2.8. Минимаксный и самообучающийся байесовские обнаружители сдвига гауссовского распределения при неизвестной вероятности появления сигнала

Рассмотрим байесовскую задачу различения двух сигналов s_0 и s_1 при неизвестных априорных вероятностях $P(s_0) = q$ и $P(s_1) = 1 - q = p$ появления сигналов. Оптимальный байесовский алгоритм различения [2] при известном значении q принимает решение в пользу s_1, если $\Lambda(y) \geq \Lambda_B$.

Здесь отношение правдоподобия $\Lambda(y) = f_1(y)/f_0(y)$, а байесовский порог равен $\Lambda_B = c\mu$, где $c = (\Pi_{01} - \Pi_{00})/(\Pi_{10} - \Pi_{11})$ выражается через стоимости ошибочных и правильных решений [1], а $\mu = (1 - p)/p$. Вероятности ложной тревоги $F = P(\Lambda \geq \Lambda_B \mid H_0)$ и правильного обнаружения $D = P(\Lambda \geq \Lambda_B \mid H_1)$ зависят от неизвестного значения p, поскольку оно входит в порог. Условные риски, соответствующие двум сигналам, равны $r_0 = \Pi_{00}(1 - F) + \Pi_{01}F$, $r_1 = \Pi_{10}(1 - D) + \Pi_{11}D$, и они также зависят от p.

Таким образом, параметр p является существенным и значимым, и его выбор представляет практически важную задачу.

Известно, что байесовский критерий максимального правдоподобия предписывает брать равные априорные вероятности $q = p = 0{,}5$. Однако обоснование для такого выбора отсутствует.

Байесовский риск $R_B(p) = (1 - p) \cdot r_0(p) + p \cdot r_1(p)$ оптимального алгоритма меняется в зависимости от p от значения Π_{00} при $p = 0$ до значения Π_{11} при $p = 1$. В первом случае порог Λ_B бесконечен, и вероятности F и D обращаются в нуль. Во втором случае порог равен нулю, и вероятности равны единице.

Как следует из рассмотрения, приведенного в [3], максимум байесовского риска может быть либо в указанных точках, либо внутри интервала (0, 1). Если зафиксировать байесовский порог $\Lambda_{B*} = c\mu_*$ для некоторого значения $p = p_*$, то F_* и D_* также фиксированы, а вместе с ними и условные риски $r_0(p_*)$ и $r_1(p_*)$. Пусть теперь меняется значение p , а порог Λ_{B*} остается прежним. Риск такого алгоритма $R^*(p) = r_0(p_*) + p \cdot [r_1(p_*) - r_0(p_*)]$ изменяется линейно от p, так что эта прямая линия касается линии байесовских рисков $R_B(p)$ в точке $p = p_*$. Для других значений p риск $R^*(p)$ всегда больше, чем $R_B(p)$.

Если максимум байесовского риска внутренний, то минимальное значение максимального риска $\max_p R^*(p)$ достигается, когда прямая горизонтальна, при этом точка касания дает *наименее благоприятное* значение $p_{НБ}$, которое определяет порог *минимаксного* алгоритма $\Lambda_{ММ} = c\mu_{ММ}$, где $\mu_{ММ} = (1 - p_{НБ})/p_{НБ}$.

Постоянное значение $R^*(p) = r_0(p_*) + p \cdot [r_1(p_*) - r_0(p_*)]$ получается, если коэффициент при p равен нулю, и наименее благоприятное значение $p_{НБ}$ находится из *уравнения минимакса* $r_0(p_{НБ}) = r_1(p_{НБ})$. В этом случае *минимаксная рабочая точка* [3] на плоскости (F, D) есть точка пересечения прямой линии $D = b - cF$, где $b = (\Pi_{10} - \Pi_{00})/(\Pi_{10} - \Pi_{11})$, и соответствующей *рабочей характеристики* алгоритма.

Следует отметить, что при $\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0$ максимум байесовского риска гарантированно будет внутренним, и тогда минимаксная рабочая точка лежит на прямой $D = 1 - cF$, где $c = \Pi_{01}/\Pi_{10}$.

Рассмотрим обнаружение сдвига гауссовского распределения [1] по выборке из N независимых значений $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. Задача $H_0 : y_k \sim N(m_0, \sigma_0^2)$, $H_1^{(1)} : y_k \sim N(m_1, \sigma_0^2)$, $k = 1, \dots, N$, рассмотрена в [2] для случая $\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0$. Тогда величина $c = \Pi_{01}/\Pi_{10} > 0$ определяет соотношение между стоимостями ложной тревоги и пропуска сигнала.

Оптимальный алгоритм формирует среднее арифметическое $\bar{y} = \sum y_k / N$, которое сравнивается с порогом

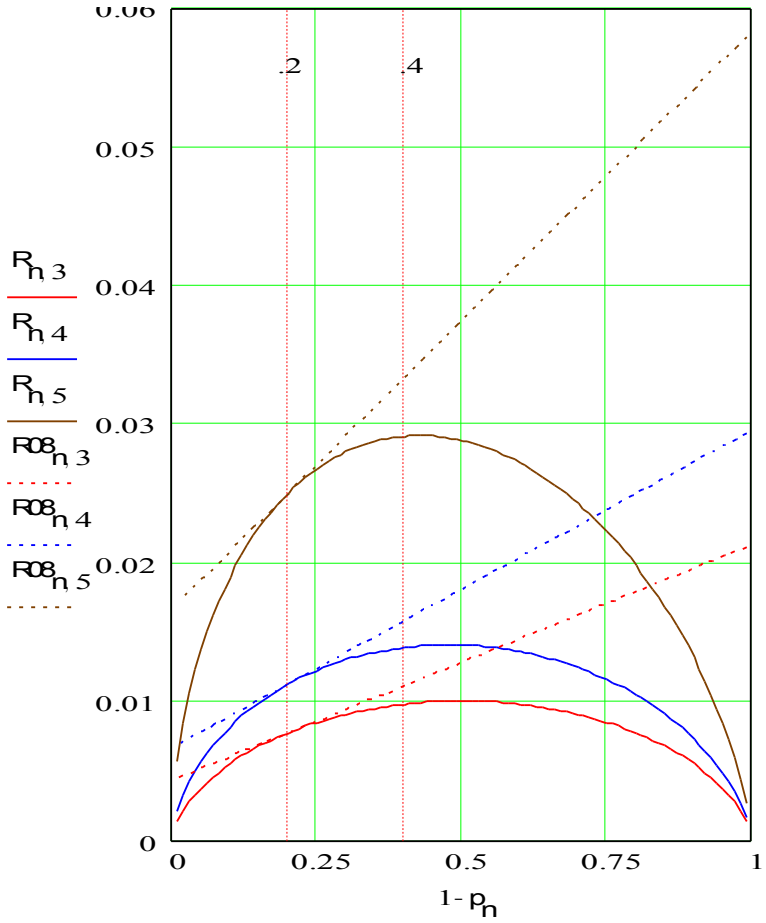
$$Y_B = (\sigma_0^2 / N) \ln(c\mu)/(m_1 - m_0).$$

Вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала вычисляются по формулам

$$F = 1 - \Phi(d_N/2 + \ln\Lambda_B/d_N); \quad 1 - D = \Phi(-d_N/2 + \ln\Lambda_B/d_N),$$

где $d_N = d\sqrt{N}$ – дефлекция на выходе накопителя, а байесовский порог $\Lambda_B = c(1 - p)/p$ зависит от p, т. е. априорная неопределенность является существенной.

Байесовский риск $R_B(p) = \Pi_{10}\{c(1 - p)F + p(1 - D)\}$ зависит от значений d_N, c и p. Для $d_N = 4{,}65$ зависимости $R_B(p)/\Pi_{10}$ от $q = 1 - p$ построены на рис. 2.44 для разных значений $c = 1, 2, 10$. При $c = 1$, т. е. при одинаковых стоимостях ошибок, *наименее благоприятное* значение равно $q_{НБ} = 0{,}5$ независимо от d_N.



nMM_2.mcd

Рис. 2.44. Байесовские риски для разных значений $c = 1, 2, 10$, $d_N = 4{,}65$.

С увеличением постоянной c риски растут, для $c > 1$ значения $q_{НБ}$ несколько уменьшаются, но они не сильно отличаются от $0{,}5$. Например, при $c = 10$ $q_{НБ} = 0{,}4$. При $c \neq 1$ минимаксный порог зависит от дефлекции d_N. Для $c < 1$ значения $q_{НБ}$ симметрично увеличиваются, т. е. при $c = 0{,}1$ имеем $q_{НБ} = 0{,}6$. С ростом d_N эти изменения становятся еще меньше.

Это позволяет сделать вывод о достаточной обоснованности значения $p_{НБ} = 0{,}5$ (которое использует критерий максимального правдоподобия) для минимаксного обнаружителя в данном случае. Поэтому минимаксный порог в этом случае равен $\Lambda_{ММ} = c$.

Если в действительности $p \neq p_{НБ}$, то риск минимаксного обнаружителя $R_{ММ}$ остается постоянным. Байесовские решения в этом случае имеют меньшие риски. Расчеты показывают, что существенные уменьшения байесовского риска происходят только при значениях p вблизи точек $p = 0$ и $p = 1$.

В то же время настройка обнаружителя на малые или большие значения может привести к значительным потерям, если в действительности p принимает другие значения. На рис. 2.44 показаны изменения средних рисков байесовских алгоритмов, настроенных на $q^* = 0{,}2$. Средний риск изменяется в этом случае по линейному закону [2] $R(q) = r_0(q^*)q + r_1(q^*)(1 - q)$. Разница между $R(q)$ и $R_{ММ}$ может оказаться значительной и обеспечить существенный выигрыш минимаксного обнаружителя.

Пусть каждое из поступающих независимых гауссовских наблюдений $y_1, y_2, \dots, y_N$ имеет одинаковую известную дисперсию σ_0^2 и один из возможных *симметричных биполярных сдвигов* $m_0 = -a$ или $m_1 = a$, которые требуется различить. Известные значения $-a$ и a появляются с неизвестными вероятностями q и $p = 1 - q$, поэтому байесовский порог различения $Y_B = \sigma_0^2 \ln(c\mu)/2a$ установить невозможно. В этой ситуации минимаксный подход [9] определяет *наименее благоприятное значение* $p_{НБ} = 1/2$ и нулевой порог $Y_{ММ} = 0$. При достаточно большом числе выборок N есть другая возможность установки порога, связанная с адаптацией.

Адаптивный подход с *самообучением*, который называется *эмпирическим байесовским* подходом, предлагает использование *исходной* выборки для оценивания неизвестного параметра q. При этом $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ рассматривается как выборка из смешанного распределения [13] $f(y) = qf_0(y) + (1-q)f_1(y)$ с математическим ожиданием $m_y = a(1-2q)$.

Поскольку $\bar{y}$ является эффективной несмещенной оценкой математического ожидания m_y, то величину $\hat{q} = (1-\bar{y}/a)/2$ можно рассматривать как оценку неизвестной вероятности q. Соответствующая оценка для $p = 1-q$ равна $\hat{p} = 1/2 + \bar{y}/2a$.

Полученные оценки вытекают из *метода моментов* [1], который здесь используется как *метод адаптации*. Эти оценки имеют смысл лишь в интервале значений $-1 < \bar{y}/a < 1$. Вне этого интервала можно положить $\hat{q} = 0,\ \hat{p} = 1$ для $\bar{y}/a \geq 1$ и $\hat{q} = 1,\ \hat{p} = 0$ для $\bar{y}/a \leq -1$. В результате *адаптивный байесовский* порог равен $Y_{BA} = (\sigma_0^2/2a)\ln(\hat{q}/(1-\hat{q})) = (\sigma_0^2/2a)\ln((1-\bar{y}/a)/(1+\bar{y}/a))$.

Данное решающее правило предложено Г. Роббинсом и реализует вариант *прямого метода самообучения*. Процедура не является оптимальной, поскольку метод адаптации не вытекает из общего байесовского критерия оптимальности для данной задачи.

В силу состоятельности оценок $\hat{q}$ и $\hat{p}$ полная вероятность ошибки при $N \to \infty$ стремится к минимуму, соответствующему байесовскому решению для известных значений q и p. Заметим, что в числе существенных параметров задачи остались величина сдвига и дисперсия шума.

Статистическое моделирование работы алгоритмов различения показано на рис. 2.45 – 2.48. На рис. 2.45 показаны полезные сигналы и выделены три участка времени. Первый участок с номерами выборок $k = 0,1,\dots 199$ соответствует отсутствию полезных сигналов ($a = 0$). Второй участок содержит 200 выборок, в которых полезный сигнал $-a = -1{,}28$ появляется с вероятностью $q = 0{,}9$, а сигнал $a = 1{,}28$ появляется с вероятностью $p = 0{,}1$. На третьем участке также имеется 200 выборок, но сигналы появляются с вероятностями $q = 0{,}1$ и $p = 0{,}9$.

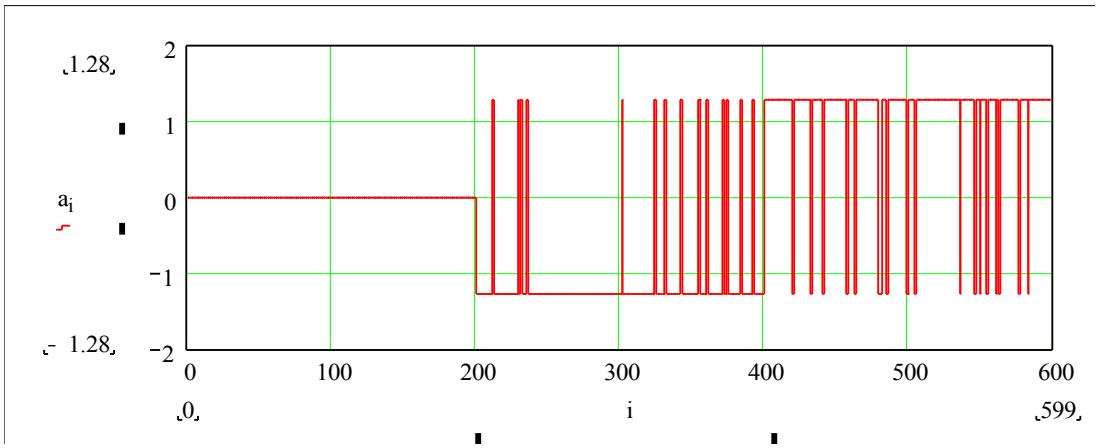


Рис. 2.45. Моделирование полезных сигналов с вероятностями появления 0,1 и 0,9. ***nMM_a_1_0.mcd***

На рис. 2.46 показаны наблюдаемые выборки, содержащие сумму полезных сигналов и стандартного нормального шума с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Изменения полезного сигнала показаны пунктиром.

Средняя ошибка различения на втором и третьем интервалах (расчетный байесовский риск) в этом случае составляет $0{,}048$.

Минимаксный риск для алгоритма с нулевым порогом при наличии какого-либо из сигналов равен $R_{\text{ММ}} = 0{,}1$. Он может быть уменьшен, если известно значение p. Например, для $p = 0{,}1$ на втором участке (и для $p = 0{,}9$ на третьем участке) байесовский риск можно уменьшить вдвое за счет увеличения на втором участке (уменьшения на третьем) оптимального байесовского порога Y_B по сравнению с минимаксным. Этот оптимальный порог изображен на рис. 2.47 (линия 1). Адаптивный порог Y_{BA} хорошо приближается к оптимальному и показан линией 2.

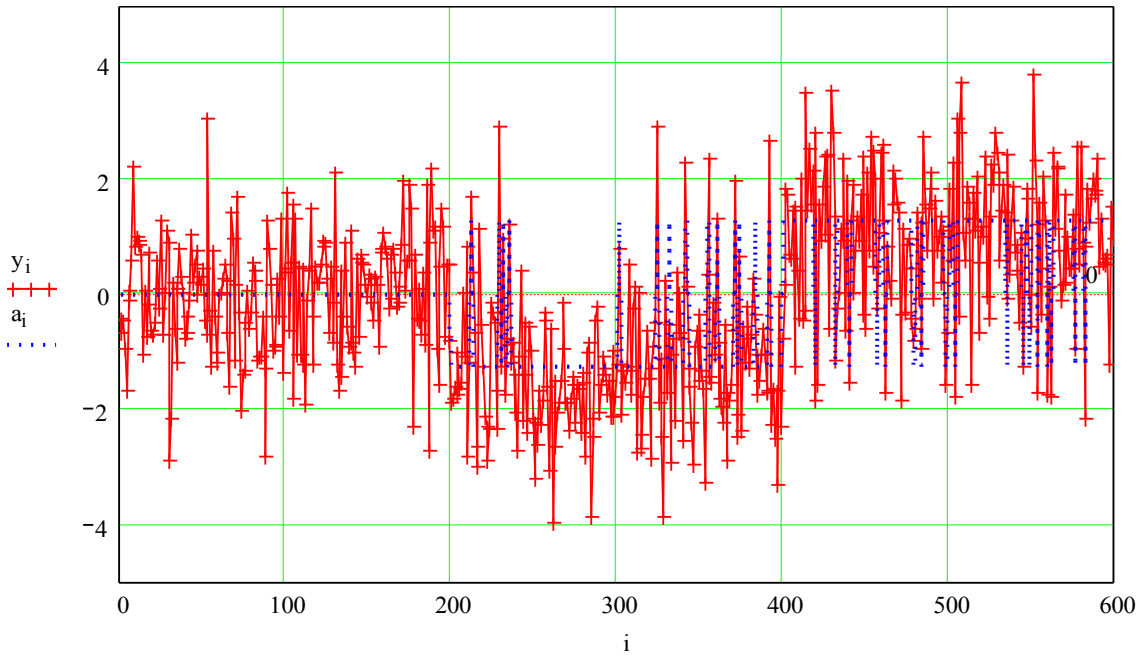


Рис. 2.46. Моделирование симметричной гауссовской задачи при $d = 2{,}56$.

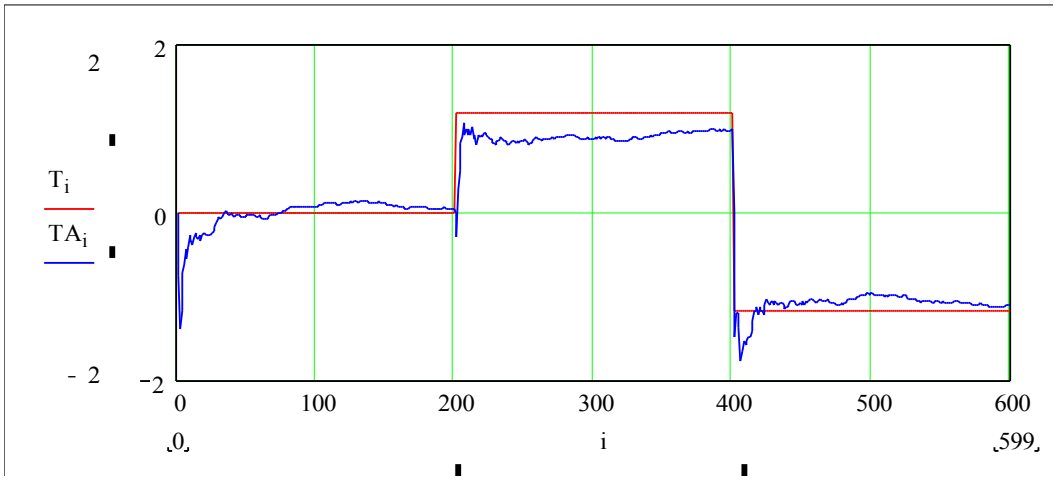


Рис. 2.47. Байесовский и адаптивный пороги для $d = 2{,}56$.

Эффективность адаптации иллюстрируется на рис. 2.48, где показаны разность $z_k = y_k - Y_{BA}(k)$ и адаптивный порог $Y_{BA}(k)$ (пунктир). Из сравнения с рис. 2.46 хорошо видно уменьшение числа ложных выбросов по сравнению с нулевым порогом.

Выигрыш обнаружителя с самообучением по сравнению с минимаксным тем больше, чем больше отличие истинного значения p от 0,5. Если $p = 0{,}01$, то обеспечивается почти десятикратное уменьшение риска.

Вместе с тем, при малом числе выборок N или при малых дефлекциях возможен и проигрыш адаптивного алгоритма минимаксному. Он объясняется тем, что оценка неизвестной вероятности в этом случае слишком груба для использования вместо истинного значения [13]. Следует также отметить, что при больших дефлекциях адаптация также может оказаться малоэффективной, поскольку риск минимаксного алгоритма уже сам становится достаточно малым. Поэтому, в конкретных ситуациях возникает вопрос о целесообразности адаптации, который должен решаться наряду с ее реализацией.

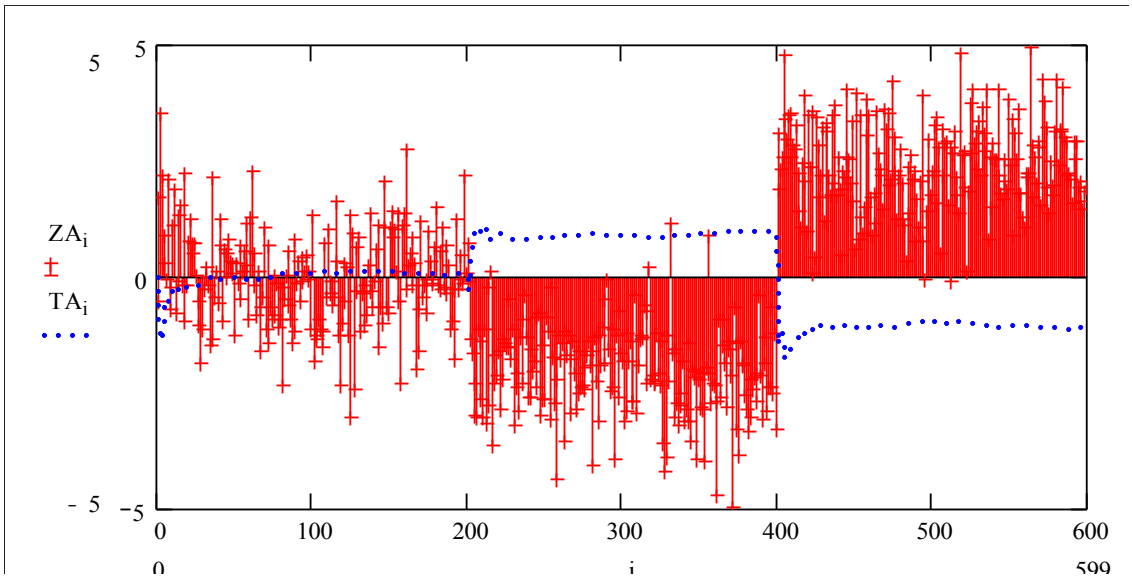


Рис. 2.48. Моделирование симметричной гауссовской задачи для алгоритма с адаптивным порогом при $d = 2{,}56$.