Гипергеометрические функции

Многие гипергеометрические функции являются частными случаями обобщенного гипергеометрического ряда ${}_pF_q(\alpha_1,...,\alpha_p;\beta_1,...,\beta_q;z)$, где $\alpha_1,...,\alpha_p$ и $\beta_1,...,\beta_q$ – параметры, причем ни один из параметров $\beta_1,...,\beta_q$ не есть ни отрицательное целое число, ни нуль, а z – переменная.

При $p=q=0$ функция совпадает с экспоненциальной: ${}_0F_0(z)=\exp(z)$.

При $p=1$, $q=0$ функция ${}_1F_0(\alpha;z)=(1-z)^{-\alpha}$ для $|z|<1$. При $|\alpha|\to\infty$ имеем $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty}{}_1F_0(\alpha;z/\alpha)={}_0F_0(z)=\exp(z)$.

1. Конфлюэнтные или вырожденные гипергеометрические функции получаются как решения дифференциального уравнения специального вида [36, 37, 40]. В практических задачах часто встречается *функция Куммера.* Другое название этой функции – функция Похгамлера, а другие обозначения $\Phi(a,b;z)$, $M(a,b;z)$.

$${}_1F_1(\alpha,\beta;z)=1+\alpha z/\beta\cdot 1!+\alpha(\alpha+1)z^2/\beta(\beta+1)\cdot 2!+...,$$

где $\beta\neq 0,-1,-2,...$. Функция принимает действительные значения для действительных значений аргументов. Основное функциональное соотношение

$${}_1F_1(\alpha,\beta;z)=\exp(z){}_1F_1(\beta-\alpha,\beta;-z).$$

При $|z|\to\infty$ и $\mathrm{Re}z>0$ имеем

$${}_1F_1(\alpha,\beta;z)=(\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha))z^{\alpha-\beta}\exp(z)[1+O(|z|^{-1})].$$

Частные случаи:

$${}_1F_1(\alpha,\alpha;z)=\exp(z),$$

$${}_1F_1(\nu+1/2,2\nu+1;2z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}\exp(z)\cdot I_\nu(z),$$

где $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода.

Полезный интеграл [37]

$$\int_0^u x^{\alpha-1}(u-x)^{\beta-1}\exp(\gamma x)\mathrm{d}x=\mathrm{B}(\alpha,\beta)u^{\alpha+\beta-1}{}_1F_1(\alpha,\beta;z)=\exp(z){}_1F_1(\alpha,\alpha+\beta;\gamma u)$$

для $\alpha,\beta>0$.

При $\alpha=-n$ функция ${}_1F_1(-n,\beta;z)$ связана с обобщенными полиномами Лагерра [25] $C_{n+\alpha}^n\cdot{}_1F_1(-n,\alpha+1;z)=L_n^\alpha(z)$, которые определены как $L_n^\alpha(x)=\sum_{k=0}^n(-1)^kC_{n+\alpha}^{n-k}x^k/k!$, $\alpha>-1$. В частности,

$L_0^\alpha(x)=1$, $L_1^\alpha(x)=1+\alpha-x$, кроме того, $n!L_n^\alpha(x)=(-x+2n+\alpha-1)L_{n-1}^\alpha(x)-(n+\alpha-1)L_{n-2}^\alpha(x)$, при $n\geq 2$.

2. Гипергеометрическая функция Гаусса или гипергеометрический ряд (другое обозначение $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$) записывается в виде

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=1+\alpha\beta z/\gamma\cdot 1!+\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)z^2/\gamma(\gamma+1)\cdot 2!+... $$

При $|\beta|\to\infty$ имеем $\lim\limits_{|\beta|\to\infty}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z/\beta)={}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$.

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\alpha+1;z)=(\alpha/z^\alpha)\mathrm{B}_z(\alpha,1-\beta) \qquad \text{для } |z|\leq 1. $$