Лабораторная работа №1
Оценка помехоустойчивости бинарного сигнала фазоманипулированного сигнала BPSK (ФМ-2) в канале с AWGN

1. **Цель работы:**

   1. Оценка помехоустойчивости бинарного сигнала фазоманипулированного сигнала BPSK (ФМ-2) в канале с AWGN (аддитивным белым гауссовым шумом).
   2. Получение формулы для оценки помехоустойчивости сигнала BPSK..
   3. Построение теоретических графиков.

   Теоретические сведения:

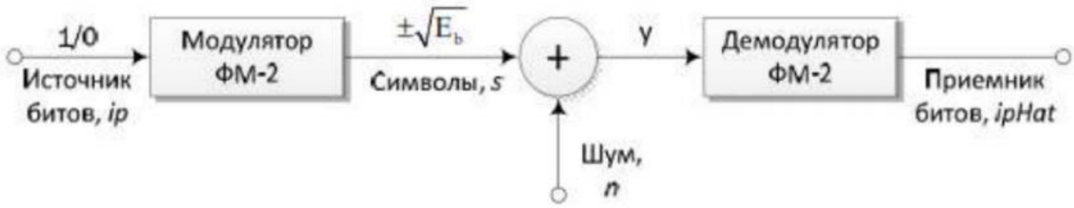
Задачей оценки помехоустойчивости является получение зависимости вероятности битовой ошибки P_b от отношения энергии бита к спектральной плотности шума N_0 - E_b/N_0. В дальнейшем будем называть это соотношение SNR и обозначать:

$$\gamma_0 = E_b / N_0$$

Сигналы BPSK имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow s_1 = +\sqrt{E_b}; \\ 0 &\rightarrow s_0 = -\sqrt{E_b}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Структурная схема для оценки помехоустойчивости сигналов в канале BPSK с AWGN выглядит следующим образом



где *ip*- переданный бит, *ipHat*-- принятый бит, *s*- переданный символ, *y* - принятый символ.

Для обнаружения сигналов на фоне шума *n* можно записать следующее правило принятия решений:

Для обнаружения сигналов на фоне шума *n* можно записать следующее правило принятия решений:

$$\text{если } P(s_1/n) > P(s_0/n), \text{ тогда } s_1; \\ \text{если } P(s_1/n) < P(s_0/n), \text{ тогда } s_0. \qquad (2)$$

В выражении (2) $P(s_1/n)$ - условная вероятность s_1 при условии n; а $P(s_0/n)$ - условная вероятность s_0 при условии n.

Правило (2) не может быть использовано приемником, так как ему неизвестны условные вероятности $P(s_1/n)$ и $P(s_0/n)$. Приемник знает апостериорные вероятности $P(n/s_1)$ и $P(n/s_0)$.

По формуле Байеса

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}, \qquad (3)$$

где $P(A)$ – априорная вероятность гипотезы A; $P(A/B)$ – вероятность гипотезы A при наступлении события B (апостериорная вероятность); $P(B/A)$ – вероятность наступления события B при истинности гипотезы A; $P(B)$ – полная вероятность наступления события B.

Формула Байеса позволяет «переставить причину и следствие»: применяя (3) к апостериорным вероятностям $P(n/s_1)$ и $P(n/s_0)$, получим выражения:

$$P(s_1/n)P(n) = P(n/s_1)P(s_1); \\ P(s_0/n)P(n) = P(n/s_0)P(s_0). \qquad (4)$$

Применяя (4) к задаче (2) обнаружения сигналов BPSK на фоне шума n, получим следующий критерий принятия решения:

$$\text{если } P(n/s_1)P(s_1) > P(n/s_0)P(s_0), \text{ тогда } s_1; \\ \text{если } P(n/s_1)P(s_1) < P(n/s_0)P(s_0), \text{ тогда } s_0. \qquad (5)$$

Апостериорная вероятность $P(n/s_1)$ называется правдоподобием s_1, а апостериорная вероятность $P(n/s_0)$ – правдоподобием s_0.

Для систем связи биты «0» и «1» равновероятны:

$$p(s_0) = p(s_1) = 1/2. \tag{6}$$

С учетом (6) критерий (5) (*максимального правдоподобия*) имеет вид

$$\begin{aligned} &\text{если } \frac{P(n/s_1)}{P(n/s_0)} > 1, \text{ тогда } s_1; \\ &\text{если } \frac{P(n/s_1)}{P(n/s_0)} < 1, \text{ тогда } s_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Источником помех в принятом сигнале y является аддитивный белый гауссов шум (АБГШ), величина которого n является случайной и подчиняется нормальному закону распределения с плотностью вероятности :

Источником помех в принятом сигнале y является аддитивный белый гауссов шум (АБГШ), величина которого n является случайной и подчиняется нормальному закону распределения с плотностью вероятности (ПВ):

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(n-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

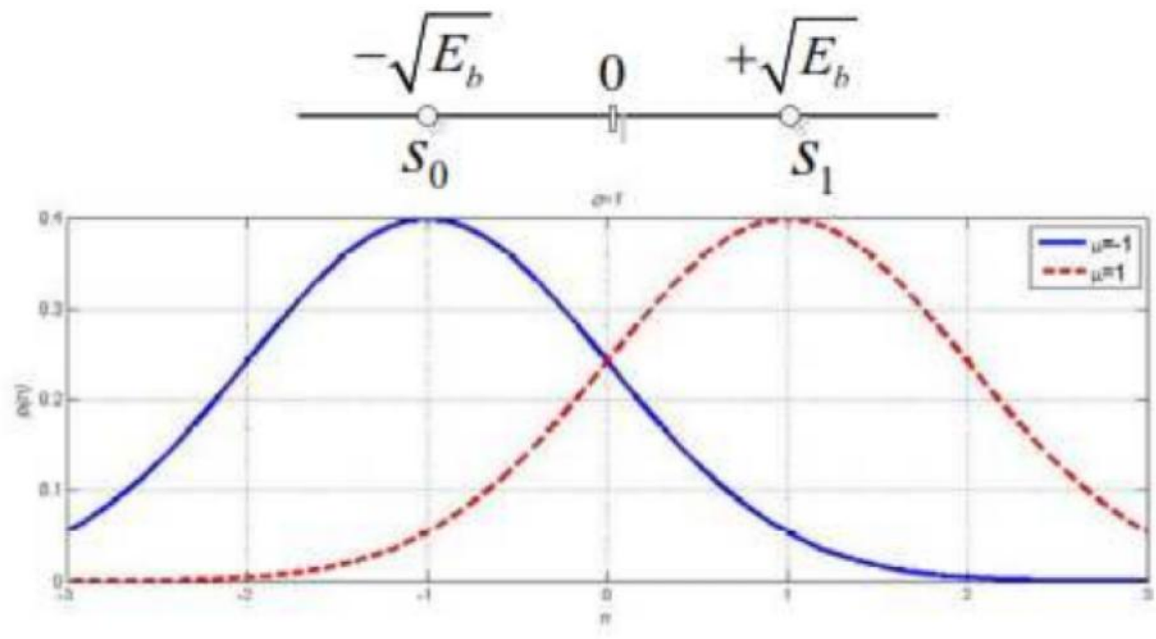
где математическое ожидание $\mu = 0$ и дисперсия $\sigma^2 = N_0/2$.

Допустим, был передан бит «0», тогда условная ПВ y при воздействии АБГШ на символ s_0 согласно определяется по формуле

$$p(y/s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{\frac{-\left(y+\sqrt{E_b}\right)^2}{N_0}}.$$

Допустим, был передан бит «1», тогда условная ПВ y при воздействии АБГШ на символ s_1 определяется выражением

$$p(y/s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{\frac{-\left(y-\sqrt{E_B}\right)^2}{N_0}}.$$



Графики условных ПВ

Отношение условных ПВ рассчитывается по формуле

$$\Lambda(y)=\frac{p(y/s_1)}{p(y/s_0)}=\frac{P(n/s_1)}{P(n/s_0)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{\frac{-\left(y-\sqrt{E_b}\right)^2}{N_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{\frac{-\left(y+\sqrt{E_b}\right)^2}{N_0}}}=e^{\frac{4y\sqrt{E_b}}{N_0}}.$$

при $y>0$ $\Lambda(y)>1$, а при $y<0$ отношение правдоподобий $\Lambda(y)<1$, поэтому критерий максимального правдоподобия (7) можно представить следующим образом:

$$y>0\Rightarrow s_1;$$
$$y<0\Rightarrow s_0.$$

Допустим, что был передан сигнал s_1, тогда согласно (12) вероятность ошибочного приема $p(error\,|\,s_1)$ определяется выражением

$$p(error\,|\,s_1)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\frac{-\left(y-\sqrt{E_b}\right)^2}{N_0}}dy. \qquad (13)$$

Допустим, что был передан сигнал s_0, тогда согласно (12) вероятность ошибочного приема $p(error \mid s_0)$ определяется так:

$$p(error \mid s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-\left(y+\sqrt{E_b}\right)^2}{N_0}} dy . \qquad (14)$$

Оценим интеграл в выражении (14). Сделаем замену переменной:

$$z = \frac{y + \sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0}};$$
$$dz = 1/\sqrt{N_0}\, dy. \qquad (15)$$

Пределы интегрирования

$$y = 0 \Rightarrow z = \sqrt{E_b / N_0};$$
$$y = \infty \Rightarrow z = \infty.$$

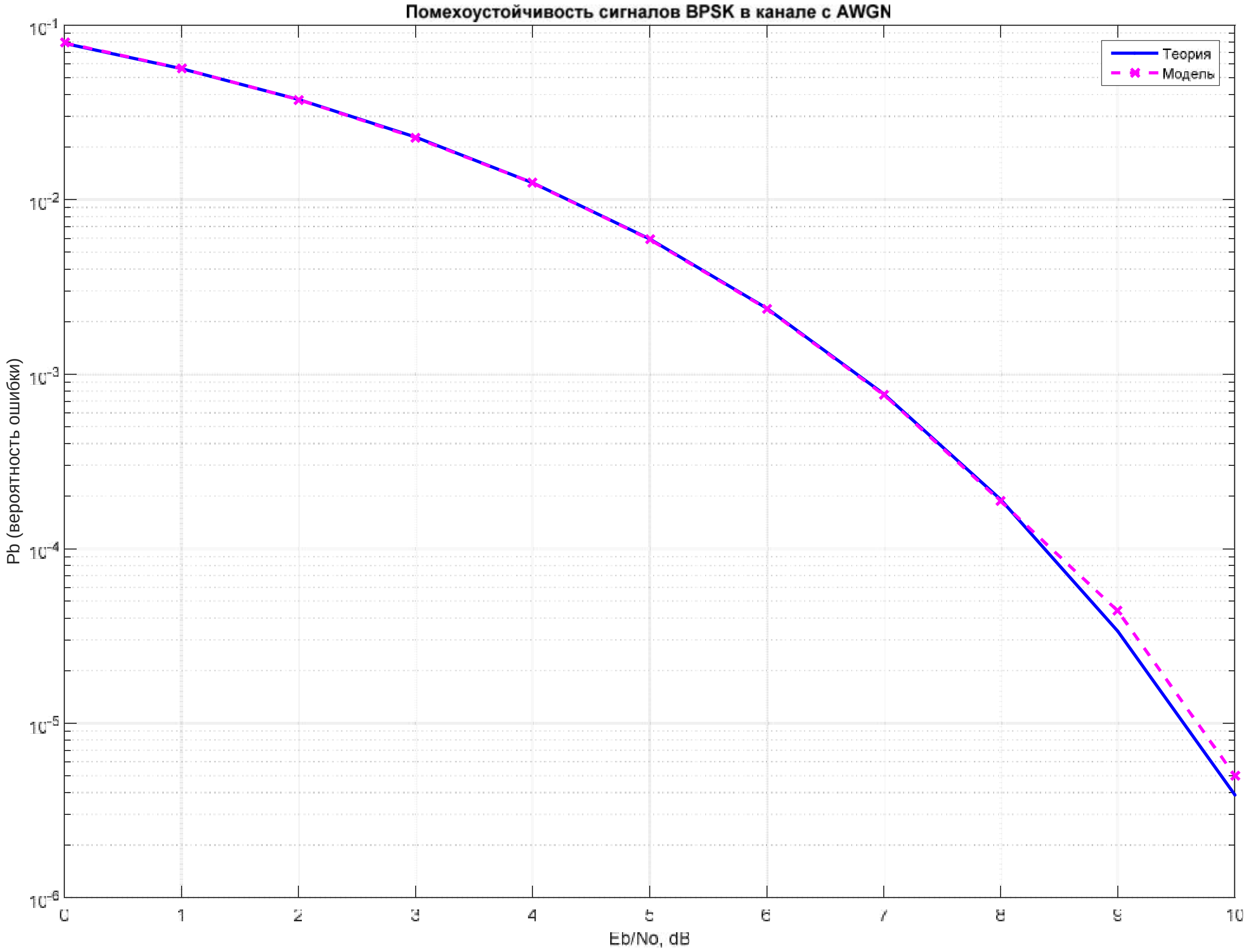
Тогда

$$p(error \mid s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{E_b/N_0}}^{+\infty} e^{-z^2} dz .$$

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Можно получить

$$p(error \mid s_0) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad p(error \mid s_1) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



Вероятность приема ошибочного бита

$$P_{err} = p\left(error \mid s_1\right) \cdot p\left(s_1\right) + p\left(error \mid s_0\right) \cdot p\left(s_0\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

2. **<u>Выполнение работы в программе Matlab:</u>**
3. **<u>Построение графиков:</u>**
4. **<u>Выводы:</u>**