Лекции к разделу
«Нечеткие модели в системах управления»
по курсу **«Специальные главы современной теории управления»**
для подготовки магистров по направлению
09.04.02 «Информационные системы и технологии»

1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1. Формальная и математическая логика

Основы традиционной логики были заложены во времена Аристотеля более двух тысяч лет назад. Аристотель попытался найти приемы, с помощью которых можно эффективным образом постигать истину в полемике. Его работы можно характеризовать как теоретическое исследование методов правильных рассуждений. Правильность рассуждений, если полемика ведется разумно, должна устанавливаться некоторым критерием. Критерий подразумевает законченную мысль, которую можно выразить при помощи простого естественного языка.

Назначение законов логики состоит в обеспечении целостности суждений. Они гласят, что суждение может быть либо истинным, либо ложным и данное значение суждения не может изменяться по желанию участника полемики. Если это условие не соблюдать, то любое умозаключение, получаемое в ходе полемики, не может быть достоверным.

Таким образом, формальная логика - это анализ формы рассуждений, при этом содержание не имеет значения.

Необходимость в научных, безупречно точных формулировках потребовало создания специального символического языка - математической (символической) логики.

В математической логике язык формул свободен от неясностей и двусмысленностей.

Истоки создания математической логики восходят к Лейбницу, который в 1666 г. в работе «Искусство комбинаторики», говорит о желательности создания научного языка на основе целесообразно подобранной символики.

В 1854 г. Джордж Буль опубликовал трактат «Исследование законов мышления, на коих основаны математические теории логики и вероятностей». С тех пор направление в логике, идущее от Буля, специалисты называют алгеброй Буля.

1.2. Исчисление высказываний

Более высокий уровень абстракции с использованием дедуктивного вывода (дедуктивный вывод - вывод от общего к частному) привел к понятию *высказывания.*

Любое утверждение, в отношении которого есть смысл, говорить, что оно может быть либо ложным, либо истинным называется *высказыванием.* При этом мы можем и не знать истинно ли данное высказывание или нет. Интересно, что исчисление высказываний является интерпретацией алгебры множеств. Исчисление высказываний составляет основу всякого дедуктивного построения.

Сочетая высказывания между собой различным образом, мы можем получать новые высказывания. Сочетания высказываний образуются при помощи связок *«и», «или», «если-то», «тогда и только тогда, когда», «не».* В математической логике для обозначения этих сочетаний используются специальные символы.

Исчисление высказываний тесно связано с булевыми переменными, которые характеризуются двумя возможными состояниями. Для обозначения этих состояний используются цифры 0 (ложно) или 1 (истинно).

1.3. Основные логические операции

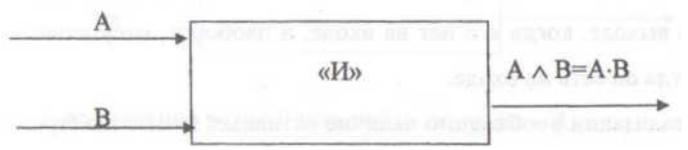
Основные логические операции в алгебре Буля следующие.

1. *Логическое сложение (дизъюнкция).* Обозначается символом vA vB, (A + B). Читается A или B. Называется *дизъюнкцией*высказываний A или B. Обозначает высказывание, которое

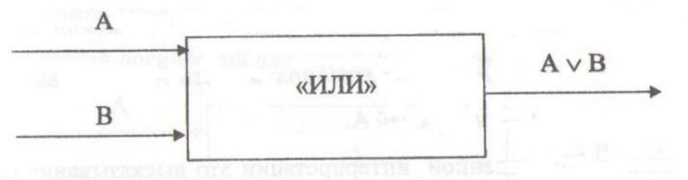
истинно лишь тогда, когда истинно, по крайней мере, одно из высказываний, но могут быть истинны и оба высказывания. Соответствует операции объединения множеств.

Применительно к электрическим схемам это означает, что сигнал на выходе будет в том и только в том случае, если он есть на любом из входов схемы (или на обоих входах).

2. *Логическое умножение (конъюнкция).*Обозначается символом $\vee$. Читается А и В. Обозначает высказывание, которое истинно в том и только в томи том случае, если истинны оба высказывания А и В. Логическое умножение соответствует операции пересечения множеств.



Применительно к электрическим схемам эта операция означает, что сигнал на выходебудет в том и только в том случае, если он есть на всех входах одновременно. Это схема «и» или схема совпадения.



Конъюнкцию и дизъюнкцию можно рассматривать как логические операции над величинами, принимающими два значения - 0 и 1. Это двухместные (бинарные) операции.

Для этой функции характерны тождества:

$A*1=A$;

$A*0=0$;

$A * \overline{A} = 0$;

АА...А=А - тождество показывает, что в алгебре логики отсутствует операция возведения в степень.

А (В С)=(А В) С.

3. *Отрицание высказывания А.* Обозначается символом $\overline{A}$. Читается: не А. Обозначает высказывание, которое истинно, когда А ложно, и наоборот, ложно, когда А истинно. $\overline{A}$есть противоположность А. Такое высказывание называют*отрицанием* или *инверсией* А.

В теоретико-множественной интерпретации это высказывание соответствует понятию дополнения множества до универсального (универсума). Так, если А - некоторое множество, то дополнение $\overline{A}$ содержит все элементы, не входящие в А. Это введение элементов через отрицание (негативность). Для получения некоторых выводов требуется переход от негативно определяемых элементов к позитивно определяемым.

Применительно к электрическим схемам эта операция означает наличие сигнала на выходе, когда его нет на входе, и наоборот, отсутствие сигнала на выходе, когда он есть на входе.

Для реализации необходимо наличие активных элементов (транзисторов и
др.).

4. *Исключающее «ИЛИ».* В алгебре логики часто используется функция

$A \oplus B = A \bar{B} + \overline{A}B$

Это *сложение по модулю 2 или операция неравнозначности («исключающее или»).* Читается

«А или В, но не оба вместе».

Может быть выражена через основные логические операции:

$A \oplus B = A\,\overline{B} + B\,\overline{A} = (A + B)(\overline{A} + \overline{B})$.

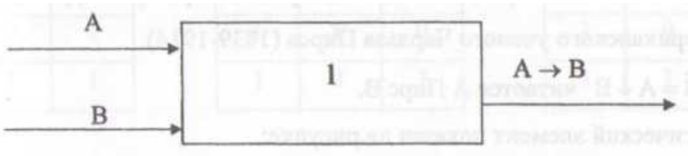
5. *Импликация двух высказываний* $A \rightarrow B$. Читается А «имплицирует»В, «если А, то В». Обозначает высказывание, которое ложно в том и только том случае, когда А истинно, а В ложно, и истинно во всех остальных случаях А «имплицирует» В.

Таким образом, по определению, ложность импликации имеет место толь- ко н единственном случае, когда А истинно, а В ложно.

Интересно отметить, что дизъюнкция может быть выражена с помощью одной лишь импликации в силу того, что операции А+В и (А→ В)→В логически эквивалентны.

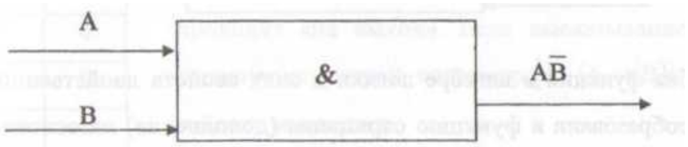
Аналогичное определение для конъюнкции невозможно.

Стандартный логический элемент импликации:



Функция «запрета» реализуется на инверсной импликации

$$\overline{A \rightarrow B} = \overline{\overline{A} + B} = A\overline{B}$$



При В=1, ее значение равно 0 при любых значениях А.

6. *Эквивалентность* $A \leftarrow\rightarrow B$ читается: «А тогда и только тогда, когда В». Обозначает высказывание, истинное только тогда, когда А и В оба истинны ими оба ложны. Такое высказывание называется *эквивалентностью* высказываний А и В.

7. *Операция Шеффера* (несовместность двух высказываний).

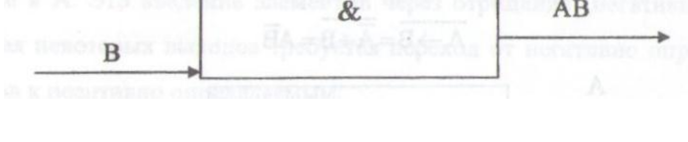
В 1913 году Г. Шеффер показал, что любое сложное высказывание может быть реализовано с помощью одной операции, которая получила название «штрих Шеффера» или операция Шеффера. («ИЛИ - НЕ»), Дизъюнкция и отрицание выражается через «штрих Шеффера». Читается не А или не В.

$\overline{A} + \overline{B} = A/B.$

Справедливы следующие соотношения:

$$\overline{A + A} = \bar{A};\ \ \overline{A + \bar{A}} = 0;\ \ \overline{A + 1} = 0;\ \ \overline{A + 0} = \bar{A}.$$

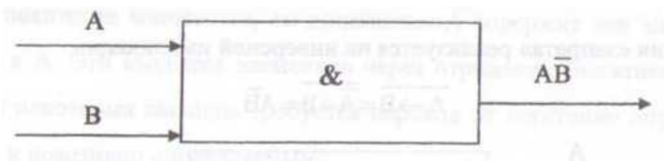
Логический элемент имеет вид:



Двойственной операцией является стрелка Пирса (или функция Пирса) в честь американского ученого Чарльза Пирса (1839-1914).

$\overline{AB} = A \downarrow B$читается А Пирс В.

Логический элемент показан на рисунке:



Любая функция в алгебре логики в силу свойств двойственности может быть преобразована в функцию отрицания (дополнения) на основе тождества Де Моргана:

$$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B};$$
$$\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}.$$

1.4. Таблицы истинности. Логические уравнения

Логический смысл дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и импликации можно просто и наглядно проиллюстрировать с помощью таблиц истинности (таблиц соответствия).

Таблица истинности - это таблица всех наборов логических переменных 0 и 1, поступающих «на вход».

Например, таблицы истинности для основных логических операций имеют вид:

Дизъюнкция А+В		
A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция АВ		
A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликация $A \to B$		
A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность		
A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Единица «на выходе» С означает, что сигнал проходит «на выход». Если высказывание имеет сложную структуру, например [A • (A -> B)] B, то таблица имеет вид:

A	B	$A \to B$	A($A \to B$)	[A • (A →B)]
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Рассматриваемое высказывание истинно, каковы бы ни были А и В. Такие выражения часто называются *тавтологиями.*

Следующие высказывания являются тавтологиями:

$A+\overline{A}$ - закон исключенного третьего;

$\overline{\overline{\neg(A+\overline{A})}}$ закон противоречия;

$A \leftarrow\rightarrow A$ - закон двойного отрицания. *Двойное отрицание, как и любое четное отрицание, возвращает утверждение в исходное состояние.*

Если составить таблицы истинности для высказывания $A \rightarrow B$ и $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ то окажется, что они одновременно истинны или одновременно ложны. Такие высказывания являются *логически эквивалентными.*

Таблицы истинности должны рассматриваться как определение. По таблицам истинности составляются логические уравнения. Логические уравнения могут составляться по нулям и по единицам. Наиболее удобно и естественно составлять уравнения по единицам.

Составить уравнение по единицам - это значит выделить те значения переменных, благодаря которым «сигнал» проходит на выход.

$$f = A + \bar{B} = A + \bar{B}\bar{B} = AB + \bar{B} = AB + A\bar{B} + \bar{B} = AB + A\bar{B} + \bar{B}(A + \bar{A}) = AB + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$$

Интересным фактом является то, что логическую функцию можно выразить несколькими способами. Например, каждой из 6 комбинаций соответствует одно и тоже значение f.

Это логическое уравнение импликации, которое легко выводится из таблиц истинности.

1.5. Упрощение булевых функций

Логическое уравнение, получаемое из таблиц истинности, можно преобразовать к более простому виду.

Цель преобразований - упростить логические функции что, в конечном и юге, приводит к более экономичному представлению функции.

Наиболее простыми (каноническими) выражениями являются две формы: дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), представляющая собой сумму произведений логических переменных (например, $f = A\bar{B}+A\bar{C}$), конъюнктивная нормальная форма (КНФ), представляющая собой произведение логических сумм [например, f= (A + B)(B + C)].

В технике преобразований логических переменных для того, чтобы выразить функцию в каноническом виде иногда используют прибавление соотношения вида $A\overline{A} = 0$ или умножение на $A + \overline{A} = 1$.

Пример. Требуется преобразовать:

$f = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$.

Если два последних члена умножить соответственно на $A + \overline{A}$ и $C + \overline{C}$, то полученные выражения становятся проще

$$f= A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C(A+\overline{A})+A\bar{B}(C+\overline{C}) = A\overline{B}+A\overline{B}C+B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC=$$

$$=A\overline{B}(1+C)+B\overline{C}(1+\overline{A})+\overline{A}C(B+\overline{B}) = A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C.$$

Булеву функцию можно представить как в дизъюнктивной, так и в конъюнктивной формах.

Допустим, имеется функция в дизъюнктивной нормальной форме

$$f= ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C.$$

Для получения КНФ записываем сумму всех произведений, отсутствующих в данной форме, затем изменяем все знаки «или» на «и», а «и» на «или» и отрицаем каждый символ.

Выпишем значения переменных, отсутствующих в ДНФ

$\overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Затем изменим все знаки на обратные и выполним отрицание

f= $(A+\overline{B} + \overline{C})(A+\overline{B} + C)(A + B + C)$.

Каждую функцию Буля можно представить лишь одной и только одно минимальной (дизъюнктивной или конъюнктивной) формой.

Пример. Упростить выражение

$A\,\overline{B}\,(\overline{A} + B + \bar{C}D) + \overline{\bar{A}D(\bar{C} + B)}$

Имеем

$$A\overline{A}\overline{B} + AB\bar{B} + A\bar{B}\bar{C}D + \overline{\neg(A\,\bar{D})} + \neg(\bar{C} + B) = A\bar{B}\bar{C}D + A + \bar{D} + C\bar{B} =$$
$$= A(\bar{B}\bar{C}D + 1) + \bar{D} + C\bar{B} = A + \bar{D} + C\bar{B}.$$

При преобразовании логических выражений устанавливается следующая последовательность операций:

1. Инверсия.
2. Конъюнкция.
3. Дизъюнкция.

Затем следуют все другие операции, соответствующие логическому выражению. При изменении этого порядка в выражении используются скобки.

Минимизация (упрощение) логических уравнений может осуществляться непосредственным упрощением, либо минимизацией с помощью карт Карно. Карта Карно (или диаграмма Вейча) по существу, является разновидностью записи таблицы истинности, более компактной формой ее представления.

При преобразованиях широко используются операции:

$ABC + AB\overline{C} = AB$ - полное склеивание $(A + B)(A + \overline{B}) = A$

$AB+BC+\overline{A}C = AB+\overline{A}C$- обобщенное склеивание

$AB + \overline{A}B = AB + \overline{A}B + B$ - неполное склеивание

$\begin{cases} A + AB = A \\ A + \bar{A}B = A + B \end{cases}$ - поглощение

Основные соотношения, часто используемые в булевой алгебре:

1. $A+A+\ldots=A$ — - идемпотентность (1–2)
2. $A\cdot A\cdot\ldots=A$
3. $A+\overline{A}=1$ — - законы дополнительности, закон исключенного третьего, закон противоречия (3–4)
4. $A\cdot\overline{A}=0$
5. $A+1=1$
6. $A\cdot 1=A$
7. $\overline{\overline{A}}=A$
8. $A+AB=A$
9. $A+\overline{A}B=A+B$ $\quad$ $A(\overline{A}+B)=AB$
10. $\overline{A}+AB=\overline{A}+B$
11. $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$ — - тождества де Моргана (11–12)
12. $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$
13. $\overline{AC+B\overline{C}}=\overline{A}C+\overline{BC}$
14. $\overline{(A+C)(B+\overline{C})}=(\overline{A}+C)(\overline{B}+\overline{C})$

Последние два выражения используются в случаях, когда требуется находить инверсию.

Логическая формула, представленная в ДНФ может быть упрощена многократным применением операции склеивания $AB + A\bar{B} = A$ и операции поглощения

$A + AB = A$ и $A + \bar{A}B = A + B$.

В результате приходим к тупиковой форме, т.е. к такой форме когда дальнейшие преобразования оказываются невозможными.

1.6. Алгебра Жегалкина

При решении специальных задач можно использовать и другие алгебры логики. Значительный интерес представляет алгебра Жегалкина И. И. (1867-1947).

В алгебре Жегалкина булевы функции строятся на основе операций сложения по модулю 2 и конъюнкции.

Алгебра подчиняется свойствам коммутативности

$$x + y = y + x;\ xy = yx,$$

ассоциативности

$$x + (y + z) = (x + y) + z;\ x(yz) = (xy)z,$$

дистрибутивности умножения относительно сложения

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Соблюдаются также свойства нуля и единицы

$x \cdot 1 = x$; $x \cdot 0 = 0$; $x + 0 = x$ (константа 0 - тождественна нуль, всегда ложно; константа 1 - всегда истинно).

Все эти свойства подобны обычной булевой алгебре, но закон дистрибуктивности сложения относительно умножения не имеет силы $xy + z \neq xz + yz$

Для алгебры Жегалкина справедлив закон $X + X = 0$ и закон идемпотентности для умножения $x \cdot x = x$.

Как и в булевой алгебре в алгебре Жегалкина не могут появляться показатели степени и коэффициенты при переменных (в каноническом представлении).

Для алгебры Жегалкина справедливы следующие соотношения:

$$\bar{x} = 1 + x;$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1 x_2;$$

$$x_1 + x_2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Эти соотношения позволяют перейти от любой формулы булевой алгебры к формуле алгебры Жегалкина.

Например:

$$x(\bar{x} \vee y) = x[(1 + x) + y + (1 + x)y] =$$
$$= x(1 + x + y + y + xy) = x(1 + x + xy) =$$
$$= x + xx + xxy = x + x + xy = xy.$$

Операция «или - не»

$$\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = (1 + x_1) \vee (1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_{1x2}.$$

Операция «и - не»

$$\overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = (1 + x,) \vee (1 + x_2) =$$
$$= 1 + x_1 + 1 + x_2 + (1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 x_2.$$

Импликация

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

$$1 + x_1 \vee x_2 = 1 + x_1 + 1 + x_1 + x_2 + x,x_2 = 1 + x_2 + x_1 x_2.$$

Преимущество алгебры Жегалкина в «арифметизации» логики. Преобразование логических функций осуществляется так же как и в обычной булевой алгебре.

При большом числе логических переменных возрастает громоздкость формул. Например, для трех переменных формула дизъюнкции имеет вид

$x \vee y \vee z = x + y + z + xy + xz + yz + xyz.$

Операции алгебры Жегалкина (сумма по модулю 2 и конъюнкция) вместе с константой 1 образуют функциональную полноту. С ее помощью может быть представлена любая функция из множества булевых функций.

1.7. Предикаты

Операции над высказываниями недостаточны для оценки сложных логических рассуждений.

Высказывание представляет собой логическую формулу, соответствующую 0 или 1, в которой нет свободных переменных. *Если влогической формул« есть свободные переменные, то истинность «1» или ложность «О» зависит от значения, принимаемого переменными.*

Логическая функция, в которой одно или несколько переменных x является свободными, и могут принимать значения 1 (истинно) или 0 (ложно) называется *предикатом.*

Предикат устанавливает соответствие одного из двух элементов 1 или 0.

В общем случае логическая функция P(x) может зависеть от многих аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, принимающих значение из одного и того же или различных множеств. Она записывается как $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Таким образом, предикат $P(x_1|, x_2, ..., x_n)$ принимает одно из двух значений «1» или «0» в зависимости от условий, приписываемых переменным $x_1, x_2, ..., x_n$. После замены символа x конкретным числом (объектом) предикат превращается в высказывание.

Например, всякое алгебраическое уравнение - это, в сущности, предикат.

$$x^2+3x+2=0;$$

область истинности уравнения - корни {-1, -2)

В лингвистике предикатом часто называется всякая фраза с элементом множества x, в которую вместо x можно подставлять название предметов из некоторого множества (области определения предиката). Существенно напомнить, что *в логике все символы освобождаются от какого-либо смыслового значения.*

Например, если область определения предиката «x - целое число» - это множество чисел, то для предиката «x - студент» - это означает множество людей.

Введя в предикате переменную, замещающую нужный предмет для каждого значения переменной x из области ее определения, мы получаем *высказывание*

Например, «Иван любит x» - это предикат. Если вместо x подставить объкт любви Ивана, то полученный результат является высказыванием.

Предикаты способны принимать только значение 0 или 1. Предикаты, как и булевы переменные можно связывать логическими операциями. В результате получаются более сложные предикаты.

Так, если P(x) означает x - студент, aQ(x) - студент нашей кафедры, то

$P(x) \wedge Q(x) = R(x)$ есть одноместный предикат «x - студент нашей кафедры». Очевидно, что если P - множество студентов, aQ- множество студентов нашей кафедры, то этот предикат соответствует пересечению множеств $P \wedge Q$.

Это показывает тесную связь между логикой предикатов и операциями над множествами.

Исчисление предикатов является расширением и обобщением исчисления высказываний. В него входят все формулы исчисления высказываний.

Логика предикатов проникает в структуру предложений, устанавливая связь о ком или о чем идет речь и что говорится о данном предмете (предикат).

Логика предикатов позволяет выразить связь между понятиями и утверждениями.

1.8. Кванторы

В логике предикатов большое значение имеют две операции называемые *кванторами,* с помощью которых выражают отношения общности и существования.

Вместо слов *«все», «всякий», «для всякого», «для всех», «для любого», «для каждого»* для краткости часто используется символ ∀(перевернутая буква А - первая буква английского слова All — все). *Это - квантор общности.*

Вместо слова «найдется», «существует», «для некоторых x», «по меньшей *мере,* для одного», «отыщется» часто используется обозначение ∃(перевернутая буква Е - первая буква английского слова Exist- существует). *Это квантор существования.*

Пусть имеется предикат P(x), определенный на множестве M. Утверждение, что все x∈M обладают свойством P(x) записывают с помощью квантора общности в виде

$$\forall x P(x).$$

Это означает, что для любого x выполняется (имеет место) предикат P(x).

Запись ∃ x P(x) означает, что существует хотя бы один объект x из M, при котором выполняется (имеет место) предикат P(x), т.е. x обладает свойством P(x).

Запись ∀x∈P; M(x)=1 читается так: «для всякого элемента x ∈P свойство **M(x)=1** выполнено».

Запись ∃x ∈P [M(x)=1] - «существует по крайней мере один элемент x ∈ P, обладающий свойством M».

Кванторы ∀xи ∃x связывают переменную x, *превращая предикат в высказывание.*

Квантор представляет собой логический оператор, переводящий одну форму высказывания в другую.

Выражения ∀xP(x) и ∃x P(x) не зависят от значения переменной x. Кванторы ∀xи ∃x *связывают переменную x,* превращая *одноместный предикат в высказывание.*

И вообще при замещении аргумента x некоторым его значением n-местный предикат P(xi, x_2,..., x_n) превращается в (n-1)-местный предикат и от переменной x он уже не зависит.

Очевидно, что ∀xP(x) - истинна только при условии, что P(x) - истинный предикат, во всех остальных случаях это выражение ложно.

Высказывание ∀xP(x) - «все натуральные числа простые» - ложно; а ∃xP(x) - «некоторые из натуральных чисел простые» - истинно. Например, соотношение x+7=y не выражает никакого высказывания, является общим утверждением, однако при замене x и y конкретным числом, например при x=2, 2 + 7 = 9 становится высказыванием.

Между кванторами ∀xи ∃x имеют место соотношения, обобщающие законы Де Моргана:

$\forall x P(x) = \exists x \overline{P(x)};$

$\exists x P(x) = \forall x \overline{P(x)}.$

1.9. Категорические высказывания

В традиционной логике существует четыре типа категорических высказываний, обозначим их большими латинскими буквами: A, E, **J,** O.

A - общеутвердительное высказывание.

$\forall x[S(x) \rightarrow P(x)]$ - это означает «Для всех x, если x обладает свойством S, то x обладает и свойством P». «Всякое Sсуть P».

E - общеотрицательное высказывание.

$\forall x[S(x) \rightarrow P(x)]$ - это означает, «Для всех x, если x обладает свойством S, то x не обладает свойством P». «Никакое Sне есть P».

J- частно-утвердительное высказывание.

$\exists x[S(x) \wedge P(x)]$ - это означает, «что существует такой объект x, обладающий свойством S, который также обладает свойством P». «Некоторые Sсуть P».

O - частно-отрицательное высказывание.

$\exists x[S(x) \wedge \overline{P(x)}]$ - это означает, «Что некоторые Sне суть P» или «Существует такой объект x, который обладает свойством Sи не обладает свойством P».

На основе правил преобразования высказываний и зависимостей межlекванторами можно записать:

$\forall x[S(x) \rightarrow P(x)] \leftrightarrow \overline{\exists x}|S(x) \wedge \overline{P(x)}]$; $\forall x[s(x) \square \overline{P(x)}]$

$\overline{\forall} x[s(x) \rightarrow \overline{P(x)}] \leftrightarrow \exists x[S(x) \wedge P(x)]$;

$\overline{\forall} x[s(x) \rightarrow P(x)] \leftrightarrow \exists x[S(x) \wedge \overline{P(x)}]$;

Из приведенных соотношений видно, что высказывания A и 0, а также E и I являются отрицаниями друг от друга (если одно из высказываний истинно, то другое ложно и наоборот). Они являются противоположными высказываниями. Из коммутативности операции конъюнкции следует, что суждения E и I допускают перестановку предикатов S(x) и P(x).

$\overline{\exists} x[S(x) \wedge P(x)] \leftrightarrow \exists x[P(x) \wedge S(x)]$;

$\exists x[S(x) \wedge P(x)] \leftrightarrow \exists x[P(x) \wedge S(x)]$.

1.10. Законы логики высказываний. Модусы

Как уже отмечалось, тождественно истинная формула, т.е., такая, которая принимает значение 1 при любых значениях логических переменных, является *тавтологией.* Тождественно ложная формула на всех наборах компонентов формулы, принимающая значение 0 является *противоречием.*

Тавтологии и противоречия в логике высказываний представляют значительный интерес.

Примером тавтологии может служить следующее высказывание: «Если «внедрить новую технологию P, то качество продукции Qулучшится. При улучшении качества Qее сбыт увеличится R».

Новая технология P внедрена. Сбыт R увеличился. Это выражается формулой

$$(P \rightarrow Q)(Q \rightarrow R)P \rightarrow R$$

Выясним, является ли данная формула тождественно истинной тавтологией.

Перепишем формулу в виде

$$(\overline{P} + Q)(\overline{Q} + R)P \rightarrow R$$

Символ «+» имеет смысл объединения.

При преобразованиях используем известные зависимости:

$(\overline{PQ} + \overline{PR} + QR)P \to R$ $(P \to Q = \overline{P} + Q)$

$QRP \to R;$

$\overline{QRP} + R;$

$\bar{Q} + \bar{R} + \overline{P} + R;$

$\overline{P} + \bar{Q} + 1 = 1.$

Если хотя бы один компонент в данной дизъюнктивной нормальной форме окажется равным 1, то формула является тавтологией. В данном случае - это тавтология.

Если хотя бы на одном наборе значений переменных формула принимает значение 0, она не является тавтологией. Например, если R ложно, формула не является тавтологией.

Тавтологии можно рассматривать как наиболее логически истинные схемы рассуждений или утверждений. Поэтому они играют роль законов логики высказываний, претендующих на правильность построения умозаключений.

Наиболее часто используемые законы логики высказываний:

$P \to P$ - закон тождества;

$P \vee \overline{P}$ - закон исключенного третьего;

$P \to (Q \to P)$- закон «истина из чего угодно» (verumexquodlibet);

$\overline{P} \to (P \to Q)$ - закон «из ложного что угодно» (exfalsoquodlibet);

$(P \to Q)P \to Q$- закон отделения, или modusponens;

$(P \to Q)\bar{Q} \to P$- законmodus tollens;

$(P \to Q)(Q \to R) \to (P \to R)$ – закон силлогизма.

Каждый из этих законов отображает некоторую схему логики высказываний.

Например, modusponensможно интерпретировать так: если истинно, что некоторое высказывание P имплицирует высказывание Q, и, кроме того, P истинно, то истинно и Q.

Из закона modusponensможно вывести заключение: если A и A B суть тавтологии, то B - также тавтология.

Рассмотрим вывод из двух утверждений $x_1 \to x_2$

$x_1 \to x_2$

$x_2 \to x_3$

……………

$x_1 \to x_3$

Физический смысл можно придать следующий:

1. Если температура в агрегате превысила допустимую $t_{доп}$(x,), то технологический режим нарушен ($x_1 \to x_2$).
2. Если технологический режим нарушен, то необходимо привести в действие срочные меры (останов, аварийная защита и т.д.) ($x_2 \to x_3$).

Вывод следующий: если температура в агрегате превысила $t_{доп}$, то необходимо привести в действие срочные меры ($x_1 \to x_3$).

Можно представить вывод с помощью ModusPonens$(x_1 \to x_2)x_1 \to x_2$

$x_1 \to x_2$

x_1

…………..

x_2

Если температура в агрегате превысила $t_{доп}$, то технологический процесс вышел из номинального режима (x_2).

Как уже было отмечено, ModusPonensпредставляет собой тавтологию, т.е. логически истинную схему утверждений (рассуждений). На обычном языке это может быть интерпретировано так: если переменная x, имплицирует переменную x_2, и кроме того x, истинно, то истинно и x_2.

1.11. Нечеткая логика

Способность оперировать нечеткими понятиями и вытекающая отсюда способность оценивать информацию является одним из наиболее ценных качеств человеческого разума. Л.Заде предложил ввести понятие переменной, значениями которой могут быть не только числа, но слова и словосочетания естественного и искусственного языков.

В исчислении высказываний (традиционной логике) единица представляет истину, а нуль - ложь. Промежуточное значение между «О» и «1» не используется. В нечеткой логике значения «1» и «О» сохраняются, но дополнительно используются все числа между 0 и 1 с тем, чтобы указать «частичную» истину.

Так, запись

P[Завтра будет дождь (X)]=0,7

означает, что предположение X о том, что завтра будет дождь соответствуетистине на 70%, а на 30% не соответствует.

Нечеткая логика - это логика, в которой высказывание интерпретируется**,** как имеющее неточное значение, характеризуемое нечетким множеством, *т.е.*представляется функцией, принимающей значение на отрезке*[0;1]. Нечеткая логика удовлетворяют следующим свойствам:*

Идемподентность:

$A\cdot A.. = A$

$A+A+..= A$

Коммутативность:

$A\cdot B = B\cdot A$

$A+B=B+A$

Ассоциативность:

$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)$

$(A + B)+C = A + (B + C)$

Дистрибутивность пересечения относительно объединения и дистрибутивность объединения относительно пересечения:

$A\cdot (B + C) = (A\cdot B) + (A\cdot C)$

$A + (B\cdot C) = (A + B)\cdot (A + C)$

$\overline{\overline{A}} = A$ - инволюция. Двойное отрицание (а так же любое четное отрицание) возвращает множество в исходное состояние.

Теоремы де Моргана для нечетких множеств:

$$\overline{A\cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A+B} = \bar{A}\cdot\bar{B}$$

Не соблюдаются свойства законов дополнительности (компиментарности)

$$A\cdot\overline{A} \neq 0$$

$$A + \overline{A} \neq 1$$

[В четкой логике - это закон противоречия и закон исключенного третьего$A\cdot\overline{A} = 0$ $(A + \overline{A} = 1)$].

1.12. Функция принадлежности. Лингвистические переменные. Термы

Нечеткость, присущая человеку, характеризуется не традиционной двузначной или даже многозначной логикой, а логикой с нечеткой истинностью, нечеткими связями и нечеткими правилами вывода. Для того чтобы формализовать нечеткость и сделать ее объектом математического изучения Л.Заде предложил концепцию нечеткого множества и вытекающую из нее нечеткую логику.

По определению множество А - это совокупность объектов, обладающих общим свойством (множество корней алгебраического уравнения, множество собственных чисел матрицы, множество устойчивых решений и т.д.).

Принадлежность или непринадлежность множеству А обозначается $a \in A$ или $a \notin A$. В обычном четком множестве эта задача решается просто (1 - ИСТИННО0 - ложно).В нечетких случаях свойство объекта находится между 0 и 1 в интервале [0;1]. Определяется функцией принадлежности $\mu_A(x)$, характеризующей степень близости переменной х множеству А.

Характерная особенность $\mu_A(x)$ состоит в субъективности представления и во многом зависит от опыта и квалификации человека. Значение «истинности» может быть неединственным (размытым).

Субъективное суждение имеет центральное значение при наличии факторов неясности. При определении функции принадлежности $\mu_A(x)$ не вполне ясно кик проявляется индивидуальность человека, что особенно важно в экспертных процедурах.

Субъективное представление о характере какого-либо процесса может приводить к тому, что функция принадлежности у различных людей может различаться. Один человек, например, может сказать, что молодой человек - но возраст 17-19 лет, другой считает, что - 22-26 лет.

Функция $\mu_A(X)$ - это функция, определяющая субъективное мнение человека (специалиста).

Вид функции принадлежности $\mu_A(x)$ может быть различным. Однако часто используются типовые функции.

Удобный способ представления формулы $\mu_A(x)$ связан с аппроксимацией прямыми линиями

$$\mu(x)= \kappa x+b; \; 0 \le x \le 1$$

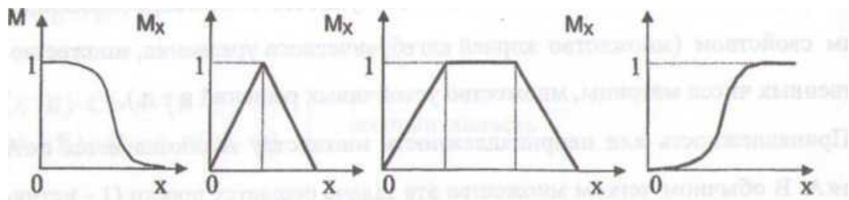


Рис. 1

В классической логике значение истинности может иметь только два значения: истина или ложь. В размытой логике, как уже упоминалось, значение истинности может быть нечетким (размытым): «очень», «более или менее», «вполне», «исключительно», «обычно», «почти всегда», «часто», «главным образом» и т.д.

Свойства нечеткой логики позволяют не делать аналитическое описание процесса (объекта) и системы управления. Достаточно только профессионального описания того как процессом или объектом управляет опытный оператор.

Для описания объекта или процесса используются слова и обороты определенного языка, также как «горячий», «теплый», «холодный», «высокий», «довольно высокий» и т.д. Такие слова носят названия *термов.*

Для того, чтобы связать термы, имеющие больше двух значений (да, нет) в нечеткой логике вводится понятие *лингвистической переменной.*Например, уровень жидкости можно характеризовать лингвистической переменной «уровень», имеющей несколько термов: «очень высокий», «довольно высокий», «средний», «низкий» и т.п. В задачах управления процессами часто достаточно 3-7 термов на каждую переменную. При физической реализации лингвистической переменной необходимо определить значения для термов и сопоставить им в соответствие значение функции принадлежности. Другими словами необходимо определить степень принадлежности управляемой величины к терму лингвистической переменной.

Переход от конкретных входных переменных к нечеткому виду (к лингвистическим переменным) называется *фазификацией.*

Таким образом формализация плохо определенных систем связана с функцией принадлежности $\eta_A(x)$, которая отражает субъективную оценку степени . соответствия отдельных элементов нечеткому множеству.

1.13. Применение нечеткой логики в системах управления

Важнейшая проблема управления - это формализация неопределенностей имеющих различную природу.

Использование нечетких понятий - это подход к проектированию и применению систем управления принципиально отличающихся от систем, в которых используется принцип обратной связи.

Неопределенность исходных данных при решении задач управления технологическими процессами часто имеет неслучайный, не вероятностный характер (что мешает строить статистические модели) и может возникать под действием реальных, но неизмеримых переменных, из-за погрешностей измерения, других нечеткостей.

Формализация нечеткостей, имеющих различную природу, решается с помощью лингвистических переменных. Лингвистические переменные, как уже отмечалось - это переменные, значениями которых являются слова, фразы, предложения (термы), выраженные на естественном языке.

Применение нечетких понятий для управления было предложено в 1974 году в Великобритании в работах Е.Н. Мамдани.

Идея метода заключается в использовании опыта и навыка человека вместо описания систем с помощью дифференциальных уравнений. Этот опыт и знания могут быть выражены естественным образом с помощью лингвистических переменных, которые описываются нечеткими множествами. Обращение к лингвистическому представлению дает возможность использовать качественные подходы.

Из двух предложений можно построить одно вида «если..., то...», которое представляет собой *импликацию.*Предложение, следующее за «если» *является предпосылкой, условием, допущением (антецендент)*, а предложение, следующее за «то» представляет собой *вывод, заключение, следствие (консеквент*). Между посылкой и следствием может и не быть причинной связи.

Лингвистические переменные, выражающие параметры объекта управления могут принимать значения из множества

L=[NB, NM, NS, NO, PO, PS, PM, PB].

Первая буква указывает знак переменной и соответствует английскому слову Negative(отрицательное) или Positive(положительное), вторая буква указывает на значение переменной:Big(большое), Middle(среднее), Small(малое) или O (близкое к нулю). Например, символ

NBозначает «отрицательное большое».

Алгоритм управления состоит из правил высказываний. Например, при регулировании давления в парогенераторе Е.Н. Мамдани использовал описание на естественном языке типа: «Если давление в парогенераторе большое, отрицательного знака и если отклонение давления не убывает с большой и средней скоростью, то подогрев пара надо сильно увеличить».

Используя лингвистические переменные это правило можно переписать в виде:

«Если P_E=NBи C_{PE}=NE (NBили NM), то H_C=PB», где P_E - отклонение давления от номинального значения;

Cp_E - скорость изменения P_E;

Hc - изменение подогрева пара.

Запишем лингвистические переменные в следующем виде:

Если (S_E = NOи C_{SE}=PB), то T_C=PS»,

где S_E- отклонение скорости изменения давления по отношению к норме;

C_{SE}- скорость изменения S_E;

T_c - изменение положения дросселя.

На естественном языке это представляется в виде: «Если скорость изменения давления ниже нормы и одновременно скорость резко растет, то следует и изменить положение дросселя на положительную малую величину».

Нечеткое поведение системы связано с качественной оценкой, анализом и меняющейся ситуации и выбором наиболее подходящего способа управления. Происходит выполнение функций, свойственных опытному и квалифицированному оператору.

Блок-схема нечеткой системы управления имеет вид (рис. 2.2)

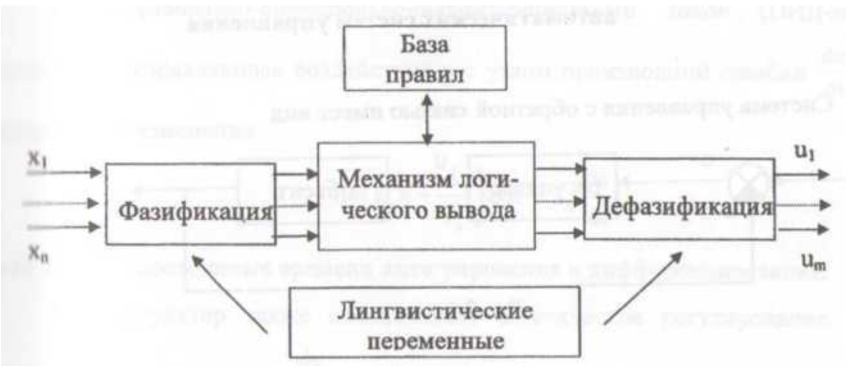


Рис. 2

На вход поступают отклонения и скорости изменения управляемых координат $X_1,x_2,...,x_n$. Затем происходит преобразование их к нечеткому виду (фазификация) в форме логических переменных. На основе сформулированных правил и логического вывода происходит определение качественных значений выходных переменных $u_1,u_2,...u_m$в виде функций принадлежности. На последнем этапепроисходит *дефазификация,* т.е. вычисление четких значений выходов $u_1,...u_m$, используемых для управления объектом.

Процедура дефазификации состоит в вычислении положения «центра тяжести», но может осуществляться и другими способами. Эта процедура упрощается при использовании *синглтонов* (одноточечных нечетких множеств).

Применение нечеткого управления перспективно в случае: большого числа входных параметров, большого числа управляющих воздействий, в случае сильных возмущений, наличия нелинейности и нестационарностей, процессов не поддающихся математическому описанию, возможности использования технологии типа «know-how», при обработке лингвистической информации, например, в экспертных системах.

1.14. Применение нечетких множеств для улучшения качестваавтоматических систем управления

В теории управления используется несколько законов управления. Пропорциональный закон

Система управления с обратной связью имеет вид

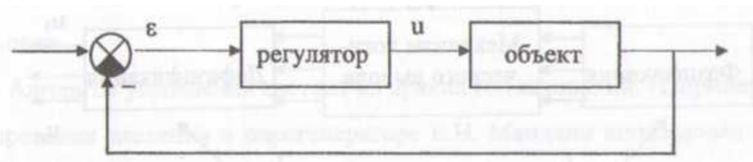


Рис.3

(П-закон) - означает, что управляющее воздействие и линейно и зависит от отклонения в

$$U = K_p \varepsilon,$$

где K_p - коэффициент передачи регулятора.

Интегральный закон означает, что управляющее воздействие определяется суммарной накопившейся ошибкой за определенное время.

$$u = \frac{1}{T}\int_0^1 \varepsilon dt \text{или } \frac{dy}{dt} = \varepsilon / T$$

где T - постоянная времени интегрирования.

Ошибка е системы определяет скорость изменения u.

Регулятор, построенный на интегральном законе регулирования является астатическим, что означает, что если нет ошибки е, то нет и управляющего воз

действия u, т.е. воздействие и изменяется до тех пор пока ошибка не станет равной нулю.

Пропорционально-интегральный закон (ПИ-закон) объединяет преимущества пропорционального и интегрального регулирования и по существу является пропорциональным законом с интегральной коррекцией

$$u = \kappa_p(\varepsilon + \frac{1}{T}\int_0^t \varepsilon dt,$$

Он также обеспечивает астатическое регулирование.

Пропорционально-интегральный-дифференциальный закон(ПИД-закон) формирует управляющее воздействие uс узлом производной ошибки$\frac{d\varepsilon}{dt}$ т.е. скорости ее изменения

$$. \quad u = \kappa_p \varepsilon + \frac{1}{T_u}\int_0^t \varepsilon dt + T_д \frac{d\varepsilon}{dt},$$

где T_uи $T_д$- постоянные времени интегрирования и дифференцирования.

ПИД-регулятор также обеспечивает астатическое регулирование. Скорость изменения ошибки $\frac{d\varepsilon}{dt}$вводится для повышения качества процесса регулирования.

Этот регулятор часто используется в промышленных системах автоматики.

ПИД-регулятор имеет особенность. При резких изменениях режима работы объекта или при переходе на другой режим качество переходного процесса в регуляторе может быть неудовлетворительным.

Можно использовать нечеткие идеи для формирования корректирующих поправок к коэффициентам k|, k_2, k_3регулятора.

Для линейного объекта n-го порядка передаточная функция регулятора имеет вид

$$Wp(S) = k_1 + \frac{k_2}{S} + k_3 S$$

Параметры $к_1$, $к_2$, $к_3$ - характеризуют вес пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющей. Рассмотрим структурную схему

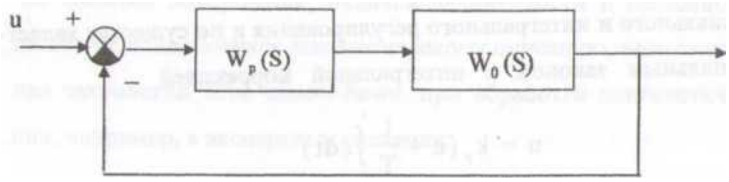


Рис.4

Соответствующая нечеткая схема может быть представлена в виде

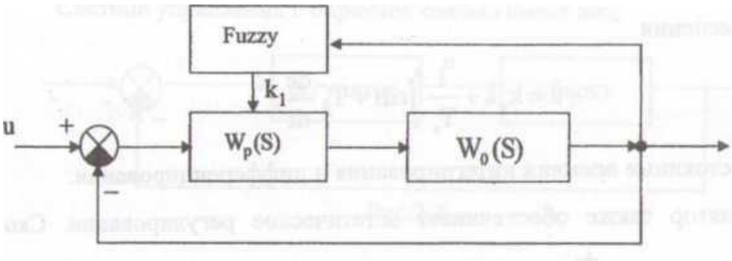


Рис.5

Где $W_0(S)$ и $W_p(S)$ передаточные функции объекта и регулятора соответственно. Параметры к1, к2, к3 должны выбираться исходя из заданных показателей качества регулирования (время процесса, колебательность, перерегулирование).

Рассмотрим особенности управления с помощью ПИД-регулятора. Рассчитанная и заданная кривая процесса в оптимальном режиме имеет вид (рис. 2.6). Реакция - единичное ступенчатое воздействие.

Входной величиной является сигнал ошибки

$\varepsilon = X - X_{вх}$

и ее производные $\dot{\varepsilon}$

Выходом является управляющее воздействие u.

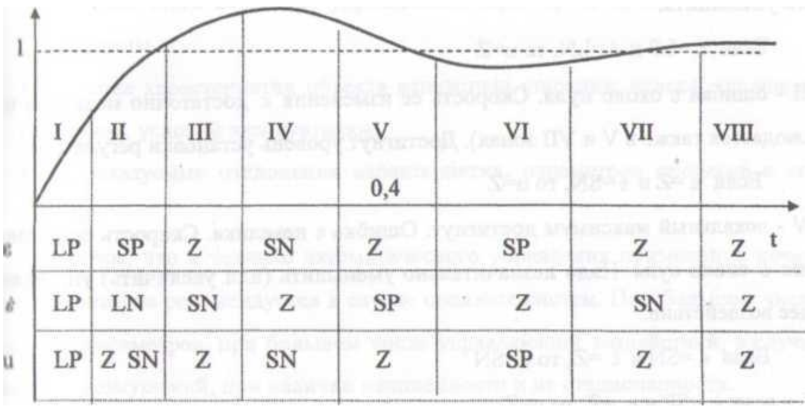


Рис.6

Введем лингвистические представления в соответствии с нечетким выводом «если...,то...».
ε - сигнал ошибки; $\dot{\varepsilon}$ - первая производная ошибки; u- управляющее воздействие.
Введем лингвистические переменные:
LP - largepositive(большое положительное);
SP- smallpositive(малое положительное);
Z - zero(около нуля) иногда используют символ Z0 (приблизительно нуль);
SN- smallnegative(малое отрицательное);
LN- largenegative(большое отрицательное).
Иногда используются обозначения
PVB- positiveverybig(положительное очень большое).

Участки графика переходного процесса могут быть разбиты на зоны и интерпретированы следующим образом:
I - ошибка εи скорость изменения ее $\dot{\varepsilon}$ велики. Надо резко увеличить управляющее воздействие. Это записывается следующим образом:

Если ε=LPи$\dot{\varepsilon}$=LP, то u=LP

II - ошибка велика, но убывает. Следует поддерживать управление или слегка его уменьшить.

Если ε=LPи $\dot{\varepsilon}$=LN, то u=Z

III - ошибка εоколо нуля. Скорость ее изменения $\dot{\varepsilon}$достаточно мала (это наблюдается также в V и VII зонах). Достигнут уровень установки регулятора.

Если ε=Zи $\dot{\varepsilon}$=SN, то u=Z

IV - локальный максимум достигнут. Ошибка ε невелика. Скорость ее изменения $\dot{\varepsilon}$ около нуля. Надо незначительно уменьшить (или увеличить) управляющее воздействие.

Если ε=SNи $\dot{\varepsilon}$=Z, то u=SN

V - если $\dot{\varepsilon}$=SPи ε=Z, то u=Z

VI - локальный минимум достигнут. Ошибка е невелика. Скорость $\dot{\varepsilon}$ около нуля. Следует незначительно уменьшить (увеличить) u.

Если ε=SPи $\dot{\varepsilon}$=Z, то u=SP

VII - если $\dot{\varepsilon}$=SNи ε =Z,то u=Z

VIII - достигнуто установившееся состояние. Ошибка ε и скорость ее изменения около нуля, следует сохранить управление u.

Если ε=Zи $\dot{\varepsilon}$=Z, то u=Z

Это нечеткий вариант реализации ПИД-алгоритма по правилу «если..., то...»

Более подробно применение коррекции параметров с помощью нечеткого управления в ПИД-регуляторе изложено в работах [36].

1.15. Источники неопределенностей в системах управления

Отметим некоторые источники неопределенностей в системах управления. Неопределенность свойственна системам управления в следующих случаях:

1. Неточный и неполный учет характера внешних воздействий на объект и систему. Неопределенность помех и флуктуаций.
2. Нелинейность, распределенность, неадекватность описания процесса. Вследствие этого возникает упрощенный характер представления поведения системы.
3. Изменение характеристик объекта вследствие старения, износа, теплового состояния, условий эксплуатации.
4. Непредсказуемые отклонения характеристик, параметров процесса и его модели.

Отметим, что в технике автоматического управления применение нечетких регуляторов рекомендуется в случае сложных систем. При большом числе входных параметров, при большом числе управляющих воздействий, в случае сильных возмущений, при наличии нелинейности и не стационарности.

Рекомендуемые области использования нечеткого управления:

1. Для сложных трудно формулируемых процессов, когда не существует простой математической модели.
2. Для нелинейных процессов, описываемых уравнениями высокого порядка.
3. При обработке лингвистически сформулированной информации (например, при обработке экспертных знаний).

Использование нечеткого управления не рекомендуется:

1. Если существует адекватная математическая модель.
2. Если результат может быть достигнут с помощью существующей теории управления.
3. Проблема принципиально не имеет решения.

1.16. Операции в нечеткой логике

Нечеткая логика представляет собой алгебраическую систему, в которой множество значений истинности составляет замкнутый интервал [0,1], а логические операторы *«или», «и», «не»* определяются формулами

$$A \vee B = \max(A, B)$$

$$A \wedge B = \min(A, B)$$

$$\overline{A} = 1 - A$$

Нечеткая логика связана с классическим логическим исчислением. В нечеткой логике соблюдаются все законы, справедливые для обычных четких множеств, кроме двух

$$A\bar{A} \neq 0$$

$A + \overline{A} \neq 1$, исключая A=0 или A=1

(*в четкой бинарной логике это*$A\bar{A} \neq 0$; $A + \overline{A} \neq 1$).

Нечеткие логические функции не поддаются упрощению так легко, как булевы функции, так как не все свойства соблюдаются. По этой же причине функции нечетких переменных нельзя представить в дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной формах.

Иногда упрощения можно осуществить, используя все основные свойства, за исключением$A \cdot \bar{A} \neq 0$: $A + \overline{A} \neq 1$.

Например: f(A,B) = A + (A B) = A (1+B) = A

f(A,B) = A (A+B) = A

Это свойство поглощения и его двойственная форма.

Функции, построенные с помощью таких переменных являются функциями нечетких переменных, если они зависят только от нечетких переменных, и кроме того необходимо, чтобы

$$0 \leq f \leq 1$$

Действительно, каждая из логических операций для переменных A, B,... ∈[0, 1] не может выйти за пределы 0 и 1.

Один из способов построения обобщенных операторов пересечения, объединения и дополнения, позволяющих учесть смысловые оттенки связок “ИЛИ”, ”И”, ”НЕ”, является построение треугольных норм и конорм.

В отличие от булевой алгебры, законы дополнительности, как уже указывалось, в нечеткой логике не соблюдаются так как встречающиеся одновременноA и A могут быть содержательными

$$A \cdot \overline{A} = A \wedge \overline{A} \neq 0;$$

$$A \vee \bar{A} = A + \bar{A} \neq I.$$

Для операции сложения и умножения отсутствуют обратные элементы.

Для объединения нечетких чисел A, B и C дистрибутивный закон выполняется, а для пересечения справедливы только включения:

$$A \cdot (B \cdot C) \subset (A \cdot B \wedge (A \cdot C))$$

$$(A \wedge B) \cdot C \subset (A \cdot C) \wedge (B \cdot C).$$

Операции в нечеткой логике для двух переменных A и B можно представить в виде табл.2.1.

Таблица 2.1

Дизъюнкция	A ∨B	max (a, b)
Конъюнкция	A ∧B	min (a, b)
Противоречие	$\bar{A}$	min (a, 1-a)
Тавтология	A	max (a, 1 -a)
Импликация	A → B	max (1-a, b)
Операция Шеффера	A|B	max (1-a, 1-b)
Стрелка Пирса	A ↓B	mix (1-a, 1-b)
Исключающее «ИЛИ»	A ex B	max [min (1-a, b), min (a, 1-b)]
Эквивалентность	A ↔ B	min [max (1-a, b), max (a, 1-b)]

1.17. Нормы нечеткого множества

Норма - это двухместная действительная функция T:[0,1] удовлетворяющая свойствам ограниченности, монотонности, коммутативности, ассоциативности.

Введение нормы позволило обрабатывать на ЭВМ нечеткую и неопределенную информацию.

Л. Заде в 1965 году предложил операции объединения, пересечения и дополнения в виде:

Объединения $\max\{\mu_A(X);\mu_B(x)\}$;

Пересечения $\min\{\mu_A(X);\mu_B(x)\}$;

Дополнение (отрицание) $1-\mu_A(X)$

Норма - это оператор. Ее можно определить различными путями.

В теории нечетких множеств были разработаны обобщенные операторы объединения, пересечения и дополнения, позволяющие учесть смысловые оттенки связок «ИЛИ», «И», «НЕ». Были предложены треугольные нормы Т- норма, Т-конорма, S-норма.

Рассмотрим различные варианты объединения множеств, применяемые в теории нечетких множеств. Для объединения множеств можно использовать три различных оператора.

Сумма множеств:

$$A \cup B = \max\{A, B\}.$$

Алгебраическая сумма:

$$A + B = A + B - AB$$

или

$$A + B = \text{м}_A(X) + \text{м}_B(X) - \text{м}_A(X) \cdot \text{м}_B(X).$$

Ограниченная сумма:

$$A \oplus B = \min[1, A + B]$$

или

$$A \oplus B = \min[\text{м}_A(X) + \text{м}_B(X)] \wedge 1.$$

В литературе встречается термин «драстическая» сумма. Слово «драстический» переводится с английского, как решительный, крутой, радикальный.

Сумма обозначается индексом ∇. В отечественных источниках эта операция часто называется контрастной.

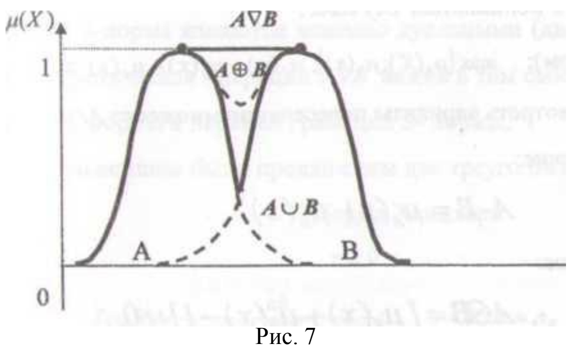


Рис. 7

Контрастная (драстическая) сумма определяется:

$$A \nabla B = \begin{cases} \mu_B(x), \ \text{если } \mu_A(x) = 0 \\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x) = 0 \\ 1, \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Изображена на рисунке прямой линией, параллельной оси абсцисс, проходящей на уровне единицы.

Нечеткое расширение операции «ИЛИ» называется Т-конормой или S- нормой. Она удовлетворяет свойствам:

A + 1=1; A + 0 = A ;

A + B = B + A ;

A + (B + C) = (A + B) + C ;

A≤B□A+C ≤B+C.

Таким образом, S-норма - это логическая сумма, определенная с помощью операции “*max*”. Минимальная S-норма - это логическая сумма, а максимальная S-норма - это контрастная (*драстическая*) сумма.

S-норму можно записать в виде:

$$A_1 \nabla A_2 = \begin{cases} A_2, & \text{при } A_1 = 0 \\ A_1, & \text{при } A_2 = 0 \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

ПримерыS-норм (Т-конорм):$\max\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}$; $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Аналогично, можно рассмотреть варианты пересечения множеств$A \cap B$ *Алгебраическое произведение:*

$$A \cdot B = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Ограниченное произведение:

$$A \ominus B = [\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1] \vee 0.$$

Контрастное (драстическое) произведение:

$$A \Delta B = \begin{cases} \mu_B(x), & \text{если } \mu_A(x) = 1 \\ \mu_A(x), & \text{если } \mu_B(x) = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Графически произведения множеств могут быть представлены в виде

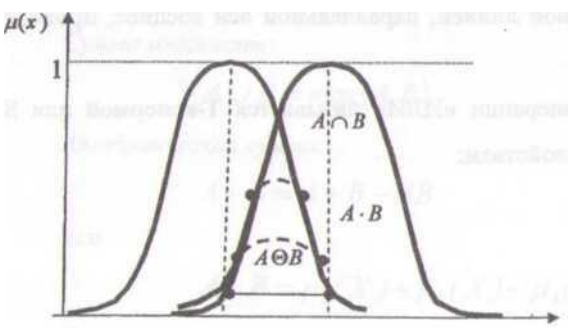


Рис. 8

Операция $\min\{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)\}$ – типичный пример Т-нормы. Это нечеткое расширение операции «и», удовлетворяющее свойствам:

$$A \wedge 1 = A \cdot 1 = A;$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

$$A \le B \to AC \le BC.$$

Т-норма и S-норма являются взаимно дуальными (двойственными). Контрастен илидрастическая операция $A \nabla B$важна в томсмысле, что является нижней границей T-нормы и верхней границей S-нормы.

В дальнейшем были предложены две треугольные нормы.

Норма Хамахера

$$\gamma \ge 0$$

$$T(a, b) = \frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a + b - ab)}; \quad a = \mu_A; b = \mu_B$$

$$(0 \le \gamma \le \infty)$$

Двойственная ей форма S-норма

$$S(a, b) = \frac{(a + b - ab) - (1-\gamma)a \cdot b}{\gamma + (1-\gamma)(1 - ab)}$$

Норма Сугено

$$max[0, (\lambda + 1)(a + Ь - 1) - \lambda aЬ], \lambda \ge -1.$$

Эти нормы оказались удобными для обычной компьютерной реализации и позволили автоматизировать обработку нечеткой информации [19].

Для номера Хамахера

при $\gamma = 1$, имеем

$$T(a, b) = ab;$$
$$S(a, b) = a + b - ab;$$

при $\gamma = 2$, имеем

$$T(a, b) = \frac{ab}{1 - \overline{\overline{ab}}};$$
$$S(a, b) = \frac{a + b}{1 = ab}.$$

Нормы Т-норма и Т-конорма обладают свойством двойственности. Если T(x,y), то дополнение выражается так

$$\bar{T}(x, y) = 1 - T(1 - x), (1 - y).$$

Для норм справедливы и соотношения де Моргана:

$$\bar{x} \perp \bar{y} = \overline{xTy},$$

где

$\bar{x} \perp \bar{y}$- Т-норма,

xTy- Т-конорма(S- норма).

1.18. Операции над нечеткими числами

Нечеткие числа представляют собой нечеткие подмножества числовой оси. Над нечеткими числами можно выполнять арифметические операции. Рассмотрим два типа нечетких чисел: треугольные и трапецеидальные.

Треугольные нечеткие числа

Треугольное нечеткое число (ТНЧ) определяется тройкой чисел (a_1,a_2,a_3) и графически может быть представлено следующим образом (рис. 2.9).

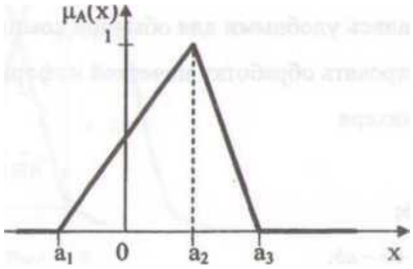


Рис.9

Функция принадлежности имеет вид

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & x > a_3 \end{cases}$$

1.19. Представление нечетких чисел с помощью -уровней

Величину A_α, можно выразить через -уровни

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1;\ -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] \qquad \forall\alpha \in [0,1]$$

Коэффициенты α представляют собой срезы функции принадлежности $\mu(x)$ прямыми, параллельными оси абсцисс ОХ. Образуются четкие подмножества, которые называются -уровневыми подмножествами или α-уровнями. Происходит декомпозиция исходного множества на четкие подмножества, образуемые -уровнями.

Операции над нечёткими величинами

Сложение двух нечётких треугольных чисел

$A(+)B=[a_1,a2,a_3](+)[b_1,b2,b3]=[a_1+ b_1, a_2+ b_2, a_3+ b_3]$.

Вычитание двух нечётких треугольных чисел

$A(-)B=[a_1,a2,a_3](-)[b_1,b2,b3]=[a_1- b_3, a_2- b_2, a_3- b_1]$.

Операции сложения и вычитания можно осуществлять с помощью α −уровней.

Сложение

$$[a_1^\alpha, b_1^\alpha](+)[a_3^\alpha, b_3^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_3^\alpha + b_3^\alpha].$$

Вычитание

$$[a_1^\alpha, b_1^\alpha](-)[a_3^\alpha, b_3^\alpha] = [a_1^\alpha - b_3^\alpha, a_3^\alpha - b_1^\alpha].$$

Пример 1. Рассмотрим сложение двух треугольных нечётких чисел

A=[-3,-1,2] и B=[-1,0,5].

Треугольное число А графически изображается в виде (рис.2.10).

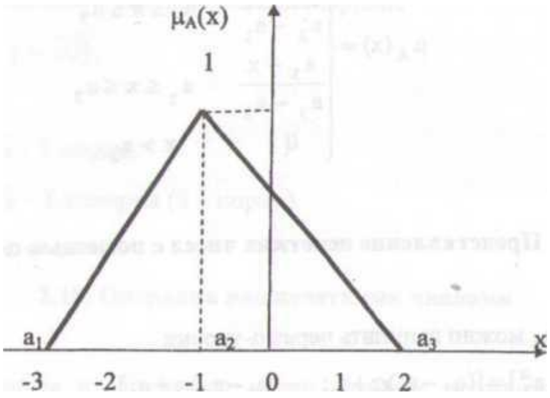


Рис.10

Функция принадлежности числа А

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & -3 \le x \le -1 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & -1 \le x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

При образовании α-уровней нечёткое число А представляется в виде

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1; -(a_3 - a_2)\alpha + a3] = [2\alpha - 3, -3\alpha + 2].$$

Правильность вычисления можно проверить, полагая α=0 и α=1:

при α=0 $\quad A_0^\alpha = [\, a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [-3{,}2];$

при α=1 $\quad A_1^\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [-1, -1].$

Число В=[-1,0,5] графически изображается в виде

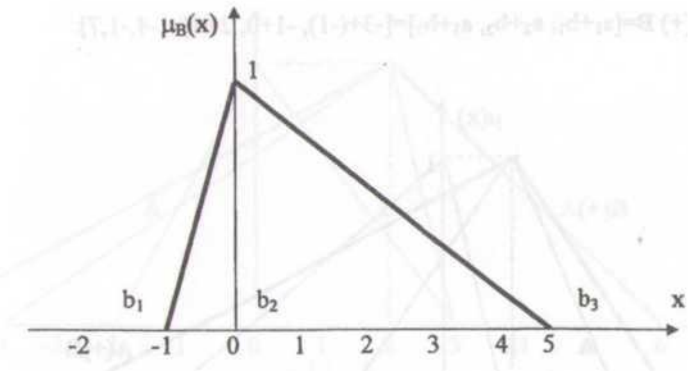


Рис.11

Функция принадлежности числа В

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \dfrac{x - b_1}{b_2 - b_1} & -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{b_3 - x}{b_3 - b_2} & 0 \le x \le 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$$

При образовании а-уровней нечёткое число В представляется в виде

$$B_\alpha = [b_1^\alpha, b_3^\alpha] = [(b_2 - b_1)\alpha + b_1; -(b_3 - b_2)\alpha + b_3] = [\alpha - 1, -5\alpha + 5].$$

Правильность вычислений проверим, полагая α =0 и $\alpha = 1$:

при α=0 $\quad B_0^\alpha = [b_1^\alpha, b_3^\alpha] = [-1{,}5]$;

при α=1 $\quad B_1^\alpha = [b_1^\alpha, b_3^\alpha] = [0{,}0] = 0$.

Сложение чисел A и B по -уровням

$$A_\alpha(+)B_\alpha = [a_1 + b_1;\ a_3 + b_3] = [2\alpha - 3 + \alpha - 1, -3\alpha + 2 + (-5\alpha + 5)] = [3\alpha - 4, -8\alpha + 7]$$

Проверим, полагая α=0, α=1:

при α=0 $A_0(+)B_0$=[-4,7];

при α=1 $A_1(+)B_1$=[-1,-1]=-1.

Сложение обычным способом сложения треугольных чисел (рис.2.9) даёт

A(+) B=[a_1+b_1,a_2+b_2, a_3+b_3]=[-3+(-1), -1+0,2+5]=[-4,-1,7].

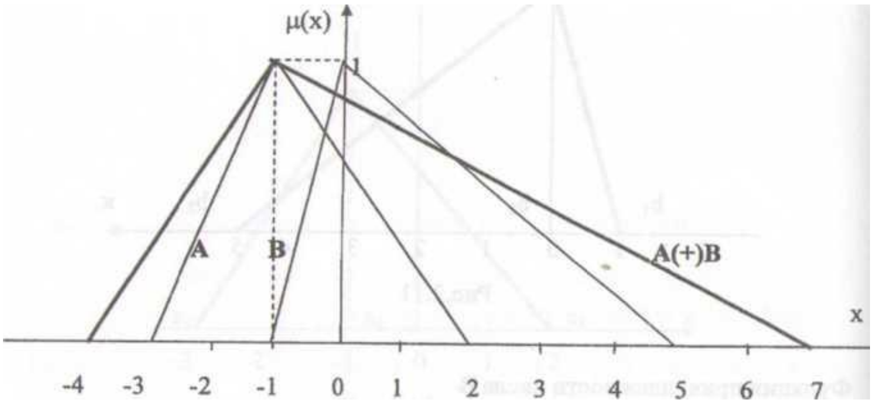


Рис.12

Пример 2. Рассмотрим сложение двух треугольных нечетких чисел

A = [-4,2,3] и B = [-2,0,3].

Сложение без образования а-уровней

A (+) B = [a_1+b_1,a_2+b_2, a_3+b_3] = [-6,2,6]. Графически это выглядит следующим образом (рис.2.13)

Сложение с помощью -уровней

Образование α-уровня для числа A

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1; -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] = [6\alpha - 4, -\alpha + 3].$$

Образование α-уровня для числа B

$$B_\alpha = [b_1^\alpha, b_3^\alpha] = [(b_2 - b_1)\alpha + b_1; -(b_3 - b_2)\alpha + b_3] = [2\alpha - 2, -3\alpha + 3].$$

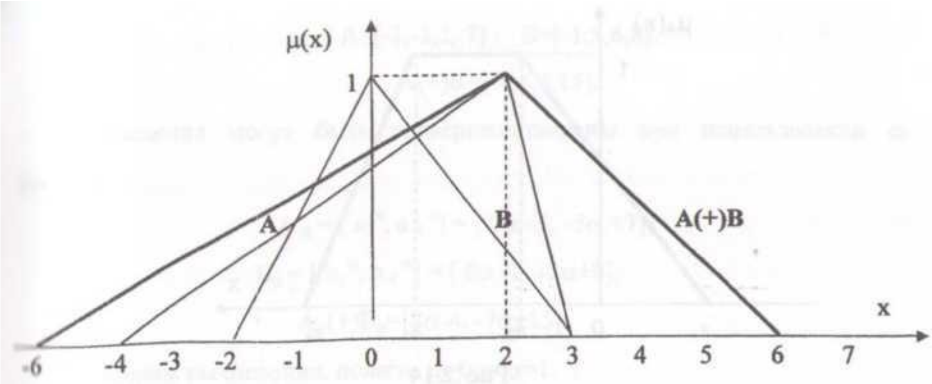


Рис.13

Сумма

$$A_\alpha(+)B_\alpha = [a_1 + b_1; a_3 + b_3] = [(6\alpha - 4) + (2\alpha - 2), (-\alpha + 3) + (-3\alpha + 3)] = [8\alpha - 6, -4\alpha + 6]$$

Проверим, полагая α=0, α=1:

при $\alpha = 0$ Ao(+)Bo=[-6,6];

при α=1 $A_1(+)B_1$=[2,2]=2.

Результат соответствует сумме при сложении без -уровней.

Пример3. Рассмотрим пример вычитания двух треугольных нечетких чисел A=[-4,2,3] и B=[-2,0,3], используя а-уровни:

$$A_\alpha(-)B_\alpha = [a_1^\alpha + b_3^\alpha; a_3^\alpha + b_1^\alpha] = [6\alpha - 4 - (-3\alpha + 3), (-\alpha + 3) + (2\alpha - 2)] = [9\alpha - 7, -3\alpha + 5]$$

1.20. Трапецеидальные нечёткие числа

Свойства трапецеидальных чисел подобны свойствам треугольных чисел. При уровне α = 1 вместо точки имеет место горизонтальный участок a_2 a_3 . Такие числа с плоской вершиной называют *трапецеидальными.* Они определяются четверкой чисел [a_1 ,a_2 ,a_3 ,a_4].

Графически трапецеидальное число изображается в виде

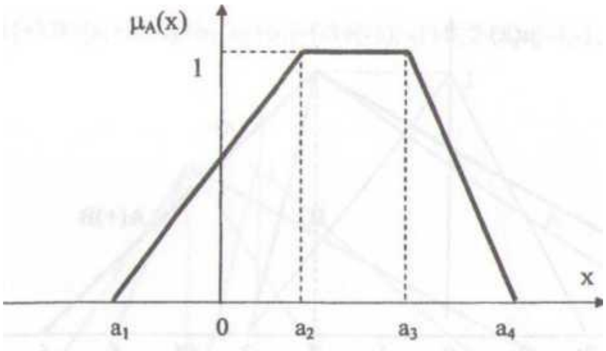


Рис .14

Используя -уровни, запишем

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1; -(a_4 - a_3)\alpha + a_4].$$

Функция принадлежности трапецеидального числа A имеет вид

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & x > a_4 \end{cases}$$

Операции над трапецеидальными числами аналогичны операциям над треугольными числами. Треугольные числа представляют собой частный случай трапецеидальных чисел, когда $a_2 = a_3$. Сложение

$A(+)B = [a_1, a2, a_3, a4]$ (+) $[b_1, b2, b_3, b_4] = [a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ a4 + b_4]$. Вычитание

$A(-)B = [a_1, a2, a_3, a4]$ (-) $[b_1, b2, b_3, b_4] = [a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3,\ a4 - b_4]$.

Пример 4. Рассмотрим сложение двух трапецеидальных чисел А и В:

$$A=[-3,-l,2,\ 7];\ B=[-1,5,6,8].$$
$$A(+)B=[-4,4,8,15].$$

Вычисления могут быть усовершенствованы при использовании а-уровней

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_4^\alpha] = [\,2\alpha\ - 3, -5\alpha + 7];$$
$$B_\alpha = [b_1^\alpha, b_4^\alpha\,] = [\,6\alpha\ - 1, -2\alpha + 8];$$
$$A_\alpha(+)B_\alpha = [8\alpha - 4, -7\alpha + 15].$$

Проверим вычисления, полагая α=0и α=1:

при α=0 $\quad A_0(+)B_0=[-4,\ 15]$;

при α=1 $\quad A_1(+)B_1=[4,\ 8]$.

Результаты показаны на рис. 2.15

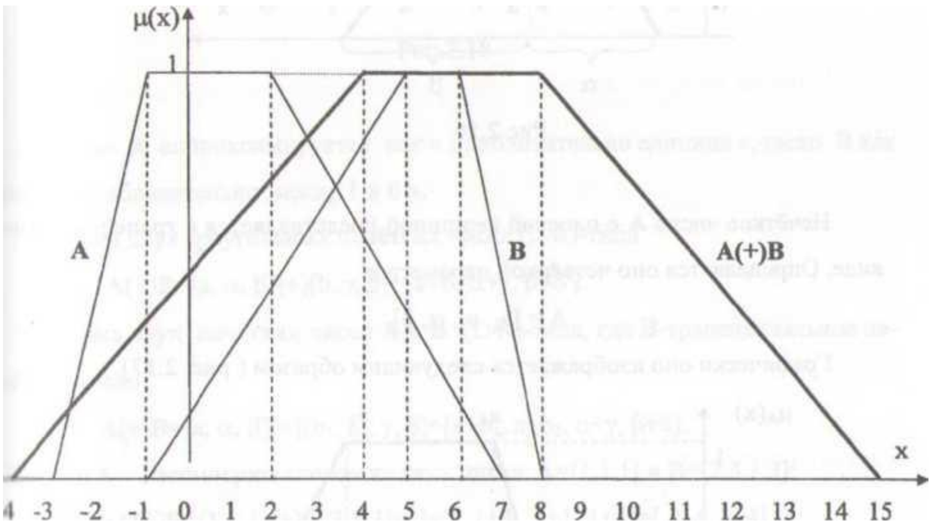


Рис.15

1.21. Изображение нечётких чисел в (Ь-К)-форме

Изобразим нечёткое числоА в виде трёх параметров A=[a, α, β].

Первое число выражает положение «центра», два другие – расстояние влево (left) и вправо (right) от центра.

Графически число выражается в треугольном виде (рис.2.16).

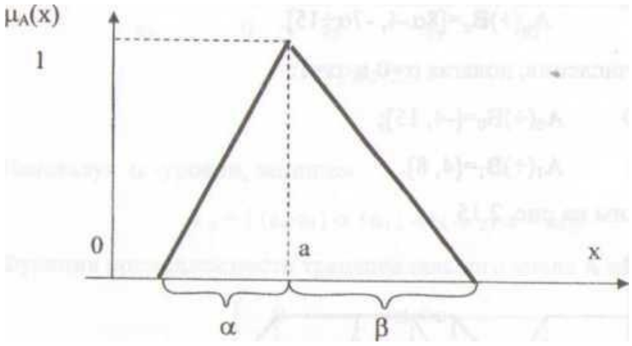


Рис.16

Нечёткое числоА с плоской вершиной представляется в трапецеидальном виде. Определяется оно четвёркой параметров

$$A = [a_1,a_2, \alpha, \beta].$$

Графически оно изображается следующим образом (рис. 2.17).

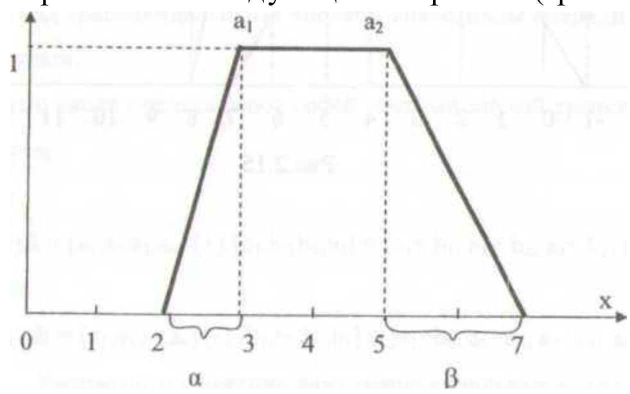


Рис.17

В данном случае числоАравно A = [3, 5, 1, 2], где a_1,a_2 - границы интервала «плосковершинности».

Представим графически два числа A и B в (L-R)-форме A=[1,1,1], B=[2,3,1,3] (рис. 2.18).

$\mu(x)$

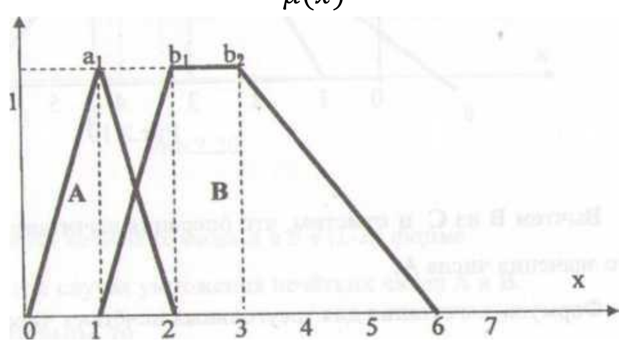


Рис.18

Число A аппроксимируется как « приблизительно единица »,число B как число «приблизительно между 1 и 6 ».

Сумма двух треугольных нечётких чисел (L-R)-типа

$$A(+)B = [a, \alpha, \beta](+)[b, \gamma, \delta] = [a + b, \alpha + \gamma, \beta + \delta].$$

Сумма двух нечётких чисел A и B (L-R)-типа, где B-трапецеидальное нечёткое число

$$A(+)B = [a, \alpha, \beta](+)[b_1, b_2, \gamma, \delta] = [a + b_1, a + b_2\alpha + \gamma, \beta + \delta].$$

Пример 5. Рассмотрим сложение двух чисел A=[1,1,1] и B=[2,3,1,3]:

C=A(+)B=[1,1,1](+)[2,3,1,3]=[1 +2, 1+3, 1+1,1+3]=[3,4,2,4].

Графически результат сложения чисел A и B представляется в виде (рис.2.19).

Отметим, что использование (ЬВ)-формы приводит к результатам, нечеткость которых приблизительно равна сумме нечеткостей слагаемых.

Операция вычитания нечётких чисел не обратна операции сложения. Действительно, сложение двух чисел A и B, где A=[1,1,1];B=[2,3,1],даёт суммуC=[3,4,2,4].

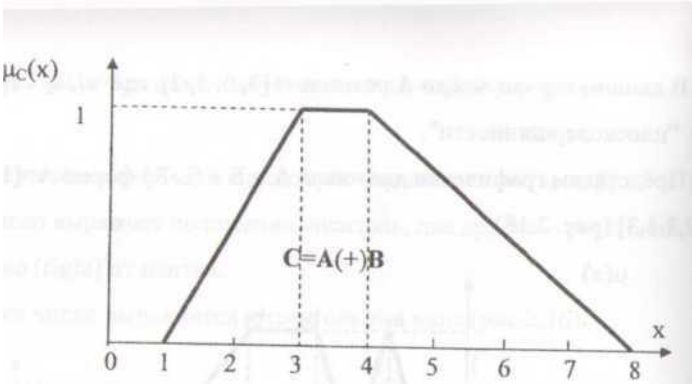


Рис.19

Вычтем B из C и отметим, что операция вычитания не даёт первоначального значения числа A.

Формула вычитания для треугольных нечётких чисел имеет вид

$$A(-)B = [a - \text{Ь}, \alpha + \delta;\ \beta + \gamma].$$

Формула вычитания для трапецеидальных нечётких чисел имеет вид

$$C = [c\ 1, c_2, \alpha, \beta] \text{и } B = [b_1, b_2, \gamma, \delta]$$

$$A' = C(-)B = [c_1 - b_1, c_2 - b_2, \alpha + \delta;\ \beta + \gamma].$$

Подставляя конкретные значения, получим

$$C(-)B = [3 - 2, 4 - 3, 2 + 1;\ 4 + 3] = [1, 1, 3, 7].$$

Получилось треугольное число, не равное первоначальному значению числа A A'=[1,3,7]. Пример подтверждает, что для операции сложения отсутствуют обратные элементы (рис.2.20).

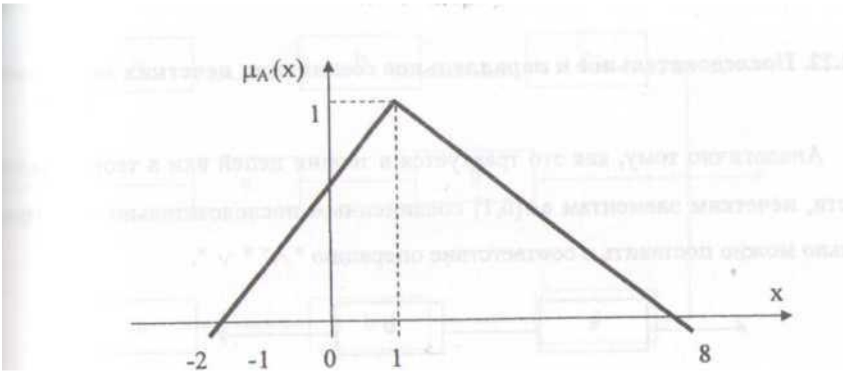


Рис.20

Умножение нечётких чисел A и B в(L-R) форме

Рассмотрим три случая умножения нечётких чисел A и B. Если A и B положительны, то

при a >0, b>0

$$A(\cdot)B = [a, \alpha, \beta]_{LR}(\cdot)[b, \gamma, \delta]_{LR} \cong [ab, a\gamma + b\alpha, a\delta + b\beta]_{LR};$$

приа <0, b >0

$$A(\cdot)B = [a, \alpha, \beta]_{LR}(\cdot)[b, \gamma, \delta]_{LR} \cong [ab, b\alpha - a\delta, b\beta - a\gamma]_{LR};$$

приа <0, b <0

$$A(\cdot)B = [a, \alpha, \beta]_{LR}(\cdot)[b, \gamma, \delta]_{LR} \cong [ab, -b\beta - a\delta, -b\alpha - a\gamma]_{LR};$$

Если B- четкое число (γ=δ=0), то

$$A(\cdot)B = [ab, b\alpha, b\beta].$$

Для иллюстрации перемножим два треугольных положительных числа

A=[4,2,1] и B=[3,1,2]:

$$A(\cdot)B = [aЬ;\ a\gamma + b\alpha;\ a\delta + b\beta]_{LR} = [4 \cdot 3;\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2;\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1] = [12;\ 10;\ 11].$$

Если B-четкое число (γ=δ=0), то

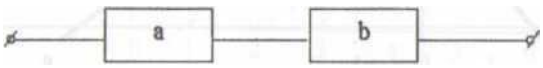
$$A(\cdot)B - [aЬ;\ b\alpha;\ b\beta] = [4;\ 2;\ 1](\cdot)[3] = [12;\ 6;\ 3].$$

Если A- четкое число (y=5=0), то

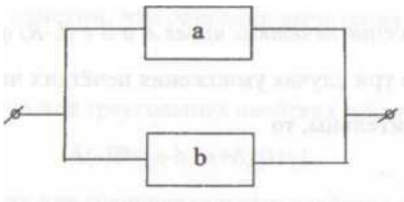
$$A(\cdot)B = [4](\cdot)[3;\ 1;\ 2] = [4 \cdot 3;\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0;\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0] = [12;\ 3;\ 8].$$

1.22. Последовательное и параллельное соединения нечетких элементов

Аналогично тому, как это трактуется в теории цепей или в теории надежности, нечетким элементам a∈[0,1] соединенным последовательно или параллельно можно поставить в соответствие операцию "∧" " ∨".



f(a, b) = a ∧Ь = a b



f(a, b)= a∨b = a + b

Например, если a=0,8 и Ь=0,5, то для схемы последовательно соединенных элементов

a∧b= ab= min(a, b) = 0,5

А для схемы параллельно соединенных элементов при тех же значениях a и b

avb= max(a, Ь) = 0,8

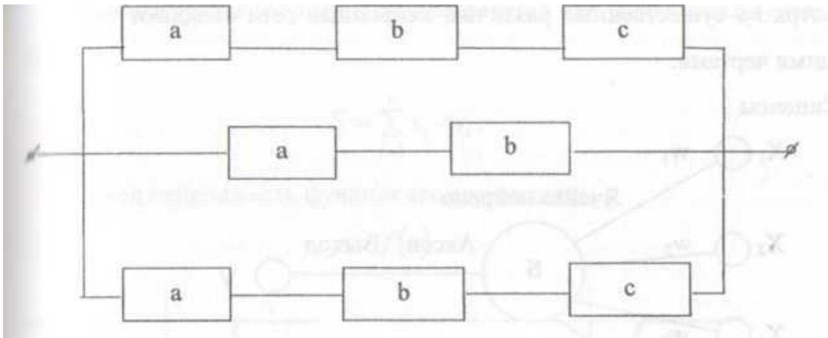
Таким образом, с последовательным соединением элементов связана операция " ∧", а с параллельным - операция " ∨".

Каждой функции нечетких элементов можно поставить в соответствиесеть нечетких элементов.

Например, для функции

$$F(a, b, c) = (a\,\bar{b}\,c) + (a\,b) + (\bar{a}\,b\,c)$$

можно поставить в соответствие сеть



1.23. Нейронная логика и нейронные сети

Изучение нервной деятельности живых организмов привело к разработке устройств, имитирующих процессы функционирования нейронов - аналогов нервных клеток (нейроподобных элементов) и их соединений.

Рассмотрим пороговое устройство с несколькими входами $x_1, x_2, ..., x_n$ и одним выходом *y*.

Устройство описывается соотношением

$$y = 1 \text{ при} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \eta; \;\; y = 0 \;\; \text{при} \;\; \sum_{i=1}^{n} w_i x_i < \eta$$

где w_i - вес i-го входа, η- порог.

Если пороговый элемент ηимеет единичный весw_i = 1, то он является функцией. В принципе на одном таком элементе можно реализовать любую логическую функцию.

Биологический нейрон состоит из трех основных элементов: тела клетки (сомы), аксона и дендритов.

Весьма упрощенная схема функционирования бионейрона положена в основу структуры искусственного нейрона (рис.2.21).

Несмотря на существенные различия, нейронные сети обладают некоторыми общими чертами.

Входы Синапсы

Рис.21. Схематическое изображение искусственного нейрона

Каждый синапс характеризуется величиной *синаптической* связи или ее *весом* w_i .Текущее состояние нейрона определяется взвешенной суммой его входов

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \qquad\qquad y = f(s).$$

Основу каждой нейронной сети составляют относительно простые, в большинстве случаев - однотипные, элементы (ячейки), имитирующие работу нейронов мозга. Далее под нейроном подразумевается искусственный нейрон. Каждый нейрон характеризуется своим текущим состоянием по аналогии с нервными клетками мозга, которые могут быть возбуждены или заторможены. Он обладает группой *синапсов - однонаправленных входных связей,* соединенных с выходами других нейронов, а также имеет *аксон - выходную связь данного нейрона,* с которой сигнал (возбуждения или торможения) поступает на синапсы следующих нейронов. Общий вид нейрона приведен на рис.2.21.

Каждый синапс, как уже отмечалось, характеризуется величиной синаптической связи или ее весом w_i, который по физическому смыслу эквивалентен электрической проводимости.

Текущее состояние нейрона определяется, как взвешенная сумма его входов:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i . w_i y = f(s). \qquad (2.23.1)$$

Выход нейрона есть функция его состояния:

$$y=f(s). \qquad (2.23.2)$$

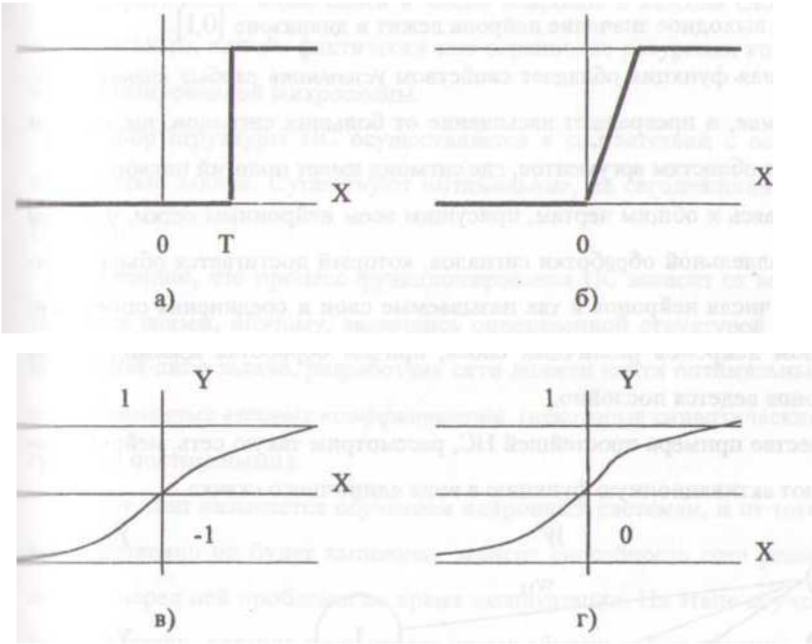


Рис.22

а)функция единичного скачка;

б) линейный порог (гистерезис);

в) сигмоид - гиперболический тангенс;

г) сигмоид - формула (2.23.3).

Нелинейная функция fназывается активационной и может иметь различный вид (рис.2.22). Одной из наиболее распространенных является нелинейная функция с насыщением, так называемая логистическая функция или сигмоид (т.е. функция S-образного вида):

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-\alpha x}}. \qquad (2.23.3)$$

При уменьшении α сигмоид становится более пологим, в пределе при $\alpha = 0$ вырождаясь в горизонтальную линию на уровне 0,5.

При увеличении α сигмоид приближается по внешнему виду к функции единичного скачка с порогом T в точке x = 0. Из выражения для сигмоида очевидно, что выходное значение нейрона лежит в диапазоне [0,1].

Сигмоидная функция обладает свойством *усиливать слабые сигналы лучше, чем большие,* и превращает насыщение от больших сигналов, так как они соответствуют областям аргументов, где сигмоид имеет пологий наклон.

Возвращаясь к общим чертам, присущим всем нейронным сетям, отметим принцип параллельной обработки сигналов, который достигается объединением большого числа нейронов в так называемые слои и соединения определенным образом нейронов различных слоев, причем обработка взаимодействия всех нейронов ведется послойно.

В качестве примера простейшей НС, рассмотрим такую сеть, нейроны которой имеют активационную функцию в виде единичного скачка.

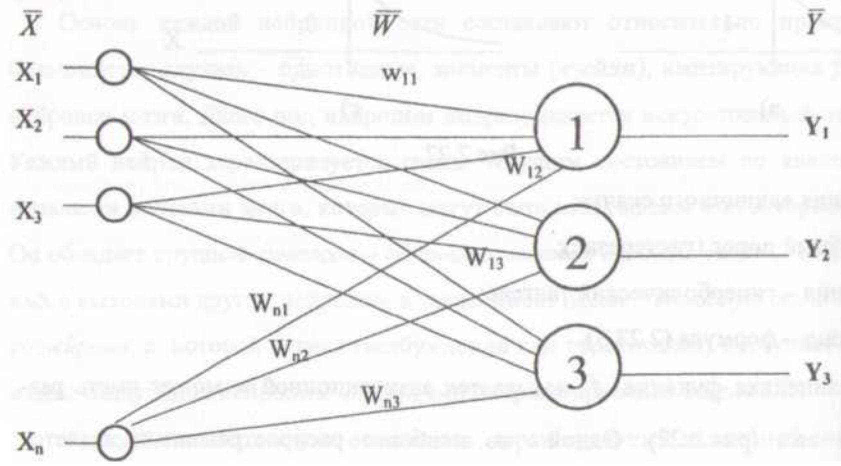


Рис.23. Однослойная нейронная сеть (перцепторн)

На n входов поступают сигналы, проходящие по синапсам на 3 нейрона, образующие единственный слой этой нейронной сети и выдающие три выходных сигнала:

$$y_i = f\left[\sum_{i=1}^{n} x_{i\cdot} \cdot w_{ij}\right], j = 1 \dots 3. \qquad (2.23.4)$$

Теоретически число слоев и число нейронов в каждом слое может быть произвольным, однако фактически оно ограничено ресурсами компьютера или специализированной микросхемы.

Выбор структуры НС осуществляется в соответствии сособенностям и сложностью задачи. Существуют оптимальные, на сегодняшний день, конфигурации.

Очевидно, что процесс функционирования НС зависит от величин синаптических связей, поэтому, задавшись определенной структурой НС, отвечающей какой-либо задаче, разработчик сети должен найти оптимальные значения *всех переменных весовых коэффициентов* (некоторые синаптические связи могут быть постоянными).

Этот этап называется *обучением*нейронных системам, и от того, насколько качественно он будет выполнен, зависит способность сети решать поставленные перед ней проблемы во время эксплуатации. На этапе обучения, кроме подбора весов, важную роль играет время обучения. Как правило, эти два параметра связаны обратной зависимостью и их приходится выбирать на основе компромисса.

Обучение нейронным системам может вестись с учителем или без него. В первом случае сети предъявляются значения как входных, так и желательных выходных сигналов, и она по некоторому внутреннему алгоритму подстраивает веса своих синаптических связей. Во втором случае выходы нейронной системы формируются самостоятельно, а веса измеряются по алгоритму, учитывающему только входные и производные от них сигналы.

Развивая дальше вопрос о возможной классификации НС, важно отметить, существование бинарных и аналоговой сетей. Первые из них оперируют с двоичными сигналами, и выход каждого нейрона может принимать только два значения: логический ноль («заторможенное» состояние) и логическая единица («возбужденное» состояние). К этому классу сетей относится и рассмотренный выше *перцептрон*, так как выходы его нейронов, формируемые функцией единичного скачка*, равны либо 0, либо 1.* В аналоговых сетях выходные значения нейронов способны принимать непрерывные значения, что могло бы иметь место после замены активационной функции нейронов перцептрона на сигмоид.

Алгоритмически ход времени в НС задается интегральным выполнением однотипных действий над нейронами. Далее будут рассматриваться только синхронные НС.

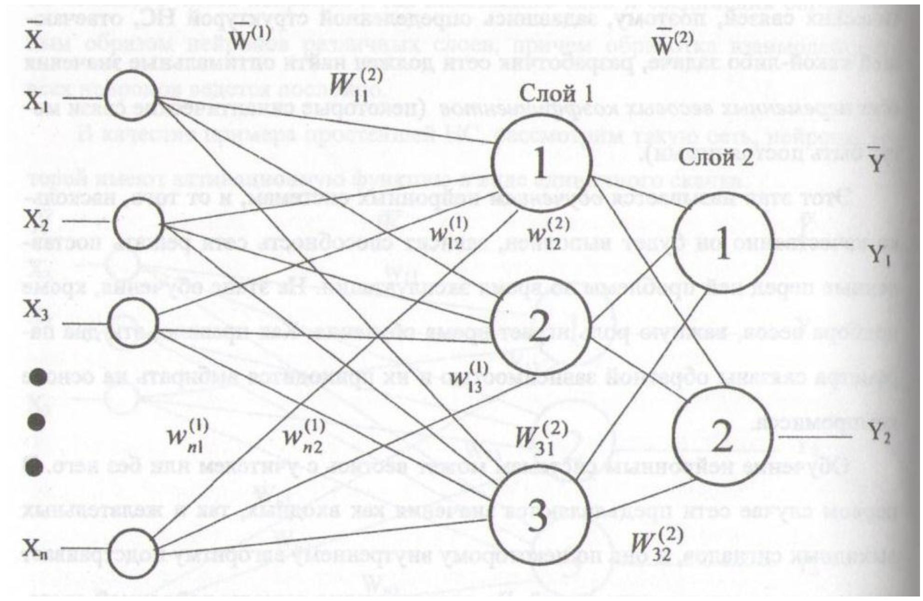


Рис. 24. Двухслойная нейронная сеть (двухслойный перцептрон)

Сети можно классифицировать по числу слоев. На рис.2.24 представлен двухслойный перцептрон, полученный из перцептрона с рис.2.23 путем добавления слоя, состоящего из двух нейронов. Здесь уместно отметить важную роль нелинейности активационной функции, так как, если бы она не обладала данными свойствами или не входила в алгоритм каждого нейрона.

Продолжая разговор о нелинейности, можно отметить, что она иногда вводится и в синаптические связи. Большинство известных на сегодняшний день нейронных сетей используют для нахождения взвешенной суммы входов нейрона формулу (2.23.1), однако в некоторых приложениях НС полезно ввести другую запись, например:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot w_i. \qquad (2.23.5)$$

или даже

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_{((i+1) mod\ n)} w_i \qquad (2.23.6)$$

Вопрос о том, чтобы разработчик НС четко понимал, для чего он это делает, какими ценными свойствами он тем самым дополнительно наделяет нейрон, и каких лишает. Введение такого рода нелинейности, вообще говоря, увеличивает вычислительную мощь сети, то есть позволяет из меньшего числа нейронов с «нелинейными» синапсами сконструировать НС, выполняющую работу обычной НС с большим числом стандартных нейронов и более сложной конфигурации.

Теперь рассмотрим один нюанс, преднамеренно опущенный ранее. Из рисунка функции единичного скачка видно, что пороговое значениеT, в общем случае, может принимать произвольное значение. Более того, оно должно принимать некое произвольное, неизвестное заранее значение, которое подбирается на стадии обучения вместе с весовыми коэффициентами. То же самое относится и к центральной точке сигмоидной зависимости, которая может двигаться вправо или влево по оси X, а также и ко всем другим активационным функциям. Это, однако, не отражено в формуле (2.23.1), которая должна была бы
выглядеть так:

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i - T \qquad (2.23.7)$$

Дело в том, что такое смещение обычно вводится путем добавления к слою нейронов еще одного входа, возбуждающего дополнительный синапс каждого из нейронов, значение которого всегда равняется 1. Присвоим этому входу номер 0.Тогда

$$\mathrm{S} = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot w_i \qquad (2.23.8)$$

где w_0 = -T, $\boldsymbol{x_0}$ = 1.

Очевидно, что различие формул (2.23.1) и (2.23.8) состоит лишь в способе нумерации входов.

Из всех активационных функций, изображенных на рис.2.22, одна выделяется особо. Это гиперболический тангенс, зависимость которого симметрична относительно оси $\boldsymbol{X}$ и лежит в диапазоне [—1,1].

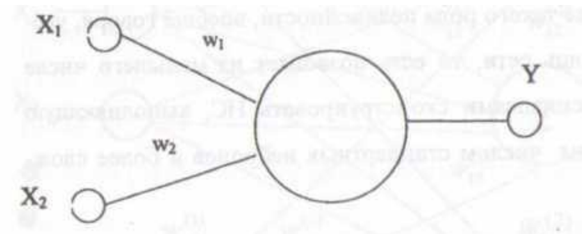


Рис.25. Однонейронный перцептрон

Забегая вперед, скажем, что выбор области возможных значений выходов нейронов во многом зависит от конкретного типа нейронной системы и является вопросом реализации, так как манипуляции с ней влияют на различные показатели эффективности сети, зачастую не изменяя общую логику ее работы

Пример, иллюстрирующий данный аспект, будет представлен после перехода от общего описания к конкретным типам НС.

Какие задачи может решать НС? Грубо говоря, работа всех сетей сводится к классификации (обобщению) входных сигналов, принадлежащих n-мерному гиперпространству, по некоторому числу классов. С математической точки зрения это происходит путем разбиения гиперпространства (запись для случая однослойного перцептрона)

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_{ik} = T_{k,} k = 1..m. \qquad (2.23.9)$$

Таблица 1

x_1 x_2	0	1
0	A	B
1	B	A

Каждая полученная область является областью определения отдельного класса.
Число таких классов для одной НС перцептронного типа не превышает 2^m, где m- число выходов сети. Однако не все из них могут быть разделимы данной НС.

Например, однослойный перцептрон, состоящий из одного нейрона с двумя входами, представленный на рис.2.25, не способен разделить плоскость (двумерное гиперпространство) на две полуплоскости так, чтобы осуществить классификацию входных сигналовAи B(см. табл. 1).

Уравнение сети для этого случая

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 = T \tag{2.23.10}$$

является уравнением прямой (одномерной гиперплоскости), которая ни при каких условиях не может разделить плоскость так, чтобы точки из множества входных сигналов, принадлежащие разным классам, оказались по разные стороны от прямой (см.рис.2.26).

Если присмотреться к табл. 1, можно заметить, что данное разбиение на классы реализует логическую функцию исключающего ИЛИ для входных сигналов. Невозможность реализации однослойным перцептроном этой функции получила название проблемы исключающего ИЛИ.

Функции, которые не реализуются однослойной сетью, называются линейно неразделимыми. Решение задач, подпадающих под это ограничение, заключается в применении 2-х и более слойных сетей или сетей с нелинейными синапсами, однако и тогда существует вероятность, что корректное разделение некоторых входных сигналов на классы невозможно.

Наконец, мы можем более подробно рассмотреть вопрос обучения НС, дли начала - на примере перцептрона с рис.2.23.

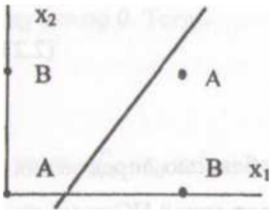


Рис.26. Визуальное представление работы НС (с рис.2.25)

Рассмотрим алгоритм обучения с учителем

1. Проанализировать элементы весовой матрицы (обычно небольшими случайными значениями).
2. Подать на входы один из входных векторов, которые сеть должна научиться различать, и вычислять ее выход.
3. Если выход правильный, перейти на шаг 4.

Иначе вычислить разницу между идеальным и полученным значениями выхода:

$$\delta = Y_1 - Y.$$

Модифицировать веса в соответствии с формулой:

$$\mathrm{w_{ij}(t\ +\ 1) = w_{ij}(t) + v \cdot \delta \cdot x_i},$$

где tи t +1 - номера соответственно текущей и следующей итераций; v- коэффициент скорости обучения, 0 <vJl; I - номер входа; j - номер нейрона н слое.

Очевидно, что если $Y_1 < Y$весовые коэффициенты будут увеличены и тем самым уменьшат ошибку. В противном случае они будут уменьшены, и Yтоже уменьшится, приближаясь к Y_1.

4. Цикл с шага 2, пока сеть не перестает ошибаться.

На втором шаге на разных итерациях поочередно в случайном порядке предъявляются все возможные входные вектора. К сожалению, нельзя заранее определить число итераций, которые потребуется выполнить, а в некоторых случаях и гарантировать полный успех. Этот вопрос будет косвенно затронут в дальнейшем.

Дальнейшее рассмотрение НС будет в основном тяготеть к таким применениям, как распознавание образцов, их классификация и, в назначенной степени, сжатие информации. Более подробно об этих и других применениях и реализующих их структурах НС можно прочитать в журналах NeuralComputation, NeuralComputingandApplication, NeuralNetworks, IEEEtransactiononNeuralNetworks, IEEEtransactionsonSystem, Man, andCyberneticsи других.

2. ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Интервальный анализ является одним из разделов нового направления в прикладной математике. *Основная идея интервального анализа состоит* в*том, что вещественные числа представляются не одним значением, а диапазоном (интервалом)*. Оценка снизу и оценка сверху образуют *интервальное число*. *Получается замкнутый диапазон вещественных чисел, который интерпретируется как новый вид числа.* Интервальный анализ был создан как теоретический аппарат для автоматического учета погрешностей при машинных вычислениях. Дело в том, что в машинной арифметике, в общем случае, не соблюдаются основные законы. Например, нарушается свойство ассоциативности и дистрибутивности. Результаты вычислений вследствие ошибок накопления могут существенно отличаться от истинных значений. Интервальный анализ позволяет учитывать погрешности в задании исходных данных, погрешности округления и осуществлять вычисления с контролируемой точностью.

В теорию автоматических систем управления интервальный анализ проник в последнее десятилетие в связи с машинным синтезом сложных систем в условиях неопределенности параметров не только регулятора, но и объекта. Недостаток информации о точных значениях параметров восполняется заданием их в виде интервала. Математической модели предписываются не конкретные числа, а *диапазон их возможных значений*, что во многих случаях более соответствует реальности. В последние годы машинно-ориентированные методы анализа и синтеза систем с параметрически неопределенными объектами становятся все более актуальными. Коэффициенты регулятора таких систем также известны неточно из-за различных условий эксплуатации, погрешностей реализации и других причин. Известно лишь, что они лежат в некотором интервале. Характерным примером интервального объекта является вертолет, перевозящий грузы на внешней подвеске. Интервальными числами в этом случае являются: величина груза, которая может изменяться от рейса к рейсу, длина внешней подвески, конструктивные параметры вертолета.

Методы машинно-ориентированного интервального анализа позволяют осуществлять синтез системы, параметры которой неопределенны, но принимают конкретные значения из некоторого замкнутого интервала.

2.1. Интервальные числа

Интервальное число $[A] = [a_1, a_2]$ представляет собой множество действительных чисел s таких, что $a_1 < S < a_2$. При этом число a_1представляет собой *нижнюю границу интервального числа*(a_{min}), а a_2 — *верхнюю границу интервального числа*(a_{max}).

Если $a_1=a_2$, то интервальное число [A]=[a, a] *вырождается в точку,* т.е. в действительное число a. Интервал в этом случае называетсяточечным.

Два интервальных числа равны между собой, если равны их соответствующие границы интервалов $a_1=b_1$ и $a_2= b_2$.

Если множество действительных чисел принадлежащих интервальному числу [A], входит в множество действительных чисел b_i,принадлежащих интервальному числу [B], т. е. является его подмножеством, то говорят, что интервальное число [A] включено в интервальное число [B]. Это может быть записано следующим образом:

$$[A] \subseteq [B]$$

$$при\ b_1 \le a_1 \le a_2 \le b_2.$$

Длиной интервального числа (шириной интервала) называется неотрицательная величина

$$d([A]) = a_2 - a_1 \ge 0.$$

Модуль, или абсолютная величина, интервального числа представляет собой выражение

$$|[A]| = \max(|a_1|, |a_2|$$

Расстояние q[A], [B] между двумя интервалами [A] и [B] такими, что

$$[A] = [a_1, a_2]; [B] = [b_1, b_2],$$

определяется равенством

$$q([A], [B]) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Если эту формулу применить к точечным интервалам, то равенство сведется к обычному расстоянию между вещественными числами.

Центром интервального числа называется величина

$$M\{[A]\} = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Интервальное число может быть представлено *в центрированном виде*

$$[A] = M\{[A]\} + [-\varepsilon_a, \varepsilon_a],$$

где $\varepsilon_a = \frac{d(|A|)}{2}$.

Интервальное число можно рассматривать двояко: как самостоятельный объект, т. е. как новый вид числа, и как способ задания вещественного числа с некоторой погрешностью.

2.2. Интервальная арифметика

Операции над интервальными числами образуют интервальную арифметику. Она осуществляется с помощью арифметических действий, в которых участвуют границы интервалов. Так, результат операции над интервалами [A] и [B] получается следующим образом.

1. Сложение интервальных чисел

$[A] + [B] = [a_1,a_2] + [b_1,b_2] = [\ a,+b_1\ a_2 +b_2]$.

2. Вычитание интервальных чисел

$[A] - [B] = [a_1,a_2] - [b_1,b_2] = [a_1 - b_2, a_2–b_1]$.

3. Умножение интервальных чисел

$$[A][B] = [a_1 a_2][b_1 b_2] = [\min\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\};\ \max\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}]$$

4. Деление интервальных чисел

$$[A]:[B] = [a_1 a_2]\left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right].$$

Практические трудности реализации интервальных чисел часто заключаются в делении на интервалы, в которых содержится нуль. Поэтому формулы деления справедливы, если 0∈ [B].

Приведенные формулы образуют *интервальную арифметику.* По существу они представляют собой формулы для получения наибольшего и наименьшего значений величин, вычисленных с помощью границ интервалов.

Введенные операции сложения, вычитания и деления интервалов *непрерывны.*

Пример. Пусть заданы два интервальных числа

$$[A] = [-1,3]; [B] = [2,4].$$

Проиллюстрируем на их примере операцию сложения, вычитания, умножения и деления интервальных чисел.

1. Сложение

$[A]+[B]=[a_1 + b_1, a_2 + b_2]=[-l, 3]+[2,4]=[-1+2, 3+4]= [1, 7].$

2. Вычитание

$$[A] - [B]=[a_1 - b_2, a_2 - b_1]=[-l, 3] - [2,4]= [-1-4,3-2] = [-5,1].$$

3. Умножение

$$[A][B] = [\min\{a_1b_1;\ a_1b_2;\ a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\} =$$
$$= \min\{(-1)2;\ (-1)4;\ 3\cdot 2;\ 3\cdot 4\}\max\{(-l)2;\ (-1)4;\ 3\cdot 2;\ 3\cdot 4\}$$
$$= [\min\{-2, -4, 6, 12\};\ \max\{-2, -4,6,12\}] = [-4,12].$$

4. Деление

$$[A]:[B] = [a_1 \cdot a_2][1/b_2, 1/b_1]$$
$$= [\min\{-1/2\,, -1/4\,, 3/2\,, 3/4\}, \max\{-1/2, -1/4\,, 3/2\,, 3/4\}] = [-1/4\,, 3/2]$$

Перечислим основные свойства интервальной арифметики.

1. Сложение и умножение интервальных чисел *ассоциативно и коммутативно*

[A]+[B]=[B]+[A]; [A][B]=[B][A] - коммутативность,

([A]+[B])+[C]=[A]+([B]+[C]); - ассоциативность.

([A][B])[C]=[A]([B][C]).

2. Множество всех замкнутых вещественных интервалов *I(R) не имеет делителей нуля.*

3. В интервальной арифметике справедливо равенство

$$(-1)[a, b] = [-b, -a].$$

4. Произвольное интервальное число $[A] = [a_1,a_2]$, у которого $a_1 \neq a_2$, *не имеет обратного действия по сложению и по умножению.*

Другими словами, вычитание не обратно сложению

$[A] - [A] \neq 0,$

а деление не обратно умножению

$[A]:[A] \neq 1.$

Тем не менее,

$$0 \in [A] - [A] \text{ и } 1 \in [A]:[A].$$

5. Интервальные числа

X = [0, 0] и Y= [1, 1]

нейтральны относительно сложения и умножения

$$0 + A = A + 0 = A;\ 1\cdot A = A\cdot 1 = A.$$

6. *Дистрибутивность* в интервальной арифметике в общем случае *не имеет места.*

Однако выполняется свойство *субдистрибутивности*

$$[A]([B] + [C]) \subseteq [A][B] + [A][C].$$

Практически важными являются частные случаи, когда свойство дистрибутивности соблюдается. Так, если а — действительное число, то $a([A] + [B]) = a[A] + a[B]$.

Если bc>*0* для всех $b \epsilon [B]$ и $c \in [C]$, то

$$[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C].$$

7. Важное свойство интервальных вычислений—*монотонность по включению.*

Если $[A] \subseteq [C]$ и $[B] \subseteq [D]$, тогда для операции * из {+,-,·,:} имеем

$$[A] * [B] \subseteq [C] * [D].$$

В фигурных скобках обозначены операции сложения, вычитания, умножения и деления соответственно.

Несоблюдение закона дистрибутивности приводит к тому, что вычисление точных границ интервалов может быть выполнено только для достаточно узкого класса функций. Операции с рациональными интервальными функциями приводят к получению расширенного интервала, в котором содержится истинное значение интервала. Поэтому в интервальном анализе вводится понятие *интервального расширения функции* f(x).

Функция F(x), получаемая заменой вещественного аргумента x в рациональной функции f(x) интервальным аргументом X, является *естественным интервальным расширением.* В этом случае получается естественный переход f(x) в интервальную арифметику без какого-либо предварительного преобразования функции f(x). Истинный интервал значений находится в *объединенном интервальном расширении*

$$Uf(x)$$
$$x \in [X].$$

Пусть имеются различные эквивалентные выражения одной и той же функции f(x). Причем эквивалентность понимается здесь в том смысле, что путем преобразований каждое выражение может быть сведено к другому. При этом их области значений совпадают.

При переходе в интервальную арифметику это свойство эквивалентности не соблюдается. Из-за невыполнения дистрибутивности интервалы естественных интервальных расширений не совпадают, хотя истинный интервал функции и содержится в интервальном расширении. Естественное интервальное расширение монотонно по включению. Если $[\mathrm{X}_i] \subseteq [\mathrm{Y}_i], \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$, то

$$\mathrm{f}([\mathrm{X}_1], \ldots, [\mathrm{X}_\mathrm{n}]) \subseteq \mathrm{f}([\mathrm{Y}_1], \ldots, [\mathrm{Y}_\mathrm{n}]).$$

Формальное применение стандартной интервальной арифметики может при вести к большим погрешностям. Например, вычитание между двумя одинаковыми интервальными числами

$$\mathrm{A} - \mathrm{A} \; = \; [\underline{\mathrm{A}} - \overline{\mathrm{A}}; \overline{\mathrm{A}} - \underline{\mathrm{A}}]$$

даёт не интервал [0;0], а интервал вдвое большей величины. При нестандарт ной интервальной арифметике [14] правила вычитания следующие:

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = [\underline{\mathrm{A}} - \underline{\mathrm{B}}; \overline{\mathrm{A}} - \overline{\mathrm{B}}]$$

Это выражение обоснованно, когда значения A и B одновременно возрастают или убывают.

В практических задачах неоправданное расширение интервалов происходи іпри переходе от разомкнутых систем к замкнутым.

2.3. Интервальные матрицы и операции над ними

Интервальная матрица представляет собой прямоугольную упорядоченную совокупность вещественных или комплексных интервальных чисел, состоящую из n строк и m столбцов:

$$[A] = \begin{bmatrix} [a_1, a_2]_{11} \ldots & [a_1, a_2]_{12} \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & [a_1, a_2]_{1m} \\ [a_1, a_2]_{21} \ldots & [a_1, a_2]_{22} \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & [a_1, a_2]_{2m} \\ [a_1, a_2]_{n1} \ldots & [a_1, a_2]_{n2} \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & [a_1, a_2]_{nm} \end{bmatrix}$$

Существенно отметить, что интервальная матрица - это не просто таблица. При заданном расположении ее элементов она *является математическим объектом* и понимается как *единое целое*, так как установлены определенные математические операции над ее интервальными элементами. Элементы матрицы могут быть частично вещественными (точечными) или полностью интервальными числами.

Если интервальная матрица состоит из одного столбца (строки), то она называется интервальным вектором-столбцом (строкой) или просто *интервальным вектором.* В интервальный вектор могут входить как вещественные, так и интервальные числа.

Определитель квадратной интервальной матрицы является интервальным числом. Если определитель не включает нуль, то такая интервальная матрица называется *неособенной* или *невырожденной.*

Среди элементов интервальной матрицы или вектора могут быть точечные, т. е. вещественные числа. Матрица, все элементы которой являются вещественными числами, называется *точечной.* Точечные векторы определяются аналогично. Название «точечный» объясняется тем, что каждая такая матрица есть «точка» на множестве вещественных матриц, составляющих интервальную матрицу. Таким образом, каждую интервальную матрицу можно рассматривать как множество точечных матриц.

Интервальные векторы и матрицы можно обозначать через граничные точечные (вещественные) векторы и матрицы. Например, для интервальной матрицы имеем

$$[\mathrm{A}] = [\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2],$$

где A_1- точечная матрица, соответствующая нижним границам интервалов; A_2 - точечная матрица, соответствующая верхним границам интервалов.

Пусть [A] и [B] - интервальные матрицы размерности nXn, которым соответствует множество точечных матрицA_{ij}и B_{ij}(1≤i≤n; 1≤j≤n). Полагаем

$$[\mathrm{A}] \subseteq [\mathrm{B}] \qquad (4.3.1)$$

Тогда$\mathrm{A}_{ij} \leq \mathrm{B}_{ij}$. Если при этом A_τ - точечная матрица, то мы пишем $A_\tau \in [\mathrm{B}]$.

Отношения ⊆ и⊂; имеют общепринятый теоретико-множественный смысл(операция включения) и вводятся поэлементным определением.

Операции над интервальными матрицами и векторами формально определим как соответствующие операции над точечными матрицами и векторами.

1. Пусть $[\mathrm{A}] = \mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$и $[\mathrm{B}] = \mathrm{B}_{\mathrm{ij}}$ - две интервальные матрицы размерности (nXn). Тогда соотношение

$$[\mathrm{A}] \pm [\mathrm{B}] = \mathrm{A}_{\mathrm{ij}} \pm \mathrm{B}_{\mathrm{ij}} \qquad (4.3.2)$$

определяет соответственно операцию сложения и вычитания интервальных матриц, осуществляемую по правилам интервальной арифметики.

2. Умножение интервальных квадратных матриц

$$[\mathrm{A}][\mathrm{B}] = \mathrm{A}_{\mathrm{ij}}\mathrm{B}_{\mathrm{ij}}. \qquad (4.3.3)$$

Произведение двух интервальных матриц образуется путем умножения i-й интервальной строки первой матрицы на j-й интервальный столбец второй матрицы. Полученные произведения складываются в соответствии с правилами интервальной арифметики

$$[\mathrm{c}_{\mathrm{ij}}] = [\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}][\mathrm{b}_{\mathrm{ij}}] + [\mathrm{a}_{\mathrm{i2}}][\mathrm{b}_{\mathrm{2j}}] + \ldots + [\mathrm{a}_{\mathrm{in}}][\mathrm{b}_{\mathrm{nj}}].$$

3. Произведение квадратной интервальной матрицы на одностолбцовуш интервальную матрицу (вектор) есть интервальная матрица, состоящая из од ного столбца.

$$[\mathrm{A}][\mathrm{X}] = [\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}][\mathrm{X}_{\mathrm{ij}}] = [\mathrm{Y}] \qquad (4.3.4)$$

4.Умножение интервального числа на интервальную матрицу осуществляется аналогично обычной матричной алгебре

$$[\alpha][A] = [\alpha A_{ij}].$$

Интервальные матрицы, участвующие в операциях, имеют соответствующее число строк и столбцов и поэтому это обстоятельство специально не оговаривается.

Существенно обратить внимание на то обстоятельство, что при перемножении матриц в силу особенностей интервальной арифметики (несоблюдение дистрибутивности, монотонности по включению) могут появиться интервалы, выходящие за область определения граничных условий интервального расширения.

Множество интервальных матриц, определенных сложением, вычитанием, умножением, *замкнуто* и *изоморфно* соответствующему множеству точечных матриц. Матричные операции, введенные формулами (4.3.2)...(4.3.6), *непрерывны.*

Операция обращения в интервальной матричной алгебре не определена.

Проиллюстрируем арифметику интервальных матриц на примере.

Пример. Пусть заданы две интервальные матрицы

$$[A] = \begin{bmatrix} [-1,2] & [3,5] \\ [2,4] & [-2,-1] \end{bmatrix}; \qquad [B] = \begin{bmatrix} [1,3] & [-2,2] \\ [-5,-3] & [-1,1] \end{bmatrix}$$

1. Сложение матриц

$$[A] + [B] = \begin{bmatrix} [-1,2] & [3,5] \\ [2,4] & [-2,-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [1,3] & [-2,2] \\ [-5,-3] & [-1,1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0,5] & [1,7] \\ [-3,1] & [-3,0] \end{bmatrix}.$$

2. Вычитание матриц

$$[A] - [B] = \begin{bmatrix} [-1,2] & [3,5] \\ [2,4] & [-2,-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [1,3] & [-2,2] \\ [-5,-3] & [-1,1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-4,1] & [1,7] \\ [5,9] & [-3,0] \end{bmatrix}.$$

3. Умножение интервала на матрицу

$$[2][A] = [1,3]\begin{bmatrix} [-1,2] & [3,5] \\ [2,4] & [-2,-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1,3][-1,2] & [1,3][3,5] \\ [1,3][2,4] & [1,5][-2,-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-3,6] & [3,15] \\ [2,12] & [-6,-1] \end{bmatrix}.$$

4. Умножение точечной матрицы A_τна интервальную[B]

$$A_\tau[B] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [1,3] & [-2,2] \\ [-5,-3] & [-1,1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1,-1] & [3,3] \\ [2.2] & [2.2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [1,3] & [-2,2] \\ [-5,-3] & [-1,1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [-18,10] & [-5,5] \\ [8,16] & [-6,6] \end{bmatrix}$$

5. Перемножение интервальных матриц (A ⊆B)

$$[A][B] = \begin{bmatrix} [1,2] & [2,3] \\ [-1,0] & [1,2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [-1,2] & [2,4] \\ [-2,1] & [0,3] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [1,2][-1,2] + [2,3][-2,1] & [1,2][2,4] + [2,3][0,3] \\ [-1,0][-1,2] + [1,2][-2,1] & [-1,0][2,4] + [1,2][0,3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-8,7] & [2,17] \\ [-6,3] & [-4,6] \end{bmatrix}.$$

2.4. Основные свойства интервальных матричных операций

Справедливы следующие свойства операций, введенных соотношениями (4.3.2)... (4.3.6).

Пусть [A], [B], [C] - интервальные матрицы размерности (nXn). Имеют место следующие свойства.

1. Операция сложения интервальных матриц *коммутативна* и *ассоциативна*

$$[A] + [B] = [B] + [A]. \qquad (4.4.1)$$

$$[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C]. \qquad (4.4.2)$$

2. Операция умножения интервальных матриц (так же, как и точечных) в общем случае *не коммутативна*

$$[A][B] \neq [B][A]$$

3. Однако любая интервальная квадратная матрица [A] коммутирует с единичной

$$[A]E_T = E_T[A] = [A]. \qquad (4.4.3)$$

где E_τ - единичная матрица.

4. Свойства дистрибутивности в интервальной матричной алгебре

в общем случае *не соблюдаются.* Однако имеет место *субдистрибутивность*, которая определяется соотношениями

$$([A] + [B])[C] \subseteq [A][C] + [B][C]. \quad (4.4.4)$$

$$[C]([A] + [B]) \subseteq [C][B] + [C][B]. \quad (4.4.5)$$

5. Имеют место следующие мастные случаи соблюдения свойства дистрибутивности:

$$([A] + [B])C_T = [A]C_T + [B]C_T; \quad (4.4.6)$$

$$C_T([A] + [B]) = C_T[A] + C_T[B], \quad (4.4.7)$$

где $C_т$ точечная матрица.

6. Ассоциативный закон в матричных интервальных операциях при умножении, в общем случае, *не соблюдается*

$$[A]\,([B]\,[C]) \neq ([A][B]\,)[C].$$

Проиллюстрируем это на примере

$$[A]\{[B][C]\} = \begin{bmatrix} [-1.1] & 1 \\ -1 & [0,1] \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & [-2,0] \\ [0,1] & [0,1] \end{bmatrix}$$

$$\{[A][B]\}[C] = \left\{ \begin{bmatrix} [-1,1] & 1 \\ -1 & [0,1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1,3] & [-2,0] \\ [0,1] & [0,1] \end{bmatrix}.$$

Однако справедливы следующие соотношения:

$$[A][B_TC_T] \subseteq ([A]B_T)C_T; \quad (4.4.8)$$

$$A_T([B]C_T) = (A_T[B])C_T, \quad (4.4.9)$$

где индексом «т» обозначены, как и прежде, точечные матрицы. Проиллюстрируем «субассоциативность» и ассоциативность (4.4.8), (4.4.9)

на примере.

Пример. Пусть интервальная и точечная матрица имеют вид

$$[A] = \begin{bmatrix} [-1,2] & [3,5] \\ [2,4] & [-2,-11] \end{bmatrix}; \quad B_T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}; \quad C_T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверим, соблюдается ли свойство (4.4.8):

$$[A]\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} [-1,2] & [3,5] \\ [2,4] & [-2,-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-69,-18] & [19,49] \\ [30,60] & [-34.-17] \end{bmatrix}$$

$$\{[A]B_T\}C_T = \left\{ \begin{bmatrix} [-1,2] & [3,5] \\ [2,4] & [-2,-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \right\} C_T == \begin{bmatrix} [-26,-13] & [-9,-11] \\ [7,14] & [-7,-2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [-75,-12] & [17,51] \\ [27,63] & [-35,-16] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [-69,-18] & [19,49] \\ [30,60] & [-34,-17] \end{bmatrix}$$

$$\subset \begin{bmatrix} [-75,-12] & [17,51] \\ [27,63] & [-35,-16] \end{bmatrix}$$

$$[A]\{B_TC_T\} \subset \{[A]B_T\}C_T.$$

Из примера видно, что интервальные элементы матрицы [A] $\{B_TC_T\}$ входиiв интервалы элементов матрицы $\{[A]\ B_т\}\ C_т$.

2.5 Устойчивость векторно-матричной интервальной системы

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{matrix} \dot{X} = [A]x + [B]u \\ x(0) \in [x_0], \end{matrix} \quad (4.5.1)$$

где [A] и [B] - интервальные матрицы размерности (nXn) и (nXm).

Элементы матрицы [A] и [B] могут принимать любые значения из заданных числовых интервалов

$$a_{ij} \in [a_{min}, a_{max}]; \qquad b_{ij} \in [b_{min}, b_{max}], (i, j = 1, \dots, n; r = 1, \dots, m),$$

где a_{min}, b_{min}- нижняя граница, $a_{max},, b_{max}$- верхняя граница интервалов. Элементы могут быть заданы интервалами полностью или частично.

Как уже отмечалось, операции над интервальными матрицами являются обобщением операций над точечными матрицами. Множество вещественных матриц изоморфно соответствующему множеству точечных матриц. Операции сложения, вычитания, умножения *непрерывны.*

Основные положения устойчивости линейных систем обобщаются на интервальные линейные системы. *Для того чтобы интервальная система (4.5.1) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы эквивалентная ей точечная матричная однородная система*

$$\dot{X} = A_{ij}x \tag{4.5.2}$$

была асимптотически устойчива. Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости состоит в том, чтобы совокупности всех собственных чисел точечных матриц A $= A_T$ *имели отрицательные действительные части, т. е. лежали слева от мнимой оси на плоскости комплексного переменного* λ.

2.6. Устойчивость замкнутой интервальной системы

Рассмотрим уравнение переменных состояния

$$\dot{X} = [A]x + [B]u; \tag{4.6.1}$$

$$u = [K]x, \;\; x(0) \in [x_0]. \tag{4.6.2}$$

Уравнение (4.6.1) является уравнением обратной связи. Здесь [K] - интервальная матрица связи между mвходами и n переменными состояния, имеющая размерность (m x n). Элементы матрицы [K] фиксированы, но неопределенны, и некоторые (или все) расположены в интервале $[k_{min}, k_{max}]$.

При замыкании системы в цепи обратной связи происходит умножение вектора переменных состояния x на матрицу [K]. Подставляя (4.6.2) в (4.6.1) и выполняя элементарные преобразования, получим

$$\dot{X} = [F]x, \tag{4.6.3}$$

где [F] = [A] + [B] [K].

Устойчива ли система (4.6.3), если элементы матриц [A], [B] и [K] - интервальные числа?

Обозначим точечные матрицы индексом «т». Из теории управления известно, что надлежащим выбором точечной матрицы K_T можно добиться желаемого расположения собственных чисел замкнутой системы

$$F_T = A_T + B_T K_T.$$

Здесь F_T,A_T,B_T и K_T - точечные матрицы соответствующей размерности.

Учитывая свойства интервальной арифметики, этот результат может быть обобщен на интервальные матрицы. Действительно, вычислим все точечные граничные значения элементов матриц [A], [B], [K] и найдем минимальное и максимальное значения границ. Сформировав таким образом интервально-значную модель переменных состояния (4.6.3) можно осуществить анализ устойчивости замкнутой системы с неопределенными параметрами, заданныминекоторым диапазоном. Для того чтобы интервальная система (4.6.3) был» асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа λ_i, точечных матриц F_Tлежали в левой полуплоскости. По существу задача сводится к тому, чтобы правые границы интервалов матрицы [F] располагались в левой полуплоскости. При обобщении на интервальные матрицы условие устойчивости формулируется следующим образом.

Для того чтобы интервальная система (4.6.3) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы спектр [λ] матрицы [F] располагался в левой полуплоскости комплексного переменного λ.

В последнее время возник интерес к анализу устойчивости систем в которых параметры не определены, лежат внутри некоторого интервала. Возникла проблема исследования устойчивости интервальных (робастных) систем.

Под робастностью понимается свойство автоматической системы сохранять свои динамические характеристики в условиях отсутствия точной информации о параметрах объекта.

В теории и технике управления установлено, что отсутствие точной ин формации о параметрах объекта управления или изменение параметров в процессе функционирования могут свести к нулю эффект от использования оптимального управления.

Обеспечение робастности в условиях неопределенности параметров порождает проблему разработки методов и алгоритмов, обладающих свойством

робастности основных динамических систем. Процессы в таких системах описываются линейными дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых представляют собой интервальные числа.

Известно, что в реальных системах параметры объекта регулирования, как правило, точно не известны.

Неопределенность выражается в параметрах, которые могут принимать различные значения из некоторого интервала.

Анализ устойчивости интервальных систем основывается на концепции, предложенной в СПГУ В.Л. Харитоновым, критерий Харитонова будет изложен ниже.

2.7.Критерий ВЛ. Харитонова

Фундаментальные результаты, определяющие необходимые и достаточные условия устойчивости интервальных систем были получены В.Л. Харитоновым.

Пусть задано интервальное семейство полиномов

$$[\mathrm{A}] = \mathrm{a} + \mathrm{a}_0\mathrm{S} + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{s}^\mathrm{n}.$$

где $\underline{a}_i < \bar{a}, i = 0,1, \dots, n.$

$\underline{a}_i = a_{min}$ - нижняя граница интервала

$\bar{a} = a_{min}$- верхняя граница интервала

Теорема Харитонова утверждает, что семейство асимптотически устойчиво, если асимптотически устойчивы четыре точечных полинома, составленных по нижней и верхней границам интервала $[\underline{a}, \bar{a}]$

$$A_1 = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 S + \overline{a_2} S^2 + \overline{a_3} S^3 + \cdots$$

$$A_2 = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 S + \overline{a_2} S^2 + \overline{a_3} S^3 + \cdots$$

$$A_3 = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 S + \overline{a_2} S^2 + \overline{a_3} S^3 + \cdots$$

$$A_4 = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 S + \overline{a_2} S^2 + \overline{a_3} S^3 + \cdots$$

Коэффициенты входящие в харитоновские полиномы называются *угловыми,* они составляют устойчивость по нижней и верхней границам интервального полинома.

Таким образом, теорема Харитонова позволяет по четырем угловым полиномам установить необходимую и достаточную устойчивость всего семейства полиномов, коэффициенты которых содержат интервальные неопределенно ста параметров. Это четыре угловых полинома и обеспечивают робастную устойчивость.

Полиномы анализируются с помощью вышеизложенных критериев Рауса, Гурвица и др.

Рассмотрим теперь другую запись характеристического полинома, более распространенную в отечественной литературе.

Пусть линейная система с неопределенными коэффициентами характеризуется уравнением:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Для того, чтобы система была асимптотически устойчива необходимо и достаточно, чтобы были устойчивы четыре «точечных» харитоновских поли нома, созданные по верхним и нижним границам интервала:

$$f_1(S) = \underline{a}_n + \underline{a}_3 S + \overline{a_2} S^{n-2} + \bar{a}_1 S^{n-1} + \cdots + \underline{a_0 S^n};$$
$$f_1(S) = \underline{a}_n + \underline{a}_3 S + \underline{a_2} S^{n-2} + \bar{a}_1 S^{n-1} + \cdots + \overline{a_0} S^n;\,;$$
$$f_1(S) = \underline{a}_n + \overline{a_3} S + \underline{a_2} S^{n-2} + \underline{a_1} S^{n-1} + \cdots + \overline{a_0} S^n;$$
$$f_1(S) = \underline{a}_n + \overline{a_3} S + \overline{a_2} S^{n-2} + \underline{a_1} S^{n-1} + \cdots + \underline{a_0} S^n;$$