2.6. Инвариантные решающие правила

Инвариантные статистики (инварианты) получаются путем преобразований исходной выборки $y=(y_1,y_2,...,y_N)$ таким образом, что результаты преобразований остаются неизменными при изменениях мешающих параметров или факторов.

Пусть мешающим параметром является сдвиг распределения выборки. Тогда статистики

$$u_1=(y_1-\bar{y},y_2-\bar{y},...,y_N-\bar{y}),$$

$$u_2=(y_1-y_N,y_2-y_N,...,y_{N-1}-y_N)$$

и ряд других сохраняют свои значения при замене всех y_i на $y_i \pm a$, где a – любая константа. Здесь $\bar{y}=\sum_{i=1}^{N} y_i / N$ – среднее арифметическое. Вместо среднего арифметического может быть использована любая другая оценка сдвига. Таким образом, эти статистики являются *инвариантами относительно любых сдвигов* исходной выборки. Ясно, что любые преобразования указанных статистик также будут инвариантами относительно сдвига, так что число инвариантных статистик достаточно велико.

Пусть теперь мешающим параметром является масштаб выборки. Тогда *инвариантами относительно параметра масштаба* будут следующие статистики:

$$v_1=(y_1/\bar{y},y_2/\bar{y},...,y_N/\bar{y}),$$

$$v_2=(y_1/y_N,y_2/y_N,...,y_{N-1}/y_N),$$

$$v_3=(\sum_{i=1}^{N} y_i)^2/\sum_{i=1}^{N} y_i^2, \qquad v_4=\sum_{i=1}^{N} y_i^4/\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2\right)^2$$

и др. Статистики сохраняют свои значения при замене всех y_i на λy_i, где λ – отличная от нуля константа. В случае двух выборок $y=(y_1,y_2,...,y_N)$ и $x=(x_1,x_2,...,x_M)$ инвариантами относительно одинакового изменения масштаба будут статистики

$$z_1=\sum_{i=1}^{N} y_i/\sum_{i=1}^{M} x_i, \quad z_2=\sum_{i=1}^{N} y_i^2/\sum_{i=1}^{M} x_i^2 .$$

Инварианты могут быть получены с использованием *порядковых* статистик, которые формируются на основе *упорядоченной* по величине выборки. Например, знаковые и ранговые статистики инвариантны к изменениям сдвига и масштаба распределений (см. подразд. 2.7). Здесь будут рассмотрены только параметрические задачи.

Как правило инвариантность не может быть обеспечена одновременно по отношению ко всем мешающим параметрам. Среди всех инвариантных статистик (к выбранному мешающему параметру) существует наиболее чувствительная по отношению к изменениям полезного параметра. Однако ее нахождение представляет трудную задачу.

В общем случае рассматривается некоторая группа G преобразований исходной выборки $y=(y_1,y_2,...,y_N)$. В результате преобразования g из этой группы получается статистика $z=g(y)$, где $z=(z_1,z_2,...,z_K)$. Параметрическое семейство распределений $f(y,\theta)$, $\theta\in\Theta$ является *инвариантным* относительно группы преобразований G, если каждому преобразованию g соответствует преобразование $\bar{g}\in\bar{G}$ параметрического множества Θ на себя взаимно однозначно [14]. Тогда распределение величины z будет

$$f(z,\bar{g}(\theta)),\ \bar{g}(\theta)\in\Theta.$$

Говорят, что задача проверки гипотезы $H_0:\theta\in\Theta_0$ против альтернативы $H_1:\theta\in\Theta_1$ остается *инвариантной* относительно преобразования $g\in G$, если соответствующее преобразование $\bar{g}$ сохраняет пространства Θ_0 и Θ_1, т. е. $\bar{g}(\Theta_0)\in\Theta_0$ и $\bar{g}(\Theta_1)\in\Theta_1$. *Инвариантная* решающая функция $\delta_{\text{И}}(y)$ удовлетворяет соотношению $\delta_{\text{И}}(g(y))=\delta_{\text{И}}(y)$.

Функция $\tau(y)$ называется *максимальным инвариантом* относительно G, если она инвариантна: $\tau(g(y))=\tau(y)$ и если из $\tau(y_1)=\tau(y_2)$ следует $y_2=g(y_1)$ для некоторого g. Необходимое и достаточное условие *инвариантности решающего правила* $\delta(y)$ состоит в том, чтобы $\delta(y)$ зависела от y только через максимальный инвариант $\tau(y)$.

Таким образом, класс инвариантных решающих функций может быть получен как совокупность функций от максимального инварианта. Если $\nu(\theta)$ в свою очередь является максимальным инвариантом относительно группы $\bar{G}$, то распределение статистики $\tau(y)$ зависит только от $\nu(\theta)$.

При такой редукции данных исходная задача сводится к проверке простой гипотезы против сложной альтернативы. Кроме того, если семейство плотностей $w(\tau(y),\nu(\theta))$ имеет монотонное отношение правдоподобия, *инвариантное равномерно наиболее мощное* решающее правило основано на сравнении статистики $\tau(y)$ с порогом [14].