезного параметра

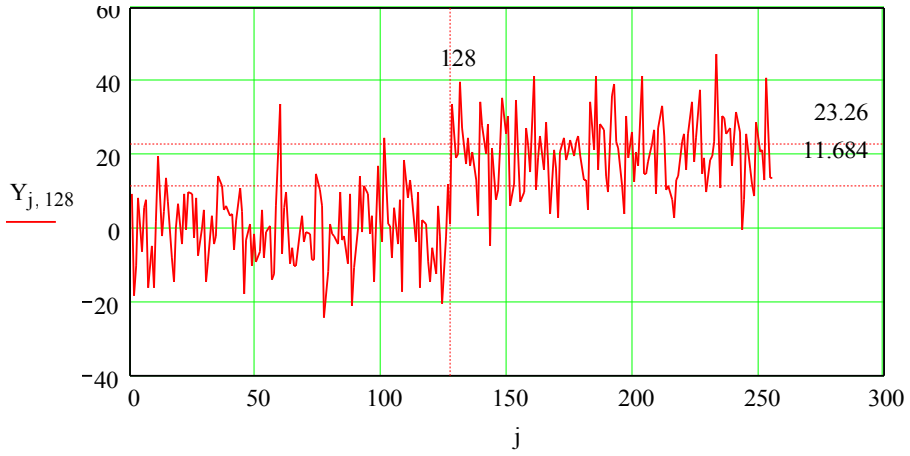

Рис. 1.2. Моделирование наблюдения, содержащего положительный сдвиг

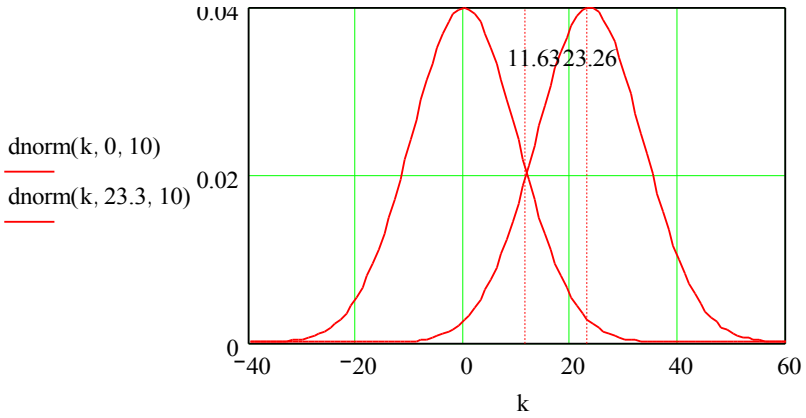

Рис. 1.3 Плотности вероятности наблюдений при отсутствии и наличии положительного сдвига

D:\Mathcad\Image\Change\Image_Ch_N1\N1_Ch_9x9_1.mcd

Моделирование сдвига на шумовом поле размером 256×256 приведено ниже на рис. 1.4, где каждое сечение по вертикали имеет вид, показанный на рис. 1.2. Для визуализации шумового поля как изменения яркостей в каждой точке, диапазон изменения исходного поля приведен к интервалу $[0, 255]$.

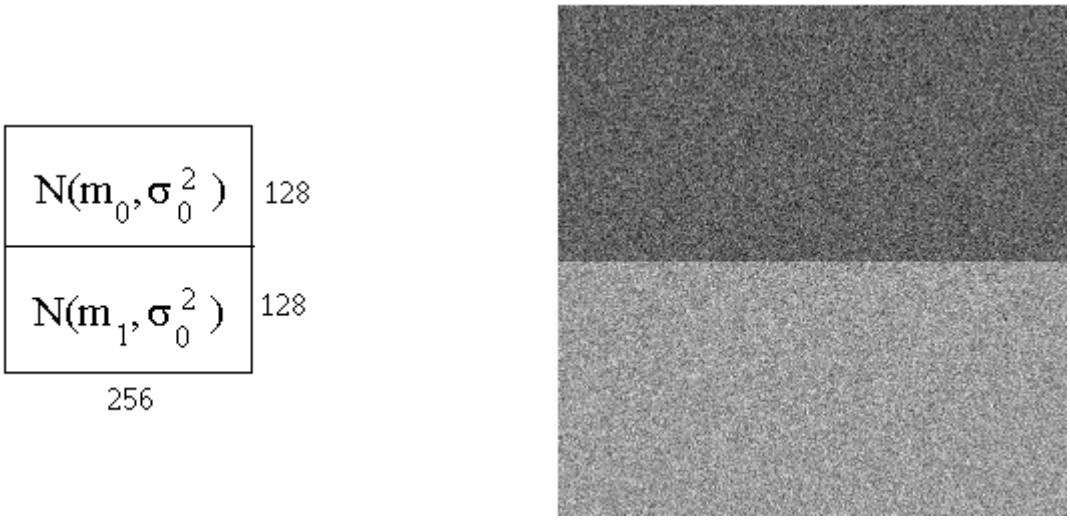

Рис. 1.4. Шумовое поле, содержащее сдвиг математического ожидания

Гистограмма, построенная по всему полю, приведена на рис. 1.5 и показывает хорошее совпадение с рис. 1.3.

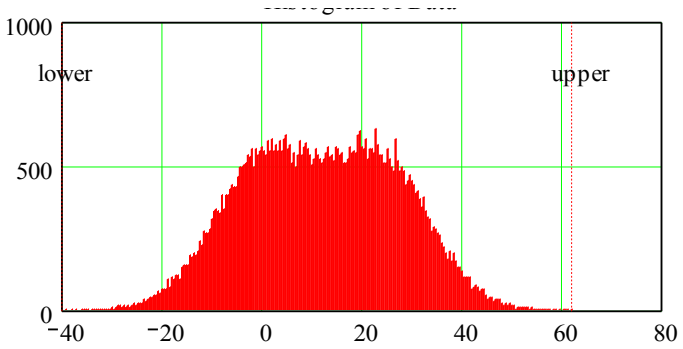

Рис. 1.5. Гистограмма, построенная по всему шумовому полю

Если возможны сдвиги разных знаков, то альтернатива будет двусторонней: $H_0 : m = m_0$, $H_1^{(1)} : m \neq m_0$ или $H_0 : d = 0$, $H_1^{(1)} : d \neq 0$. Вариант двустороннего ступенчатого изменения показан на рис. 1.6.

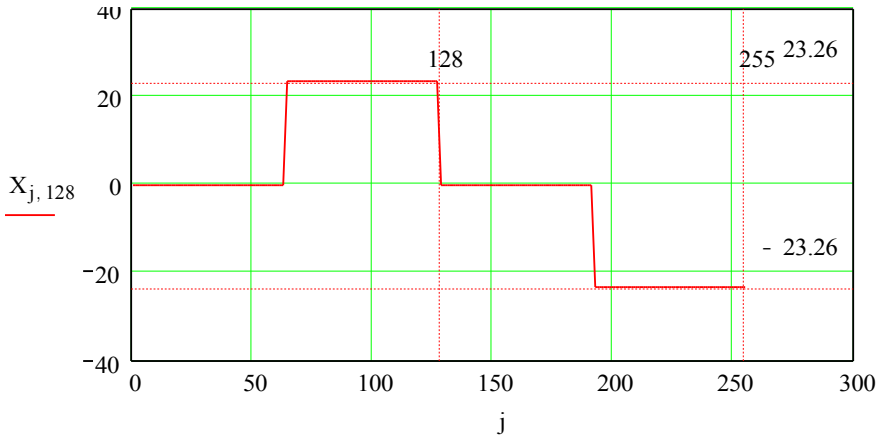

Рис. 1.6. Двустороннее изменение полезного параметра

Моделирование наблюдения, содержащего двусторонние сдвиги, показано на рис. 1.7 при $m_0 = 0$, $m_1 = \pm 23{,}26$, $\sigma_0 = 10$, $d = \pm 2{,}326$.

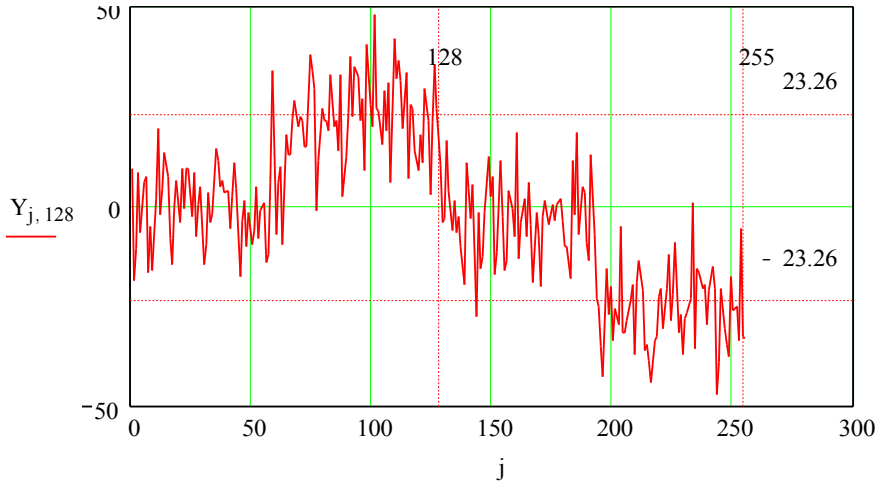

Рис. 1.7. Моделирование наблюдения, содержащего двусторонние сдвиги

Результат моделирования шумового поля, содержащего двусторонние сдвиги, приведен на рис. 1.8. Как и ранее, диапазон изменения исходного поля приведен к интервалу $[0, 255]$.

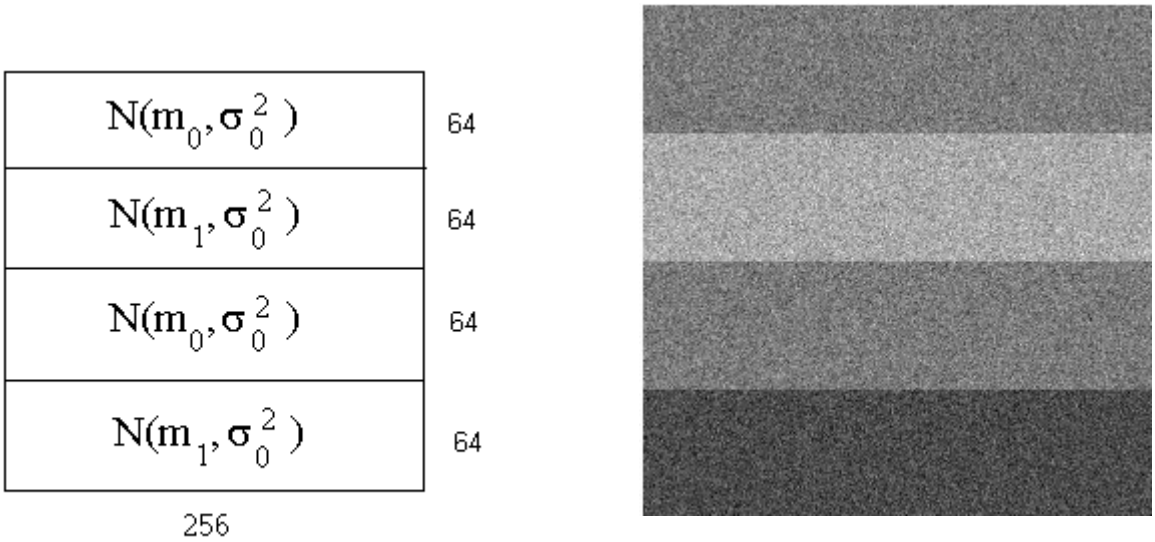

Рис. 1.8. Моделирование наблюдения, содержащего двусторонние сдвиги

В тех случаях, когда знак сдвига неизвестен, альтернативу приходится считать двусторонней. При этом возможны две задачи: обнаружение и различение сдвигов. Решение задачи обнаружения двусторонних сдвигов предполагает лишь принятие решения о наличии или отсутствии сдвига без указания знака сдвига. Задача *двухальтернативного обнаружения* включает различение сдвигов разных знаков, т. е. проверку гипотезы $H_0 : d = 0$ против двух альтернатив $H_1^{(1)+} : d > 0$ или $H_1^{(1)-} : d < 0$.

Обнаружение и различение изменений дисперсии при отсутствии сдвига

Проверяется гипотеза $H_0 : f_0(y_k) \sim N(m_0, \sigma_0^2)$ против альтернативы $H_1^{(2)} : f_1(y_k) \sim N(m_0, \sigma_1^2)$. Изменение дисперсии можно охарактеризовать параметром $\gamma = (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)/\sigma_0^2$, который при $m_0 = 0$ является входным *отношением сигнал/шум по мощности*. Очевидно, что всегда $\gamma \geq -1$. Плотности вероятности $f_0(y_k)$ и $f_1(y_k)$ изображены на рис. 1.9.

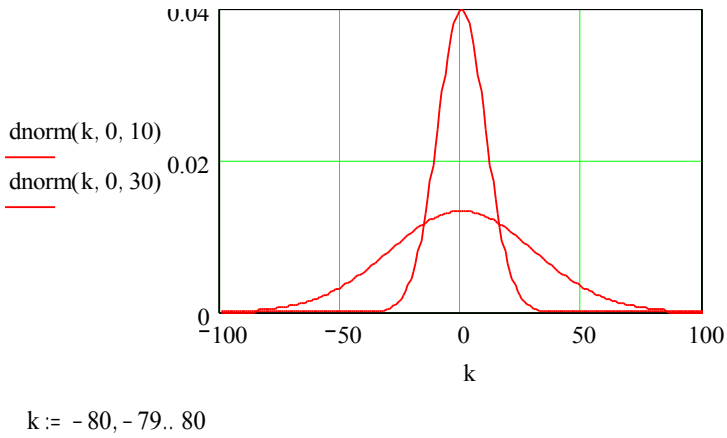

Рис. 1.9. Плотности вероятности наблюдений с разными дисперсиями

Моделирование изображения, содержащего ступенчатое увеличение дисперсии, показано на рис. 1.10 для $\sigma_0^2 = 100$, $\sigma_1^2 = 900$, $\gamma = 8$.

Наблюдение, полученное сечением изображения по вертикали, приведено на рис. 1.11. Гистограмма, построенная по всему изображению, приведена на рис. 1.12 и соответствует плотностям рис. 1.9.

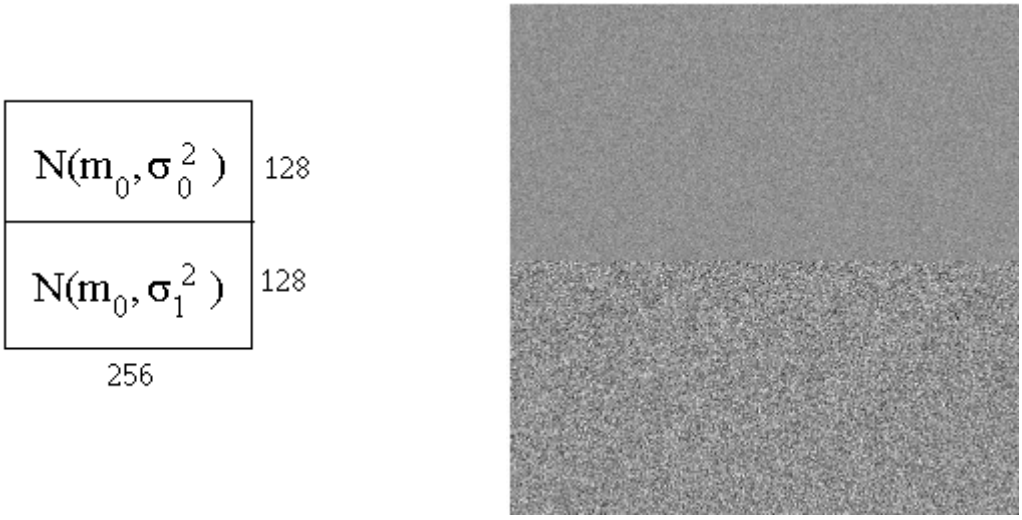

Рис. 1.10. Моделирование шумового поля, содержащего изменение дисперсии

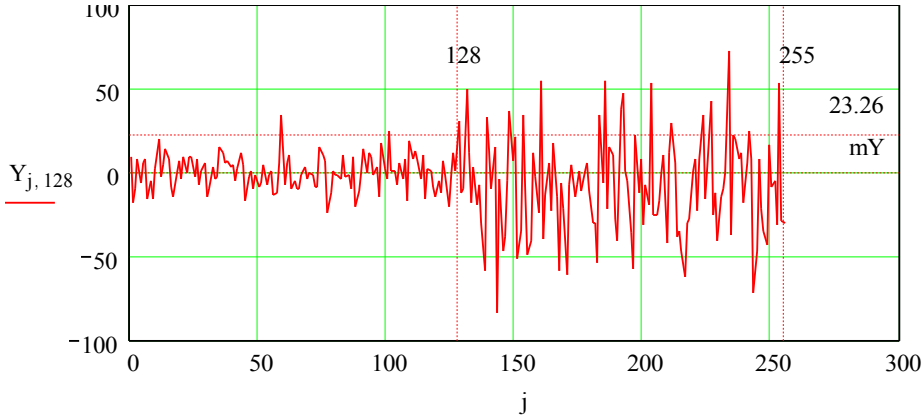

Рис. 1.11. Моделирование наблюдения, содержащего изменение дисперсии

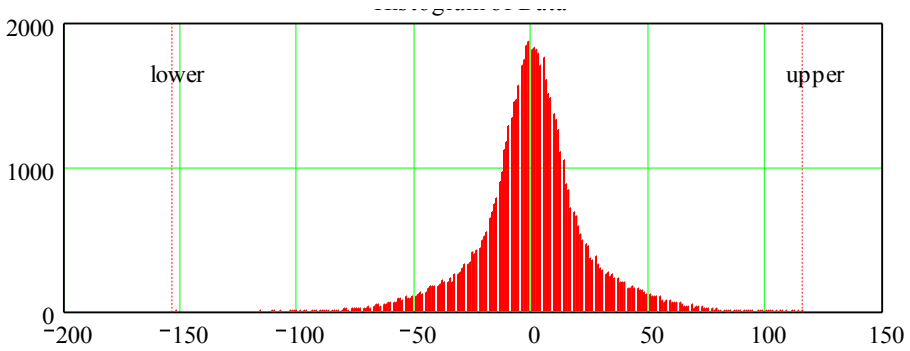

Рис. 1.12. Гистограмма шумового поля, содержащего изменение дисперсии

В случае двусторонних изменений дисперсии также возможны задачи обнаружения изменения и различение знака изменения (двухальтернативное обнаружение).