Модифицированные функции Бесселя

Функции Бесселя являются частными видами *цилиндрических* функций [36] и решениями специальных дифференциальных уравнений [36, 40].

Модифицированная функция Бесселя первого рода мнимого аргумента (значение ν есть порядок функции) представляется бесконечным рядом $I_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$. Она выражается также через гипергеометрические функции удвоенного аргумента [36]:

$$I_\nu(z) = (z/2)^\nu {}_0F_1(\nu+1; z^2/4)/\Gamma(\nu+k+1) =$$

$$(z/2)^\nu \exp(-z) {}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1; 2z)/\Gamma(\nu+k+1)$$

Функция нулевого порядка

$$I_0(z) = \int_0^{2\pi} \exp(z\cos(\theta - a))\mathrm{d}\theta/2\pi = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Полезные интегралы [37]:

$$\int_0^\infty t^n \exp(-t) I_0(2\sqrt{ty})\mathrm{d}t = n!\exp(y)L_n(-y),$$

где $L_n(x)$ – полиномы Лагерра (нулевого порядка): $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $\quad n!L_n(x) = (-x + 2n - 1)L_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)$ для $n \geq 2$.

$$\int_0^u x^{\alpha-1}(u-x)^{\alpha-1}\exp(\beta x)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}(u/\beta)^{\alpha-1/2}\exp(\beta u/2)\Gamma(\alpha)I_{\alpha-1/2}(\beta u/2)$$

для $\alpha > 0$.

$$\int_0^\infty t^3 \exp(-\beta^2 t^2) I_0(\alpha t)\mathrm{d}t = (1/2\beta^4)(1 + \alpha^2/4\beta^2)\exp(\alpha^2/4\beta^2).$$

Модифицированная функция Бесселя второго рода мнимого аргумента (значение ν есть порядок функции) $K_\nu(z)$. Эта функция также называется функцией Макдональда или модифицированной функцией Ганкеля $K_\nu(z) = (\pi/2)(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z))/\sin(\nu\pi)$.

Функция нулевого порядка $(z > 0)$ $K_0(z) = \int_0^\infty \cos(z \cdot \mathrm{sh}x)\mathrm{d}x$.

Если порядок $\nu > -1$ действителен и аргумент $z > 0$, то обе функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ принимают действительные значения. Интересно, что вид всех функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ старших порядков определяется функциями $I_0(z)$ и $K_0(z)$ соответственно, поскольку $I_1(z) = \mathrm{d}I_0(z)/\mathrm{d}z$, $\qquad zI_{\nu+1}(z) = zI_{\nu-1}(z) - 2\nu I_\nu(z)$,

$$K_1(z) = -\mathrm{d}K(z)/\mathrm{d}z\,,\ zK_{\nu+1}(z) = zK_{\nu-1}(z) + 2\nu K_\nu(z)\,.$$

При $0 < z << 1$ их поведение описывается формулами $I_\nu(z) \approx (z/2)^\nu / \Gamma(\nu+1)$ при $\nu \neq -1, -2, \ldots$, $K_0(z) \approx \ln(2/\gamma z)$, где $\gamma = 1{,}781072$ – постоянная Эйлера, или $K_0(z) \approx -\ln(z)$, $K_\nu(z) \approx (2/z)^\nu \Gamma(\nu)/2$ при $\mathrm{Re}\,\nu > 0$.

При больших значениях аргумента $I_\nu(z)$ возрастает по показательному закону, а $K_\nu(z)$ убывает по показательному закону:

$$I_\nu(z) \approx \exp(z)\{1 - (4\nu^2 - 1)/8z + \ldots\}/\sqrt{2\pi z}\,,$$

$$K_\nu(z) \approx \exp(-z)\sqrt{\pi/2z}\{1 + (4\nu^2 - 1)/8z) + \ldots\}\,.$$