Интегралы вероятности

Интегралами вероятности распределений случайной величины x_ω называются функции распределения $F(x) = P(x_\omega \le x)$, либо дополнения к ним $P(x_\omega > x) = 1 - F(x)$.

Интеграл вероятности нормального распределения

Интеграл вероятности в *форме Лапласа* $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\mathrm{d}t$ совпадает с функцией гауссовского распределения; $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ – представляет дополнительную функцию. Интеграл вероятностей часто называется *функцией ошибок* (Error Function).

Функция Крампа $\mathrm{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t$ и соответствующая дополнительная функция ошибок $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$ определены для $x \ge 0$ и связаны с предыдущими выражением формулами: $\mathrm{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$, $\Phi(x) = 0{,}5 + 0{,}5\mathrm{erf}(x/\sqrt{2})$, $\Phi(-x) = 0{,}5 - 0{,}5\mathrm{erf}(x/\sqrt{2})$. Функции $\Phi(x)$ и $1 - \Phi(x)$ иногда обозначаются как $\mathrm{erf}^*(x)$ и $\mathrm{erfc}^*(x)$.

Процентные точки (точнее говоря, $100 \cdot F$-процентные точки) гауссовского распределения c_F определяются выражением $P(x > c_F) = 1 - \Phi(c_F) = F$ и приведены в табл. П1.

Таблица П1

	$F = 10^{-2}$	$F = 10^{-3}$	$F = 10^{-4}$	$F = 10^{-5}$	$F = 10^{-6}$
c_F	2,326	3,09	3,72	4,27	4,76

Интеграл вероятности хи-квадрат

Этот интеграл определен в [36] как функция распределения χ_N^2, т. е. $F_N(x) = P(x_\omega \le x)$. В [26] используется дополнение $P(x, N) = 1 - F_N(x)$. Для четного N имеем $P(x, N) = \sum_{i=0}^{N/2-1}((x/2)^i / i!)\exp(-x/2)$. Имеет место весьма полезная связь распределения хи-квадрат с распределением Пуассона. Если $\xi \sim Pos(\lambda)$, то $P(\xi < k) = P(2\lambda, 2k)$.

Отметим, что $P(y^2,2)$ как функция аргумента y есть интеграл вероятности распределения Релея, $P(y^2,1) = 2\Phi(|y|) - 1$ – интеграл вероятности модуля нормально распределенной стандартной случайной величины, $P(x,1) = 2[1 - \Phi(\sqrt{x})]$. Процентные точки распределения χ_N^2 приведены в табл. П 2.

Таблица П2

N	$F = 10^{-2}$	$F = 10^{-3}$	$F = 10^{-4}$	$F = 10^{-5}$	$F = 10^{-6}$
1	6,635	10,828	15,137	19,511	23,928
2	9,21	13,816	18,421	23,026	27,631
5	15,086	20,515	25,745	30,856	35,888
10	23,209	29,588	35,564	41,296	46,863
20	37,566	45,315	52,386	59,045	65,421
30	50,892	59,703	67,633	75,023	82,044
50	76,154	86,661	95,969	104,542	112,608
100	135,807	149,449	161,319	172,099	182,127

Интеграл вероятности Γ *- распределения*

Функция распределения $F(x) = \gamma(\alpha, x)/\Gamma(\alpha)$ выражается через *неполную гамма-функцию* [36, 37] $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$. Здесь $\Gamma(\alpha)$ обозначает гамма-функцию. Используя дополнение $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x)$, можно записать $F(x) = 1 - \Gamma(\alpha, x)/\Gamma(\alpha)$. Кроме того [38],

$$\gamma(\alpha, x) = (1/\alpha)x^\alpha \exp(-x)\cdot {}_1F_1(1;\alpha+1;x) = (1/\alpha)x^\alpha \cdot {}_1F_1(\alpha;\alpha+1;-x),$$

а также $\gamma(1/2, x^2) = \sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(x)$.

При больших аргументах $x >> 1$ справедливо асимптотическое разложение [36]

$$\Gamma(\alpha, x) \sim x^{\alpha-1}e^{-x}[1 + (\alpha-1)/x + (\alpha-1)(\alpha-2)/x^2 + ...].$$

Для целых n имеем $\Gamma(n+1, x) = \int_x^\infty t^n \exp(-t)\mathrm{d}t = n!\exp(-x)\cdot\sum_{i=0}^n x^i/i!$.

Интеграл вероятности m *- распределения*

Поскольку m-распределение может быть получено из гамма-распределения путем нелинейного преобразования (извлечение квадратного корня), то вычисление интеграла вероятности осу-

ществляется с использованием интеграла вероятности Г-распределения.

Интеграл вероятности В*- распределения*

Функция распределения $\mathrm{I}_x(\alpha,\beta)=\mathrm{B}_x(\alpha,x)/\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ выражается через *неполную бета-функцию* [37]

$$\mathrm{B}_x(\alpha,\beta)=\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t=(x^{\alpha}/\alpha)\,{}_2F_1(\alpha,1-\beta;\alpha+1;x).$$

Здесь бета-функция $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$. Имеет место тождество $\mathrm{I}_x(\alpha,\beta)=1-\mathrm{I}_{1-x}(\beta,\alpha)$.

Неполная бета-функция для целых аргументов может быть вычислена по формулам [26, 36]:

$$\mathrm{I}_p(M,N-M+1)=\sum_{k=M}^{N}C_N^k p^k(1-p)^{N-k},$$

$$\mathrm{I}_{1-p}(N-M,M+1)=\sum_{k=0}^{M}C_N^k p^k(1-p)^{N-k},$$

$$\mathrm{I}_p(N,M)=1-\frac{(1-p)^M}{\mathrm{B}(N,M)}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k C_{N-1}^k(1-p)^k/(M+k).$$

Интеграл вероятности t*-распределения Стьюдента* [26]

$$S_\nu(x)=P\{t\le x\}=K_\nu\int_{-\infty}^{x}\left[1+\frac{t^2}{\nu}\right]^{-(\nu/2+1/2)}\mathrm{d}t,$$

где $K_\nu=\dfrac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\nu/2)}$. При $\nu=1$ $S_1(x)=(\operatorname{arctg}x+\pi/2)/\pi$ представляет собой функцию распределения Коши. При $\nu\to\infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению $S_\infty(x)\to\Phi(x)$.

Промежуточные значения табулированы [26]. Для $x>8$ и $\nu\le 10$ существует приближенная формула [26] $1-S_\nu(x)\approx(1-S_\nu(8))(8/x)^\nu$. Значения $S_\nu(8)$ приведены в табл. П3.

Таблица П3

ν	1	2	3	4	5
$S_\nu(8)$	0,96042	0,99237	0,99796	0,99934	0,99975

ν	6	7	8	9	10
$S_\nu(8)$	0,99990	0,99996	0,99998	0,99999	0,99999

Процентные точки t_F-распределения Стьюдента приведены в [26, 38].

Интеграл вероятности F-распределения Фишера

Функция F-распределения Фишера $F(N_1, N_2) = P(x_\omega \le x) = \mathrm{I}_\nu(N_1/2, N_2/2)$ выражается через *неполную бета-функцию* [26], где $\nu = N_1 x/(N_2 + N_1 x)$.

При $N_2 \to \infty$ $y = x/N_1 = \xi$ имеет $\chi^2_{N_1}$ распределение с N_1 степенью свободы. При $N_1 = 1$ и некотором N_2 величина $x_\omega = t^2$ есть квадрат случайной величины, подчиняющейся распределению Стьюдента, поэтому $F(1, N_2) = \mathrm{I}_\nu(1/2, N_2/2) = 2S_{N_2}(\sqrt{x}) - 1$, где $\nu = x/(N_2 + x)$. При $N_1 = 1$ и $N_2 \to \infty$ имеет место [26] $F(1, \infty) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$. Функция распределения z-распределения Фишера $F(z) = \mathrm{I}_\nu(N_1/2, N_2/2)$, где $\nu = N_1 x/(N_1 + N_2 \exp(-2z))$.

Q-функция Маркума

Эта функция является интегралом вероятности распределения Релея–Райса $Q(a,u) = \int_u^\infty x \exp(-(x^2 + a^2)/2) I_0(ax) \mathrm{d}x$, где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Интеграл вероятности К-распределения

Поскольку распределение можно получить путем умножения двух случайных величин с распределениями $\xi_1 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ и $\xi_2 \sim E(1)$, то вероятность превышения порога u равна $P(\xi_1 \xi_2 > u) = P(\xi_1 > u/\xi_2) = P(\xi_2 > u/\xi_1)$. Условная вероятность превышения (при фиксированном значении ξ_1) есть $\exp(-u/\xi_1)$, После усреднения по гамма-распределению получаем

$$P(\xi_1 \xi_2 > u) = 2(u/\beta)^{\alpha/2} K_\alpha(2\sqrt{u/\beta}).$$

При больших аргументах $z >> 1$ модифицированная функция Бесселя второго рода приближенно равна $K_\alpha(z) \approx \sqrt{\pi/2z} \exp(-z)[1 + (4\alpha^2 - 1)/8z]$, что позволяет приближенно вычислить интеграл вероятности K - распределения.