1. ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

1.1 Алгоритмы обработки сигналов и их характеристики

Обработкой сигналов в радиотехнике называется их преобразование в тех или иных целях. Основной целью обработки обычно является получение, извлечение или восстановление информации, т. е. решение *задачи приема.* Эта задача включает три элемента: *события, наблюдения, решения*, конкретизация которых приводит к частным задачам, причем задачи обнаружения и различения сигналов являются наиболее простыми [1].

Конечным результатом при решении *задачи обнаружения и различения* является принятие *решения* d_i относительно *события* s_i, которое связано с определенным *сигналом* из заданного набора M сигналов, $i = 0, 1, 2, ..., M-1$. Нулевое событие s_0 обычно соответствует отсутствию сигнала. Такая формулировка задачи соответствует *многоальтернативному обнаружению.*

Задачи обнаружения и различения типичны для локационных систем. В системах связи задача различения решается демодулятором при приеме дискретных сообщений.

Решение принимается в результате обработки наблюдения $y(t)$, которое представляет собой процесс (электрический ток или напряжение) в некоторой точке структуры радиоприемного тракта (на выходе приемника, на выходе детектора и т.д.). Выбор точки, в которой рассматриваются наблюдения, зависит от того, какая часть тракта исследуется. Всегда предполагается некоторая предварительная обработка, связанная с видом радиосистемы. С учетом дискретизации по времени и многоканальной обработки исходное наблюдение можно представить массивом данных или *выборкой* $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$. Множество возможных значений (реализаций) выборки образует *множество наблюдений* Y.

Для синтеза и анализа алгоритмов требуется математическое описание свойств основных элементов задачи, т. е. *статистическая модель задачи*. Качество алгоритма характеризуется вероятностями ошибок или единым показателем, вытекающим из принятого *критерия оптимальности*. Для получения (синтеза) алгоритма обработки следует применить определенный *метод*, приводящий к оптимальному или неоптимальному решению.

Ряд предположений о событиях и соответствующих им наблюдениях, участвующих в модели и конкретизирующих ее, составляет *гипотезу*.

Модель M_i для i- й гипотезы связывает свойства события (сигнала) s_i и наблюдения как функции от сигнала $y(s_i)$ и строится на основании *априорной* информации (от лат. «a priori», т. е. «до опыта», в данном случае до приема сигнала, тогда как «a posteriori» означает «после опыта», т. е. после получения наблюдений). Она включает математическое описание свойств событий, сигналов s, помех η, и вида взаимодействия $y = \varphi(s, \eta)$ сигналов и помех в канале.

Задача обнаружения или различения сигналов формулируется обычно как *проверка статистических гипотез* H_i при $i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$. Число гипотез M считается известным. Решение d_i в пользу гипотезы H_i принимается в результате обработки наблюдения. Мешающие факторы, включающие помехи, вызывают ошибки, т. е. принятие неправильных решений.

Обработку можно рассматривать как разделение всего множества наблюдений Y на непересекающиеся подмножества Y_i, соответствующие гипотезам. Разные алгоритмы обработки приводят к разным границам подмножеств. Указанные подмножества можно рассматривать как *классы*, поэтому задача различения представляет собой частный случай более общей задачи *классификации*, которая включает дополнительный этап формирования *признаков* из первичных наблюдений.

Алгоритм обработки описывается *решающей функцией* $\delta(y)$,которая и представляет конкретную совокупность преобразований наблюдений y, т. е решение $d = \delta(y)$. Для задачи различения вводится [2] *решающая вектор-функция* $\delta(y) = (\delta_0(y), \delta_1(y), \ldots, \delta_{M-1}(y))^T$, где T – знак транспонирования. Функция $\delta(y)$ носит также название *решающей процедуры* или *решающего правила.*

Если правильное решение $d_i = i$, т. е. определяется индекс события, то $\delta_i(y)$ есть *индикаторная* функция соответствующей области Y_i, т. е. индикаторная функция соответствующего решения. Для любой выборки $\sum_{i=0}^{M-1} \delta_i(y) = 1$, поэтому размерность

пространства решений на единицу меньше, чем размерность M задачи различения.

В задаче обнаружения решающая функция

$$\delta(y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathrm{Y}_1, \\ 0, & y \in \mathrm{Y}_0, \end{cases}$$

и множество наблюдений Y разделяется на два подмножества единственной границей.

В случае *рандомизированного* (от англ. random – случайный) алгоритма обнаружения функция $\delta(y)$ принимает любое значение от нуля до единицы и представляет вероятность принятия гипотезы H_1. Рандомизированное правило включает случайный механизм или эксперимент с двумя исходами, вероятности которых $\delta(y)$ и $1-\delta(y)$ зависят от наблюдений.

Для реализации разделения многомерного множества Y обычно формируется *решающая статистика* меньшей мерности, чем исходные наблюдения. Слово «статистика» означает функцию от наблюдений, т. е. результат преобразования наблюдений. Исходные наблюдения сами также представляют статистику. *Достаточная* статистика включает всю информацию о задаче, которая содержится в исходной выборке.

При *обнаружении* множество наблюдений *редуцируется* (сводится, отображается) на одномерное пространство (числовую ось). Таким образом, решающая статистика производит *упорядочение* реализаций наблюдений. В случае M гипотез пространство решений имеет не более чем $M-1$ измерений [3].

При *полном статистическом описании* модели для каждой из гипотез можно указать *функцию распределения вероятностей* наблюдения $F_i(y)$ или *плотность вероятности* $f_i(y)$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$. Здесь y – неслучайный аргумент. Плотность вероятности имеет размерность величины $1/y$.

Для наблюдений, описывающихся непрерывными во времени случайными процессами, используются соответствующие *функционалы* вероятностей (скалярные функции от реализации).

Гипотезы могут предполагать *неслучайный* или *случайный* характер событий. В последнем случае вводятся априорные вероятности p_i для каждого из событий или для каждой из гипотез, что соответствует *байесовскому подходу* к задаче. Случайный характер событий изменяет вид распределения наблюдений, т. е. меняет модель задачи.

Построение *оптимального* (наилучшего) алгоритма обработки требует выбора *критерия оптимальности*, определяющего для каждого алгоритма скалярный показатель качества. Этот показатель позволяет также *упорядочить* при заданной модели все другие рассматриваемые алгоритмы и оценить их близость к оптимальному решающему правилу.

Следует отметить, что в отличие от теории приема сигналов в прикладной статистике термин «критерий» употребляется иначе [4, 5, 6]. Под «критерием гипотезы» здесь понимается сама решающая процедура (решающее правило), позволяющая принять или отклонить гипотезу. Во избежание путаницы лучше употреблять для решающего правила термин «тест» (test), а не «критерий», как это принято в зарубежных литературных источниках, где для критерия оптимальности используется термин «criterion».

В задаче обнаружения область Υ_0 принятия гипотезы H_0 называется *допустимой*, а область Υ_1 отклонения H_0 (т. е. принятия H_1) называется *критической* областью. Таким образом, алгоритм обнаружения характеризуется *критической функцией* $\delta(y)$, которая (при отсутствии рандомизации алгоритма) принимает значение 0 в допустимой области и значение 1 в критической области, т. е. является *индикатором критической области*.

Далее термин «критерий» будет употребляться исключительно как «критерий оптимальности» для описания показателя качества решающего правила (алгоритма обработки).

Существует два вида критериев оптимальности: *условно-экстремальные* и *байесовские*. К условно-экстремальным относится критерий Неймана–Пирсона. Использование *байесовского* критерия оптимальности (см. Прил. 1) подразумевает случайный характер событий. Оптимальный по любому разумному критерию оптимальности обнаружитель формирует *отношение правдоподобия* $\Lambda(y)$ и сравнивает это отношение с порогом Λ_T, значение которого определяется выбранным критерием.

Таким образом, оптимальный (нерандомизированный) алгоритм имеет вид $\delta(y) = (1/2)\{\mathrm{sgn}(\Lambda(y) - \Lambda_T) + 1\}$. Здесь

$$\mathrm{sgn}(y) = \frac{y}{|y|} = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

есть знаковая функция. Иначе говоря, при выполнении неравенства $\Lambda(y) \geq \Lambda_T$ принимается решение d_1, а при невыполнении – решение d_0. Часто используется строгое неравенство $\Lambda(y) > \Lambda_T$, поскольку вероятность события $\Lambda(y) = \Lambda_T$ при непрерывных значениях равна нулю.

Отношение правдоподобия есть положительная случайная скалярная величина. Оно является *минимальной достаточной статистикой*, как и любое его монотонное преобразование. Такая статистика осуществляет максимально возможную редукцию данных без потери информации. Часто удобнее формировать логарифм отношения правдоподобия $\ln\Lambda(y)$. В задаче различения формируется несколько отношений правдоподобия, которые сравниваются с разными порогами.

Во многих практически важных случаях ставится задача построения не оптимальных, а близких к ним по характеристикам более простых (*квазиоптимальных*) алгоритмов обработки. В этих случаях формируется *решающая статистика* $u(y)$, которая может и не быть достаточной статистикой.

Выбор критерия оптимальности алгоритма в значительной степени субъективен, поскольку «нельзя указать критерия для выбора критерия». Исходным является совокупность показателей качества $\mathrm{K}=(\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2,...)$. В задаче обнаружения показателями качества являются четыре условных вероятности решений (два из которых ошибочные решения и два – правильные).

Вероятность ложной тревоги $F=P(d_1\,|\,s_0)$ является вероятностью *ошибки первого рода*. Вертикальная черта в выражении означает, что справа от нее стоит условие. Эта величина называется еще *размером критической области*. Обычно выбирается достаточно малое число $0<\alpha<1$ (называемое *уровнем значимости*) и выдвигается требование $F\le\alpha$. *Вероятность пропуска* является вероятностью *ошибки второго рода*.

Вероятность правильного обнаружения $D=P(d_1\,|\,s_1)$ называется *мощностью* критической области или *мощностью решающего правила*. Ясно, что вероятность пропуска равна $1-D$. Наконец, *вероятность правильного необнаружения* $P(d_0\,|\,s_0)=1-F$. Поскольку вероятности при одинаковых условиях в сумме составляют единицу, достаточными для характеристики качества являются два показателя, обычно D и F, либо вероятности ошибок F и $1-D$. Критерий оптимальности позволяет сформировать из них один скалярный показатель.

При использовании критерия Неймана–Пирсона наилучший или *оптимальный* алгоритм обнаружения (или *наилучшая критическая область* – НКО) имеет *наибольшую мощность* (вероят-

ность правильного обнаружения D) при заданном *размере* критической области (т. е. при заданной вероятности ложной тревоги F).

Для многоальтернативной задачи имеется M вероятностей *правильного различения* $D_i = P(d_i \mid s_i)$. Вероятность ошибочного различения (отнесение к другому классу) i-го сигнала является вероятностью [7] *ошибки первого рода*

$$\alpha_i = 1 - D_i = \sum_{k \neq i} P(d_k \mid s_i).$$

В этом случае фиксируется i-е событие s_i. Вероятность D_i характеризует ожидаемую частоту правильных решений в ряду экспериментов, в каждом из которых происходит событие (появляется сигнал) s_i.

Вероятность ошибочного принятия k-го решения d_k есть вероятность *ошибки второго рода* $\beta_k = \sum_{i \neq k} P(d_k \mid s_i)$. В этом случае событие s_k исключается из рассмотрения. Заметим, что в отличие от ошибок первого рода сумма вероятностей $\beta_k + D_k$ не равна единице, а представляет безусловную вероятность $P(d_k)$ принятия решения d_k. Это следует из того, что $\sum_k P(d_k) = 1$.

Величина $1 - \beta_k$ не характеризует достоверность какого-либо правильного решения, а определяет вероятность отказа от решения d_k в пользу любого другого решения в ряду экспериментов, в которых с равной вероятностью происходят события s_i, $i \neq k$. Для двухальтернативного случая аналога такой вероятности нет.

Оптимальное *байесовское* правило различения минимизирует *средний риск*, величина которого зависит от элементов матрицы потерь и априорных вероятностей каждой из гипотез (прил. 1).

Качество решающего правила дополнительно характеризуется свойствами *несмещенности* и *состоятельности*. Для несмещенного правила вероятность отвергнуть ложную гипотезу должна быть не меньше вероятности отвергнуть правильную, т. е. вероятность правильного обнаружения должна быть не меньше вероятности ложной тревоги. Состоятельным алгоритмом называется такой, при использовании которого вероятности ошибок стремятся к нулю, когда размер выборки неограниченно возрастает.

Во многих задачах приема можно успешно использовать стандартные методы и процедуры обработки данных и принятия решений, неплохо работающие в различных практических ситуа-

циях. В прикладной статистике выделяют следующие основные типы решающих правил или тестов [4]:

– тесты *значимости* (проверка заданных значений параметров распределений);
– тесты *согласия* (с выбранной моделью);
– тесты *однородности* двух или нескольких выборок (проверка принадлежности их единой генеральной совокупности), либо *стационарности* ряда наблюдений;
– тесты *симметрии* распределений;
– тесты *адекватности* (модели) или проверка типа зависимости между компонентами (многомерного признака);
– тесты *независимости (коррелированности)* и др.

При решении задач приема алгоритм может обрабатывать заранее заданный массив входных данных, получаемых за фиксированный интервал времени. Правило может использовать единственную анализируемую выборку. В этом случае оно называется *одновыборочным*. *Двухвыборочные* алгоритмы используют сравнительный анализ выборок, одна из которых может являться *опорной* или *классифицированной*. В частности, опорная выборка может быть чисто помеховой. Можно рассматривать и *многовыборочны*е правила решения.

Другая (неклассическая) схема принятия решения использует случайный объем выборки. Для *последовательного* алгоритма длительность интервала наблюдения заранее не фиксируется, а в основную обработку включается *правило остановки* (которое принимает дополнительное решение), прекращающее процесс наблюдения. Например, в *схеме обратного выбора* момент остановки определяется по накоплению заданного числа событий (появлению заданного числа импульсов). В число характеристик последовательных алгоритмов помимо традиционных вероятностей ошибок входят характеристики *случайного момента остановки*, например его математическое ожидание и дисперсия.

В среднем число наблюдений последовательного алгоритма оказывается меньшим по сравнению с любым непоследовательным при одинаковых характеристиках обнаружения или различения. Однако обычно вероятны отдельные реализации процесса принятия решения с очень большим временем наблюдения.

Если существует ненулевая вероятность того, что наблюдение может продолжаться неограниченно, то схема называется *открытой*. Когда процедура останавливается с вероятностью единица, схема будет *замкнутой*. Часто производится принудительное ограничение времени наблюдения, т. е. «усечение» процедуры ценою некоторой потери качества.

В ряде задач обнаружения и различения предусмотрена смена событий в процессе приема и регистрации наблюдений. Простейший вариант представляет «задача о разладке», когда свойства наблюдений скачком изменяются в неизвестный момент времени. Обычно одновременно с обнаружением факта «разладки», т. е. смены гипотезы, стоит задача оценивания момента «разладки». При этом возможны как классическая, так и последовательная схемы принятия решения. Качество обнаружения «разладки» обычно можно повысить ценою существенного запаздывания принятого решения о наличии «разладки» относительно момента ее возникновения.

Существуют *многоэтапные* решающие правила, использующие промежуточные решения для формирования окончательного решения. В случае *многошаговой* задачи получение наблюдений и принятие решений идет по шагам. На каждом шаге имеется *параметр состояния* θ_n *информационной* (радиотехнической) системы. Этот параметр определяет, например, положение диаграммы направленности, стробов дальности, величины порогов и др.

Состояние системы изменяется в результате принятия решений на этапе обработки наблюдений. Решение d_n, полученное на n-м шаге, может зависеть и от ранее принятых решений $d_{n-1}, d_{n-2}, \ldots$. Кроме того, уже принятые решения могут повлиять на параметры состояния $\theta_{n+1}, \theta_{n+2}, \ldots$ и наблюдения $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ на последующих шагах, а через них и на все последующие решения. Такие многошаговые схемы принятия решений называются *управляемыми* [8].

Степень различия распределений $f_i(y)$ и $f_j(y)$ обычно характеризуется некоторой *мерой различимости* или *параметром «расстояния»*. В задаче обнаружения эта величина используется для построения характеристик обнаружения и называется *параметром обнаружения* [1]. Параметр обнаружения позволяет упорядочить модельные сигнально-помеховые ситуации для выбранного алгоритма.

Если рассматриваются распределения решающей статистики u, то чаще всего вводится *дефлекция* $d = (m_1 - m_0)/\sigma_0$, где $m_i = M_i(u)$ – математическое ожидание решающей статистики при гипотезе H_i, а σ_0 – ее стандартное (среднеквадратическое) отклонение при гипотезе H_0. Квадрат дефлекции иногда называют *обобщенным отношением сигнал/шум* [9]. В случае, когда по-

явление сигнала вызывает сдвиг распределения решающей статистики, дефлекция представляет *отношение сигнал/шум по напряжению* на входе решающего устройства.

В других случаях более удобным параметром обнаружения оказывается *отношение сигнал/шум по мощности*, определяемое как относительное изменение второго момента распределения решающей статистики: $q^2 = (P_1 - P_0)/P_0$. Здесь $P_i = M_i(u^2)$ – второй момент распределения $f_i(u)$ при гипотезе H_i.

В [10] используется параметр обнаружения, названный *степенью обнаружимости* $\rho = (m_1 - m_0)/(\sigma_1\sigma_0)^{1/2}$, где в знаменателе стоит среднее геометрическое стандартных отклонений при гипотезах H_1 и H_0. Если $\sigma_1^2 = \sigma_0^2(1+\gamma)$, где $\gamma > -1$, то $\rho = d/(1+\gamma)^{1/4}$.

Другая мера расхождения распределений также связана с моментами первого и второго порядков и представляет *расстояние Фишера* [11]: $f = (m_1 - m_0)^2/(\sigma_1^2 + \sigma_0^2) = d^2/(2+\gamma)$.

В качестве параметра обнаружения подходят интегральные меры различия распределений, например $\Delta^2 = \int (F_1 - F_0)^2 \mathrm{d}y$. Э.Питмен [12] рассматривает две меры различимости двух плотностей: $\rho^* = \int |f_1 - f_0| \mathrm{d}y$ и $\rho^2 = \int (\sqrt{f_1} - \sqrt{f_0})^2 \mathrm{d}y$, причем предпочтение отдается второй. Можно также выбрать меру *омега-квадрат* [13]: $\omega^2 = \int (F_1 - F_0)^2 f_0(y) \mathrm{d}y$. Эти меры требуют для своего вычисления знания вида плотностей.

Неоднозначность определения параметра обнаружения в разных задачах приводит к трудностям сравнения различных алгоритмов по их характеристикам обнаружения, построенным для разных параметров обнаружения. В этом смысле рабочие характеристики являются более универсальными и могут обеспечить требуемое сравнение.

Важной системной характеристикой является *пороговое* значение выбранного параметра обнаружения (пороговая дефлекция, пороговое отношение сигнал/шум по мощности и др.). Пороговое значение гарантирует в данных условиях требуемую вероятность правильного обнаружения при заданной вероятности ложной тревоги.

Если размер выборки не является строго фиксированным, то обнаружители можно сравнивать по их эффективности для одной и той же сигнально-помеховой обстановки (модельной ситуации).

Пусть имеются два обнаружителя δ_1 и δ_2, решающие одну и ту же задачу обнаружения с одинаковыми вероятностями ошибок. Для этого правилу δ_1 требуется N_1 выборок, а правилу δ_2 требуется N_2 выборок. Более эффективным считается тот обнаружитель, которому требуется меньший объем выборок.

Относительная эффективность (RE – Relative Efficiency) правила δ_1 по отношению к δ_2 определяется как отношение N_2 к N_1: $RE(\delta_1 \mid \delta_2) = N_2 / N_1$. Если в качестве опорного правила δ_2 берется оптимальный обнаружитель в условиях полной априорной информации, то для других обнаружителей $RE \le 1$.

Трудности исследования алгоритмов при конечных размерах выборок заставляют обращаться к *асимптотическим* методам и к асимптотическим критериям качества – *асимптотической эффективности* и *асимптотической оптимальности*. При этом предполагается неограниченное увеличение размеров основной и обучающей выборок.

Асимптотическая относительная эффективность (ARE – Asymptotic Relative Efficiency) определяется как предельная величина относительной эффективности

$$ARE(\delta_1 \mid \delta_2) = \lim_{N_1 \to \infty, N_2 \to \infty} N_2 / N_1 .$$

Обычно [14] рассматривается последовательность алгоритмов $\{\delta_N\}$ для последовательности сигналов с убывающими амплитудами $\lambda_N = a / \sqrt{N}$.

Асимптотические свойства логарифма отношения правдоподобия для независимой выборки и детерминированного сигнала определяются главным образом линейным членом разложения, т. е. асимптотически достаточной статистикой

$$u(y) = (1/\sqrt{N}) \sum_{k=1}^{N} s_k \zeta(y_k),$$

где $\zeta(y) = (1/f_1(y))(\partial f_1(y)/\partial a)_{a=0}$ – характеристика безынерционного нелинейного преобразователя.

Асимптотическую эффективность алгоритма можно определить через асимптотическую дефлекцию решающей статистики. Для двух решающих статистик асимптотическая относительная эффективность есть отношение асимптотических дефлекций.

Выделим некоторые важные положения классической теории. Общая задача приема включает три элемента: событие, наблюдение, решение. Обнаружение и различение сигналов представляет частную задачу приема. Синтез и анализ алгоритмов обработки опирается на такие важные понятия, как модель, крите-

рий, метод. Алгоритм обработки сводится к формированию решающих статистик и сравнению их с порогами. Решающая статистика упорядочивает множество наблюдений. Критерий качества позволяет упорядочить множество алгоритмов для заданной модели и определить оптимальный алгоритм. При заданной модели алгоритм обнаружения представляется точкой на рабочей характеристике. Введение параметра обнаружения позволяет упорядочить модельные ситуации для выбранного алгоритма.

Следует подчеркнуть практическую важность определения основных элементов анализа и синтеза (модель–критерий–метод) для построения алгоритма обработки и сравнения качества его работы с другими алгоритмами.