Лекции к разделу

«Системы с распределенными параметрами»

по курсу **«Специальные главы современной теории управления»**

для подготовки магистров по направлению

09.04.02 «Информационные системы и технологии»

1. ОСНОВЫ СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Сведения из структурной теории сосредоточенных систем

Напомним, что в основе структурной теории Сосредоточенных систем лежат понятия звена или блока с сосредоточенными параметрами (рис.1,а) и передаточной функции этого блока. Передаточная функция является исчерпывающей функциональной характеристикой собственных свойств блока и определяется как

$$W(p) = \frac{\tilde{Q}(p)}{\tilde{w}(p)}, \qquad (1)$$

где $\tilde{Q}$(p) и $\tilde{w}$(p) - изображения по Лапласу выхода Q(t) и входа w(t) этого блока. Предполагается, что в качестве w(t) фигурирует стандартизирующая функция этой сосредоточенной системы [1]. Далее, в операции параллельного соединения блоков с передаточными функциями W_1(p) и W_2(p) (рис. 1,б) передаточная функция результирующего (итогового) блока равна

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p), \qquad (2)$$

а в операции последовательного соединения (рис. 1, в)

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p), \qquad (3)$$

В операции замыкания обратной связью (рис. 1, г) имеем

$$W_1(p) \cdot \left[\tilde{w}(p) + W_2 \cdot \tilde{Q}(p)\right] = \tilde{Q}(p), \qquad (4)$$

Очевидно, если положить $\tilde{w}(p) = 1$, то из (1) последует $\tilde{Q}(p) = W(p)$ и тогда (4) превращается в простое функциональное уравнение для отыскания W(p):

$$W_1(p) + W_{21}(p) \cdot W(p) = W(p), \qquad (5)$$

где $W_{21}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p)$, откуда получается хорошо известная формула для передаточной функции замкнутой системы с сосредоточенными параметрами. В общем же случае одна из центральных задач структурной теории состоит в получении явных выражений передаточных функций по всем каналам связей - от каждого входа к каждому выходу - сложной системы, если известны ее структурная схема и передаточные функции отдельных, составляющих эту систему основных блоков (подсистем).

1.2.Распределенный блок. Обобщение понятий передаточной функции на системы с распределенными параметрами

Распределенным блоком называется устройство любой природы, в котором выделены вход и выход, причем на вход поступает входной распределенный сигнал (вход) $w(x,t)$, а на выходе появляется распределенный выходной сигнал (выход) $Q(x,t)$ [1].

Существенно, что области изменения пространственных аргументов входа и выхода, вообще говоря, различны. Вследствие этого построение структурной теории систем с распределенными параметрами с первого же и важнейшего шага натолкнулось на препятствие конструктивного характера: буквальный перенос определения (1.1.1)[1] на распределенные системы невозможен. Успех открылся с принятием принципиально иной схемы определений и следствий [2]. А именно, перепишем (1.1.1) как

$$\tilde{Q}(p) = W(p) \cdot \tilde{w}(p), \qquad (1)$$

тогда

$$Q(t) = \int_0^t G(t-\tau)w(\tau)D\tau, \qquad (2)$$

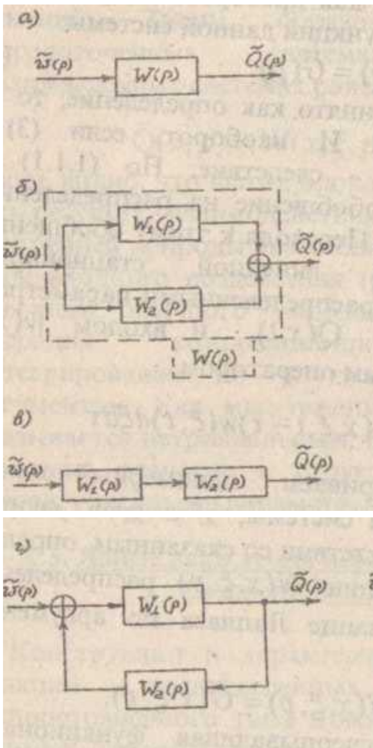


Рис.1

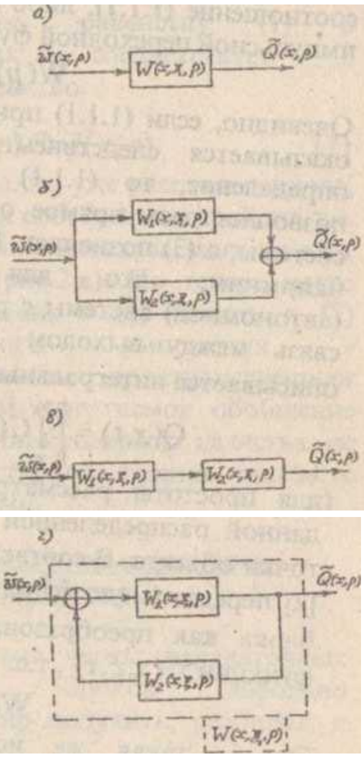


Рис.2

где *G(t)*- импульсная переходная функция системы.

При весьма широких предположениях соотношения (1) и (2) эквивалентны. Следовательно, передаточная функция W(0 может быть определена либо как соотношение (1.1.1), либо как преобразование Лапласа импульсной переходной функции данной системы:

[1] Здесь и далее в разделе III первое число тройной нумерации означает номер главы, второе - номер параграфа (пункта), третье - номер формулы внутри параграфа (пункта)

$W(p) = \tilde{G}(p)$. (3)

Очевидно, если (1.1.1) принято как определение, то (3) оказывается следствием. И наоборот, если (3) - определение, то (1.1.1) - следствие. Но (1.1.1) не позволяет дать прямое обобщение на распределенные системы, а (3) позволяет. Переходя к этому обобщению, напомним, что для линейной стационарной (автономной) системы с распределенными параметрами связь между выходом $Q(x,t)$и входом $w(x,t)$ описывается интегральным оператором

$$Q(x,t) \ = \ \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi,t-\tau) w(\xi,\tau) d\xi dt \qquad (4)$$

(для простоты рассматриваем одномерный случай). Здесь $G(x,\xi,t)$- импульсная переходная функция данной распределенной системы, x_1 и x_2 - граничные точки объекта. В соответствии со сказанным, определим [2] передаточную функцию $W(\mathrm{x},\xi,\mathrm{p})$ распределенного блока как преобразование Лапласа по аргументу t функции $G(x,\xi,t)$,т.е.

$$W(\mathrm{x},\xi,\mathrm{p}) \ = \ \tilde{G}(\mathrm{x},\xi,\mathrm{p}). \qquad (5)$$

Это - такая же исчерпывающая функциональная характеристика распределенной системы как и ее импульсная переходная функция. Однако, математическая природа передаточной функции, как правило, значительно проще. В передаточной функции (5) ξ называется аргументом (пространственным) входа, а x - аргументом (пространственным) выхода. Эти аргументы, вообще говоря, имеют различную размерность. В изображениях по Лапласу равенству (4) соответствует равенство

$$\tilde{Q}(x,\mathrm{p}) \ = \int_{x_1}^{x_2} W(x,\xi,\mathrm{p}) \widetilde{w}(\xi,p) d\xi = W(x,\xi,p) \otimes \widetilde{w}(x,p), \qquad (6)$$

где символ $\otimes$ означает пространственную композицию функций. Таким образом, равенству (1) в сосредоточенных системах соответствует в распределенных системах равенство

$$\tilde{Q}(x,\mathrm{p}) \ = W(x,\xi,p) \otimes \widetilde{w}(x,p). \qquad (7)$$

Вновь видно, что выход блока, но уже распределенного, есть результат взаимодействия собственных свойств, т.е. внутренней природы этого блока и подаваемого на этот блок входного воздействия (рис.2,а). Но теперь место операции обычного умножения в (1) заняла в (7) операция композиционного умножения интегрирование по внутренним пространственным аргументам. Как мы увидим, излагаемое обобщение оказывается нетривиальным: оно содержит качества, не имеющие аналогов в структурной теории систем с сосредоточенными параметрами.

1.3. Явные выражения передаточных функций распределенных блоков

Конструкции и характерные черты передаточных функций распределенных блоков довольно распространенного типа можно получить, разбирая, к примеру, систему

$$a\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2}+b\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}-L_0Q(x,t)=w(x,t) \qquad (1)$$

$$l_1Q=a_1\frac{\partial Q}{\partial x}(x_1,t)+\beta_1Q(x_1,t)=0 \qquad (2)$$

$$l_2Q=a_2\frac{\partial Q}{\partial x}(x_2,t)+\beta_2Q(x_2,t)=0 \qquad (3)$$

$$Q(x,0)=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial t}(x,0)=0, \qquad (4)$$

где оператор

$$L_0=\frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right]+q(x)\right\}, \qquad (5)$$

где p(x), q(x), r(x) и $a1, a2, \beta_1, \beta_2$ некоторые функции и числа соответственно. Напомним, что импульсная переходная функция (функция Грина) распределенной системы (1)-(5) имеет вид

$$G(x,\xi,t)=\sum_{\lambda_n}\frac{\varphi(\lambda_n,x)\varphi(\lambda_n,\xi)r(\xi)}{\|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L_r^2}}g(\lambda_n,t), \qquad (6)$$

где $\varphi(\lambda_n,x)$ и λ_n^2- собственные функции и собственные значения соответствующей спектральной задачи

$$L_0\varphi=-\lambda^2\varphi,\ l_1\varphi=0,\ l_2\varphi=0, \qquad (7)$$

а $g(\lambda_n,t)$ - импульсная переходная функция модального представления системы(1)-(5) [5]

$$a\frac{d^2\bar{Q}(\lambda_n,t)}{d_{t^2}}+b\frac{d\bar{Q}(\lambda_n,t)}{d_t}+\lambda^2\bar{Q}(\lambda_n,t)=\bar{w}(\lambda_n,t), \qquad (8)$$

$$\bar{Q}(\lambda_n,0)=0,\ \frac{d\bar{Q}(\lambda_n,0)}{dt}=0,\quad n=1,2,... \qquad (9)$$

Функция $g(\lambda_n,t)$ есть реакция системы (8)б (9) на дельта-сигнал, т.е. $\bar{Q}(\lambda_n,t)=g(\lambda_n,t)$, если $\bar{w}(\lambda_n,t)=\delta(t)$. По определению (см. (1.2.5)), передаточная функция распределенного блока

$$W(x,\xi,p)=\tilde{G}(x,\xi,p). \qquad (10)$$

Следовательно в нашем случае

$$W(x,\xi,p)=\sum_{\lambda_n}\frac{\varphi(\lambda_n,x)\varphi(\lambda_n,\xi)r(\xi)}{\|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L^2_r}}W(\lambda_n,p), \qquad (11)$$

где $W(\lambda_n,p)=\tilde{g}(\lambda_n,p)$,по определению, является передаточной функцией модального представления (8),(9). При этом из (8) и (9) вытекает, что

$$W(\lambda_n,p)=\frac{1}{ap^2+bp+\lambda_n^2} \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получаем явное выражение передаточной функции рассматриваемого распределенного блока

$$W(x,\xi,p)=\sum_{\lambda_n}\frac{\varphi(\lambda_n,x)\varphi(\lambda_n,\xi)r(\xi)}{(ap^2+bp+\lambda_n^2)\|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L^2_r}}, \qquad (13)$$

Заметим, что конечно получится тот же результат, если вначале системе (1)-(5) сопоставить ее образ по Лапласу, а затем в пространстве изображений по Лапласу применить к этому образу конечное (прямое и обратное) интегральное преобразование Гринберга. Следуя далее [3], можно придать передаточной функции (13) рассматриваемого здесь пространственно одномерного распределенного блока еще одну - замкнутую - форму. Опуская обосновывающие выкладки, сразу приведем итоговое выражение:

$$W(x,\xi,p)=\begin{cases}-\frac{1}{\sigma\Delta(\lambda^2)}\varphi_1(\lambda,\xi)\varphi_2(\lambda,x)r(\xi), & x_1\le\xi\le x\\ -\frac{1}{\sigma\Delta(\lambda^2)}\varphi_1(\lambda,\xi)\varphi_2(\lambda,\xi)r(\xi), & x\le\xi\le x_2\end{cases} \qquad (14)$$

где

$$\lambda^2=-ap^2-bp, \qquad \mathit{(15)}$$

$$\varphi_1(\lambda,x)=(l_1N)M(\lambda,x)-(l_1,M)N(\lambda,x), \qquad \mathit{(16)}$$

$$\varphi_2(\lambda,x)=(l_2N)M(\lambda,x)-(l_2,M)N(\lambda,x), \qquad \mathit{(17)}$$

$$\Delta(\lambda^2)=\begin{vmatrix}(l_1M) & (l_1N)\\ (l_2M) & (l_2N)\end{vmatrix}, \qquad \mathit{(18)}$$

- характерический определитель.

$$\sigma=p(x)[M(\lambda,x)-M'(\lambda,x)N(\lambda,x)], \qquad (19)$$

а $\mathrm{M}=\mathrm{M}(\lambda,\mathrm{x})$ и $N=N(\lambda,x)$- линейно независимые решения уравнения в (7). Заметим, что отыскание явного вида передаточных функций еще более сложных распределенных блоков (систем) может приводить к далеко не простым задачам. В специально составленных справочниках [1] и [4] собраны и систематизированы выражения передаточных функций (и другая полезная информация) для значительного числа (около 700) самых разнообразных сосредоточенных и распределенных блоков.

1.4. Структурные интерпретации состояния распределенной системы

Состояние $Q(x,t)$ одной и той же системы с распределенными параметрами может допускать различные структурные интерпретации. Соответственно, имеется и возможность понимания, трактовки $Q(x,t)$ с неодинаковых точек зрения. Эта полезная в исследованиях неоднозначность частично уже затрагивалась нами по ходу изложения в [5] и [6]. Уделим теперь этому аспекту отдельное внимание. Для иллюстрации возьмем систему (1.3.1) - (1.3.5).

1. Как мы знаем, связь между входом $w(x,t)$ и выходом $Q(x,t)$ такой линейной стационарной распределенной системы описывается интегральным оператором

$$Q(x,t) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi,t-\tau) w(\xi,\tau) d\xi d\tau \qquad (1)$$

или в других обозначениях

$$Q(x,t) = G(x,\xi,t) \odot w(x,t), \qquad (2)$$

где символ $\odot$ означает интегрирование произведения двух функций по пространству и по времени в области их определения. Такая операция называется пространственно-временной композицией двух функций. В изображениях по Лапласу равенству (2) соответствует равенство

$$\tilde{Q}(\mathrm{x},\mathrm{p}) = W(\mathrm{x},\xi,\mathrm{p}) \otimes \widetilde{w}(\mathrm{x},\mathrm{p}) \qquad (3)$$

(см.(1.2.6) или (1.2.7)). Равенство (2) (или (3)) выражает одну из структурных интерпретаций состояния распределенной системы. Именно, состояние $Q(x,p)$ (или его образ $\tilde{Q}(x,p)$) в структурном отношении есть интегральный результат совместного влияния (коротко - композиция) двух независимых друг от друга факторов: собственной природы объекта, выражаемой импульсной переходной функцией $G(x,\xi,t)$ (или передаточной функцией $W(x,\xi,t)$) и входного сигнала, выражаемого функцией $w(x,t)$ (или ее образом $\widetilde{w}(x,p)$).

2. Применение к состоянию $Q(x,t)$ прямого и обратного конечных интегральных преобразований Гринберга [3,5] сразу показывает, что

$$Q(x,t) = \sum_{\lambda_n} \frac{\varphi(\lambda_n,x)}{\|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L^2_r}} \bar{Q}(\lambda_n,t), \qquad (4)$$

Напомним [1], [3], что в представлении (4) выражение под знаком суммы называется n-й пространственно- временной модой, выражение

$$\frac{\varphi(\lambda_n,x)}{\|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L^2_r}} \qquad (5)$$

-n-й пространственной модой, а выражение

$\bar{Q}(\lambda_n, t)$ ' (6)

-n-й временной модой или амплитудой n-й пространственной моды. При этом $\bar{Q}(\lambda_n, t)$ подчиняется модальному представлению (1.3.8), (1.3.9) распределенной системы (1.3.1) - (1.3.5) и равна [5]

$$\bar{Q}(\lambda_n, t) = \int_0^t g(\lambda_n, t-\tau)\bar{w}(\lambda_n - \tau)d\tau = g(\lambda_n, t) * \bar{w}(\lambda_n, t), \quad (7)$$

где $g(\lambda_n, t)$ - импульсная переходная функция указанного модального представления, $\bar{w}(\lambda_n, t)$ - соответствующее конечное интегральное преобразование Гринберга входного сигнала $w(x, t)$.

Равенству (4) в изображениях по Лапласу соответствует равенство

$$\tilde{Q}(x, p) = \sum_{\lambda_n} \frac{\varphi(\lambda_n, x)}{\|\varphi(\lambda_n, x)\|^2_{L_r^2}} \bar{Q}(\lambda_n, p), \quad (8)$$

Равенство (4) (или (8)) выражает другую структурную интерпретацию состояния распределенной системы. Именно, состояние $Q(x, t)$ (или его образ $\tilde{Q}(x, p)$) в структурном отношении есть сумма бесконечного (счетного) числа всех пространственно-временных мод (или их образов по Лапласу) рассматриваемой распределенной системы.

3.Структурная теория систем с распределенными параметрами обнаруживает еще одну структурную трактовку состояния $Q(x,t)$. Из (7) и (8) нетрудно получить, что

$$\tilde{Q}(x, p) = \left[\sum_{\lambda_n} \frac{\varphi(\lambda_n, x)\varphi(\lambda_n, \xi)r(\xi)}{\|\varphi(\lambda_n, x)\|^2_{L_r^2}} W(\lambda_n, p)\right] \otimes \tilde{w}(x, p), \quad (9)$$

где (см. также (1.3.12))

$$W(\lambda_n, p) = \tilde{g}(\lambda_n, p) = \frac{1}{ap^2 + bp + \lambda_n^2}. \quad (10)$$

Очевидно, равенства (9), (10) следуют также из (3), (1.3.13), (1.3.12). Выражение (1.3.13) или выражение в квадратных скобках в (9) показывают, что рассматриваемый распределенный блок представим в виде параллельного соединения бесконечного числа простейших блоков с передаточными функциями

$$\Psi(\lambda_n, x)\Psi(\lambda_n, \xi)r(\xi)W(\lambda_n, p), \quad (11)$$

где $\Psi(\lambda_n, x) = \varphi(\lambda_n, x)\|\varphi(\lambda_n, x)\|^{-1}_{L_r^2}$. Каждый такой простейший блок описывает поведение соответствующей моды при поступлении на вход распределенной системы возмущения в виде дельта-сигнала. При этом каждое $W(\lambda_n, \text{p})$ имеет вид передаточной функции апериодического или колебательного блока сосредоточенной системы (рис.3). Соответственно, равенство (9) выражает еще одну структурную интерпретацию состояния распределенной системы. Именно, это состояние в структурном отношении есть выходной сигнал параллельного соединения бесконечного числа простейших блоков с передаточными функциями (11)

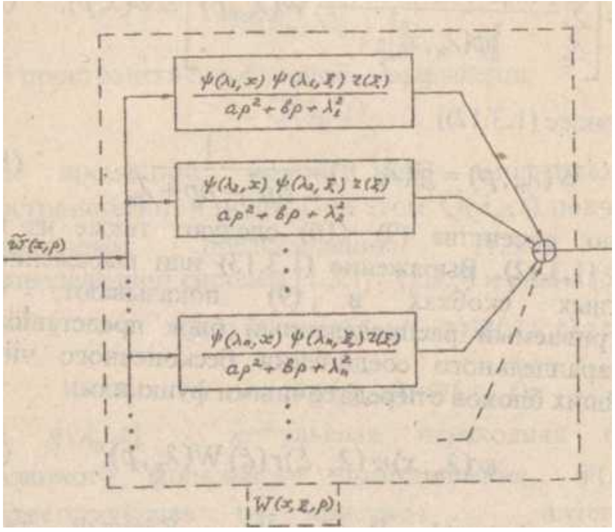


Рис. 3

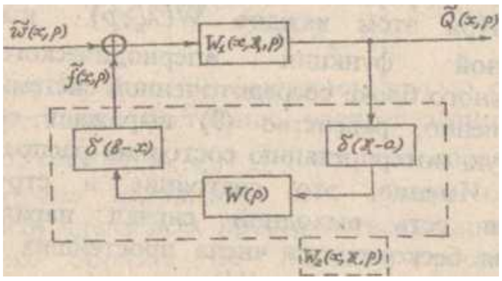


Рис. 4

1.5. Примеры

Получим передаточные функции двух "простейших" распределенных блоков.

1. Дана система

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = w(x,t), \qquad (1)$$

$$Q(0,t) = 0, \; Q(\pi,t) = 0 \qquad (2)$$

$$Q(x,t) = 0 \qquad (3)$$

Применим к (1) - (3) преобразование Лапласа, а затем - прямое и обратное конечные интегральные преобразования Гринберга вида [3], [5]

$$\bar{Q}(x,t) = \int_0^{\pi} Q(\xi,t) \sin n\xi d\xi, \text{ n-1,2,...} \qquad (4)$$

$$Q(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \bar{Q}(n,t) \qquad (5)$$

В результате найдем, что передаточная функция распределенного блока, соответствующего описанию (1)-(3), равна (см. также (1.3.11), (1.3.13))

$$W(x,\xi,p) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \sin n\xi W(n,p), \qquad (6)$$

причем здесь

$$W(n,p) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}p+1}, \qquad (7)$$

- передаточная функция апериодического (инерционного) звена с постоянной времени $T = n^{-2}$ и статическим коэффициентом передачи $k = n^{-2}$. Далее. Спектральная задача для (1), (2) имеет вид

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\lambda^2\varphi(x), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0. \qquad (8)$$

Очевидно, здесь (см.п.1.3)

$$M(\lambda,x) = \cos\lambda x, \quad N(\lambda,x) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda}. \qquad (9)$$

Тогда в соответствии с (1.3.16) - (1.3.19) находим

$$\varphi_1(\lambda,x) = -\frac{\sin\lambda x}{\lambda}, \ \varphi_2(\lambda,x) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda(\pi - x),$$

$$\Delta(\lambda^2) = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}, \ \sigma = 1 \qquad (10)$$

Наконец, учитывая, что в случае (1)

$$\lambda^2 = -p, \qquad (11)$$

(см.(Т3.15)), приходим к замкнутому выражению вида (1.3.14) для передаточной функции этого же распределенного блока

$$W(x,\xi,p) = \begin{cases} \frac{sh\sqrt{p}\xi \cdot sh\sqrt{p}(\pi-x)}{\sqrt{p}sh(\pi\sqrt{p})}, 0 \le \xi \le x \\ \frac{sh\sqrt{p}x \cdot sh\sqrt{p}(\pi-\xi)}{\sqrt{p}sh(\pi\sqrt{p})}, \ x \le \xi \le \pi \end{cases} \qquad (12)$$

2. Для системы

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = w(x,t), \qquad (13)$$

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(\pi,t) = 0, \qquad (14)$$

$$Q(x,0) = 0, \ \frac{\partial Q}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad (15)$$

действуя аналогично, устанавливаем, что передаточная функция распределенного блока, соответствующего описанию (13) - (15), имеет точно тот же структурный вид, что и (6), однако, на этот раз

$$W(n,p) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}p^2+1} \qquad (16)$$

передаточная функция колебательного с нулевым демпфированием (консервативного) звена. Далее, принимая во внимание (8) - (10) и учитывая, что в случае (13) $\lambda^2 = -p^2$, найдем, что

$$W(x,\xi,p) = \begin{cases} \frac{sh\sqrt{p}\xi \cdot shp(\pi - x)}{psh(\pi p)}, 0 \le \xi \le x \\ \frac{sh(px) \cdot shp(\pi-\xi)}{psh(\pi p)},\ x \le \xi \le \pi \end{cases} \qquad (17)$$

Заметим, что уже для двумерных распределенных систем отыскание замкнутого выражения для передаточной функции представляет трудную и далеко не всегда разрешимую задачу.

1.6. Параллельное и последовательное соединения распределенных блоков. Некоммутативность пространственной композиции функций

Для описания взаимосвязанных распределенных объектов необходимо, как и в сосредоточенных системах, представить операции различного соединения блоков и способы получения передаточных функций образующихся в итоге структур. Так, считая известными передаточные функции $W_1(x,\xi,p)$ и $W_2(x,\xi,p)$отдельных (для простоты, двух) распределенных блоков, установим соотношения для отыскания передаточных функций их соединений. При параллельном соединении данных блоков (рис,2,б), очевидно, имеем

$\tilde{Q}(x,p) = \widetilde{Q_1}(x,p) + \widetilde{Q_2}(x,p) =$
$W_1(x,\xi,p) \otimes \tilde{w}(x,p) + W_2(x,\xi,p) \otimes \tilde{w}(x,p) =$
$[W_1(x,\xi,p) + W_2(x,\xi,p)] \otimes \tilde{w}(x,p) = W(x,\xi,p) \otimes \tilde{w}(x,p)$ (1)

Следовательно, Передаточная функция параллельного соединения распределенных блоков равна сумме передаточных функций ветвей, образующих данное соединение:

$W(x,\xi,\mathrm{p}) = W_1(\mathrm{x},\xi,p) + W_2(\mathrm{x},\xi,p)$ (2)

Таким образом - полученное для стационарных распределенных блоков правило (2) оказывается вполне аналогичным правилу (1.1.2) для сосредоточенных блоков (звеньев). Далее, при последовательном и, единении (рис. 2, в) имеем

$\tilde{Q}(x,\mathrm{p}) = W_2(x,\xi,p) \otimes \widetilde{Q_1}(x,p)$ (3)

$\widetilde{Q_1}(x,\mathrm{p}) = W_1(x,\xi,p) \otimes \tilde{w}(x,p)$ (4)

Здесь $\widetilde{Q_1}(x,\mathrm{p})$. - выходной сигнал первого блока, играющий одновременно роль входного сигнала второго блока. Ясуо, что для того чтобы такая "двойная роль" оказалась выполнимой или, иначе, чтобы последовательное соединение имело смысл, указанные блоки должны быть соответственно согласованы: область определения выходного сигнала предыдущего блока должна совпадать с областью определения входного сигнала последующего блока. Это требование называется "условием согласованности" [2]. Подставляя (4) в (3), получаем

$$\tilde{Q}(x,\mathrm{p}) = W_2(x,\xi,p)\otimes W_1(x,\xi,p)\otimes\widetilde{w}(x,p) = W(x,\xi,p)\otimes\widetilde{w}(x,p) \quad (5)$$

Следовательно, передаточная функция последовательного соединения распределенных блоков равна композиции передаточных функций данных блоков, взятых в порядке, обратном по отношению к их следованию в рассматриваемом соединении:

$$W(x,\xi,\mathrm{p}) = W_2(x,\xi,p)\otimes W_1(x,\xi,p) \ (6)$$

В развернутом виде (6) имеет вид:

$$W_2(x,\xi,p)\otimes W_1(x,\xi,p) = \int_{x_1}^{x_2} W_2(x,\eta,p)\cdot W_1(\eta,\xi,p)d\eta \qquad (7)$$

Понятно, что эта операция имеет смысл лишь тогда, когда внутренние пространственные переменные определены в одной и той же области. Отсюда вытекает, что операция композиции, вообще говоря, некоммутативна, т.е.

$$W_2(x,\xi,p)\otimes W_1(x,\xi,p) \neq W_1(x,\xi,p)\otimes W_2(x,\xi,p). \qquad (8)$$

Более того, перемена мест сомножителей может привести и вовсе к потере смысла композиции, так как области определения входного и выходного сигналов (крайних аргументов в (7)) могут оказаться различными [2]. Некоммутативность операции композиции означает, очевидно, адекватную некоммутативность последовательного соединения распределенных блоков: поменять местами два блока в общем случае невозможно. Таким образом, полученное для стационарных распределенных блоков правило (6) отличается от аналогичного правила (1.1.3) для сосредоточенных блоков (звеньев) рядом признаков: появлением условия согласованности, композиционным умножением вместо обычного, некоммутативностью композиции и, следовательно, самого

последовательного соединения.

1.7. Интегральное уравнение относительно передаточной Функции замкнутой системы с распределенными параметрами

Соединение распределенных блоков, показанное на рис. 2,г, как и аналогичная структура объектов с сосредоточенными параметрами, называется замыканием обратной связью (системой с обратной связью, замкнутой системой, антипараллельным соединением). В этой схеме блок с передаточной функцией $W_1(x,\xi,p)$ находится в канале прямой связи, а блок с передаточной функцией $W_2(x,\xi,p)$ - в канале (цепи, контуре, петле) обратной, связи. Схемой, изображенной на рис.2,г, охватывается значительное число разнообразных; систем с распределенными параметрами, являющихся объектом изучения во многих областях науки и ее приложений [2]. Наша задача - получить соотношение относительно передаточной функции $W(\mathrm{x},\xi,\mathrm{p})$Данного соединения - функции, описывающей связь выхода $\widetilde{w}(x,p)$ с выходом $\tilde{Q}(x,p)$. В указанном на рис. 2,г замыкании обратной связью, очевидно, имеем

$$W_1(x,\xi,p)\otimes\left[\widetilde{w}(x,p)+W_2(x,\xi,p)\otimes\tilde{Q}(x,p)\right]=\tilde{Q}(x,p). \quad (1)$$

Если положить $\widetilde{w}(x,p)=\delta(x-\xi)$,то из (1.2.6) последует $\tilde{Q}(x,p)=W(x,\xi,p)$ и соотношение (1) превращается в уравнение относительно искомой передаточной функции

$$W_1(x,\xi,p)\otimes W_{21}(x,\xi,p)\otimes W(x,\xi,p)=W(x,\xi,p). \quad (2)$$

где

$$W_{21}(x,\xi,p)=W_1(x,\xi,p)\otimes W_2(x,\xi,p). \quad (3)$$

Следовательно, передаточная функция замкнутой системы с распределенными параметрами может быть найдена как решение уравнения (2). В развернутом виде это уравнение записывается так:

$$W(x,\xi,p)-\int_{x_1}^{x_2}W_{21}(x,\eta,p)W(\eta,\xi,p). \qquad (4)$$

С математической точки зрения уравнение (4) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с ядром $W_{21}(x,\eta,p)$. Методы решения таких уравнений описаны в многочисленных книгах. Эти методы наиболее полно разработаны для симметричных по аргументам x $и$ ξ ядер, т.е. таких, для которых $W_{21}(x,\xi,p)=W_{12}(\xi,x,p)$ Таким образом, полученное для передаточной функции замкнутой стационарной распределенной системы уравнение (2) является формальным аналогом уравнения (1.1.5) - уравнения для передаточной функции такой же замкнутой системы, но с сосредоточенными параметрами. Однако, фактически уравнение относительно $W(x,\xi,p)$ является не простейшим функциональным уравнением (как для $W(p)$), а интегральным уравнением, вообще говоря, довольно сложной природы. Вместе с тем, в ряде практически интересных случаев уравнение (4) может быть решено в явном (даже алгебраическом) виде [2].

2. ПРИМЕРЫ РАБОТЫ СО СТРУКТУРНЫМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

2.1. Передаточные функции статического, переходных и других частных видов распределений

Рассмотрим некоторые частные распределенные блоки, встречающиеся в практике структурных представлений систем с распределенными параметрами. Будем ориентироваться на определяющие соотношения (1.2.4)-(1.2.7) и их многомерные аналоги [5].

1. Статический блок, для которого [5]

$$Q(x) = \int_{\overline{D}} G(x,\xi)w(\xi)d\xi \qquad (1)$$

где $\overline{D}$ - замкнутая область в некотором многомерном пространстве. Если сигнал на входе изменяется еще и во времени, т.е. $\mathrm{w} = \mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{t})$,то выходной сигнал также станет зависеть от времени, т.е.

$$Q(x,t) \ = \ \int_{\overline{D}} G(x,\xi)w(\xi,t)d\xi \ (2)$$

Другими словами, данный блок практически не обладает инерционностью. Время установления переходных процессов (время релаксации) пренебрежимо мало и нег запаздывания в прохождении сигналов. Представим соотношение (2) в виде

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \ = \ \int_0^{\mathrm{t}}\int_{\overline{\mathrm{D}}} \mathrm{G}(\mathrm{x},\xi)\delta(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{w}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. (3)$$

Тогда получаем, что импульсная переходная функция статического блока

$$G(x,\xi,t) \ = G(x,\xi)\delta(t), \quad (4)$$

а его передаточная функция

$$W(x,\xi,p) = G(x,\xi). \qquad (5)$$

2. Переходной -блок. Если в структуре участвуют и распределенные и сосредоточенные блоки, то для описания взаимодействия между ними используются, так называемые, переходные блоки.[2]. В общем случае одномерный стационарный распределенный блок с передаточной функцией W(x,ξ,p) преобразует входной распределенный сигнал $\widetilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x},\mathrm{p})$в выходной

распределенный сигнал $\tilde{Q}(\mathrm{x},\mathrm{p})$.Это преобразование описывается оператором (композицией)

$$\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{p}) = \int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2} \mathrm{W}(\mathrm{x},\eta,\mathrm{p})\tilde{\mathrm{w}}(\eta,\mathrm{p})d\eta = \mathrm{W}(\mathrm{x},\xi,\mathrm{p})\otimes\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x},\mathrm{p}). \quad \textit{(6)}$$

Рассмотрим теперь специальный блок, преобразующий входной распределенный сигнал $\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x},\mathrm{p})$ в выходной сосредоточенный сигнал $\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{p})$. Такое преобразование, очевидно, реализуется блоком, передаточная функция $W(x,\xi,p)$ которого утрачивает зависимость от аргумента *x.*Связь (6) между сигналами заменяется при этом на

$$\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{p}) = \int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2} \mathrm{W}_\xi(\eta,\mathrm{p})\tilde{\mathrm{w}}(\eta,\mathrm{p})d\eta = \mathrm{W}_\xi(\xi,\mathrm{p})\otimes\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x},\mathrm{p}). \quad \textit{(7)}$$

Передаточная функция $\mathrm{W}_\xi(\xi,\mathrm{p})$ такого блока, осуществляющего переход от $\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x},\mathrm{p})$ и $\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{p})$ зависит только от аргумента ξ. Поэтому, этот блок называется переходным ξ- блоком. В частности, если $\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x},\mathrm{p})$ поступает на -блок с передаточной функцией

$$\mathrm{W}_\xi(\xi,\mathrm{p}) = \delta(\xi - \mathrm{a}) \qquad (8)$$

то на его выходе появляется значение этого сигнала в точке $x = a$:

$\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{p}) = \tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{a},\mathrm{p})$ *(9)*

Это - входной сигнал для сосредоточенного блока, снимаемый с некоторой точки выхода распределенного блока.

3. <u>Переходной х-блок.</u> Это - блок, преобразующий входной сосредоточенный сигнал $\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{p})$в выходной распределенный сигнал $\tilde{Q}(\mathrm{x},\mathrm{p})$.Такое преобразование реализуется блоком, передаточная функция $W(x,\xi,p)$ которого ,утрачивает зависимость от аргумента ξ. Действительно, связь (6) между сигналами принимает в этом случае вид

$$\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{x},\mathrm{p}) = \int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2} \mathrm{W}(\mathrm{x},\eta,\mathrm{p})d\eta\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{p}) = \mathrm{W}_\mathrm{x}(\mathrm{x},\mathrm{p})\cdot\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{p}). \quad \textit{(10)}$$

(и, вдобавок, становится алгебраической). Передаточная функция $\mathrm{W}_\mathrm{x}(\mathrm{x},\mathrm{p})$ такого блока, осуществляющего переход от $\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{p})$ к $\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{x},\mathrm{p})$,зависит только от аргумента x. Поэтому, этот блок называется переходным х- блоком. В частности, если $\tilde{\mathrm{w}}(p)$подается на х-блок с передаточной функцией

$$W_x(x,p) = \delta(b - x), \qquad (11)$$

то на его выходе появляется распределенный дельта-сигнал с полюсом в точке х= b:

$$\widetilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \mathbf{S}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{b}-\mathbf{x})\widetilde{\mathbf{w}}(\mathbf{p}). \quad (\mathbf{12})$$

Это - точечный входной сигнал для распределенного блока, поступающий с выхода сосредоточенного блока.

4. Усилительный блок. подобно своему сосредоточенному прототипу, осуществляет умножение входного распределенного сигнала w (x, *t)*на постоянный числовой коэффициент *к:*

$$Q(x,t) = kw(x,t). \tag{13}$$

Представляя соотношения (13) в виде

$$Q(x,t) = \int_0^1 \int_{\bar{D}} k\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{14}$$

получаем, что импульсная переходная функция усилительного блока

$$G(x,\xi,t) = k\delta(x-\xi)\delta(t), \tag{15}$$

а его передаточная функция

$$W(x,\xi,p) = k\delta(x-\xi). \tag{16}$$

5. Одномерный пространственно-интегрирующий блок связывает входной сигнал $Q(x,t)$ с входным сигналом w(x,t) соотношением

$$Q(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} w(\xi,t)d\xi. \tag{17}$$

Равенство (17) можно представить в виде

$$Q(x,t) = \int_0^1 \int_{x_1}^{x_2} 1(x-\xi)\delta(t-\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{18}$$

где 1 - единичная функция. Следовательно,

$$G(x,\xi,p) = 1(x-\xi)\delta(t) \tag{19}$$

И

$$W(x,\xi,p) = 1(x-\xi). \tag{20}$$

Заметим, что блоки с передаточными функциями (8), (11), (16) и (20) являются статическими.

2.2. Одноканальная система регулирования распределенного объекта с помощью сосредоточенного регулятора

Рассмотрим довольно типичный пример системы автоматического регулирования. Некоторый распределенный объект имеет передаточную функцию $W_1(x,\xi,p)$. Объект регулируется сосредоточенным регулятором с передаточной функцией $W(p)$. Соответствующий датчик измеряет значение регулируемого состояния $\widetilde{Q}(x,p)$ в точке $x=a$ и подает полученный сигнал на регулятор. Последний обратно воздействует на объект при помощи регулирующего (сосредоточенного) органа, помещенного в точку $x=b$ (вообще говоря, отличную от $x=a$). Задача состоит в отыскании передаточной функции образовавшейся замкнутой системы. Для описания взаимодействия регулируемого распределенного объекта с сосредоточенным регулятором используем переходные блоки. Именно, переходной ξ-блок с передаточной функцией $W_\xi(\xi,\mathrm{p}) = \delta(\xi - \mathrm{a})$, преобразующий регулируемый распределенный сигнал в сосредоточенный, подаваемый на регулятор. А также переходной x-блок с передаточной функцией $W_x(x,\mathrm{p}) = \delta(\mathrm{b} - \mathrm{x})$, преобразующий сосредоточенный сигнал, создаваемый регулятором, в распределенный,

подаваемый на регулируемый объект. Структурная схема такого замыкания изображена на рис.4. в п.1.7 мы установили, что передаточная функция $W(x,\xi,p)$ системы с обратной связью удовлетворяет интегральному уравнению

$$W(x,\xi,p) - \int_{x_1}^{x_2} W_{21}(x,\eta,p)W(\eta,\xi,p)d\eta = W_i\,(x,\xi,p) \qquad (1)$$

с ядром

$$W_{21}(x,\xi,p) - \int_{x_1}^{x_2} W_1(x,\eta,p)W_2(\eta,\xi,p)d\eta. \qquad (2)$$

где $W_2(\eta,\xi,p)$- передаточная функция канала обратной связи (см. (1.7.3), (1.7.4)). В нашем случае

$$W_2(\eta,\xi,p) = \delta(b-x)W(p)\delta(\xi-a). \qquad (3)$$

В том, что это так, легко убедиться, рассматривая канал от входа $\widetilde{Q}(x,p)$к выходу $\tilde{f}(x,p)$. Таким образом, нам необходимо найти решение интегрального уравнения (1) для частного случая (3). Из (3) и (2) получаем, что ядро

$$W_{21}(x,\xi,p) = W_1(x,b,p)W(p)\delta(\xi - a). \tag{4}$$

Подстановка, далее, (4) в (1) приводит к соотношению

$$W(x,\xi,p) - W_1(x,b,p)W(p)W(a,\xi,p) = W_1(x,\xi,p). \tag{5}$$

Из (5) при $x=a$ находим выражение для $W(a,\xi,p)$. Подставляя это выражение вновь в (5), устанавливаем

$$W(x,\xi,p) = W_1(x,\xi,p) + \frac{W_1(x,b,p)W(p)W_1(a,\xi,p)}{1 - W_1(a,b,p)W(p)}. \tag{6}$$

Таким образом, передаточная функция рассматриваемой системы автоматического регулирования найдена и имеет вид (6). Видно, что первое слагаемое в (6) есть передаточная функция распределенного объекта без регулятора. Следовательно, все отличие в описании собственных свойств новой структуры, появившееся в результате замыкания данной обратной связью, собрано во втором слагаемом. Это слагаемое содержит три степени свободы регулирования: координату точки $x=a$ положения чувствительного элемента, координату точки $x=b$приложения обратного воздействия, и передаточную функцию W(p) сосредоточенного регулятора в канале обратной связи.

2.3. Пример корректирования свойств распределенной системы на основе структурного подхода

Известно [7], что если регулирование объекта с сосредоточенными параметрами наталкивается на некоторые нежелательные явления и эти явления простым подбором параметров не удается избежать, то часто прибегают к изменению структуры системы автоматического регулирования. Это делается с целью внести такие коррекции в систему, которые либо ликвидировали, либо свели бы к минимуму те ее (статические или динамические) показатели, которые нас не устраивают. При этом арсенал приемов и средств структурной коррекцииавтоматических сосредоточенных систем довольно широк. В распределенных объектах также осуществимы разнообразные структурные вмешательства в систему, приводящие к улучшению или даже качественному изменению свойств, повлиять на которые иными путями затруднительно или невозможно. Рассмотрим пример. Система, находящаяся в канале прямой связи,

описывается соотношениями

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} - sQ(x,t) = w(x,t), \qquad (1)$$

$$Q(0,t) = 0, Q(\pi,t) = 0, \qquad (2)$$

$$Q(x,0), \qquad (3)$$

где s - некоторый параметр. О силу (1.3.13) передаточная функция соответствующего распределенного блока

$$W_1(x,\xi,p) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin n\xi}{p+n^2-s}. \qquad (4)$$

Если, в частности,

$1 < s < 4$, (5)

то первая собственная временная частота $P_1 > 0$ и процесс неустойчив (см.гл.3). Замкнем систему идентичным (1), (2), но статическим блоком. Тогда передаточная функция обратной связи

$$W_2(x,\xi,p) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin n\xi}{n^2-s}. \qquad (6)$$

Найдем передаточную функцию $\mathrm{W}(x,\xi,p)$образовавшейся замкнутой системы - решение интегрального уравнения (1.7.4). В рассматриваемом случае это можно осуществить применением к (1.7.4) конечного интегрального преобразования (1.5.4) по переменной x [3]. Уравнение (1.7.4) трансформируется в пространстве изображений в уравнение

$$W(n,\xi,p) - \int_0^{\pi} W_{21}(n,\eta,p)W(\eta,\xi,p)d\eta = W_1(n,\xi,p). \qquad (7)$$

Из (4) имеем

$$W_1(n,\xi,p) = \frac{\sin n\xi}{p+n^2-s}, \qquad (8)$$

а из (6) и (8) -

$$W_{21}(n,\xi,p)-\int_{0}^{\pi}\overline{W_1}(n,u,p)W_2(\mu,\eta,p)d\eta=\frac{\sin n\eta}{(p+n^2-s)(n^2-s)}. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) уравнение (7) преобразуется в уравнение

$$W(n,\xi,p)-\frac{W(n,\xi,p)}{(p+n^2-s)(n^2-s)}=\frac{\sin n\xi}{p+n^2-s}. \quad (10)$$

Следовательно, конечное интегральное преобразование искомой передаточной функции

$$W(n,\xi,p)=\frac{\sin n\xi}{p+n^2-s-\frac{1}{n^2-s}}. \quad (11)$$

Отсюда, привлекая (1.5.5), получаем саму передаточную функцию построенной нами структуры

$$W(n,\xi,p)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin n\xi}{p+n^2-s-\frac{1}{n^2-s}}. \quad (12)$$

Таким образом, $W(n,\xi,p)$установлена и имеет вид (12). Описанное замыкание образовало распределенную систему, качественно отличающуюся от исходной. Именно, в области (5) появилась подобласть

$$1<s<2, \quad (13)$$

внутри которой все собственные временные частоты, как нетрудно проверить, отрицательны. Следовательно, новый процесс при выполнении (13) устойчив.

Достижение эффекта интерпретируется следующим образом. Распределенный объект (1)-(3) представим в виде параллельного соединения счетного числа простейших блоков (см. п.1.4). В отсутствие обратной связи каждый из этих блоков является апериодическим. однако, первый из них - неустойчивый. Осуществленное замыкание в итоге оказалось равносильным шунтированию каждого блока простой жесткой обратной связью. В результате образовалась система с новыми свойствами: в подобласти (13) устраняется неустойчивость первого блока (который превращается в апериодический устойчивый). При этом тип и устойчивость всех оставшихся простейших блоков сохраняются.

2.4. Взаимосвязанные системы с распределенными параметрами. Преобразования структурной схемы

До сих пор рассматривались соединения распределенных объектов, имеющие один общий вход $w(x,t)$ и один общий выход $Q(x,t)$. Но, конечно, на практике приходится изучать и структуры с несколькими входами или векторным входом $w(x,t) = (w_1(x,t), \dots, w_m(x,t))$ и несколькими выходами или векторным выходом $Q(x,t) = (Q_1(x,t), \dots Q_n(x,t))$. Остановимся здесь на относительно простой схеме взаимосвязанных систем, содержащей два входа и два выхода (рис.5). Передаточные функции $W_1(x,\xi,p)$ и $W_2(x,\xi,p)$ известны. Наша задача - получить соотношения, позволяющие находить передаточные функции по всем каналам связей этой структуры: от каждого ее входа к каждому ее выходу. В векторно-матричных обозначениях для такой системы имеет место соотношение, внешне выглядящее также, как и «скалярный» вариант (1.2.7), т.е.

$$\tilde{Q}(x,t) = W(x,\xi,p) \otimes \tilde{w}(x,p). \qquad (1)$$

В развернутом же виде соотношение (1) означает, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_1(x,p) \\ \tilde{Q}_2(x,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}(x,\xi,p) & W_{21}(x,\xi,p) \\ W_{12}(x,\xi,p) & W_{22}(x,\xi,p) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x,p) \\ \tilde{w}_2(x,p) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Матрица, фигурирующая в (1) и (2), называется передаточной матрицей. Ее элемент $W_{ij}(x,\xi,p)$ есть передаточная функция от j-го входа$\widetilde{w_j}(x,p)$ к i-му выходу $\tilde{Q}_i(x,p)$. Нам необходимо вывести уравнения относительно всех $W_{ij}(x,\xi,p)$ (i,j=1,2). Из рис.5 имеем

$$\begin{cases} W_1(x,\xi,p) \otimes [\tilde{w}_1(x,p) + \tilde{Q}_2(x,p)] = \tilde{Q}_1(x,p) \\ W_2(x,\xi,p) \otimes [\tilde{w}_2(x,p) + \tilde{Q}_1(x,p)] = \tilde{Q}_2(x,p) \end{cases}. \qquad (3)$$

Система уравнений (3) описывает изображенную на рис.5 структуру в терминах передаточных функций $W_1(x,\xi,p)$ и $W_2(x,\xi,p)$ и составляющих ее блоков. Система соотношений (2) представляет собой запись решения системы уравнений (3) относительно векторного выхода $Q(x,t) = (Q_1(x,t), Q_2(x,t))$. При $\tilde{w}_1(x,p) = \delta(x-\xi)$ и $\tilde{w}_2(x,p) = 0$ в системе (2) $\tilde{Q}_1(x,p) = W_{11}(x,\xi,p)$ и $\tilde{Q}_2(x,p) = W_{21}(x,\xi,p)$. При этом (3) принимает вид

$$\begin{cases} W_1(x,\xi,p) + W_1(x,\xi,p) \otimes W_{21}(x,\xi,p) = W_{11}(x,\xi,p) \\ \qquad W_2(x,\xi,p) \otimes W_{11}(x,\xi,p) = W_{21}(x,\xi,p) \end{cases}. \qquad (4)$$

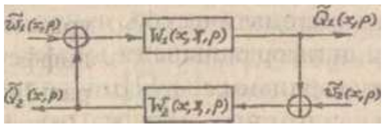
Это - система интегральных уравнений относительно элементов $W_{11}(x,\xi,p)$ и $W_{21}(x,\xi,p)$. При $\tilde{w}_1(x,p) = 0$ и $\tilde{w}_2(x,p) = \delta(x-\xi)$ в системе(2) $\tilde{Q}_1(x,p) = W_{12}(x,\xi,p)$ и $\tilde{Q}_2(x,p) = W_{22}(x,\xi,p)$ При этом (3) принимает вид

$$\begin{cases} W_1(x,\xi,p) \otimes W_{22}(x,\xi,p) = W_{12}(x,\xi,p) \\ W_2(x,\xi,p) + W_2(x,\xi,p) \otimes W_{12}(x,\xi,p) = W_{22}(x,\xi,p) \end{cases} \quad (5)$$

Это - система интегральных уравнений относительно элементов $W_{12}(x,\xi,p)$ и $W_{22}(x,\xi,p)$. Таким образом, уравнения для нахождения элементов искомой передаточной матрицы $W(\mathrm{x},\xi,\mathrm{p})$ построены . Если в (2) фигурируют решения уравнений (4) и (5), то при весьма широких предположениях системы уравнений (2) и (3) эквивалентны. Но система (2) подсказывает еще одну структурную схему, имеющую точно такие же соответствия между входами и выходами $W_{ij}(x,\xi,p)$ (i,j=1,2) (рис.6). Такое, основанное на приведенных аналитических соображениях, преобразование структурной схемы отображает, как нетрудно видеть, переход от описания $LQ(x,t) = w(x,t)$ к обращенному описанию $Q(x,t) = L^{-1}w(x,t)$. Последней схеме можно придать вид, показанный на рис.7. В таком виде она допускает естественное обобщение на любой случай n х n (см., например, рис.8).

2.5.О других аспектах применения структурной теории

Структурная теория распределенных систем дает полный формализм описания всякий раз, когда приходится иметь дело с несколькими взаимосвязанными и взаимодействующими объектами (блоками). При этом в данной теории не все из объектов структурной схемы обязаны быть непременно пространственно протяженными. Какие-то из них, как



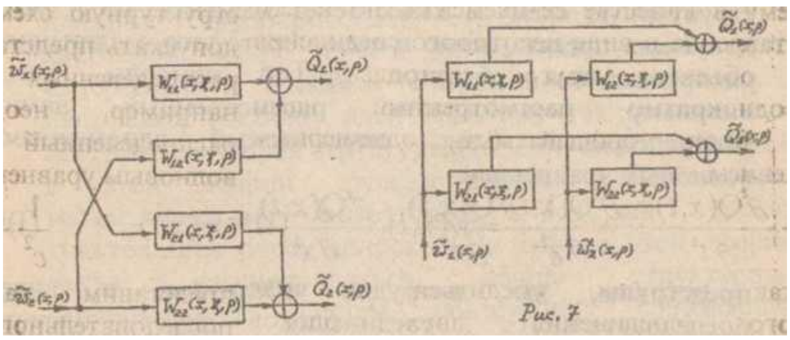
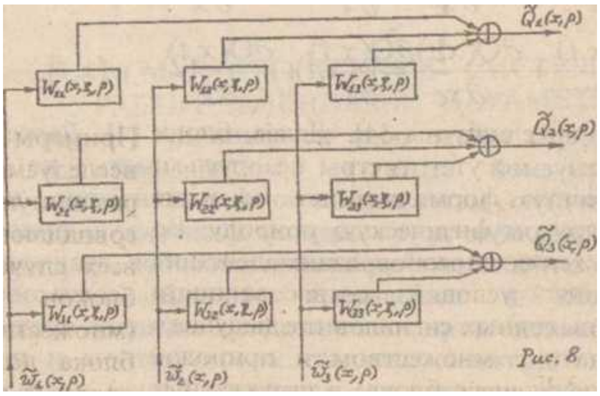


Рис. 7



мы видели, могу: быть сосредоточенными. Теория обобщается и на случаи, когда объекты описываются не только дифференциальными уравнениями в обыкновенных или частных производных, но и уравнениями иной математической природы (интегро- дифференциальншш, интегральными, дифференциальноразностными, радостными, функциональными [2]). Полезно обратить внимание еще на то, что в ряде случаев "одиночный" и "простейший" распределенный объект может не только быть включенным в какую-то структурную схему в качестве ее элемента, но и сам допускать представление в виде некоторого соединения распределенных объектов другой природы. Так, например, неоднократно рассмотренный нами распределенный блок, описываемый одномерным волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}=w(x,t). \qquad (1)$$

представим, кат нетрудно убедиться, в виде последовательного соединения двух блоков запаздывания, описываемых уравнениями

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}=w(x,t).$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}=w(x,t). \qquad (2)$$

Примеры такого рода не единичны [4]. Далее, блоки исследуемой структуры могут иметь не только различную математическую формализацию, но и не совпадающую друг с другом физическую природу. Во всех случаях для отражения способов взаимодействия блоков и выполнения условий согласованности (множество и природа выходных сигналов предыдущего блока должны совпадать с множеством и природой входных сигналов последующего блока) в структурных схемах предполагается участие переходных блоков (преобразователей) различных назначений - блоков, на вход которых подается сигнал одной природы (математической, физической), а на выходе образуется сигнал другой природы. Структурная теория распределенных систем находит различные области приложений. Некоторые из них подробно рассмотрены в [2]. Это, например, структурные представления регулирования температуры в проходных печах, регулирования температуры поверхности массивного тела, структурные представления теплообменников, длинных электрических линий, разнообразных задач об упругих конструкциях, задач о гашении пульсаций в длинных трубопроводах, структурные схемы в квантовой теории поля и др. Наконец, отметим, что интересным и изящным обобщением изложенных в настоящем пособии идей является, так называемая, абстрактная теория структурных схем и блоков [2]. Блок в этой теории отождествляется с некоторым математическим оператором, который может трактоваться очень широко. На основе этой теории могут рассматриваться общие структурные закономерности систем, содержащих сложнейшие (экономические, биологические, социальные и иные) подсистемы (блоки), поведение которых может подчиняться весьма нетривиальным закономерностям

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Введение

Теория систем с сосредоточенными параметрами оперирует с небольшим числом ''элементарных'' блоков (типовых звеньев). Их всего около десятка, и этим числом практически исчерпывается набор блоков, на котором строятся многочисленные и разнообразные структурные схемы систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. К усилительному, интегрирующему, апериодическому и колебательному блокам с передаточными функциями соответственно

$$k,\ \frac{k}{p},\ \frac{k}{Tp+1},\ \frac{k}{T^2p^2+2\mu Tp+1} \quad (\mu - 1) \qquad (1)$$

иногда добавляют еще несколько: форсирующие, неминимально-фазовые и некоторые другие блоки [8]. Однако, как мы знаем, даже этого небольшого числа простейших блоков оказалось достаточным для того, чтобы с их использованием и опорой на структурные представления и закономерности описывать богатое разнообразие схем взаимодействующих сосредоточенных объектов и связанных с ними интересных решений. Уместно вспомнить здесь хотя бы то, что когда блоки (подсистемы) соединяются, образуя структуру блоков (систему), то у последней часто появляются свойства, отсутствующие у каждой из подсистем в отдельности. Соответствующая структурная теория дала эффективные приемы анализа и синтеза взаимосвязанных сосредоточенных систем вне зависимости от их конкретной природы. Что же тогда говорить о распределенных системах!? Ведь здесь уже приходится иметь дело не то что с небольшим, а , напротив, с очень большим (принципиально бесконечным) числом "элементарных'' блоков (не сводимых к тривиальному соединению более простых распределенных объектов). Но это не все. Передаточная функция каждого "элементарного" распределенного блока выглядит, как мы уже знаем, далеко не так просто как (1). Собственные свойства распределенного блока, в отличие от сосредоточенного, определяются, кроме прочего, пространственной протяженностью объекта. Поэтому, передаточная функция даже "элементарного" распределенного блока содержит существенно больший объем информации. Вследствие указанных причин, при описании структур распределенных систем мы оказываемся перед новой и несколько необычной ситуацией. Именно, для того, чтобы оперативно пользоваться рекомендациями структурной теории этих систем нам надо иметь под .рукой готовую и исчерпывающую информацию о каждом "элементарном" распределенном блоке, который только может встретиться в наших рассмотрениях. Но, во-первых, как говорилось, таких блоков практически очень и очень много. Во-вторых, информация об этих блоках разбросана по морю литературы, выпущенной разными издательствами, в разные годы. Сведения о блоках часто оказываются не полными или вовсе отсутствуют. Иногда проще самостоятельно воссоздать информацию о распределенном блоке (решить соответствующую краевую задачу), чем пытаться отыскать эту информацию в готовом виде. Таким образом, возникает необходимость располагать специальным вспомогательным справочником, в котором были бы собраны, систематизированы и единообразно представлены полные наборы характеристик самых различных распределенных блоков. Книги [I] и [4] как раз и представляют собой первые такие справочники. В - них содержатся таблицы характеристик более чем 700 блоков и систем. К таковым характеристикам, в основном относятся: стандартизирующая функция (стандартизирующая вектор-функция), импульсная переходная функция (импульсная переходная матрица), передаточная функция (передаточная матрица), характеристическое уравнение, собственные значения (спектр) и собственные функции, дисперсионные уравнения, собственные временные и собственные пространственные частоты, моды и другие сведения. Уделим этим характеристикам отдельное внимание.

3.2. Стандартизирующая функция

Это понятие уже рассматривалось нами в [5]. Напомним суть дела и, кроме того, в дополнение к [5], проиллюстрируем получение стандартизирующей функции на примере сосредоточенной системы и на примере распределенной системы. При этом в последнем случае мы получим стандартизирующую функцию несколько иначе, чем это сделано в [5] . Итак, в обобщенной операторной форме описание широкого класса распределенных систем (распределенных блоков) приводится к виду

$$lQ(x,t) = f(x,t),\ \ x \in D,\ \ t > 0, \qquad (1)$$

$$\Gamma Q(x,t) = g(x,t), \;\; x \in \partial D, \;\; t > 0, \qquad (2)$$

$$NQ(x,t) = Q_0(x,t), \;\; x \in D, \;\; t = 0, \qquad (3)$$

Здесь функция (вообще говоря, векторная) $Q(x,t)$ описывает выход распределенной системы (блока); l, Γ и N-некоторые линейные операторы, причем l - оператор основного уравнения, а Γ и N- операторы краевых и начальных условий соответственно; D- открытая область в некотором многомерном пространстве, ∂D- граница этой области; функции (также вообще говоря, векторные) $f(x,t)$,$g(x,t)$(последняя при $x \in \partial D$) и $Q_0(x)$ образуют вход распределенной системы (блока). В описание (1) - (3) включаются .частными случаями описания сосредоточенного и статического блоков. В первом случае утрачиваются зависимость от x и краевое условие (2). Во втором утрачиваются зависимость от t и начальное условие (3). Можно показать [1], что существует (вообще говоря, векторная и не единственная) обобщенная функция w(x, t), зависящая от f(x, t), g(x, t) и $Q_0(x)$ и такая, что система (1) - (3) эквивалентная следующей системе

$$lQ(x,t) = w(x,t), \;\; x \in D, \;\; t > 0, \qquad (4)$$

$$\Gamma Q(x,t) = 0, \;\; x \in \partial D, \;\; t > 0, \qquad (5)$$

$$NQ(x,t) = 0, \;\; x \in D, \;\; t = 0, \qquad (6)$$

Определенная таким образом функция $w(x,t)$ называется стандартизирующей функцией системы (1) - (3), а представление (4) - (6) называется стандартной формой системы (1) - (3). Стандартная форма описания системы (блока) имеет то очевидное преимущество, что в этой форме все объекты, образующие вход системы (блока), т.е. f(x, t), g(x, t) ($x \in \partial D$) и $Q_0(x)$ собраны в правую часть лишь только одного (основного) уравнения. В стандартной форме краевые условия однородны, а начальные - нулевые. Зная решение задачи (1) - (3), т.е. выражение для $Q(x)$, нетрудно почти напрямую установить выражение и для $w(x,t)$. Проиллюстрируем эту возможность на двух примерах.

1. Для системы с сосредоточенными параметрами, описываемой соотношениями

$$a\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + b\frac{dQ(t)}{dt} + cQ(t) = f(t), \quad a \neq 0, \qquad (7)$$

$$Q(0) = Q_0,\ \frac{dQ}{dt}(0) = Q_1, \qquad (8)$$

выход $Q(t)$ очевидно, представляет собой решение задачи Коши (7), (8). Как известно [1], это решение имеет вид

$$Q(t) = \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau + Q_0\left[a \cdot \frac{dG(t)}{dt} + b \cdot G(t)\right] + Q_1 aG(t), \qquad (9)$$

где $G(t)$ – импульсная переходная функция данной системы. Но, привлекая свойства дельта-функции [1], нетрудно убедиться, что это же решение (9) допускает еще и следующее представление

$$Q(t) = \int_0^t G(t-\tau)\{f(\tau) + Q_0[a\delta'(\tau) + b\delta(\tau)] + Q_1 a\delta(\tau)\}d\tau. \qquad (10)$$

С другой стороны, стандартная форма системы (7), (8) по определению записывается как

$$a \cdot \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + c \cdot Q(t) = w(t), \quad a \neq 0, \qquad (11)$$

$$Q(0) = Q_0,\ \frac{dQ}{dt}(0) = 0, \qquad (12)$$

Решение же задачи Коши (11), (12), очевидно, есть

$$Q(t) = \int_0^t G(t-\tau)w(\tau)d\tau. \qquad (13)$$

Тогда из сравнения (13) с (10) сразу устанавливаем, что в рассматриваемом примере стандартизирующая функция

$$w(t) = f(t) + Q_0[a\delta'(t) + b\delta(t)] + Q_1 a\delta(t). \qquad (14)$$

2. Для системы с распределенными параметрами, описываемой соотношениями

$$b\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad (15)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(0,t) = g_1(t),\ \frac{\partial Q}{\partial x}(l,t) = g_2(t), \qquad (16)$$

$$Q(x,t) = Q_0(x) \qquad (17)$$

выход $Q(x,t)$, очевидно, представляет собой решение начально-краевой задачи (15) - (17). Как известно [1], это решение имеет вид

$$Q(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_0^t G(x,l,t-\tau) g_2(\tau) d\tau - \int_0^t G(x,0,t-\tau) g_1(\tau) d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t) Q_0(\xi) b d\xi. \qquad (18)$$

Но решение (18), как нетрудно проверить, допускает так же представление

$$Q(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)[f(\xi,\tau) + g_2(\tau)\delta(\xi-l) - g_1(\tau)\delta(\xi) + Q_0(\xi) b \delta(\tau)] d\xi d\tau. \quad (19)$$

Следовательно, для данного примера - системы (15) - (17) - стандартизирующая функция

$$\boldsymbol{w(x,t) = f(x,t) + g_2(t)\delta(x-l) - g_1(t)\delta(x) + Q_0(x) b\delta(t)}. \qquad (20)$$

Аналогичным образом могут быть установлены стандартизирующие функции и для других случаев. Наконец, если вход представляет некоторую вектор- функцию (например, во взаимосвязанных системах) размерности n , то и стандартизирующая функция будет являться также вектор- функцией (стандартизирующей вектор-функцией) той же размерности n [1],[4].

3.3. Импульсная переходная и передаточная функции

С этими понятиями нам уже неоднократно доводилось работать. Не повторяя сказанное в [5] и в настоящем пособии (см., прежде всего, п.п.1.2-1.3 и др.), сделаем теперь общую картину более полной. В начале коснемся определений. Пусть некоторая стационарная (автономная) система с сосредоточенными параметрами описывается операторным уравнением [5]

$$LQ(t) = w(t). \qquad (1)$$

Импульсная переходная функция $G(t)$ системы (1) по определению является решением уравнения

$$LG(t) = \delta(t). \qquad (2)$$

В изображениях по Лапласу уравнению (1) соответствует уравнение

$$\tilde{L}\tilde{Q}(p) = \tilde{w}(p) \qquad (3)$$

($\tilde{L}$-преобразование Лапласа оператора L).Передаточная функция $\mathrm{W(p)}$системы (1) определяется либо равенством (1.1.1), либо эквивалентным ему равенством (1.2.3). Тогда полагая в (3) $\widetilde{\mathrm{w}}(\mathrm{p}) = 1$ либо сопоставляя уравнению (2) его образ по Лапласу, видим, что передаточная функция $\mathrm{W(p)}$системы (1) удовлетворяет уравнению

$$\tilde{L}W(p) = 1. \qquad (4)$$

Соответственно, пусть операторное описание некоторой стационарной системы с распределенными параметрами имеет вид

$$\tilde{L}Q(x,t) = w(x,t). \qquad (5)$$

Импульсная переходная функция $G(x,\xi,t)$ системы (5) по определению является решением уравнения

$$LG(x,\xi,t) = \delta(x-\xi)\delta(t). \qquad (6)$$

В изображениях по Лапласу уравнению (5) соответствует уравнение

$$\tilde{L}\tilde{Q}(x,p) = \widetilde{w}(x,p). \qquad (7)$$

Передаточная функция $\mathrm{W(x,\xi,p)}$ системы (5) определяется равенством (1.1.5) (см.п.1.1). Тогда сопоставляя уравнению (6) его образ по Лапласу, видим, что передаточная функция $\mathrm{W(x,\xi,p)}$ системы (5) удовлетворяет уравнению

$$\tilde{L}W(x,\xi,p) \; = \; \delta(x-\xi). \qquad (8)$$

Определяющие соотношения (2), (4), (6) и (8) могут быть использованы также и для практического нахождения соответствующих функций (например, применением к этим соотношениям подходящих интегральных преобразований или иными приемами). Это, очевидно, равносильно построению обращений

$$G(t) = L^{-1}\big(\delta(t)\big), \;\; W(p) - \tilde{L}^{-1}(1), \qquad (9)$$

$$G(x,\xi,t) = L^{-1}(\delta(x-\xi)\delta(t)),$$

$$W(x,\xi,p) = \tilde{L}^{-1}(\delta(x-\xi)), \qquad (10)$$

т.е. получению явных результатов действия обратных операторов на соответствующие единичные сигналы. В п.1.3 для системы (1.3.1) - (1.3.5) приведены ее импульсная переходная функция $G(x,\xi,t)$ и ее передаточная функция $W(x,\xi,t)$. Структуры этих функций выведены в ходе решения начально-краевой задачи (1.3.1) - (Г.3.4). В порядке иллюстрации сказанного выше запишем теперь для указанной системы одно из определяющих соотношений, скажем, соотношение (8). В данном случае это соотношение принимает вид следующей краевой задачи

$$(ap^2 + bp^2 - L_0)W(x,\xi,p) = \delta(x-\xi), \qquad (11)$$

$$l_1 W(x_1,\xi,p) = 0, \quad l_2 W(x_2,\xi,p) = 0\,, \qquad (12)$$

Тогда применяя к (11), (12) соответствующее прямое конечное интегральное преобразование Гринберга [3],[5], получаем

$$(ap^2 + bp + \lambda_n^2)\overline{W}(\lambda_n,\xi,p) = \varphi(\lambda_n,\xi)r(\xi). \qquad (13)$$

Разрешая (13) относительно $\overline{W}(\lambda_n,\xi,p)$ и применяя затем обратное преобразование, устанавливаем

$$W(x,\xi,p) = \tilde{L}^{-1}\big(\delta(x-\xi)\big) = \sum_{\lambda_n} \frac{\varphi(\lambda_n,x)\varphi(\lambda_n,\xi)r(\xi)}{(ap^2+bp+\lambda_n^2)\|\varphi(\lambda_n,x)\|_{L_r^2}^2}, \qquad (14)$$

и т.д. Очевидно, импульсная переходная функция $G(x,\xi,t)$ и передаточная функция $W(x,\xi,p)$ эквивалентны в том смысле, что одна из них содержи! всю информацию с другой и наоборот. Далее, как уже говорилось, импульсная переходная функция является исчерпывающей характеристикой внутренних (собственных) свойств рассматриваемой системы. Очевидно, исчерпывающей характеристикой этих свойств является и передаточная функция. Полное знание этих функций в принципе необходимо (а в ряде случаев и достаточно) для обеспечения дальнейших полных исследований системы. Эти исследования могут быть связаны с такими категориями как управляемость, инвариантность, наблюдаемость, устойчивость, чувствительность, качество системы автоматического управления, синтез и др. Далее, в случае многосвязной стационарной системы обобщением оператора, преобразующего теперь уже векторный вход в векторный же выход выступает либо импульсная переходная матрица (в пространстве оригиналов), либо передаточная матрица (в пространстве изображений). Элементами этих матриц служат соответственно импульсные переходные либо передаточные функции по всем каналам связей - от каждого входа системы к каждому ее выходу (см., например, (2.4.2)) [1]. Наконец, в качестве предостережения укажем, что относительная простота примеров в [5] и в настоящем пособии не должна восприниматься таким образом будто бы построение импульсной переходной и передаточной функций и для всех других случаев представляет если и не самую простую, то уж во всяком случае всегда выполнимую задачу. К сожалению, это - далеко не так. Конечно, разнообразных объектов, для которых точные аналитические выражения этих функций удается получить, чрезвычайно много (иначе не было бы и океана литературы о соответствующих примерах). Но, вместе с тем, получение этих функций, особенно для объектов с распределенными параметрами, является не только (каждый раз) самостоятельной и не только (часто) весьма нетривиальной задачей. Дело, более того, обстоит так, что эта задача вообще оказывается не всегда разрешимой аналитически. Уже в одномерной системе (1.3.1) - (1.3.5) коэффициенты оператора L_0 могут приводить к таким уравнениям (1.3.7), аналитические решения которых неизвестны. В многомерных системах трудности получения аналитических выражений этих функций многократно возрастают за счет сложности геометрической области, занимаемой распределенным объектом. Это также порождает множество ситуаций, когда точные аналитические выражения установить не удается. В подобных случаях для получения информации об импульсной переходной и передаточной функциях системы прибегают к приближенным построениям (аналитическим, численным,. основанным на вариационных подходах), а также к различным приемам моделирования.

В заключение приведем еще одну иллюстрацию. Именно, запишем явные выражения импульсной переходной и передаточной функций для "простой”, но двумерной системы с распределенными параметрами. Пусть, к примеру, это будет система

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial y^2}=w(x,y,t), \qquad (15)$$

$$Q(0,y,t)=0,\ \ Q(\pi,y,t)=0, \qquad (16)$$

$$Q(x,0,t)=0,\ \ Q(x,\pi,t)=0, \qquad (17)$$

$$Q(x,y,0)=0,\ \ \frac{\partial Q}{\partial t}(x,y,0)=0, \qquad (18)$$

Если

$$w(x,y,t) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(t), \tag{19}$$

то по определению

$$Q(x,y,t) = G(x,y,\xi,\eta,t). \tag{20}$$

Таким образом, решая задачу (15)-(18) с правой частью (19) (например, с помощью соответствующего преобразования [3], [5]), находим импульсную переходную функцию системы (15)-(18):

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n,m=1}^{\infty} \sin nx \sin my \sin n\xi \sin m\eta \times \frac{c\sin(c\sqrt{n^2+m^2}t)}{\sqrt{n^2+m^2}}. \tag{21}$$

Передаточная функция $\mathrm{W}(\mathrm{x},\mathrm{y},\xi,\eta,\mathrm{p})$ системы (15) - (18) получается в данном случае из выражения (21) для $\mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y},\xi,\eta,\mathrm{p})$ заменой

$$\frac{c\sin(c\sqrt{n^2+m^2}t)}{\sqrt{n^2+m^2}} \text{ на } \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{c}^2}p^2+n^2+m^2}. \tag{22}$$

3.4. Собственные значения. Спектр. Собственные функции. Характеристическое уравнение

Рассмотрим распределенную систему (1.3.1) -(1.3.5). Как мы видели, ее импульсная переходная функция (1.3.6), ее передаточная функция (1.3.11), а также само состояние (1.4.4) такой системы представляют собой ряды по функциям

$$\varphi(\lambda_1,x), \varphi(\lambda_2,x), \dots, \varphi(\lambda_n,x), \dots\ . \tag{1}$$

Элементы последовательности (1), играющие в характеристиках распределенных систем одну из ключевых ролей, появляются как решение вспомогательной краевой задачи (1.3.7). Эту задачу можно переписать в виде

$$L_0\varphi \equiv \frac{1}{r(x)} \cdot \left\{\frac{d}{dx} \cdot \left[p(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right] + q(x)\varphi\right\} = -\lambda^2\varphi, \tag{2}$$

$$l_1\varphi \equiv \alpha_1 \frac{d\varphi}{dx}(x_1) + \beta_1\varphi(x_1) = 0, \tag{3}$$

$$l_2\varphi \equiv \alpha_2 \frac{d\varphi}{dx}(x_2) + \beta_2\varphi(x_2) = 0, \tag{4}$$

Задача (2) - (4) (или (1.3.7)) называется задачей Штурма-Лиувилля. Она же носит еще название предельной или спектральной задачи. Эта задача состоит в отыскании значении параметра λ^2 при которых существуют нетривиальные решения системы (2) - (4), отыскании самих решений, соответствующих этим λ^2, и описании свойств тех и других. Значения λ^2, при которых существуют решения задачи (2)-(4), называются собственными значениями, а соответствующие этим λ^2 решения - собственными функциями задачи (2)-(4). Множество собственных значений называется спектром. Мы будем относить все эти названия также и к самой распределенной системе (1.3.1) - (1.3.5). В рассматриваемом случае, далее, спектр представляет собой счетное множество лишь действительных чисел, не имеющее конечных предельных точек [4]. Каждому собственному значению $\lambda_n^2 (n = 1,2, \dots)$ соответствует одна собственная функция $\varphi(\lambda_n, x)$, определяемая из (2) -(4) с точностью до постоянного множителя. Именно эти функции и образуют последовательность или, иначе, систему (1). Главными являются следующие свойства этой системы. Система (1) ортогональна с весом $r(\mathrm{x})$ на промежутке $[x_1, x_2]$, т.е.

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(\lambda_n, \xi)\varphi\,(\lambda_m, \xi) r(\xi) d\xi = \|\varphi(\lambda_n, x)\|_{L_r^2}^2 \delta_{nm}, \qquad (5)$$

где квадрат нормы

$$\|\varphi(\lambda_n, x)\|_{L_r^2}^2 = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(\lambda_n, \xi) r(\xi) d\xi, \qquad (6)$$

а δ_{nm}- символ Кронскера. Кроме того, система (1) полна в классе L_r^2. Иначе говоря, не существует ни одной функции из L_r^2, за исключением нулевой точки этого пространства, ортогональной всем функциям системы (1). Таким образом, импульсная переходная функция, передаточная функция (1.3.11) и само состояние (1.4.4) распределенной системы (1.3.1)-(1.3.5) представляют собой ортогональные разложения по системе собственных функций (1). Это - довольно общее положение. Далее. Если $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\lambda, \mathrm{x})$ и $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\lambda, \mathrm{x})$- линейно-независимые решения уравнения (2), то собственные значения λ_{n}^2 $(\mathrm{n} = 1,2, \dots)$.могут быть получены из решения уравнения

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} (l_1 M) & (l_1 N) \\ (l_2 M) & (l_2 N) \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) называется характеристическим уравнением задачи (2) -(4) (и - распределенной системы (1.3.1) - (1.3.5)). Для оценки собственных значений имеет место полезное асимптотическое представление [3].

$$\lambda_n^2 \approx n^2\pi^2 \left\{\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{r(x)}{p(x)}\right]^{\frac{1}{2}} dx\right\}^{-2}, \quad n \gg 1 \qquad (8)$$

Напомним наконец (см.п.1.4), что функции (I) еще описывают (с точностью до постоянных множителей) поведение пространственных мод распределенной системы (1.3.1) - (1.3.5).

Приведем пример. Пусть в системе (1.3.1) - (1.3.5), а, следовательно, и в задаче (2) -(4) задано:

$\mathrm{p(x)} \equiv 1,\ q(x) \equiv 0,\ r(x) \equiv 1,\quad x_1 = 0,\ x_2 = l,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = -b_1, \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = b_2$. Тогда

$$M(\lambda, x) = \cos \lambda x, \qquad N(\lambda, x) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}. \qquad (9)$$

В этом случае собственные функции могут быть записаны в виде

$$\varphi(\lambda_n, x) = \cos \lambda x + \frac{b_1}{\lambda_n} \sin \lambda_n x,\ n = 1,2, \ldots \qquad (10)$$

Легко проверить, что функции (10) составлены таким образом, чтобы удовлетворять краевому условию (3). Характеристическое уравнение (7) приобретает здесь вид

$$\frac{tg\, \lambda l}{\lambda} = \frac{b_1 + b_2}{\lambda^2 - b_1 b_2}. \qquad (11)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (11) есть ничто иное как подчинение функций (10) краевому условию (4). Для корней уравнения (11) имеются специальные таблицы [3]. Асимптотическая формула (8) принимает здесь следующий простой вид

$$\lambda_n^2 \approx n^2 \frac{\pi^2}{l^2},\ n \gg 1. \qquad (12)$$

3.5. Дисперсионное уравнение. Собственные временные комплексные частоты

Рассмотрим передаточную функцию

$W(\lambda_n, p) = \frac{1}{ap^2+bp+\lambda_n^2}$ (1)

модального представления (1.3.8), (1.3.9) распределенной системы (1.3.1) - (1.3.5). Очевидно, уравнение

$p^2 + bp + \lambda_n^2 = 0$ (2)

является характеристическим уравнением этого модального представления или, иначе, характеристическим уравнением для

дифференциального уравнения (1.3.8). Это временное характеристическое уравнение (2) не надо путать с рассмотренным выше характеристическим уравнением (3.4.7) для определения собственных значений λ_n^2 пространственной краевой задачи (3.4.2) - (3.4.4). Временное характеристическое уравнение (2) еще называется дисперсионным уравнением, точнее, 1-м дисперсионным уравнением [1]. Решения этого уравнения представляют собой собственные временные (вообще говоря, комплексные) частоты данной системы. Следовательно, 1-е дисперсионное уравнение (2) дает связь между собственными временными комплексными частотами распределенной системы и ее же собственными значениями. Корни $\mathrm{p}_{1\mathrm{n}}, \mathrm{p}_{2\mathrm{n}}$ 1-го дисперсионного уравнения определяют временной характер процесса в системе: его устойчивость или неустойчивость, колебательность или апериодичность. В частности, процесс устойчив, если

$Re\, p_{1n} < 0$ и $Re\, p_{2n} < 0$ (3)

(Re p - действительная часть комплексного числа p) для всех n = 1,2,..., и неустойчив, если

$Re\, p_{1n} > 0$ и $Re\, p_{2n} > 0$ (4)

хотя бы для одного значения n (n =1,2,...). При $Re\, p_1 = Re\, p_{2n} = 0$ процесс носит чисто колебательный характер (граница устойчивости) [1]. Корни 1-го дисперсионного уравнения, очевидно, определяют также характер импульсной переходной функции $\mathrm{g}(\lambda_\mathrm{n}, \mathrm{t})$ модального представления системы (см.п.1.3), и, следовательно, существенно влияют на поведение временных мод $\bar{Q}(\lambda_n, t)$ (см.п.1.4). Для дополнительного исследования внутренних свойств распределенных систем, кроме "1-го дисперсионного уравнения" вводят еще "2-е дисперсионное уравнение", а также "дисперсионное уравнение". Мы не будем здесь затрагивать эти понятия. Сведения о них можно найти в [1],[2].

3.6. О применении конечных интегральных преобразований к получению характеристик распределенных систем

Конечные интегральные преобразования, как и преобразования в бесконечных пределах, сопоставляют задаче в оригиналах новую задачу в изображениях. Эти две задачи эквивалентны в том смысле, что решение одной содержит всю информацию о решении другой и наоборот. Однако новая задача, как правило, оказывается задачей более простой математической природы. Тем самым упрощается техника получения ответов. Добавим к этому, что формализм конечных интегральных преобразований оказался шире своего первоначального предназначения - инструмента решения краевых задач. С помощью этого формализма строятся решения ряда интегральных и интегро- дифференциальных уравнений и их систем. Эти преобразования, как мы видели, могут применяться для исследования некоторых классов задач оптимального управления [6] и структурной теории [3]. Конечные интегральные преобразования удобны и при отыскании характеристик распределенных систем. В последнем мы опираемся на факт существования повторяющихся простых связей между объектами, появляющимися при работе с этими преобразованиями, и характеристиками соответствующих систем с распределенными параметрами. В качестве иллюстрации возьмем знакомую нам систему (см. (1.3.1) - (1-3.5))

$$a \cdot \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} + b \cdot \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - L_0 Q(x,t) = f(x,t), \qquad (1)$$

$$l_1 Q = g_1(t), \quad l_2 Q = g_2(t), \qquad (2)$$

$$Q(x,0) = Q_0(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t}(x,0) = Q_1(x). \qquad (3)$$

Методика построения конечных интегральных преобразований подробно изложена в [3]. Допустим теперь, что для дифференциального выражения L_0 в (1) и краевых условий (2) построены прямое конечное интегральное преобразование Гринберга

$$\bar{Q}(\lambda_n) = \int_{x_1}^{x_2} Q(x)\varphi(\lambda_n, x) r(x) dx, \quad n = 1,2,\ldots \qquad (4)$$

и соответствующее обратное преобразование - формула обращения

$$\bar{Q}(x) = \sum_{\lambda_n} \frac{\varphi(\lambda_n, x)}{\|\varphi(\lambda_n, x)\|^2_{L^2_r}} \bar{Q}(\lambda_n). \qquad (5)$$

Это означает, что мы располагаем знанием математических объектов, конкретизирующих (4) и (5). К таковым объектам, как видно, относятся: λ_n параметр преобразования, $\varphi(\lambda_n, x)r(x)$ - ядро преобразования, $\|\varphi(\lambda_n, x)\|^2_{L^2_r}$ - норма функции $\varphi(\lambda_n, x)$ (собственной функции предельной задачи (3.4.2)-(3.4.5)) в пространстве $L^2_r[x_1, x_2]$. Но тогда сразу можно сказать, что для распределенной системы (1) - (3) множество λ^2_n $(n = 1,2, \ldots$ является ее спектром, $\varphi(\lambda_n, x)$ - ее n-й пространственной модой (с точностью до нормирующего множителя), $\bar{Q}(\lambda_n, t)$ - ее n-й временной модой (также с точностью до нормирующего множителя) или амплитудой ее n-й пространственной моды. Далее, в соответствии с (1.4.7) $\bar{Q}(\lambda_n, t)$ находится как свертка по t импульсной переходной функции $g(\lambda_n, t)$ модального представления системы (1) - (3) и преобразования (4) стандартизирующей функции $w(x, t)$ этой системы . В отношении же последней функции полезно следующее наблюдение. Пусть (иллюстрируем на простейшем примере) распределенная система задана соотношениями

$$L_0 Q(x) = 0, \qquad (6)$$

$$l_1 Q = g_1, \quad l_2 Q = g_2. \qquad (7)$$

Преобразование (4) сопоставляет уравнению (6) с условиями (7) одно соотношение в пространстве изображений [3]

$$-\lambda^2_n \bar{Q}(\lambda_n) + R(\lambda_n) = 0. \qquad (8)$$

Слагаемое $R(\lambda_n)$ отвечает за наличие неоднородностей в краевых условиях (7) (если $g_2 = g_1 = 0$, то и $R(\lambda_n) = 0$). Например, при $a_2 = a_1 = 1$, и $\beta_2 = \beta_1 = 0$ (условия второго рода, см. (3.4.3), (3.4.4))

$$R(\lambda_n) = g_2 p(x_2)\varphi(\lambda_n, x_2) - g_1 p(x_1)\varphi(\lambda_n, x_1) \qquad (9)$$

и т.д. [3]. С другой стороны, стандартная форма системы (6),(7) имеет другой вид

$$-L_0 Q(x) = w(x), \qquad (10)$$

$$l_1 Q = 0, \quad l_2 Q = 0. \qquad (11)$$

где $w(x)$ - стандартизирующая функция системы (6), (7). Очевидно, преобразование (4) сопоставляет системе (10), (11) следующее соотношение в пространстве изображений

$$-\lambda_n^2 \bar{Q}(\lambda_n) + \bar{w}(\lambda_n) = 0. \qquad (12)$$

Но тогда из сравнения (8) с (12) заключаем, что

$$R(\lambda_n) = \bar{w}(\lambda_n), \qquad (13)$$

т.е. слагаемое в (8), ответственное за наличие неоднородностей в краевых условиях системы (6), (7), есть конечное интегральное преобразование (4) стандартизирующей функции этой системы. Следовательно, сама стандартизирующая функция в соответствии с (5) равна

$$w(x) = \sum_{\lambda_n} \frac{\varphi(\lambda_n, x)}{\|\varphi(\lambda_n, x)\|_{L_r^2}^2} R(\lambda_n). \qquad (14)$$

Например, в применении к (9) это сразу дает

$$w(x) = \frac{p(x)}{r(x)} [g_2 \delta(x - x_2) - g_1 \delta(x - x_1)] \qquad (15)$$

и т.д. Связи вида (13) и (14), сохраняющиеся и в более общих случаях, ускоряют отыскание соответствующих стандартизирующих функций. Наконец, построение импульсной переходной функции $G(x, \xi, t)$ и передаточной функции $\mathrm{W}(x, \xi, p)$ системы (1) - (3) фактически сводится, как видно из (1.3.6) и (1.3.11), к знанию ядра соответствующего интегрального преобразования (4). Показанные связи повторяются (в основных чертах) и в более общих случаях, например, когда речь идет о взаимосвязанных распределенных объектах, описываемых системами соответствующих дифференциальных уравнений [3], [4]. Таким образом, применение конечных интегральных преобразований облегчает технику отыскания характеристик для широких классов систем с распределенными параметрами, сводя поиски к стереотипным и довольно простым шагам.

3.7. Примеры таблиц характеристик систем с сосредоточенными и распределенными параметрами

Каждая таблица в [1] и [4] посвящена отдельной системе и включает в себя вход таблицы математическое описание рассматриваемой системы (выделенное рамкой) и выход таблицы - имеющиеся сведения о характеристиках этой системы. Характеристики обычно располагаются в такой последовательности:

1 .Стандартизирующая функция (стандартизирующая вектор-фукнция).

2. Импульсная переходная функция (импульсная переходная матрица).

3. Передаточная функция (передаточная матрица).

4. Другие характеристики, раскрывающие информацию о данной системе (характеристическое уравнение, собственные значения, собственные функции, дисперсионные уравнения, собственные частоты,

моды, асимптотики и др.).

Полный перечень принятых в структурной теории характеристик различных систем дан в [1].

Приведем три примера.

1.

$\frac{dQ(t)}{dt} - AQ(t) = f(t), \quad Q(0) = Q_0, \quad t \geq 0,$ $Q(t)$ и $f(t)$ - вектор-столбцы размерности n, $A = (a_{ij})$ - квадратная матрица порядка n

$w(t) = f(t) + Q_0\delta(t),$

$G(t) = e^{At} = E + At + \cdots + \frac{1}{n!}A^n t^n + \cdots,$

$W(p) = (pE - A)^{-1} = \frac{B(p)}{\Delta(p)},$

$B(p)$ - матрица, присоединенная к матрице $(pE - A)$

$\Delta(p) = |pE - A| = \det(pE - A).$

2.

$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t),$ $\frac{\partial Q}{\partial x}(0,t) - b_1 Q(0,t) = g_1(t), \ \frac{\partial Q}{\partial x}(l,t) + b_2 Q(l,t) = g_2(t)$

$Q(x,0) = Q_0(x),$
$0 \le x \le l,\ t \ge 0,\ a \ne 0,\ b_1 \ge 0,\ b_2 \ge 0.$

$w(x,t) = f(x,t) + g_2(t)\delta(x-l) - g_1(t)\delta(x) + \frac{1}{a} Q_0(x)\delta(t),$

$G(x,\xi,t) = \sum_{\lambda_n} \frac{\varphi(\lambda_n,x)\varphi(\lambda_n,\xi)}{\|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L^2_r}} a e^{-at_{\lambda_n^2}},$

$W(x,\xi,p) = \sum_{\lambda_n} \frac{\varphi(\lambda_n,x)\varphi(\lambda_n,\xi)}{(\frac{1}{a}p+\lambda_n^2)\|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L^2_r}},$

λ_n - положительные корни уравнения [3]

$\frac{tg\,\lambda l}{\lambda} = \frac{b_1+b_2}{\lambda^2 - b_1 b_2},$

$\varphi(\lambda_n,x) = \cos\lambda_n x + \frac{b_1}{\lambda_n}\sin\lambda_n x,$

$$\|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L^2_r} = \frac{l}{2}\cdot\left(1+\frac{b_1^2}{\lambda_n^2}\right) + \frac{b_1}{2\lambda_n^2} + \frac{b_2}{2\lambda_n^2}\cdot\frac{\lambda_n^2+b_1^2}{\lambda_n^2+b_2^2}$$

При $n \gg 1$

$\lambda_n \approx \frac{\pi n}{l},\ \varphi(\lambda_n,x) \approx \cos\frac{\pi n}{l}x,\ \ \|\varphi(\lambda_n,x)\|^2_{L^2_r} \approx \frac{l}{2}.$

3.

$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t),$
$Q(0,t) = g_1(t),\ Q(l,t) = g_2(t),$
$Q(x,0) = Q_0(x),\ \frac{\partial Q}{\partial t}(x,0) = Q_1(x),$
$0 \le x \le l,\ t \ge 0,\ a \ge 0,\ \ c \ne 0.$

$w(x,t) = f(x,t) + g_2(t)\delta'(x-l) - g_1(t)\delta'(x) + Q_0(x)\left(\frac{1}{c^2}\delta'(t) + 2a\delta(t)\right) + Q_1(x)\frac{1}{c^2}\delta(t),$

$G(x, \xi, t) =$
$$\frac{2c^2}{l} e^{-at_{c^2}} \left[\sum_{n<N} \sin \lambda_n x \sin \lambda_n \xi \, \frac{sh \mu_n t}{\mu_n} + \sum_{n \geq N} \sin \lambda_n x \sin \lambda_n \xi \, \frac{sh {\mu'}_n t}{{\mu'}_n} \right],$$

$$W(x, \xi, p) = \frac{2}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x \lambda_n \xi}{\frac{1}{c^2} p^2 + 2ap + \lambda_n^2},$$

где $\mu_n = c\sqrt{a^2c^2 - \lambda_n^2}$, $\mu'_n = c\sqrt{\lambda_n^2 - a^2c^2}$, N - такое число, что $a^2c^2 - \lambda_n^2 \leq 0$ при $n \geq N$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $n = 1,2, \ldots$,.

Передаточным функциям в последних двух примерах можно придать замкнутую форму (см.п. 1.3).

Аналогично приведенным таблицам устроены таблицы характеристик сосредоточенных и распределенных систем, помещенных в справочные руководства [1] и [4].