2.5. Несмещенные и подобные решающие правила

Расчет на наихудшие ситуации часто приводит к неоправданным потерям качества обнаружения, особенно если эти ситуации встречаются относительно редко. Часто более конструктивными бывают подходы, связанные с ограничением класса решающих правил и с поиском оптимального алгоритма в этом ограниченном классе.

Пусть неизвестные мешающие параметры θ считаются неслучайными величинами, принимающими значения из некоторых областей Θ_0 и Θ_1 при гипотезах H_0 и H_1. Условно-экстремальный подход дает *обобщение критерия Неймана–Пирсона* в случае сложных гипотез [5]. Надо найти такое ограничение класса решающих правил, чтобы сделать параметрическую априорную неопределенность несущественной.

Пусть класс $\Delta_{\text{Н}}$ решающих правил обнаружения таков, что для любой параметрической гипотезы $H_0 : \theta \in \Theta_0$ вероятность ложной тревоги $F(\theta) \le \alpha$ (теперь размер α критической области Υ_1 определяется максимальной из $F(\theta)$ при $\theta \in \Theta_0$).

Еще одно простое условие, которое можно требовать при сложных гипотезах, состоит в том, что ни при одной альтернативе из $H_1 : \theta \in \Theta_1$ вероятность отклонения любой гипотезы $H_0 : \theta \in \Theta_0$ не должна быть меньше α, т. е. *функция мощности* $D(\theta) \ge \alpha$ при всех $\theta \in \Theta_1$. Такие решающие правила являются *несмещенными* [4, 5, 8]. Класс несмещенных алгоритмов $\Delta_{\text{Н}}$ исключает правила, для которых вероятность правильного обнаружения при некотором значении $\theta \in \Theta_1$ оказалась бы меньше вероятности ложной тревоги.

Если равномерно наиболее мощное (РНМ) решающее правило существует, то оно является несмещенным, т. е. попадает в класс $\Delta_{\text{Н}}$. Поэтому переход в класс $\Delta_{\text{Н}}$ не сопровождается потерей РНМ алгоритма [6]. В ряде задач, где равномерно наиболее мощные алгоритмы не существуют, тем не менее, существуют *РНМ несмещенные* решающие правила. Таким образом, в этих задачах несмещенность позволяет сделать априорную неопределенность несущественной.

Более широкий класс алгоритмов Δ_{Π} (включающий несмещенные), удовлетворяют так называемому условию «подобия»

$F(\omega)=\alpha$. Здесь ω есть общая граница Θ_0 и Θ_1, т. е. множество точек θ, предельных как для Θ_0, так и для Θ_1. Если для всех $\theta \in \Theta_\omega$ (в области неопределенности Θ_ωмешающего параметра) имеет место равенство $F(\theta)=\alpha$, то получаем критическую область Y_1, для которой $\int\limits_{\mathrm{Y}_1} f_0(y,\theta)\mathrm{d}y=\alpha$, в то время как для всего выборочного пространства Y: $\int\limits_{\mathrm{Y}} f_0(y,\theta)\mathrm{d}y=1$. В этом смысле критическая область Y_1 *подобна* выборочному пространству Y, а соответствующее решающее правило также называется *подобным* [4, 5, 8].

Пусть возможно выделить среди параметров θ «полезные» (связанные с событиями) параметры λ и «мешающие» параметры ϕ, значения которых проверяемой гипотезой не определяется. Таким образом, $\theta=(\lambda,\phi)$, но только значения λ определяют принадлежность наблюдений к альтернативным областям. Граница множеств Θ_0 и Θ_1 определяется как $\omega=\{\lambda_{\text{гр}}\}\times\Theta_\omega$, где $\lambda_{\text{гр}}$ – граничное значение полезного параметра, разделяющее гипотезы H_0и H_1.

Методы нахождения *подобных критических областей* развиты для параметрических задач, в которых для мешающего параметра ϕ при гипотезе H_0 существует достаточная статистика $v(y)$. Из достаточности статистики вытекает, что условное распределение $w_0(y\,|\,v)$ не зависти от ϕ, что и обеспечивает *подобие* критической области. Важно, чтобы указанная статистика обеспечивала *единственность несмещенной оценки параметра* ϕ, т. е. только одна функция от этой статистики может иметь заданное математическое ожидание. Для этого ее распределение $g_0(v,\phi)$ должно быть *полным*.

Рассмотрим некоторую функцию $a(\phi)$ от параметра исходного семейства $f_0(y,\phi)$. Пусть в качестве оценки $a(\phi)$ используется функция от достаточной статистики $A(v)$. Требование несмещенности оценки приводит к уравнению

$$M_0[A(v)]=\int\limits_{\mathrm{V}} A(v)g_0(v,\phi)\mathrm{d}v=a(\phi),$$

где $v\in\mathrm{V}$, а V – область значений статистики. Если $A_1(v)$ и $A_2(v)$ – два решения этого уравнения, то разность $h(v)=A_1(v)-A_2(v)$

должна удовлетворять уравнению $M_0[h(v)] = \int\limits_{\mathrm{V}} h(v) g_0(v,\phi)\mathrm{d}v = 0$. Для статистики $A(v)$, обладающей свойством *полноты*, из $M_0[h(v)] = 0$ следует $h(v) \equiv 0$, т. е. функция является тождественным нулем.

Для полного семейства никакая (отличная от тождественного нуля) функция не может быть ортогональной ко всем плотностям этого семейства [4]. Требование полноты обеспечивает *единственность* оценки неизвестного параметра. Если это справедливо только для *ограниченных* функций $h(v)$, семейство $g_0(v,\phi)$ будет

ограниченно полным. Если распределение полно, оно тем более ограниченно полно. Полным является k-параметрическое *экспоненциальное* семейство [4, 5] распределений N-мерной выборки:

$$f(y,\theta) = G(y)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\theta_j U_j(y) - \Psi(\theta)\right\},$$

где U есть вектор достаточных статистик, если область определения Y не зависит от параметров и область изменения параметра θ содержит k-мерный интервал. Последнее означает, например, отсутствие функциональной связи между параметрами. Экспоненциальное семейство включает большое число известных параметрических распределений для дискретных и непрерывных случайных величин.

Одномерное гауссовское распределение $N(\theta,\sigma^2)$ полно относительно неизвестного математического ожидания θ, поскольку является частным случаем экспоненциального семейства. В случае неизвестной дисперсии распределение $N(0,\phi)$ для достаточной статистики y не будет даже ограниченно полным относительно ϕ. Поскольку плотность вероятности будет четной функцией по y, то любая нечетная функция $h(y)$ будет иметь нулевое математическое ожидание, не являясь в то же время тождественным нулем [5]: $\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\exp(-y^2/2\phi)\mathrm{d}y = 0$. В этом случае полной достаточной статистикой будет y^2.

Задача сравнения средних двух нормальных совокупностей $y_k \sim N(\phi+\lambda,\sigma_1^2)$ и $x_k \sim N(\phi,\sigma_2^2)$ с неизвестными дисперсиями известна как проблема Беренса–Фишера [5]. При гипотезе $H_0 : \lambda = 0$ статистика $v = (\bar{y},\bar{x},s_1^2,s_2^2)$ совместно достаточна для трех мешающих параметров $\phi,\sigma_1^2,\sigma_2^2$. Однако она не будет ограниченно полной, поскольку любая ограниченная нечетная функция от

$\bar{y}-\bar{x}$ будет иметь нулевое математическое ожидание. Следовательно, невозможно использовать условную плотность при фиксированной v для нахождения всех подобных областей. Известно, что для приведенной задачи не существует никакой полезной точной подобной области [5].

Ограниченная полнота достаточной статистики влечет ее *минимальную достаточность*, т. е. наименьшую мерность статистики. Не может быть более одной ограниченно полной статистики. Наличие такой статистики еще не гарантирует существования подобной критической области. Например, не существует подобной области относительно сдвига θ для одномерной выборки из гауссовского распределения $N(\theta,\sigma^2)$. Но при числе выборок $N \geq 2$ такие области любого размера (любой вероятности ложной тревоги) получаются с помощью статистики $\sum(y-\bar{y})^2$.

Таким образом, если при гипотезе H_0 достаточная (для неизвестного мешающего параметра ϕ) статистика $v(y)$ ограниченно полна, то существует подобное решающее правило $\delta_\Pi(y)$ определенной структуры, которая называется *неймановской* и удовлетворяет *условию подобия* $F = M_0[\delta_\Pi(y) \mid v] = \int\limits_{Y_1} \delta_\Pi(y) w_0(y \mid v)\mathrm{d}y = \alpha$.

В результате сложная гипотеза H_0 сводится к простой гипотезе *при постоянном значении статистики* $v(y)$. Если, кроме того, $v(y)$ достаточна для ϕ и при альтернативе H_1, то сложная гипотеза H_1 также сводится к простой при постоянном значении $v(y)$. В этом случае вероятность правильного обнаружения (мощность решающего правила) также не зависит от мешающего параметра. Если, однако, $v(y)$ не является достаточной для ϕ при сложной альтернативе H_1, то H_1 следует рассматривать как класс простых альтернатив к гипотезе H_0, как это делалось в классической теории [5]. В этих случаях можно попытаться отыскать равномерно наиболее мощное решающее правило в классе подобных.

Если найден РНМ подобный алгоритм с непрерывной по θ функцией мощности, то достаточно убедиться, что он несмещен, чтобы сделать вывод об оптимальности его в классе всех несмещенных алгоритмов [6].

Пусть $u(y)$ – достаточная статистика для полезного параметра λ, а $v(y)$ достаточна для мешающего параметра ϕ. Поскольку условная плотность $w(u \mid v)$ не зависит от мешающего параметра,

РНМ подобное правило можно найти для каждого конкретного значения $v(y)$, сравнивая условное отношение правдоподобия $\Lambda(u \mid v) = w_1(u \mid v) / w_0(u \mid v)$ с порогом $\Lambda_T(v)$. *Если* $\Lambda(u \mid v)$ *монотонно по* u*, то правило будет РНМ несмещенным.*

Алгоритм обнаружения события $\lambda > \lambda_0$ можно записать в виде $u \geq L(v)$, где пороговая функция $L(v)$ находится из условия подобия. Решение задачи упрощается, *если существует статистика* $z(u,v)$*, которая не зависит от* v *при гипотезе* H_0 *и при каждом фиксированном* v *монотонна по* u. РНМ несмещенный алгоритм в этом случае имеет вид $z \geq z_T$, где z_T – фиксированный порог [5, 14].

На начальном этапе поиска несмещенного алгоритма анализируется плотность наблюдений и производится выделение «полезных» (связанных с событиями) параметров λ и «мешающих» параметров ϕ.

В случае скалярных полезного и мешающего параметров и распределений из экспоненциальных семейств получаются следующие выражения:

$$f_0(y,\phi) = A_0(\phi) \cdot h_0(y) \cdot \exp\{\phi v\},$$
$$f_1(y,\lambda,\phi) = A_1(\lambda,\phi) \cdot h_1(y) \cdot \exp\{\lambda u + \phi v\}.$$

Условные плотности также принадлежат экспоненциальным семействам. При этом условное отношение правдоподобия $\Lambda(u \mid v,\lambda) = B(\lambda,v)h(y)\exp(\lambda u)$ монотонно по статистике u.

Для нахождения условной плотности $w_1(u \mid v)$ сначала формируется совместная плотность достаточных статистик $w_1(u,v)$, для чего используется исходная плотность наблюдений и преобразование переменных. Тогда $w_1(u \mid v) = w_1(u,v) / w_1(v)$, где безусловная (маргинальная) плотность $w_1(v)$ находится интегрированием $w_1(v) = \int w_1(u,v)\mathrm{d}u$ по области значений статистики u.

Структура несмещенного подобного алгоритма представлена на рис. 2.1. В дополнение к основному каналу, в котором формируется решающая статистика u, в структуре имеется канал формирования меняющегося порога $L(v)$, значение которого зависит от статистики v. Фактически структура реализует вариант адаптивного порога. Если вместо пороговой функции $L(v)$ формируется статистика $z(u,v)$, то структура реализует инвариантный алгоритм обнаружения.

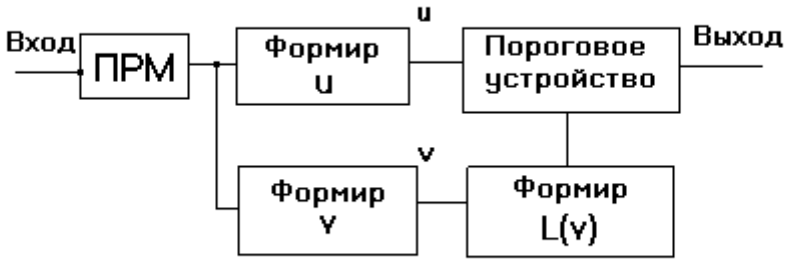

Рис. 2.1 Структура несмещенного
подобного алгоритма обнаружения