Лабораторная работа №3
Оценка помехоустойчивости сигналов BPSK2 в канале с замираниями

1. **Цель работы:**
   1. Оценить помехоустойчивость сигналов BPSK2 в канале с замираниями.
2. **Задачи работы:**
   1. Оценить вероятность ошибки для сигналов BPSK2 в радиоканале (р/к) с замираниями.
3. Построить графики помехоустойчивости. Сформулировать выводы.
   Теоретические сведения:

Для оценки п/у сигнала BPSK в радиоканале с AWGN и рэлеевскими замираниями необходимо проинтегрировать выражение по переменной γ с учетом плотности вероятности (28):

$$P_{\text{сгт}} = \int_0^\infty \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\gamma}\right) p(\gamma) d\gamma = \frac{1}{2\gamma_0} \int_0^\infty erfc\left(\sqrt{\gamma}\right) e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}} d\gamma . \qquad (3.1)$$

Оценим интеграл I:

$$I = \int erfc\left(\sqrt{\gamma}\right) e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}} d\gamma . \qquad (3.2)$$

Функция ошибок $erf(z)$ определяется выражением [3]

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt . \qquad (3.3)$$

Производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции и равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхним пределом, поэтому производные от (3.3) и (1.18) имеют вид:

$$\frac{d}{dz} erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2};$$
$$\frac{d}{dz} erfc(z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}. \qquad (3.4)$$

Из (3.4) справедливы следующие выражения:

$$\frac{d}{dz}erf\left(\sqrt{z}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z}z^{-\frac{1}{2}};$$
$$\frac{d}{dz}erfc\left(\sqrt{z}\right)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z}z^{-\frac{1}{2}}. \qquad (3.5)$$

Введем следующие обозначения в интеграле (3.2):

$$u=erfc\left(\sqrt{\gamma}\right); \qquad (3.6)$$

$$dv=e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}}d\gamma. \qquad (3.7)$$

Интегрируя (3.7), получим следующее:

$$v=-\gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}}. \qquad (3.8)$$

Дифференцируя (3.6), с учетом (3.5) получим:

$$du=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\gamma}\gamma^{-\frac{1}{2}}d\gamma. \qquad (3.9)$$

Подставляя в формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$ формулы (3.6)–(3.9), имеем следующее выражение:

$$I=-\gamma_0 erfc\left(\sqrt{\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}}-\int(-\gamma_0)\,e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-\gamma}\gamma^{-\frac{1}{2}}d\gamma. \qquad (3.10)$$

Упростив (3.10), получим:

$$I=-\gamma_0 erfc\left(\sqrt{\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}}-\frac{\gamma_0}{\sqrt{\pi}}\int e^{-\gamma\left(\frac{\gamma_0+1}{\gamma_0}\right)}\gamma^{-\frac{1}{2}}d\gamma. \qquad (3.11)$$

Оценим интеграл I_1

$$I_1=\int e^{-\gamma\left(\frac{\gamma_0+1}{\gamma_0}\right)}\gamma^{-\frac{1}{2}}d\gamma. \qquad (3.12)$$

Сделаем замену переменной:

$$a = \gamma\left(\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0}\right). \tag{3.13}$$

Из (3.13) можно записать выражения:

$$\gamma = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\right)a;$$
$$d\gamma = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\right)da. \tag{3.14}$$

Подставим (3.13) и (3.14) в (3.12), тогда получим

$$I_1 = \int e^{-a}\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\right)^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\right)da\,. \tag{3.15}$$

Упростим выражение (3.15):

$$I_1 = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-a} a^{-\frac{1}{2}} da\,. \tag{3.16}$$

Оценим интеграл I_2:

$$I_2 = \int e^{-a} a^{-\frac{1}{2}} da\,. \tag{3.17}$$

Из (3.17) с учетом (3.5) получим следующее выражение:

$$I_2 = \sqrt{\pi}\; erf\left(\sqrt{a}\right). \tag{3.18}$$

С учетом (3.13)

$$I_2 = \sqrt{\pi}\, erf\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0}}\right). \tag{3.19}$$

С учетом (3.19) можно определить интеграл I_1 в (3.16):

$$I_1 = \sqrt{\pi}\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} erf\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0}}\right). \tag{3.20}$$

Интеграл I в (3.11) с учетом (3.20) определяется выражением

$$I = -\gamma_0 erfc\left(\sqrt{\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}} - \gamma_0\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} erf\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0}}\right). \tag{3.21}$$

С учетом (3.21) выражение (3.1) можно представить следующим образом:

$$P_{err} = \frac{1}{2\gamma_0}\left[-\gamma_0 erfc\left(\sqrt{\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}} - \gamma_0\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}\right)^{\frac{1}{2}} erf\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{\gamma_0+1}{\gamma_0}}\right)\right]_0^{\infty}. \quad (3.22)$$

Упростив выражение (3.22), получим

$$P_{err} = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}}\right). \quad (3.23)$$

4. Выполнение работы в программе Matlab:

5. Построение графиков:

Увеличение SNR в 2 раза

Уменьшено влияние шума в 2 раза

Уменьшено влияние замирания в 2 раза

6. Выводы