1.10. Обнаружение изменения интенсивности пуассоновского потока

Потоки случайных событий (точек) используются для описания отказов в теории надежности, заявок в теории массового обслуживания, ансамблей частиц в физике, импульсных сигналов и помех в радиотехнике, потока движущихся целей в радиолокации, при анализе компьютерных и телекоммуникационных сетей и т. д. [30].

Пуассоновским называется поток случайных событий, обладающий следующими свойствами:

а) *стационарность* (или *однородность*), когда вероятность попадания того или иного числа событий на заданный интервал зависит от длины этого интервала, и не зависит от его расположения;

б) *ординарность*, при которой вероятность появления двух и больше событий на достаточно малом временном интервале пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события (поток «редких» событий);

в) *отсутствие последействия*, когда для любых двух неперекрывающихся интервалов времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. С этим свойством связано то, что для пуассоновского потока длительности интервалов между соседними событиями являются *независимыми* случайными величинами с *экспоненциальными* (показательными) распределениями: $f(\tau) = \nu \exp(-\nu\tau)$, где ν есть *интенсивность* потока с размерностью [1/с].

Вероятность получить ровно k событий за фиксированный интервал времени T определяется распределением Пуассона $P(y = k) = \lambda^k \exp(-\lambda)/k!$, где $\lambda = \nu T$ – параметр распределения, равный математическому ожиданию, дисперсии и каждому из высших кумулянтов. Известно, что при наложении (суммировании) пуассоновских потоков получается пуассоновский поток с суммарной интенсивностью.

Поток Пуассона обладает особым асимптотическим свойством: при наложении большого числа ординарных стационарных непуассоновских потоков с любым последействием получается почти пуассоновский поток. Оно аналогично свойству гауссовского распределения, к которому стремится при некоторых условиях сумма большого числа негауссовских случайных величин. Путем «просеивания» (удаления части точек, например, каждой второй, третьей и т. д.) потока Пуассона получается поток Эрланга с соответствующим распределением интервалов между событиями. Поток Эрланга сохраняет стационарность и ординарность, но теряет отсутствие последействия.

Существует два метода формирования наблюдений из случайного потока. В случае метода *прямой выборки* целочисленное наблюдение k называется *отсчетом* и формируется подсчитыванием случайных точек или событий за фиксированный интервал времени T. Такой метод применяется при фотоприеме [25] в режиме *счета фотоэлектронов*. Изменение интенсивности потока проявляется в изменениях параметра λ распределения Пуассона.

При использовании метода *обратной выборки* подсчет производится до достижения заданного числа K событий. В этом случае регистрируется случайный временной интервал $\tau > 0$, который и будет наблюдением. Считается, что интервал измеряется с пренебрежимо малыми ошибками. Для пуассоновского потока случайный временной интервал имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha,\beta)$ с параметрами $\alpha = K$, $\beta = 1/\nu$. Изменение интенсивности потока влечет изменение параметра масштаба гамма-распределения.

Параметрическая задача обнаружения формулируется так: $H_0 : \nu = \nu_0$, $H_1 : \nu = \nu_1$, где $\nu_1 \neq \nu_0$ – известные значения. При фотоприеме ν_0 есть интенсивность потока фоновых фотоэлектронов.

В качестве параметра обнаружения введем *относительное изменение* интенсивности потока $\delta = (\nu_1 - \nu_0)/\nu_0$.

Логарифм отношения правдоподобия в случае *прямой выборки* равен $\ln \Lambda(k) = k \cdot \ln(1+\delta) - \nu_0 T\delta$. Отсюда оптимальное обнаружение увеличения интенсивности осуществляется, если отсчет превышает порог, т. е. при $k > y_T$, где порог $y_T = (\ln \Lambda_T + \nu_0 T\delta)/\ln(1+\delta)$. Если $k \leq y_T$, то выносится решение в пользу H_0.

Ввиду того, что отсчет k принимает только целочисленные значения, удобно переписать алгоритм в эквивалентном виде $k > k_T$, где k_T есть целая часть от y_T. При изменении Λ_T порог k_T меняется дискретно.

Вероятность ложной тревоги (ВЛТ) дается формулой $F(k_T) = 1 - \exp(-\nu_0 T)\sum_{k=0}^{k_T}(\nu_0 T)^k / k!$ Отсюда видно, что максимальное значение ВЛТ равно $F(0) = 1 - \exp(-\nu_0 T)$. С увеличением порога k_T на единицу вероятность ложной тревоги скачком уменьшается с $F(k_T)$ до $F(k_T + 1)$. Если требуется обеспечить значение ВЛТ F_0, лежащее между $F(k_T)$ и $F(k_T + 1)$, то используется *рандомизация* алгоритма.

Вероятность правильного обнаружения равна $D(k_T) = 1 - \exp(-\nu_1 T)\sum_{k=0}^{k_T}(\nu_1 T)^k / k!$ и также имеет максимальное

значение $D(0)=1-\exp(-\nu_1 T)$. Рабочие характеристики обнаружителя существуют только в отдельных точках [1].

Учитывая связь между гамма-распределением и распределением Пуассона [25], получаем

$$F=1-\Gamma(k_T,\nu_0 T)/\Gamma(k_T),\ D=1-\Gamma(k_T,\nu_1 T)/\Gamma(k_T),$$

где $\Gamma(\alpha,z)=\int_z^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$ – неполная гамма-функция.

Рандомизированное решающее правило включает случайный механизм принятия решения в случае, если $k=k_T$. Решение в пользу H_1 в этом случае принимается с вероятностью $\gamma=[F_0-F(k_T+1)]/[F(k_T)-F(k_T+1)]$. С вероятностью $1-\gamma$ принимается решение в пользу H_0. Такой способ рандомизации соответствует соединению соседних точек рабочей характеристики отрезками прямых линий.

Для байесовских критериев параметры ν_0 и ν_1 оказываются существенными. В случае критерия Неймана–Пирсона существенным будет только параметр ν_0.

Характеристики обнаружения $D=f(\delta;F_0,\nu_0)$ начинаются с определенных дискретных значений вероятности ложной тревоги F_0 и оказываются зависящими от конкретного ν_0. С увеличением ν_0 характеристики обнаружения приближаются к характеристикам для соответствующей $(N-N)$ задачи [1] $H_0: y\sim N(m_0,\sigma_0^2)$ против $H_1: y\sim N(m_1,\sigma_1^2)$, где $\sigma_0^2=m_0=\lambda_0$ и $\sigma_1^2=m_1=\lambda_1$. Эта задача соответствует случаю одновременного увеличения математического ожидания и дисперсии распределения. Используя дефлекцию $d=(\lambda_1-\lambda_0)/\sqrt{\lambda_0}=\delta\sqrt{\lambda_0}=\delta\sqrt{\nu_0 T}$, получаем характеристики обнаружения в «нормальных» координатах в виде

$$c_D=(d-c_F)/\sqrt{1+\delta}=(d-c_F)/\sqrt{1+d/\sqrt{\lambda_0}}\,.$$

Отсюда следует, что для $D=0{,}5$ пороговая дефлекция $d^{(0,5)}=c_F$, как и в задаче $(N-N)$. Для $D>0{,}5$ величина c_D при той же дефлекции будет меньше, чем в случае обнаружения сдвига гауссовского распределения, когда $c_D=d-c_F$. Таким образом, в данном случае пороговая дефлекция будет больше, а разница представляет «потери» в пороговой дефлекции. Этими потерями можно пренебречь при $\lambda_0>>d_{D,F}^2$. С уменьшением λ_0 в n раз пороговые значения $\delta_{D,F}$ возрастают в $\sqrt{n}$ раз (закон *квадратного корня* [10]), что требует больших относительных изменений интенсивности для достижения

того же качества обнаружения. Заметим, что в данном случае дефлекция $d = \delta\sqrt{\nu_0 T}$ пропорциональна *квадратному корню из времени наблюдения.*

При использовании *обратной выборки* логарифм отношения правдоподобия $\ln\Lambda(y=\tau) = K\cdot\ln(1+\delta) - \tau\nu_0\delta$. Решение в пользу сигнала принимается, если время до появления K событий становится меньшим порогового, т. е. $\tau \le \tau_T$, где $\tau_T = (K\cdot\ln(1+\delta) - \ln\Lambda_T)/\nu_0\delta$.

Характеристики обнаружения даются формулами

$$F = \int_0^{\tau_T} f_0(\tau)\mathrm{d}\tau = 1 - \Gamma(K,\nu_0\tau)/\Gamma(K),$$

$$D = \int_0^{\tau_T} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau = 1 - \Gamma(K,\nu_1\tau)/\Gamma(K).$$

Таким образом, алгоритмы прямого счета и обратной выборки работают в одной точке рабочих характеристик, если $k_T = K$ и $T = \tau_T$. Известно, что величина $2\nu\tau$ имеет χ^2-распределение с $2K$ степенями свободы, что позволяет рассчитывать характеристики обнаружения по соответствующим таблицам [26].

Особенностью задачи обнаружения для дискретных наблюдений является то, что вероятности ошибок ограничены. Минимальное значение вероятности пропуска в данном случае равно $P_1(k=0) = \exp(-\lambda_1)$, а максимальное значение вероятности ложной тревоги будет $1 - P_0(k=0) = 1 - \exp(-\lambda_0)$. Рабочие характеристики существуют только в отдельных точках и приведены в [1]. В случае «рандомизации» решающего правила [3] точки соединяются прямыми линиями.

Линия байесовского изокритерия разрывна и представляет собой совокупность вертикальных отрезков, проходящих через каждую точку РХ [10]. Они появляются потому, что для заданной величины λ_0 при увеличении λ_1 в определенных пределах вероятность ложной тревоги не меняется, поскольку не меняется порог k_T. В то же время вероятность правильного обнаружения растет. Когда же порог принимает следующее целочисленное значение, вероятность ложной тревоги скачком уменьшается и опять сохраняется неизменной, а вероятность правильного обнаружения опять начинает непрерывно расти, но уже с более низкого уровня.

Линии изокритерия Неймана–Пирсона являются вертикальными отрезками, проходящими через соответствующие точки рабочих характеристик.