

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ  
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

---

**Л. П. Козлова, О.А. Козлова, О.И. Золотов**

# **ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**СПб ГУТ)))**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2016**

УДК 681.5 (075.8)  
ББК 22.161я73  
К 59

Рецензенты :

доктор технических наук, профессор кафедры Системного анализа и управления  
Санкт-Петербургского национального минерально-сырьевого университета  
«Горный» Д.А. Первухин  
доктор технических наук, профессор Военно-космической академии  
им. А.Ф. Можайского В.Д. Лиференко

*Утверждено редакционно-издательским советом СПбГУТ  
в качестве учебного пособия*

**Козлова, Л. П.**

К 59 Основы теории управления : учебное пособие / Л. П. Козлова,  
О. А. Козлова, О.И. Золотов – СПб. : Издательство СПбГУТ, 2016. –  
98 с.

ISBN 978-5-89160-134-5

Приведены общие сведения о системах управления и их моделях, методы математического описания, построение структуры, анализа устойчивости, оценки качества и синтеза линейных автоматических систем управления.

Предназначено для бакалавров специальности 09.03.02 – Информационные системы и технологии, 11.03.03 – Конструирование и технология электронных устройств, а также может использоваться магистрами и аспирантами в области телекоммуникаций.

**УДК 681.5 (075.8)  
ББК 22.161я73**

**ISBN 978-5-89160-134-5** © Козлова Л.П., Козлова О.А., Золотов О.И., 2016

© Федеральное государственное образовательное  
бюджетное учреждение высшего профессионального  
образования «Санкт-Петербургский государственный  
университет телекоммуникаций  
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	5
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ .....	6
1.1. Классификация и общая характеристика САУ .....	7
Вопросы для самопроверки .....	10
2. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ .....	11
2.1. Виды математических моделей САУ .....	11
2.1.1. Дифференциальные и разностные уравнения .....	11
2.1.2. Векторно-матричное описание непрерывной системы .....	16
2.1.3. Временные характеристики систем и их элементов .....	19
2.1.3.1. Импульсные переходные характеристики .....	20
2.1.3.2. Переходные характеристики .....	20
2.1.4. Частотные характеристик .....	22
2.1.5. Логарифмические частотные характеристики .....	23
2.2. Типовые звенья .....	24
2.2.1. Безынерционное звено (П-регулятор) .....	25
2.2.2. Апериодическое звено первого порядка .....	27
2.2.3. Апериодическое звено второго порядка .....	29
2.2.4. Интегрирующее звено (И-регулятор) .....	34
2.2.5. Дифференцирующее звено (Д-регулятор) .....	36
2.3. Структурные схемы .....	38
2.3.1. Преобразование структурных схем .....	38
2.3.2. Детализированные структурные схемы .....	42
Вопросы для самопроверки .....	45
3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ .....	46
3.1. Устойчивость линейных непрерывных систем управления .....	46
3.1.1. Общее условие устойчивости .....	46
3.1.2. Критерии устойчивости .....	47
3.1.2.1. Алгебраические критерии устойчивости .....	47
3.1.2.2. Частотные критерии устойчивости .....	50
3.2. Анализ точности и качества процессов управления .....	59
3.2.1. Оценка точности САУ в установившихся режимах .....	59
3.2.1.1. Точность САУ в режиме стабилизации .....	59
3.2.1.2. Установившиеся ошибки при обработке медленно меняющихся внешних воздействий .....	63
3.2.1.3. Анализ влияния порядка астатизма системы на установившиеся ошибки при обработке типовых степенных воздействий .....	66
3.2.2. Оценка показателей качества работы САУ .....	70
3.2.2.1. Показатели качества по переходной характеристике .....	70

3.2.2.2. Показатели качества по корневой плоскости .....	71
3.2.2.3. Интегральные показатели качества .....	72
3.2.2.4 Связь частотных показателей с основными	
прямыми показателями качества .....	72
Вопросы для самопроверки .....	73
4. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ .....	75
4.1. Задачи и классификация методов синтеза .....	75
4.2. Синтез желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы .....	76
4.2.1. Синтез желаемой ЛАЧХ в области низких частот .....	78
4.2.2. Синтез желаемой ЛАЧХ в области средних частот .....	83
4.3. Синтез корректирующих устройств .....	85
4.3.1. Схемы включения и классификация корректирующих	
устройств .....	85
4.3.2. Определение передаточной функции последовательного	
корректирующего звена .....	87
4.3.3. Определение передаточной функции корректирующего	
устройства в виде отрицательной местной обратной связи .....	88
4.4. Синтез последовательных корректирующих устройств в	
системах подчиненного регулирования .....	89
4.4.1. Настройка на оптимум по модулю .....	90
4.4.2. Настройка на симметричный оптимум .....	93
Вопросы для самопроверки .....	95
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	96

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Окружающий мир представляет совокупность взаимосвязанных экономических, социальных, технических и иных систем, процесс функционирования которых включает получение информации и ее анализ, выполнение основных операций любого процесса управления.

Универсальность принципов управления позволяет применять их к объектам любой природы, в том числе к процессам получения, передачи и обработки информации.

Данная дисциплина позволяет формировать системное мышление и целостное видение явлений мира техники, социальной среды и т.д., дает наглядные примеры их конструктивного применения.

ТАУ при изучении процессов управления абстрагируется от физических и конструктивных особенностей систем и вместо реальных систем рассматривает их адекватные математические модели. Основными методами исследования в ТАУ являются математическое моделирование, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, операционное исчисление и гармонический анализ.

Применение постоянно развивающихся компьютерных программ моделирования, анализа и синтеза систем управления устраняет проблемы, связанные с исследованиями и разработками систем.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

**Процессом управления** называется совокупность операций управления, определяющих алгоритм выполнения определенной работы.

**Автоматическим управлением** называется процесс управления, в котором все операции управления выполняются автоматически.

Важнейшими в автоматическом управлении являются понятия объекта управления (ОУ) и управляющего устройства (устройств управления) – (УУ).

**Объектом управления**, называется устройство, механизм, агрегат, транспортный, технологический, энергетический или любой другой процесс, желаемое поведение которого должно быть обеспечено.

**Устройствами управления** называются технические устройства, выполняющие операции управления.

Совокупность объекта управления и управляющего устройства (устройств управления) называется **системой автоматического управления** (САУ).

При самом общем представлении САУ принято символически обозначать объект управления и управляющее устройство прямоугольниками с входящими и выходящими стрелками (рис. 1.1).

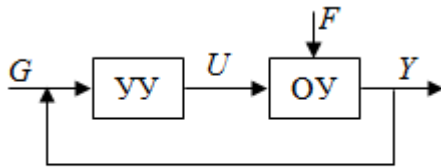


Рис. 1.1. Общее представление САУ

Обозначения на рис. 1.1:  $G$  – вектор или скалярная величина, содержащие информацию о желаемом поведении объекта управления и называемые управляющим воздействием системы;

$Y$  – вектор или одна переменная, характеризующие действительное поведение объекта управления и называемые выходными вектором или выходной переменной системы управления;

$F$  – вектор или одна переменная, соответствующие внешним воздействиям, обычно нежелательного свойства, и называемых возмущающим воздействием системы управления;

$U$  – вектор или скалярная величина, характеризующие управляющее воздействие на объект управления и называемые вектором (переменной) управления.

В соответствии с принятыми обозначениями сформулируем задачу автоматического управления как формирование таких векторов или переменной управления  $U$ , при которых желаемое поведение объекта будет достигнуто и вектор (переменная)  $Y$  будут соответствовать вектору (переменной)  $G$  независимо от изменений возмущающего воздействия  $F$ .

## 1.1. Классификация и общая характеристика САУ

Принято классифицировать системы автоматического управления по ряду признаков, определяющих их отношение к тому или иному классу САУ.

Прежде всего принято разделять САУ по принципу управления. По этому признаку различают системы:

- с разомкнутым циклом управления,
- с управлением по возмущениям,
- с управлением с обратной связью,
- с комбинированным принципом управления.

В системах с разомкнутым циклом управления информация о действительном поведении объекта управления не используется для целей управления (рис. 1.2).

Системы с разомкнутым принципом управления оказываются эффективными лишь тогда, когда характеристики ОУ достаточно стабильны и возмущающее воздействие  $F$  незначительно влияет на выходную величину  $Y$ .

В системах с управлением по возмущениям в структуру разомкнутого управления добавляется еще один блок (рис. 1.3) – устройство измерения возмущений (ИВ), обеспечивающее дополнительное компенсационное воздействие на ОУ при значительных изменениях возмущающего воздействия  $F$ .

В системах управления с обратной связью (рис. 1.4) информация о действительном поведении объекта управления снимается с выхода ОУ, обрабатывается в устройстве обратной связи (УОС) и подается в устройство сравнения (УС), где сравнивается с информацией о желаемом поведении объекта управления.

Преимуществом систем управления с обратной связью является более высокая точность воспроизведения желаемого поведения ОУ, большая инвариантность по отношению к возмущающим воздействиям и меньшая зависимость от изменения характеристик ОУ или УУ.

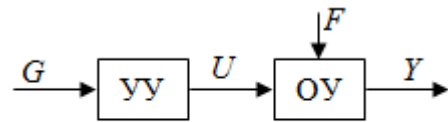


Рис. 1.2. Система с разомкнутым циклом

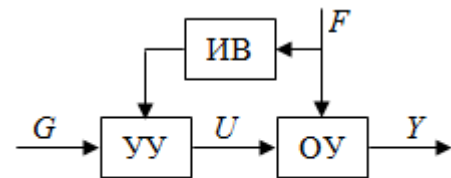


Рис. 1.3. Система с управлением по возмущению

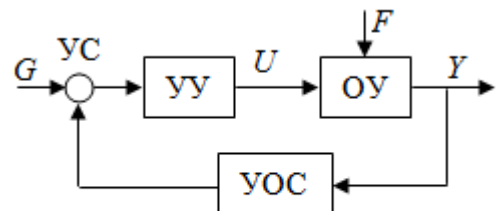


Рис. 1.4. Система управления с обратной связью

В системах комбинированного управления сочетается принцип обратной связи с принципом прямого управления по внешним воздействиям: возмущающим (рис. 1.5, а) и управляющим (рис. 1.5, б).

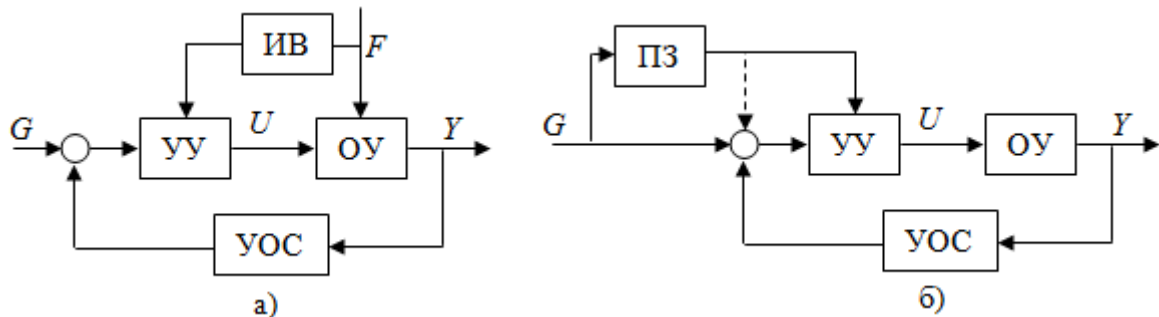


Рис. 1.5. Системы комбинированного управления

В схеме рис. 1.5 б, ПЗ – преобразователь управляющего (задающего) воздействия. Системы с комбинированным принципом управления обеспечивают повышенную точность воспроизведения желаемого в технике управления.

Вторым важным признаком классификации САУ является тип управления. По типу управления различают шесть основных классов систем управления:

- системы стабилизации;
  - системы программного управления;
  - следящие системы;
  - системы оптимального управления;
  - системы экстремального управления;
  - системы адаптивного управления.

Задача систем стабилизации заключается в поддержании на заданном уровне выходной величины ОУ в условиях изменения возмущающих воздействий. Системы стабилизации широко используются во многих технологических процессах для поддержания на заданных уровнях технологических величин (температура, давление, расход, концентрация, уровень и т. д.).

Задача систем программного управления (СПУ) состоит в достижении высокой точности воспроизведения управляющих воздействий, которые изменяются по заданному закону. Типичным представителем систем программного управления являются системы УЧПУ (числового программного управления), широко используемые для управления металлообрабатывающими станками и робототехническими комплексами.

В следящих системах также основной является задача наиболее точного воспроизведения управляющих воздействий. Однако, управляющее воздействие в таких системах изменяется по произвольному закону. Примера-



ми следящих систем являются промышленные регистрирующие и самопишущие приборы, системы синхронной связи, системы наведения.

Системы оптимального управления реализуют управление по экстремуму обобщенного показателя качества работы ОУ, такого как производительность, быстродействие, экономичность. Типовой системой оптимального управления в промышленности является система управления процессом каталитического риформинга – одного из ведущих процессов в нефтеперерабатывающей промышленности (производство бензина).

Системы экстремального управления применяются в тех случаях, когда показатель качества (некоторая функция координат системы) имеет экстремум, задача системы экстремального управления – отыскать и поддерживать режим работы объекта управления, при котором обеспечивается экстремум показателя качества.

Системы адаптивного управления должны обеспечивать высокое качество управления в условиях изменения внешних воздействий или внутренних характеристик объекта управления. Примерами адаптивных систем могут служить адаптивный автопилот, адаптивные регуляторы в электромеханических системах, адаптивные системы управления космическими ракетами.

Третьим существенным признаком классификации САУ является характер сигналов управления, используемых в системах управления. По этому признаку все системы разделяются на: непрерывные, релейные, дискретные.

Непрерывной системой автоматического управления называется такая система, в которых характеристики ОУ являются непрерывными функциями своих координат, а все сигналы управления и внешние сигналы, действующие на систему, описываются непрерывными функциями времени.

Дискретной системой называется такая САУ, в которой имеет место прерывистый характер передачи информации управления. Такой характер сигналов управления может быть обусловлен включением в систему импульсных или цифровых устройств. В связи с этими все дискретные системы разделяются на две большие группы:

- импульсные САУ;
- цифровые САУ.

Среди линейных моделей различают:

- линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (стационарные САУ);
- линейные дифференциальные уравнения с непрерывными во времени коэффициентами (нестационарные САУ);
- дифференциальные уравнения в частных производных (системы с распределенными параметрами);
- уравнения с трансцендентными функциями (системы с запаздыванием);

- уравнения, связывающие вероятностные характеристики сигналов управления (стохастические САУ).

### **Вопросы для самопроверки**

1. Перечислите принципы управления и поясните их.
2. Что представляет собой закон управления?
3. Каково назначение регулятора в системе?
  1. По каким признакам классифицируются системы управления?
  2. Дайте классификацию систем по виду задающего воздействия.
  3. Назовите необходимые и достаточные условия линейности систем.
4. Что представляет собой система управления?
5. Перечислите основные элементы системы автоматического управления.
6. Какие бывают системы автоматического управления?
7. Какая система называется непрерывной?
8. Какая система называется дискретной?
9. Какая задача систем оптимизации?
10. Какая задача систем стабилизации?
11. Что такое система адаптивного управления?
12. В каких случаях применяют система экстремального управления?
13. Как различаются линейные модели?

## **2. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ**

### **2.1. Виды математических моделей САУ**

Целью математического описания САУ является составление той или иной математической модели, используемой в дальнейшем для анализа и синтеза САУ. Любая математическая модель является, приближением к действительному состоянию взаимодействия отдельных информационных параметров объекта или всей системы в целом и отражает наиболее существенные взаимосвязи между переменными величинами. Так большинство переменных величин объектов и систем управления подвергается ограничению естественным или искусственным путем. Множество зависимостей между информационными параметрами являются нелинейными и должны быть представлены нелинейными математическими моделями. Однако в рамках настоящего пособия рассматриваются линейные математические модели, так как многие режимы функционирования САУ характеризуются незначительными изменениями переменных величин, в пределах которых зависимости между величинами могут считаться линейными. Системы, работающие в полных диапазонах изменений переменных, а также системы, содержащие элементы с явно выраженными нелинейными характеристиками (например, релейными), являются существенно нелинейными системами и рассматриваются в курсе «Нелинейные системы управления».

Различают следующие виды математических моделей САУ:

- 1) дифференциальные и разностные уравнения систем управления и их элементов;
- 2) векторно-матричные модели в пространстве состояний;
- 3) передаточные функции элементов и систем управления;
- 4) структурные схемы систем управления;
- 5) направленные графы систем управления;
- 6) временные характеристики САУ;
- 7) частотные характеристики САУ.

Эти же виды математических моделей в той или иной мере используются и для описания нелинейных САУ.

#### **2.1.1. Дифференциальные и разностные уравнения**

##### ***Уравнения состояния САУ***

Пространство состояний САУ это бесконечная совокупность временных моментов состояния системы, описанная конечной совокупностью переменных состояния.

Число переменных состояния обычно принимается равным порядку общего дифференцированного уравнения системы, т.е. числу дифференцированных уравнений 1-го порядка.

Уравнения состояния записываются обычно в нормальной форме Коши и имеют вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \dots + b_{im}u_m, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В левой части уравнения состояния всегда производная переменной состояния, а в правой части сумма всех переменных состояния и внешних воздействий со своими коэффициентами. Полное описание в пространстве состояния будет представлять систему из  $n$  дифференцированных уравнений 1-го порядка в форме Коши.

### ***Дифференциально-разностные уравнения САУ***

Дифференциальные (в частных случаях, алгебраические) уравнения непрерывных систем являются основной первичной формы математического описания любой САУ. Они могут использоваться самостоятельно для выполнения задач анализа и синтеза или служить основой для создания других форм математического описания.

Дифференциальные и алгебраические уравнения непрерывных САУ составляются на основании изучения и осознания основных физических, химических и информационных процессов, происходящих в объекте управления и системе в целом. Часто для записи уравнений используются уже известные законы, устанавливающие связь между технологическими переменными величинами.

### ***Преобразование Лапласа***

Несмотря на неограниченные возможности компьютерных технологий по решению систем дифференциальных и разностных уравнений преобразование Лапласа остается по-прежнему широко используемым при решении задач анализа и синтеза САУ.

Непрерывным преобразованием Лапласа непрерывной временной функции  $f(t)$  называется следующее преобразование

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

где  $s = \alpha + j\omega$ ,  $\alpha$  и  $\omega$  - постоянные,  $j = \sqrt{-1}$ . Преобразуемая функция  $f(t)$  часто называется оригиналом, а  $F(s)$  – изображением функции  $f(t)$ . К функ-

ции  $f(t)$  предъявляется требование, чтобы она была однозначной и удовлетворяла условию  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Приведем в качестве примеров непрерывного преобразования изображения единичной ступенчатой функции  $f(t) = 1(t)$ .

$$L\{f(t)\} = L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

### ***Основные свойства преобразования Лапласа***

#### **1. Свойство линейности**

Непрерывное преобразование Лапласа являются линейным, т. е. изображение линейной комбинации функций равно линейной комбинации их изображений.

Так если  $f(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t)$ , то

$$L\{f(t)\} = \sum_{i=1}^n c_i F_i(s).$$

#### **2. Изображение смещенной функции (теорема сдвига)**

Сдвигу функции оригинала на  $\tau$ , т. е.  $f_1(t) = f(t - \tau)$  соответствует умножение непрерывного изображения на  $e^{-s\tau}$ :

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} L\{f(t)\} = e^{-s\tau} F(s).$$

#### **3. Изображение производной (конечной разности) $n$ -порядка**

Если  $L\{f(t)\} = F(s)$ , то  $L\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s)$ , при  $f(0) = 0$  и всех

$\frac{df^k}{dt^k} = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Другими словами взятию производной  $n$ -го порядка соответствует при нулевых начальных условиях умножение изображения на  $s^n$ .

#### **4. Изображение интеграла (конечной суммы) функции-оригинала**

Свойства изменения изображений функции после ее интегрирования или взятия конечной суммы в дискретном варианте является “обратными” по отношению к свойствам дифференцирования или взятия конечных разностей:

$$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s), \text{ где } F(s) = L\{f(t)\}.$$

Резюмируя свойства 3 и 4 отметим, что  $s$  – оператор дифференцирования в непрерывной области;  $\frac{1}{s}$  – оператор интегрирования в непрерывной области.

**5. Свойство изображения свертываемых функций (теорема свертки)**

Сверткой двух непрерывных называется функция, значения которой вычисляются согласно  $f(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau$  для непрерывного времени.

Формулировка свойства об изображении свертки для непрерывного времени:

- изображение свертки равно произведению изображений свертываемых функций.

Если  $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$  и  $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$ , то

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s).$$

**6. Определение начального значения функции оригинала по известному изображению**

Зная изображение  $F(s)$  можно сравнительно просто вычислить начальное и конечное значения функции-оригинала.

Начальное значение непрерывной функции

$$f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} sF(s).$$

**7. Конечное значение функции-оригинала**

В непрерывном времени  $f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sF(s)$ .

***Преобразование дифференциальных и разностных уравнений.***

Пусть непрерывная система описывается уравнением

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m g(t) + c_0 \frac{d^e f(t)}{dt^e} + c_1 \frac{d^{e-1} f(t)}{dt^{e-1}} + \dots + c_e f(t),$$

где  $y(t)$ ,  $g(t)$ ,  $f(t)$  – выходная управляемая величина, управляющее и возмущающее воздействие соответственно;  $a_0, \dots, a_n$ ;  $b_0, \dots, b_m$ ;  $c_0, \dots, c_e$  – постоянные коэффициенты. Предположим, что система работает при нулевых начальных условиях, т. е. при  $t = 0$  имеем  $\frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;

$$\frac{d^j g(t)}{dt^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1; \quad \frac{d^k f(t)}{dt^k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, e-1.$$

Подвергнем заданное дифференциальное уравнение преобразованию Лапласа, используя свойства линейности и изображения производной,

$$\begin{aligned} a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_n Y(s) &= \\ = b_0 s^m G(s) + b_1 s^{m-1} G(s) + \dots + b_m G(s) + c_0 s^e F(s) + c_1 s^{e-1} F(s) + \dots + c_e F(s), \end{aligned}$$

где  $Y(s)$ ,  $G(s)$ ,  $F(s)$  – изображения по Лапласу функций  $y(t)$ ,  $g(t)$ ,  $f(t)$ .

Запишем полученное уравнение в более сжатой форме

$$\begin{aligned} (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) Y(s) &= \\ = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) G(s) + (c_0 s^e + c_1 s^{e-1} + \dots + c_e) F(s), \\ A(s) Y(s) &= B(s) G(s) + C(s) F(s). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное уравнение с исходным, приходим к правилу преобразования по Лапласу любого дифференциального уравнения.

*Чтобы получить преобразованное по Лапласу уравнение, необходимо операторы дифференцирования  $s = \frac{d}{dt}$  заменить комплексными операторами  $s = \alpha + j\omega$ , а все временные функции заменить их изображением.*

Отметим, что преобразование по Лапласу уравнение является алгебраическим, что в корне облегчает все математические операции при его использовании.

Теперь возьмем отношения изображений присутствующих в уравнении величин, принимая одну из них (управление  $G(s)$  или возмущение  $F(s)$ ) равной нулю:

$$\left. \frac{Y(s)}{G(s)} \right|_{F(s)=0} = \frac{B(s)}{A(s)}; \quad \left. \frac{Y(s)}{F(s)} \right|_{G(s)=0} = \frac{C(s)}{A(s)}.$$

Полученные отношения представляют собой передаточные функции системы по управляющему и возмущающему воздействиям:

$$W_g(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{Y(s)}{G(s)}; \quad W_f(s) = \frac{C(s)}{A(s)} = \frac{Y(s)}{F(s)}.$$

Передаточной функцией системы (элемента системы) называется отношение изображений по Лапласу выходной и входной величин при нулевых начальных условиях.

Понятие передаточной функции является одним из фундаментальных в теории автоматического управления и широко используется на различных стадиях анализа и синтеза систем управления.

### 2.1.2. Векторно-матричное описание непрерывной системы

Обобщая записанную в примере систему уравнений состояния, запишем ее для системы порядка  $n$ .

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1m}u_m \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2m}u_m \\ \dots \\ \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \dots + b_{im}u_m \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nm}u_m \end{cases}. \quad (2.1)$$

Эту систему можно записать в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов системы размерностью ( $n \times n$ ), называемая матрицей системы или матрицей состояния;  $\mathbf{X}$  – действительный  $n$ -мерный вектор-столбец, компоненты которого переменные состояния;  $\mathbf{B}$  – матрица коэффициентов системы при внешних воздействиях и поэтому называемая матрицей входа размерностью ( $n \times m$ );  $\mathbf{U}$  – действительный  $m$ -мерный вектор-столбец, содержащий в качестве своих элементов входные внешние воздействия (управляющие и возмущающие), называемый вектором входа. Значения этих матриц легко можно записать из системы уравнений (2.1):



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ii} & \dots & b_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ni} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Если матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  постоянные, то система называется стационарной; если матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – функции времени, то система называется нестационарной или системой с переменными коэффициентами.

Основное матричное уравнение (2.2) обычно дополняется уравнением для вектора выходных переменных:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{C}$  – матрица выхода системы, размерность которой зависит от размерности векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ ; в одномерной системе, где  $y$  есть скалярная переменная, матрица  $\mathbf{C}$  есть строка размерностью  $n$ ;  $\mathbf{D}$  – матрица связи с внешними воздействиями, ее размерность определяется размерностью векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{Y}$ .

### ***Преобразование Лапласа матричного уравнения***

Запишем основное матричное уравнение системы:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t). \quad (2.4)$$

Рассмотрим сначала однородное матричное уравнение системы при  $\mathbf{U}(t) = 0$ . Тогда уравнение (2.4) запишется в виде:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t).$$

Выполнив преобразование Лапласа с учетом начальных условий, т.е. наличия вектора  $\mathbf{X}(0)$ , получим  $s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$ .

Объединяя члены, содержащие изображение вектора  $\mathbf{X}(s)$ , получим  $s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(0)$  или  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(0)$ , откуда

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0),$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица; матрица  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  называется резольвентой матрицы  $\mathbf{A}$ , которую можно записать следующим образом:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{A}d_{ij} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^T}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\mathbf{A}d_{ji} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})},$$

где  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  – определитель матрицы  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ;  $\mathbf{A}d_{ij} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^T$  – квадратная матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  матрицы  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^T$ ;  $\mathbf{A}d_{ji} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  – матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов  $a_{ji}$  матрицы  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ .

Матрица  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  называется характеристической.

Ее определитель  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{D}(s)$  называется характеристическим полиномом.

Уравнение  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  называется характеристическим уравнением.

Рассмотрим неоднородное матричное уравнение системы:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(t).$$

Выполнив преобразование Лапласа, принимая начальные условия  $\mathbf{X}(0) = 0$ , получим:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s),$$

где  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$  называется матричной передаточной функцией системы, которая вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{C}\mathbf{A}d_{ij} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^T \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}.$$

Заметим, что знаменатель  $\mathbf{H}(s)$  это характеристический полином  $D(s)$  и корни характеристического уравнения  $D(s) = 0$  являются одновременно полюсами передаточной функции системы  $H(s)$ .

**Пример:**

Пусть уравнения состояния непрерывной части системы имеют вид:

$$x_1 = \frac{1}{T_1}(u - x_2), \quad x_2 = \frac{1}{T_2}x_1.$$

Тогда матрицы системы, входа и выхода запишется в виде соответственно:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1].$$

Определяем переходную матрицу  $\Phi(t) = L^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$ .

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{T_1} \\ -\frac{1}{T_2} & s \end{bmatrix}; \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^T = \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{T_2} \\ \frac{1}{T_1} & s \end{bmatrix};$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{Adj}_{ij} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^T}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} s & -\frac{1}{T_2} \\ \frac{1}{T_1} & s \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{1}{T_1 T_2}}.$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \frac{1}{T_1 T_2}}\right\} = \cos \frac{t}{\sqrt{T_1 T_2}}; \quad L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{T_2}}{s^2 + \frac{1}{T_1 T_2}}\right\} = \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_2} \sin \frac{t}{\sqrt{T_1 T_2}};$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{T_1}}{s^2 + \frac{1}{T_1 T_2}}\right\} = -\frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1} \sin \frac{t}{\sqrt{T_1 T_2}}.$$

### 2.1.3. Временные характеристики систем и их элементов

Временными характеристиками систем управления или их элементов называются реакции систем или элементов на входные сигналы, описываемые типовыми временными функциями. Их можно получить двумя способами:

1) экспериментальным, когда регистрируется выходная величина системы или элемента при подаче на их вход того или иного типового внешнего воздействия;

2) аналитическим, когда в правую часть дифференциального уравнения системы или элемента подставляется математическое выражение входного воздействия и решают уравнения при нулевых начальных условиях, т.е. получают аналитическое выражение временной характеристики, которое затем представляют в виде графика.

Временные характеристики играют важную роль при решении задач анализа и синтеза систем управления, поэтому знание их совершенно необходимо как при проектировании, так и при эксплуатации систем управления.

Различают две важнейшие временные характеристики систем управления или их элементов

- 1) импульсная переходная характеристика (ИПХ) или функция веса;
- 2) переходная характеристика (ПХ).

### 2.1.3.1. Импульсные переходные характеристики

Импульсной переходной характеристикой (ИПХ) непрерывной системы называется реакция системы на импульсный сигнал, описываемый единичной  $\delta$  - функцией, при нулевых начальных условиях.

Определение единичной  $\delta$  - функции:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0 \\ 0, & \text{при } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Изображение по Лапласу  $\delta$ -функции:  $L\{\delta(t)\} = 1$ . Изображение  $L\{w(t)\} = W(s) \cdot L\{\delta(t)\} = W(s)$ , поэтому ИПХ может быть найдена как  $w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$ .

С помощью ИПХ может быть определена выходная величина системы при произвольном входном воздействием:

$$Y(t) = \int_0^t w(t) \cdot u(t - \tau) d\tau.$$

### 2.1.3.2. Переходные характеристики

Переходной характеристикой (ПХ) непрерывной системы или ее элемента называется реакция системы или элемента на ступенчатый сигнал, описываемый единичной ступенчатой функцией при нулевых начальных условиях (рис. 2.1)

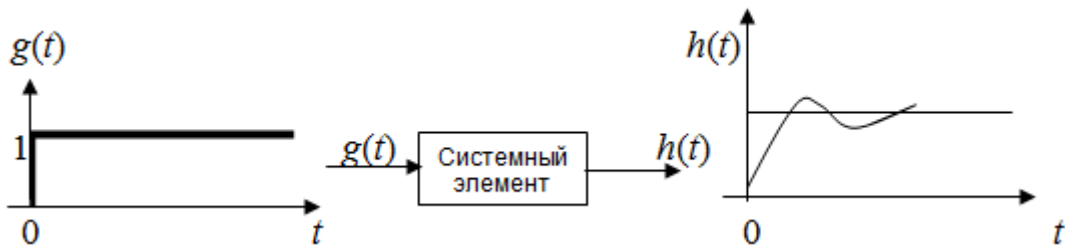


Рис. 2.1. Переходная характеристика на единичное входное воздействие

Переходная характеристика может быть получена экспериментальным путем или аналитическим способом

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\},$$

где  $H(s) = W(s) \cdot L\{1(t)\} = W(s) \cdot \frac{1}{s}$ ,  $W(s)$  – передаточная функция системы или элемента.

$$\text{Таким образом, } h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}.$$

Весовой или импульсной переходной функцией  $w(t)$  называют функцию, описывающую реакцию динамического звена (системы) на идеальное импульсное воздействие  $\delta(t)$  при нулевых начальных условиях (рис. 2.2).

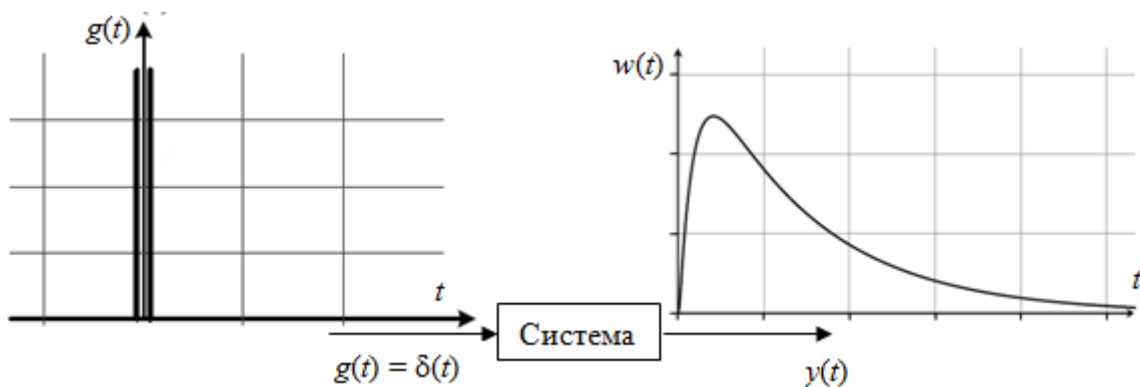


Рис. 2.2. Весовая переходная функция

Математически идеальное импульсное воздействие описывается дельта-функцией  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & 0 < t < \infty \end{cases}; \quad \delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

## 2.1.4. Частотные характеристики

Существует два пути получения частотных характеристик: 1) экспериментально-физический, 2) теоретический.

Первый путь состоит в том, что на систему подается синусоидальный сигнал постоянной амплитуды и переменной частоты (рис. 2.3). На выходе системы в установившемся режиме будет иметь место также синусоидальный сигнал той же частоты, но другой амплитуды и с фазовым сдвигом по отношению к входному сигналу.

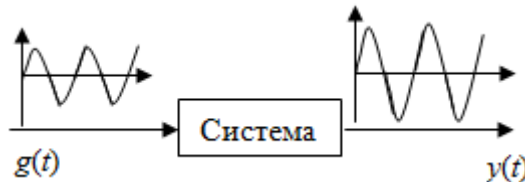


Рис. 2.3. Частотная характеристика с синусоидальным входным сигналом

Итак,  $g(t) = A_1 \sin \omega t$  в непрерывном времени. Установившаяся реакция на выходе системы  $y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$ . Тогда отношение  $\frac{A_2}{A_1} = A(\omega)$  называется **амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ) системы, а зависимость  $\varphi(\omega)$  – фазочастотной характеристикой системы (ФЧХ).

Второй путь заключается в использовании преобразований Фурье сигналов на входе и выходе системы. Последние определяются по преобразованиям Лапласа путем замены  $s = j\omega$ . Если такую замену сделать в передаточной функции системы, приходим к понятию комплексной передаточной функции (КПФ) системы

$$W(s)|_{s=j\omega} = W(j\omega).$$

Зависимость модуля КПФ от частоты называется **амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ) системы

$$|W(j\omega)| = A(\omega).$$

Зависимость аргумента КПФ представляет собой **фазочастотную характеристику** (ФЧХ) системы

$$\text{Arg}W(j\omega) = \varphi(\omega).$$

Зависимости  $\text{Re}W(j\omega)$  и  $\text{Im}W(j\omega)$  называются вещественно-частотной (ВЧ) и мнимой (МЧ) характеристиками системы соответственно. ВЧХ и АЧХ совместно образуют **амплитудно-фазовую характеристику** системы (АФХ). Ее выражение следует из выражений ВЧХ и МЧХ характеристик

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega) + j\operatorname{Im}W(j\omega) = U + jV.$$

АФХ является важнейшей характеристикой системы и часто снимается экспериментальным путем.

### 2.1.5. Логарифмические частотные характеристики

Различают логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) и логарифмические фазочастотные характеристики (ЛФЧХ).

При построении ЛАЧХ и ЛФЧХ частота по оси абсцисс откладывается в логарифмическом масштабе, т. е. на оси  $\omega$  наносятся отметки, соответствующие  $\lg\omega$ , но около отметок указываются действительные значения  $\omega$  (рис. 2.4).

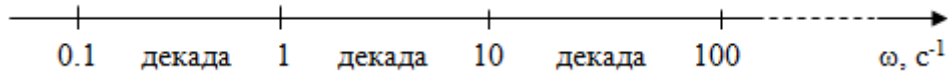


Рис. 2.4. Ось абсцисс для ЛАФЧХ

Начало координат может быть помещено в любой точке оси  $\omega$  в зависимости от того, в каком интервале частот находится соответствующий диапазон частот системы. Необходимо помнить, что точка  $\omega = 0$  лежит в  $-\infty$  и никогда не отмечается на графиках ЛАФЧХ. Равномерной единицей на оси частот является декада – любой отрезок, на котором значение частоты увеличивается в десять раз. Значения частоты откладываются в радианах в секунду ( $\text{с}^{-1}$ ).

По оси ординат при построении ЛАЧХ откладывается величина  $20\lg A(\omega) = 20\lg|W(j\omega)|$ , единицей измерения для которой является децибел (дБ). Обычно логарифмическую амплитуду обозначают через  $L = 20\lg A = 20\lg|W(j\omega)|$ . Ось ординат ЛАЧХ показана на рис. 2.5. Начало оси ординат  $L = 0$  соответствует значению  $A = 1$ , т. е. равенству амплитуд входного и выходного сигналов системы. Поэтому верхняя полуплоскость ЛАЧХ соответствует значениям  $A > 1$  (усиление амплитуды), а нижняя полуплоскость – значениям  $A < 1$  (ослабление амплитуды).

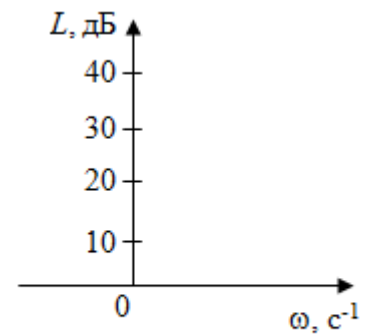


Рис. 2.5. Ось ординат ЛАФЧХ

При построении логарифмической фазочастотной характеристики (ЛФЧХ) частота  $\omega$  откладывается на оси абсцисс по-прежнему в логарифмическом масштабе, а значения углов фазового сдвига наносятся на оси ординат в обычном масштабе в угловых градусах. Возможный вид совместно построенных ЛАЧХ и ЛФЧХ показан на рис. 2.6.

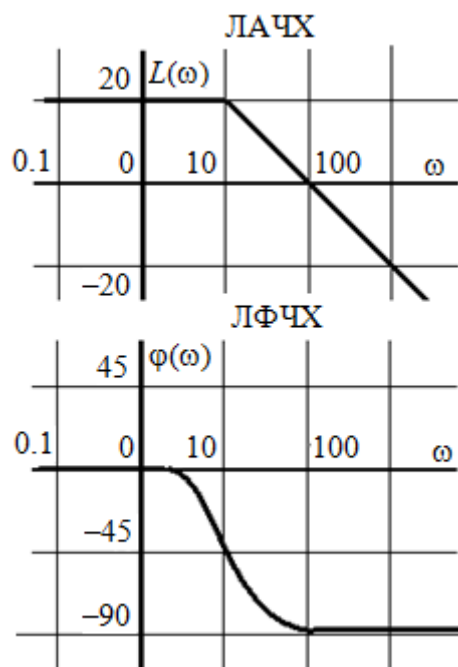


Рис. 2.6. Совместно построенные ЛАЧХ и ЛФЧХ

## 2.2. Типовые звенья

Динамическим звеном называют устройство любого физического вида и конструктивного оформления, представленное определенным дифференциальным уравнением.

В соответствии с определением классификация динамических звеньев производится по виду дифференциального уравнения, а именно, по его порядку. Так как одними и теми же дифференциальными уравнениями могут описываться устройства любого типа (электрические, электромеханические, гидравлические, тепловые), то такое предположение позволяет использовать для проектирования различных устройств одинаковые подходы.

Любую систему можно представить в виде соединения типовых динамических звеньев. Число таких звеньев невелико и определяется типом нулей и полюсов.

Как следует из представления модели в форме пространства состояний, для реализации любой физически осуществимой передаточной функции достаточно двух типов звеньев: интеграторов и усилителей. Если степень числителя передаточной функции  $m$  превышает степень знаменателя  $n$ , то необходимо звено дифференцирующего типа.

В теории управления состав типовых звеньев несколько расширен, исходя из соображения удобства, необходимы звенья, моделирующие часто встречающиеся случаи, а также позволяющие представление передаточных функций общего вида последовательным и параллельным соединением типовых звеньев.



Большинство систем может быть представлено совокупностью относительно звеньев с передаточными функциями невысокого порядка. Такие звенья называются типовыми.

На рис. 2.7 приведена классификация типовых динамических звеньев.

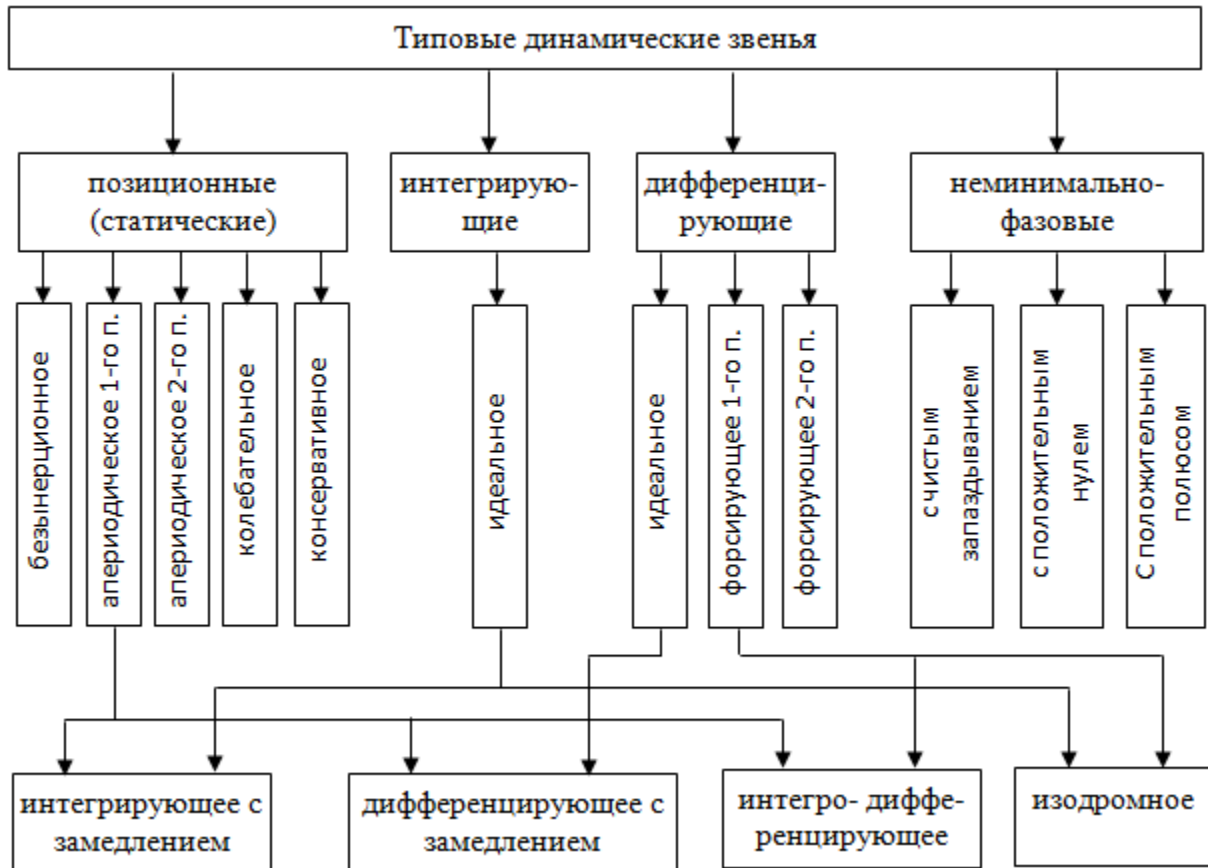


Рис. 2.7. Классификация типовых динамических звеньев

Рассмотрим наиболее часто используемые типовые звенья.

### 2.2.1. Безынерционное звено (П-регулятор)

Уравнение движения безынерционного звена имеет вид:

$$Y = k \cdot X .$$

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = k .$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Изображение переходной функции определяется как:

$$h(s) = X(s) \cdot W(s) = \frac{1}{s} \cdot k.$$

Переходная характеристика звена (рис. 2.8, а) определяется как:

$$h(t) = k \cdot 1(t),$$

Весовая характеристика (рис. 2.8, б) определяется как:

$$w(t) = k \cdot \delta(t).$$

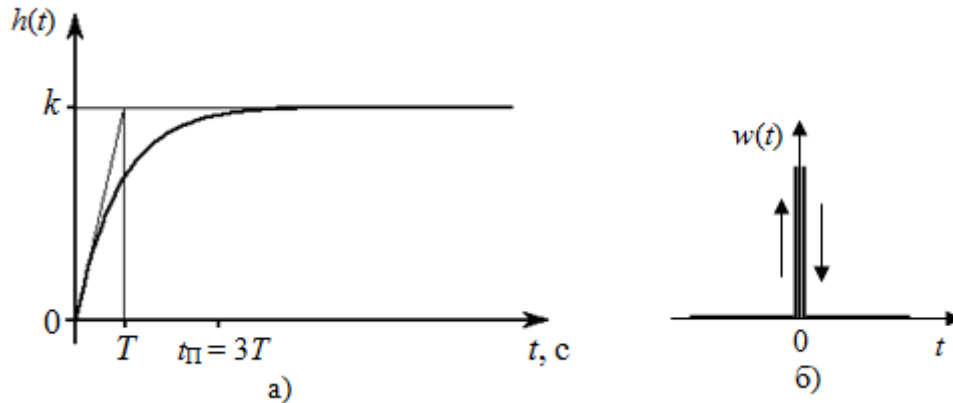


Рис. 2.8. Временные характеристики: а) переходная; б) весовая

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией (рис. 2.9, а) вида:

$$W(j\omega) = k.$$

Исходя из этого, АЧХ звена – точка на комплексной плоскости (рис. 2.9, б), что следует из выражения:

$$A(\omega) = k.$$

ЛЧХ – прямая параллельная оси частот (рис. 2.9, в), следует из выражения:

$$L(\omega) = 20 \lg(k).$$

ФЧХ – прямая, лежащая на оси частот (рис. 2.9, г), следует из выражения:

$$\varphi(\omega) = 0.$$

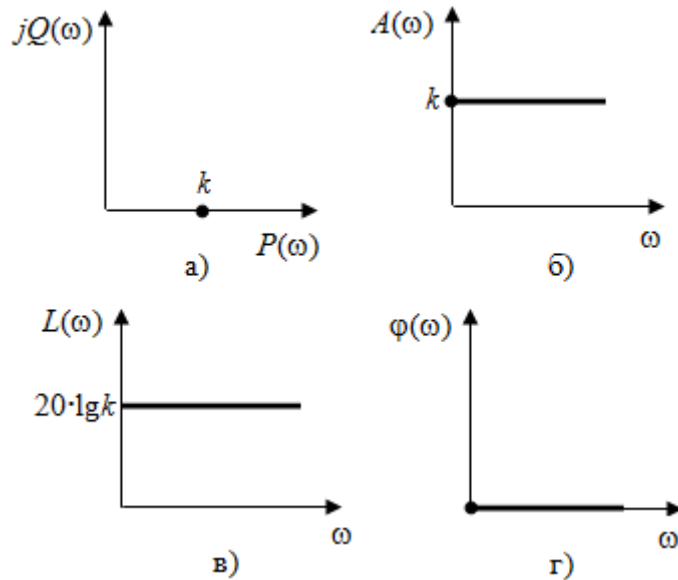


Рис. 2.9. Частотные характеристики: а) АФЧХ; б) АЧХ; в) ЛЧХ; г) ФЧХ

### 2.2.2. Аperiodическое звено первого порядка

Уравнение движения для безинерционного звена имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T} \cdot (k \cdot x - y).$$

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{k}{1 + Ts}.$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Изображение переходной функции определяется как:

$$h(s) = X(s) \cdot W(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{1 + Ts}.$$

Корни характеристического уравнения  $D(s) = s^2T + s = 0$  определяются как:

$$q_1 = 0; \quad q_2 = \frac{1}{T}.$$

Выполняя обратное преобразование изображения переходной характеристики  $h(s)$  получаем:

$$h(t) = \frac{k}{2 \cdot Ts + 1} \Big|_{s=0} \cdot e^{0t} + \frac{k}{2 \cdot Ts + 1} \Big|_{s=-1/T} \cdot e^{-t/T} = k \cdot \left(1 - e^{-t/T}\right)$$

Выполняя аналогичные преобразования над изображением весовой функции

$$w(s) = W(s)$$

получаем выражение для определения весовой функции  $w(t)$ .

$$w(t) = \frac{k}{T} \Big|_{s=-1/T} \cdot e^{-1/T} = \frac{k}{T} \cdot e^{-1/T}$$

Временные характеристики звена приведены на рис. 2.10.

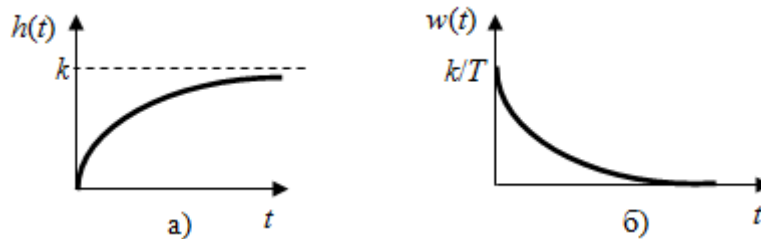


Рис. 2.10. Временные характеристики: а) переходная; б) весовая

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

Вещественная  $P(\omega)$  и мнимая  $Q(\omega)$  частотные характеристики звена определяются соответственно:

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + (\omega T)^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{k\omega T}{1 + (\omega T)^2}.$$

АФЧХ звена (рис. 2.11, а) определяется как:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{k}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{k\omega T}{1 + (\omega T)^2}.$$

АЧХ звена (рис. 2.11, б) определяется как:

$$A(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}.$$

ЛЧХ (рис. 2.11, в) определяется как:

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{k}{1 + (\omega T)^2} \right).$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ используется выражение вида:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg(k) & \text{при } \omega \ll \frac{1}{T} \\ 20 \lg(k) - 20 \lg(\omega T) & \text{при } \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}.$$

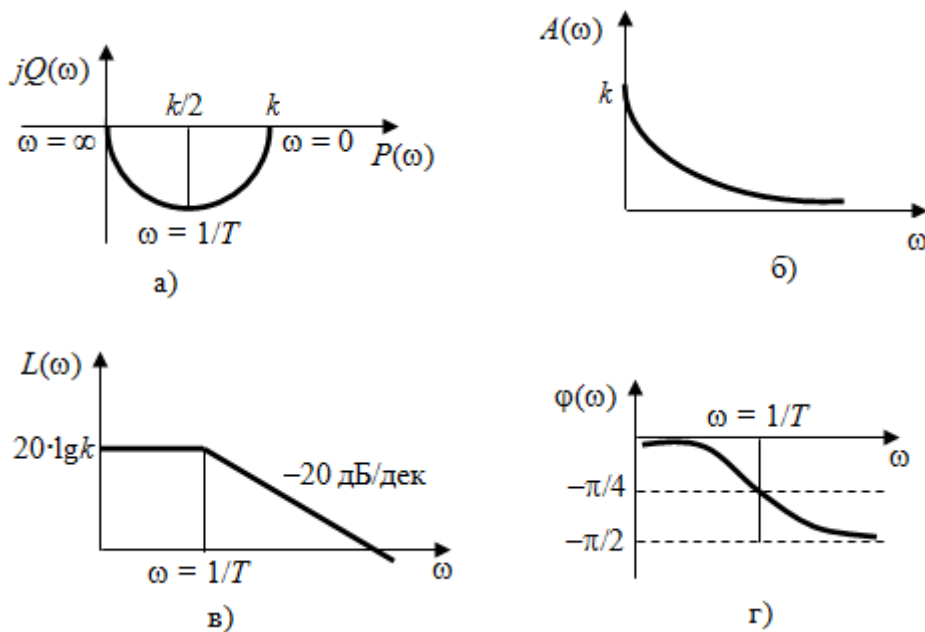


Рис. 2.11. Частотные характеристики: а) АФЧХ; б) АЧХ; в) ЛЧХ; г) ФЧХ

ФЧХ (рис. 2.11, г) определяется как:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\omega T).$$

### 2.2.3. Аperiodическое звено второго порядка

Уравнение движения для колебательного звена имеет вид:

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx, \quad (2.5)$$

где  $T_1, T_2$  – постоянные времени звена.

Выполняя преобразование Лапласа над уравнением (2.5), получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}. \quad (2.6)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0. \quad (2.7)$$

В зависимости от значений  $T_1$  и  $T_2$  уравнения (2.7) апериодическое звено второго порядка имеет различный вид и три различных названия:

- а) аperiодическое звено второго порядка;
- б) колебательное звено второго порядка;
- в) консервативное звено.

***Апериодическое звено второго порядка.***

Если в уравнении (2.5) выполняется неравенство  $T_1 \geq 2T_2$ , то корни вещественные и равны:

$$T_3, T_4 = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2} \text{ — новые постоянные времени.}$$

Тогда передаточная функция (2.6) примет вид:

$$W(s) = \frac{k}{(T_3 s + 1) \cdot (T_4 s + 1)}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что апериодическое звено второго порядка — это комбинация двух апериодических звеньев первого порядка.

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Переходная характеристика звена (рис. 2.12, а) определяется как:

$$h(t) = k \cdot \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right)$$

Весовая характеристика звена (рис. 2.12, б) определяется как:

$$w(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \cdot \left( e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right).$$

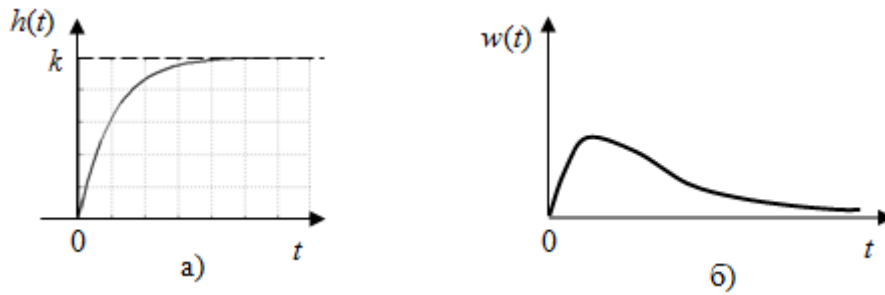


Рис. 2.12. Временные характеристики: а) переходная; б) весовая

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функции вида:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j\omega T}.$$

Вещественная  $P(\omega)$  и мнимая  $Q(\omega)$  частотные характеристики звена определяются соответственно:

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (\omega T)^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{k\omega T}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (\omega T)^2}.$$

АФЧХ звена (рис. 2.13, а) определяется как:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (\omega T)^2} - j\frac{k\omega T}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (\omega T)^2}.$$

АЧХ звена (рис. 2.13, б) определяется как:

$$A(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_3^2\omega^2)^2} \cdot \sqrt{(1 - T_4^2\omega^2)^2}}.$$

ЛЧХ (рис. 2.11, в) определяется как:

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1 + T_3^2\omega^2} - 20\lg\sqrt{1 + T_4^2\omega^2}.$$

ФЧХ (рис. 2.13, г) определяется как:

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_3\omega - \arctg T_4\omega.$$

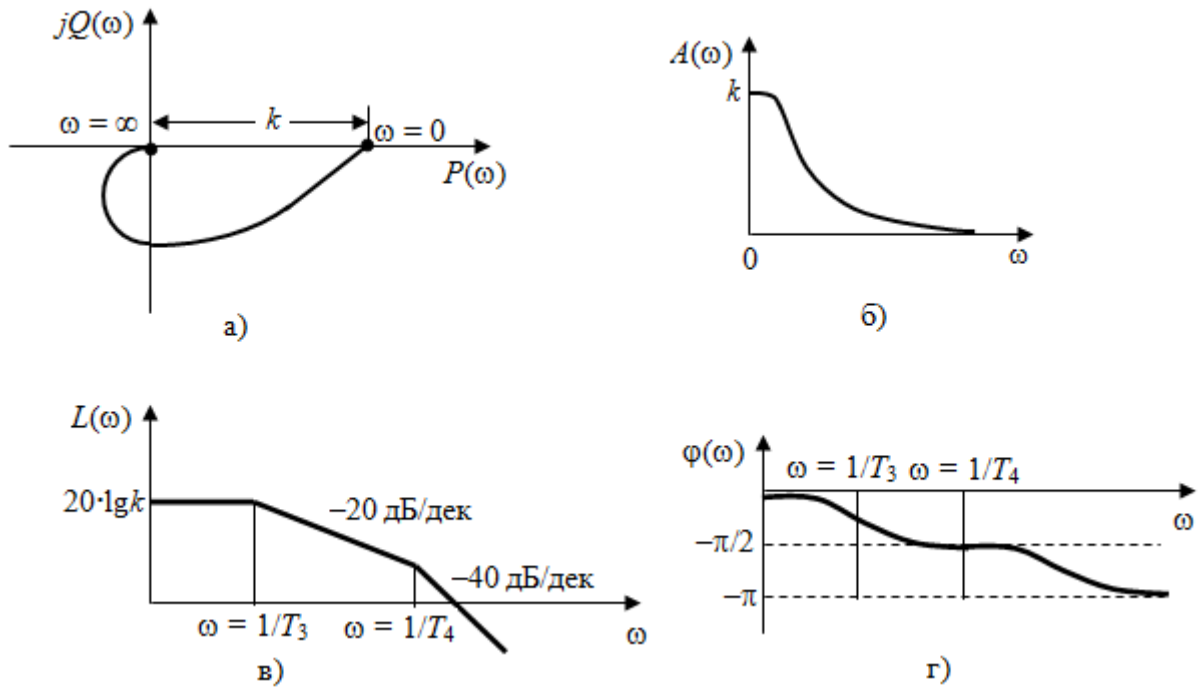


Рис. 2.13. Частотные характеристики: а) АФЧХ; б) АЧХ; в) ЛЧХ; г) ФЧХ

### ***Колебательное звено второго порядка.***

Если в уравнении (2.5) выполняется неравенство  $T_1 < 2T_2$ , то корни уравнения характеристического уравнения комплексные и уравнение (2.7) запишется в виде:

$$T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0,$$

где  $T$  – постоянная времени, определяющая угловую частоту свободных колебаний  $\lambda = \frac{1}{T}$ ;

$\xi$  – коэффициент затухания, лежащий в пределах  $0 < \xi < 1$ .

Передаточная функция (2.6) запишется в виде:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}.$$

Переходная характеристика запишется в виде:

$$h(t) = k \cdot \left( 1 - \frac{1}{qT} e^{-\frac{\xi t}{T}} \sin(qt + Q) \right), \quad (2.9)$$

где  $q = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$ ,  $Q = \arctg \frac{qT}{\xi}$ .

Из (2.9) видно, что ПХ зависит коэффициента затухания (рис. 2.14).



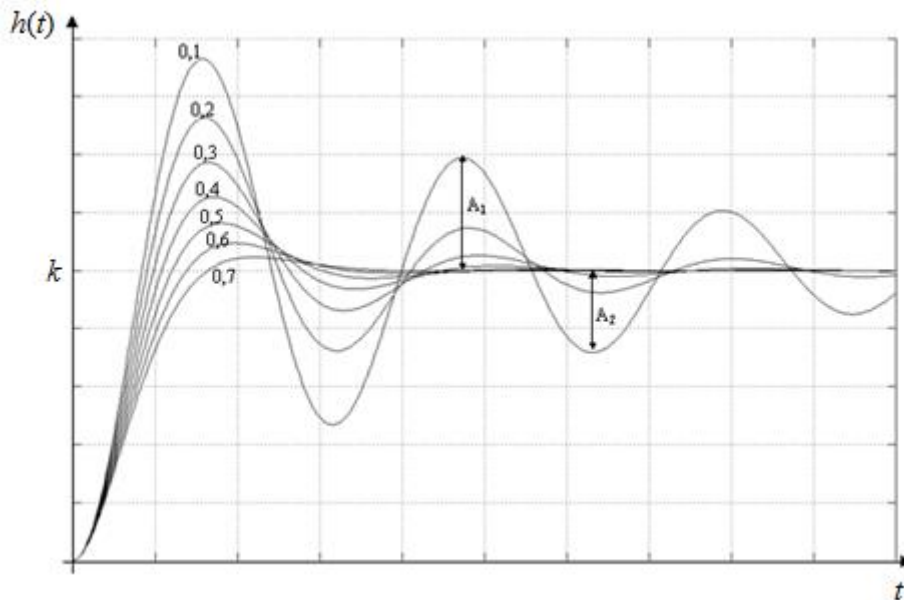


Рис. 2.14. Переходные характеристики для  $0.1 < \xi < 0.7$

ФЧХ представлена на рис. 2.15.

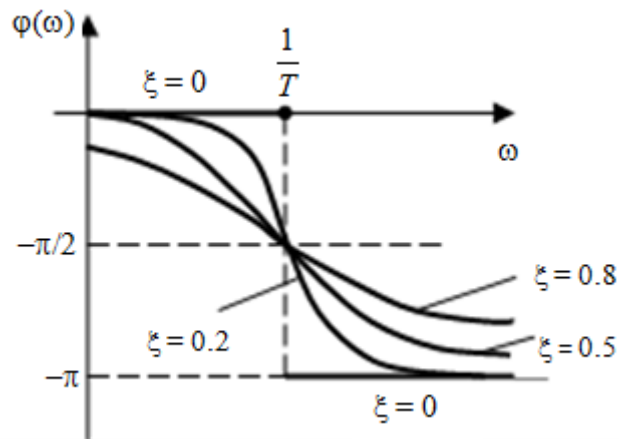


Рис. 2.15. ФЧХ для  $0.2 < \xi < 0.8$

**Консервативное звено.**

Консервативно звено является частным случаем колебательного звена при  $\xi = 0$ .

Передаточная функция (2.6) запишется в виде:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}.$$

Переходная функция:

$$h(t) = k \cdot \left( 1 - \cos \frac{t}{T} \right).$$

Весовая функция:

$$w(t) = \frac{k}{T} \sin \frac{t}{T}.$$

Таким образом, временные характеристики (рис. 2.15) соответствуют незатухающим колебаниям с угловой частотой  $\frac{1}{T}$ .

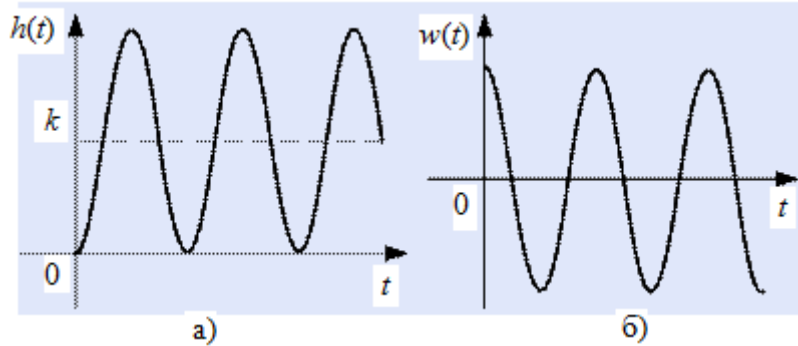


Рис. 2.15. Временные характеристики: а) переходная; б) весовая

#### 2.2.4. Интегрирующее звено (И-регулятор)

Уравнение движения для интегрирующего звена имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = kx.$$

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получим выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{k}{s}$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Переходная характеристика звена (рис. 2.16, а) определяется как

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2} \right\} = kt.$$

Весовая характеристика (рис. 2.16, б) определяется как:

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{s} \right\} = k.$$

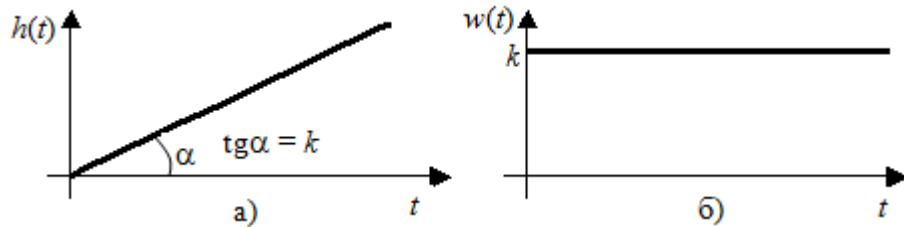


Рис. 2.16. Переходная и весовая характеристики

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функции вида:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}.$$

Вещественная  $P(\omega)$  и мнимая  $Q(\omega)$  частотные характеристики звена (рис. 2.17, а) определяются как:

$$P(\omega) = 0,$$

$$Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}.$$

АЧХ звена (рис. 2.17, б) определяется как:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}.$$

ЛАЧХ определяется как:

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{k}{\omega} \right).$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ (рис. 2.17, в) воспользуемся выражением вида:

$$L(\omega) = 20 \lg(k) - 20 \lg(\omega).$$

ФЧХ (рис. 2.17, г) определяется как:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\frac{\pi}{2}.$$

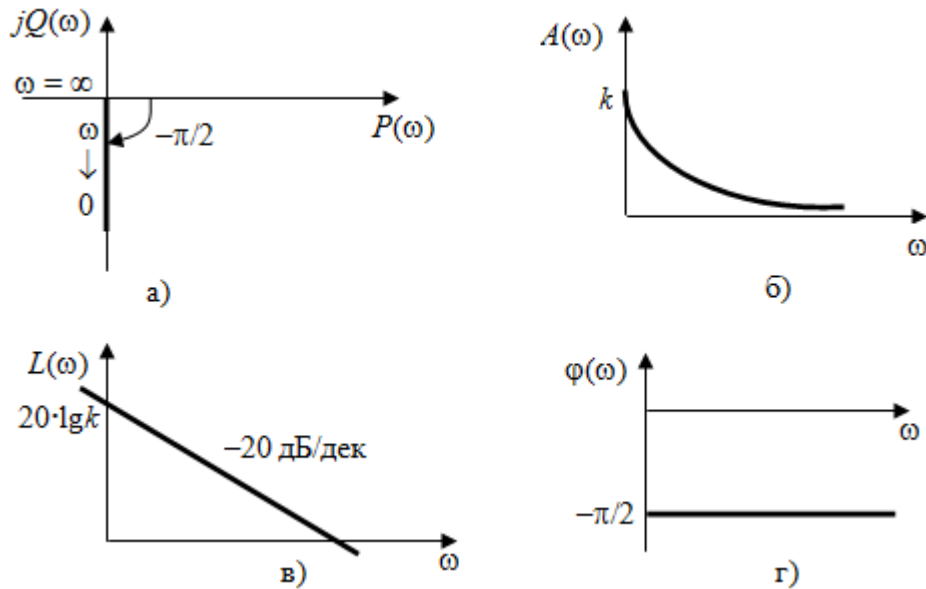


Рис. 2.17. Частотные характеристики: а) АФЧХ; б) АЧХ; в) ЛЧХ; г) ФЧХ

### 2.2.5. Дифференцирующее звено (Д-регулятор)

Уравнение движения для дифференцирующего звена имеет вид

$$y = k \frac{dx}{dt}.$$

Выполнив преобразование Лапласа получим выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = ks.$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Переходная характеристика дифференцирующего звена (рис. 2.18, а) определяется как:

$$h(t) = L^{-1}\{k\} = k \cdot \delta(t),$$

весовая характеристика (рис. 2.18, б) запишется как:

$$w(t) = k \dot{\delta}(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

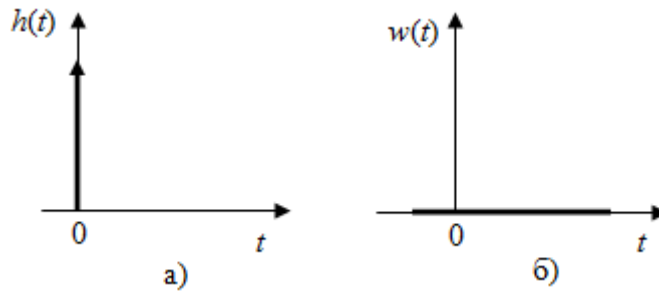


Рис. 2.18. Временные характеристики: а) переходная; б) весовая

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = j\omega k .$$

Вещественная  $P(\omega)$  и мнимая  $Q(\omega)$  частотные характеристики звена (рис. 2.19, а) определяются как:

$$P(\omega) = 0 ;$$

$$Q(\omega) = -k\omega .$$

АЧХ звена (рис. 2.19, б) определяется как:

$$A(\omega) = k\omega .$$

ЛАЧХ звена определяется как:

$$L(\omega) = 20\lg(k\omega) .$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ (рис. 2.19, в) воспользуемся выражением вида:

$$L(\omega) = 20\lg(k) + 20\lg(\omega) .$$

ФЧХ звена (рис. 2.19, г) определяется как:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \frac{\pi}{2} .$$

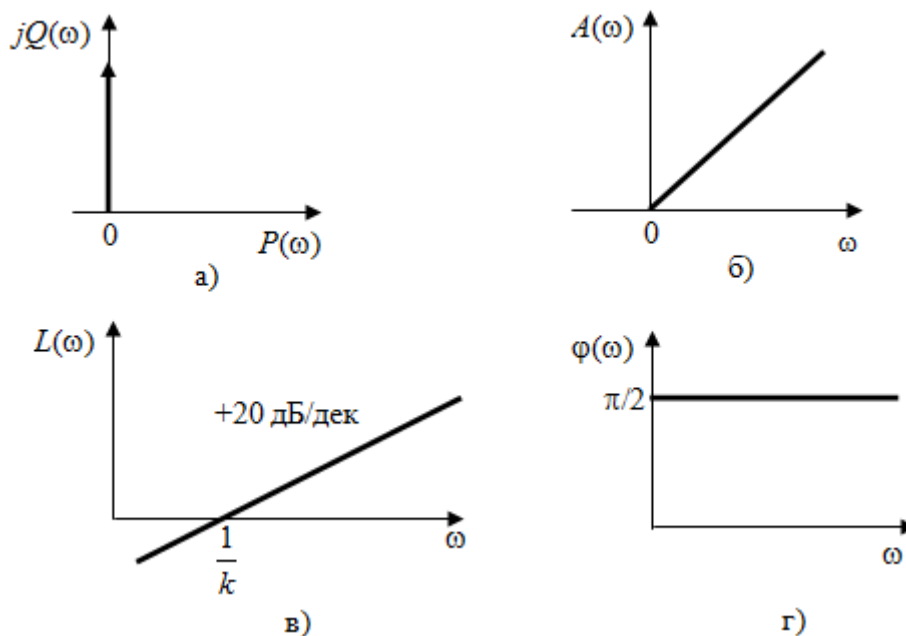


Рис. 2.19. Частотные характеристики: а) АФЧХ; б) АЧХ; в) ЛЧХ; г) ФЧХ

## 2.3. Структурные схемы

Структурной схемой САУ называется графическая форма представления математической модели системы в виде соединения отдельных звеньев, каждое из которых задано каким-либо математическим оператором преобразования входного сигнала в выходной. Операторы преобразования могут быть заданы символами преобразования во временной области или в области изображений (передаточные функции) или с помощью статических и динамических характеристик. Звенья представляются на структурных схемах с помощью прямоугольников. Соединение их осуществляется стрелками, указывающими направления передачи сигналов управления.

Прохождение сигналов управления против направления, указанного стрелками, невозможно.

### 2.3.1. Преобразование структурных схем

Преобразование структурных схем линейных непрерывных систем управления базируется на выполнении двух важнейших принципов линейных преобразований: 1) аддитивности или суперпозиции (наложения) и 2) коммутативности (перестановки местами).

Преобразование структурных схем формулируется в виде правил преобразований, поэтому далее будем рассмотрено совокупность таких правил.

### ***Последовательное соединение звеньев***

На структурной схеме (рис. 2.20) представлено последовательное соединение звеньев.

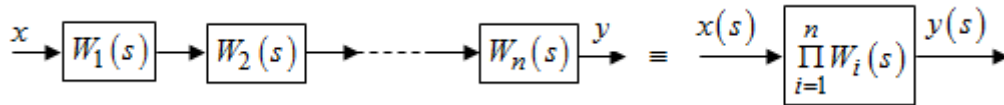


Рис. 2.20. Структурная схема последовательно соединенных звеньев

Передаточная функция запишется в виде:

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s)$$

**Правило:** Передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

### ***Параллельные соединения звеньев***

На структурной схеме (рис. 2.21) представлено параллельное соединение звеньев.

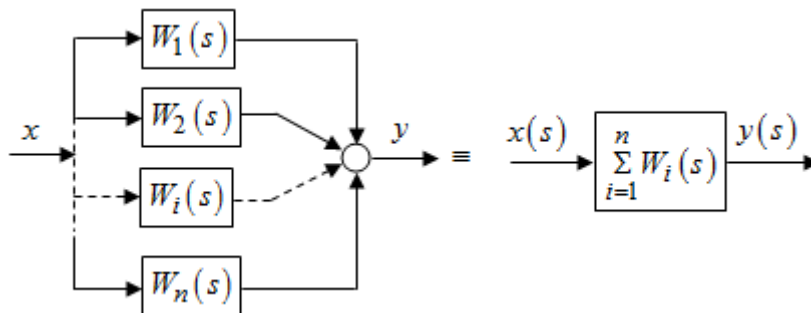


Рис. 2.21. Структурная схема параллельно соединенных звеньев

Передаточная функция запишется в виде:

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s).$$

**Правило:** Передаточная функция параллельного соединения непрерывных звеньев равна сумме их передаточных функций.

### ***Соединение с обратной связью***

На структурной схеме (рис. 2.22) представлено соединение звеньев с обратной связью.

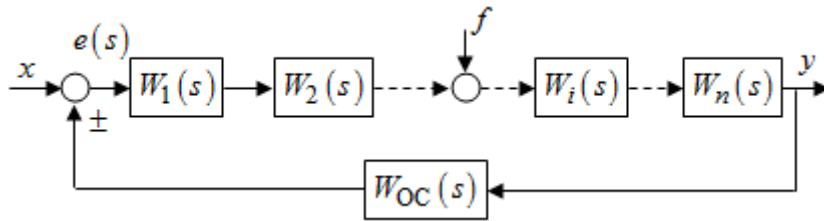


Рис. 2.22. Структурная схема соединенных звеньев с обратной связью

Сигнал на выходе элемента сравнения:

$$e(s) = x \mp W_{OC}(s) y$$

Выходной сигнал соединения:

$$y = \prod_{i=1}^n W_i(s) \cdot e(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s) \cdot x \mp \prod_{i=1}^n W_i(s) \cdot W_{OC}(s) \cdot y = \frac{\prod_{i=1}^n W_i(s) x}{1 \mp \prod_{i=1}^n W_i(s) W_{OC}(s)}$$

Передаточная функция замкнутого контура по управлению:

$$\Phi_x(s) = \frac{\prod_{i=1}^n W_i(s)}{1 \mp \prod_{i=1}^n W_i(s) W_{OC}(s)}$$

Если обратная связь единичная, тогда:

$$\Phi_x(s) = \frac{\prod_{i=1}^n W_i(s)}{1 \mp \prod_{i=1}^n W_i(s)}$$

Передаточная функция замкнутого контура по возмущению:

$$\Phi_f(s) = \frac{W_i(s) \cdot W_{i+1}(s) \cdot \dots \cdot W_n(s)}{1 \mp \prod_{i=1}^n W_i(s) W_{OC}(s)}$$

### ***Перестановка местами звеньев структурной схемы***

#### ***- Перестановка местами динамических звеньев***

На рис. 2.23 показан вариант перестановки местами динамических звеньев.



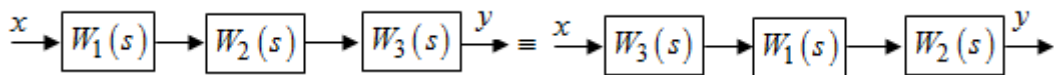


Рис. 2.23. Вариант перестановки местами динамических звеньев

**Правило:** В любой последовательной цепи непрерывных динамических звеньев их можно менять местами в произвольном порядке.

**Перестановка местами узлов суммирования и динамических звеньев**

На рис. 2.24 показан вариант перестановки местами узлов суммирования и динамических звеньев.

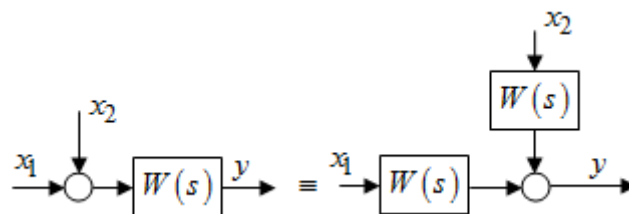


Рис. 2.24. Вариант перестановки местами узлов суммирования и динамических звеньев

**Правило:** При переносе узла суммирования через динамическое звено необходимо включить в подходящее к узлу ветви звеня с передаточной функцией звена.

**Перестановка местами узлов разветвления и других звеньев структурной схемы**

**Правило:** при переносе узла разветвления сигналов через динамическое звено необходимо в отходящие от узла ветви добавить звеня с передаточной функцией звена, если перенос выполняется против направления передачи сигналов управления (рис. 2.25, а), и звеня с обратной передаточной функцией, если перенос происходит по направлению передачи сигналов управления (рис. 2.25, б).

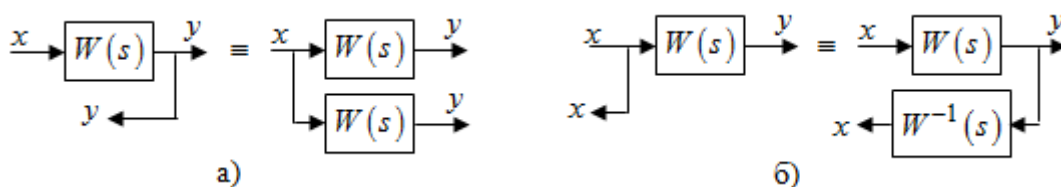


Рис. 2.25. Варианты переноса узла разветвления через динамическое звено

**Инверсия направления прямого пути**

**Правило:** В любом непрерывном прямом пути можно поменять направление передачи сигналов управления, поменяв на обратные переда-

точные функции звеньев пути и поменяв на обратные знаки суммирования внешних сигналов (рис. 2.26).

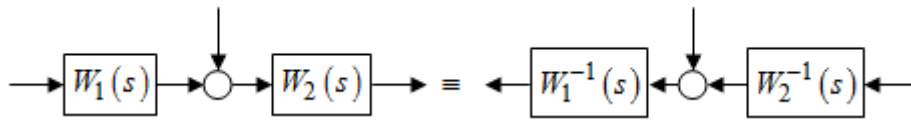


Рис. 2.26. Инверсия направления прямого пути

### ***Инверсия замкнутого контура***

**Правило:** В любом замкнутом непрерывном контуре можно поменять местами прямой и обратный каналы, заменив их передаточные функции на обратные и заменив на обратные знаки суммирования внешних сигналов, кроме основного узла суммирования.

Это правило получается после двукратного применения правила инверсии пути к прямому и обратному каналам контура. Рис. 2.27. иллюстрирует результат инвертирования контура.

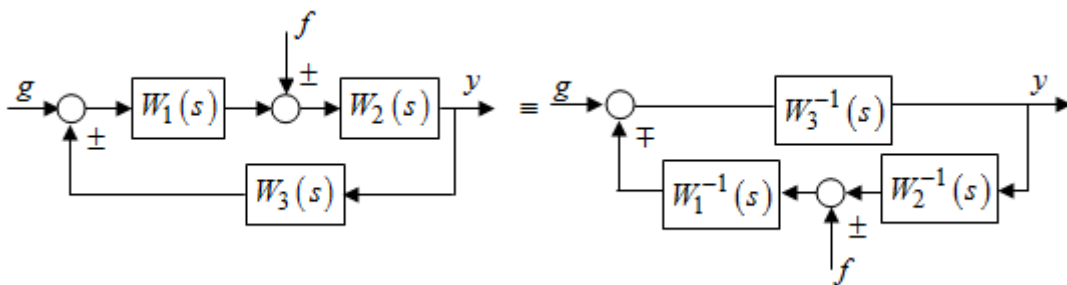


Рис. 2.27. Инверсия замкнутого контура

### **2.3.2. Детализированные структурные схемы**

Кроме общих структурных схем широко используются детализированные структурные схемы, состоящие только из безинерционных масштабных звеньев и идеальных интегрирующих звеньев с полностью вскрытыми связями между ними.

Детализированная структурная схема (ДСС) составляется из исходной общей схемы путем преобразования звеньев с так называемыми «сложными» передаточными функциями.

«Детализация» звена со «сложной» передаточной функцией осуществляется в следующей последовательности:

- 1) записывается операторное уравнение звена по исходной передаточной функции.

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{x_1(s)}{x_2(s)}, m \leq n.$$

$$x_2(s) \cdot [a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n] = x_1(s) \cdot [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m];$$

2) Уравнение разрешается относительно старшей производной выходной величины  $x_2$ :

$$a_0 s^n x_2 = x_1 \cdot [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m] - x_2 \cdot [a_1 s^{n-1} + \dots + a_n];$$

3) Обе части уравнения делятся на коэффициент при  $x_2$  в левой части с целью получить выражение для  $x_2$

$$x_2 = x_1 \cdot \left[ \frac{b_0}{a_0} s^{m-n} + \frac{b_1}{a_0} s^{m-n-1} + \dots + \frac{b_m}{a_0} s^{-n} \right] - x_2 \cdot \left[ \frac{a_1}{a_0} s^{-1} + \frac{a_2}{a_0} s^{-2} + \dots + \frac{a_n}{a_0} s^{-n} \right].$$

Пользуясь указанной последовательностью удается легко построить ДСС для звеньев с передаточными функциями невысокого порядка ( $n \leq 2$ ).

В случае исходной передаточной функции с  $n > 2$  целесообразно пользоваться процедурой, называемой непосредственной декомпозицией. Суть ее заключается в том, что вводится фиктивная переменная  $x(s)$  и на нее умножается числитель и знаменатель передаточной функции:

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n} \frac{x(s)}{x(s)} = \frac{x_2(s)}{x_1(s)}.$$

Приравнивание числителя и знаменателя дает

$$x_2(s) = (b_0 s^m + \dots + b_m) x(s) \quad (2.10)$$

$$x_1(s) = (a_0 s^n + \dots + a_n) x(s) \quad (2.11)$$

Последнее выражение используется для определения  $x(s)$  путем записи его относительно старшей производной с последующим делением на коэффициент при старшей производной:

$$a_0 s^n x(s) = x_1(s) - a_1 s^{n-1} x(s) - \dots - a_n x(s),$$

$$x(s) = \frac{1}{a_0 s^n} \cdot [x_1(s) - a_1 s^{n-1} x(s) - \dots - a_n x(s)].$$

После определения  $x(s)$  строится схема вычисления  $x_2(s)$  согласно выражения (2.10). Общая схема ДСС "сложного" звена представлена на рис. 2.28.

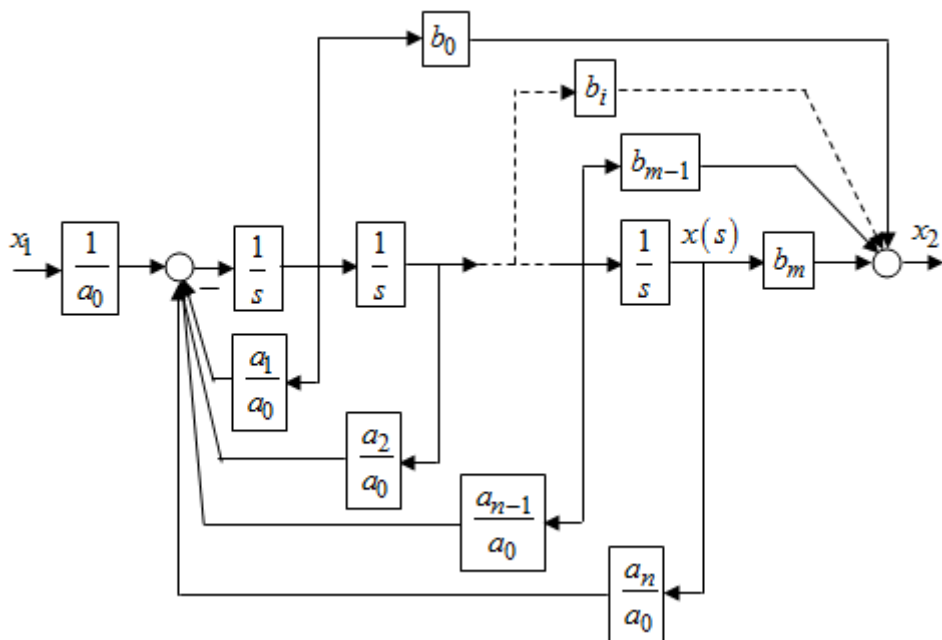


Рис. 2.28. Общая схема ДСС

Проиллюстрируем на примерах.

**Пример 1:** Построить ДСС звена с передаточной функцией  $W(s) = \frac{ks}{Ts+1}$ , иначе можно записать как  $\frac{x_2}{x_1} = \frac{ks}{Ts+1}$ .

Выполнив последовательно преобразования:

$$x_2Ts + x_2 = ksx_1; \quad x_2Ts = ksx_1 - x_2,$$

получим в математическом виде:

$$x_2 = \frac{ks}{Ts} \cdot x_1 - \frac{1}{Ts} \cdot x_2 = \frac{k}{T} \cdot x_1 - \frac{1}{Ts} \cdot x_2,$$

или в графическом виде (рис. 2.29):

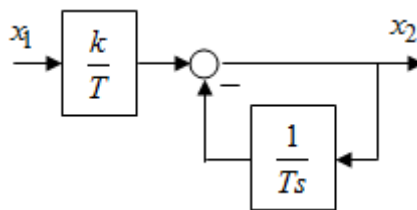


Рис. 2.29. ДСС звена  $W(s) = \frac{ks}{Ts+1}$

**Пример 2:** Построить ДСС стандартного звена 2-го порядка с передаточной функцией  $W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\epsilon Ts + 1}$ , иначе можно записать как  $\frac{x_2}{x_1} = \frac{k}{T^2s^2 + 2\epsilon Ts + 1}$ .

Выполнив последовательно преобразования:

$$T^2 s^2 x_2 + 2\varepsilon T s x_2 + x_2 = k x_1;$$

получим в математическом виде:

$$x_2 = \frac{1}{T^2 s^2} \cdot (k x_1 - 2\varepsilon T s x_2 - x_2),$$

или в графическом виде (рис. 2.30):

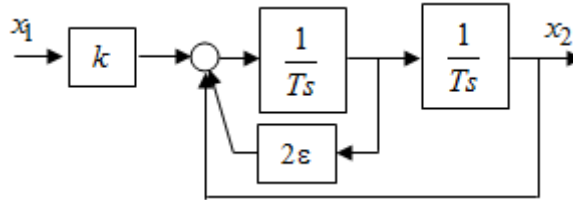


Рис. 2.30. ДСС звена  $W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\varepsilon T s + 1}$

В заключении отметим, что ДСС непрерывных систем нашли широкое применение для составления уравнений состояния, а также для составления и расчета параметров модели при аналоговом моделировании.

### Вопросы для самопроверки

1. Каково назначение математического описания систем?
2. Что такое динамика системы?
3. Чем отличается математическое описание динамики системы от описания ее статики?
4. Что представляет собой условие физической реализуемости системы?
5. Каким образом линеаризуются дифференциальные уравнения?
6. Назовите формы записи линеаризованных уравнений.
7. Каким образом перейти к первой форме записи дифференциального уравнения звена? Как в этом случае называются коэффициенты?
8. Как перейти от дифференциального уравнения к операторному?
9. Дайте определение передаточной функции.
10. Как по дифференциальному уравнению звена найти его передаточную функцию?
11. Что такое динамическое звено и его характеристика?
12. Дайте определение основных характеристик.
13. Какие частотные характеристики используются для исследования систем?
14. Почему ЛЧХ нашли большое применение в инженерной практике?
15. По каким признакам классифицируются типовые динамические звенья?
16. Перечислите группы основных типов звеньев.
17. Что представляет собой структурная схема системы управления?

18. Какие способы соединений звеньев используются в системах?
19. Как находятся передаточные функции смешанных соединений звеньев?
20. Каким образом строятся логарифмические частотные характеристики разомкнутой цепи звеньев? Постройте ЛЧХ типовых звеньев.

### 3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ

#### 3.1. Устойчивость линейных непрерывных систем управления

Устойчивость систем автоматического управления является важнейшей характеристикой их работоспособности. Неустойчивая система является неработоспособной. Обеспечение устойчивой работы проектируемой или создаваемой системы управления является первоочередной задачей разработчика этой системы.

Под устойчивостью линейной системы понимается свойство затухания переходных процессов во всех элементах системы с течением времени.

Если представить реакцию системы на входной сигнал как сумму вынужденной (установившейся) составляющей и переходной (свободной) составляющей

$$y(t) = y_y(t) + y_{св}(t),$$

то условие устойчивости формируется следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{св}(t) = 0.$$

Если  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{св}(t) = \infty$ , то система неустойчива.

##### 3.1.1. Общее условие устойчивости

Из анализа переходных составляющих выходной величины системы для различных корней характеристического уравнения системы следует, что условия устойчивости, сформулированные выше, выполняются, если все корни имеют отрицательные вещественные части. В частном случае вещественных корней они должны быть отрицательными. Только в этом случае все переходные составляющие будут стремиться с течением времени к нулю. Таким образом, для непрерывных систем общим условием устойчивости является нахождение всех корней характеристического уравнения замкнутой системы в левой полуплоскости плоскости корней (рис.

3.1). Если хотя бы один корень окажется в правой полуплоскости, система будет неустойчивой. Мнимая ось плоскости  $s$  является границей устойчивости. Причем, если  $s_i = 0$ , граница устойчивости называется апериодической. Если  $s_{1,2} = \pm j\omega$  (чисто мнимые корни, равноудаленные от начала координат), то граница устойчивости называется колебательной, так как система в этом случае совершает незатухающие колебания, постоянной амплитуды и частоты, равной  $\omega$ .

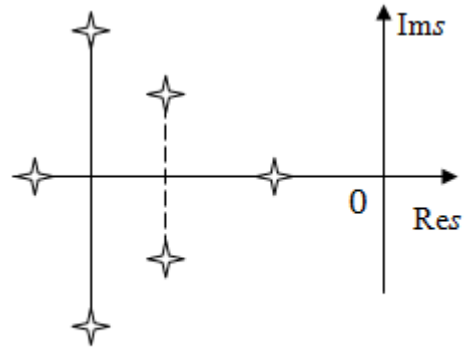


Рис. 3.1. Расположение корней устойчивой замкнутой системы

### 3.1.2. Критерии устойчивости

Вычисление корней уравнения, особенно высокой степени, затруднительно. Поэтому были разработаны критерии, позволяющие делать заключение об устойчивости системы без определения корней характеристического уравнения.

Различают два вида критериев устойчивости:

- 1) алгебраические;
- 2) частотные.

Критерии первого вида формируют ограничения на коэффициенты характеристического уравнения. Критерии второго вида базируются на анализе прохождения частотных характеристик замкнутой или разомкнутой системы.

#### 3.1.2.1. Алгебраические критерии устойчивости

Среди алгебраических критериев непрерывных систем наибольшее применение получили критерии Гурвица и Рауса. Рассмотрим их в указанной последовательности.

##### *Критерий Гурвица*

Из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

составляется таблица, называемая матрицей Гурвица по следующему правилу:

- 1) по диагонали сверху вниз записываются все коэффициенты, начиная с  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания индексов;
- 2) столбцы дополняются вверх коэффициентами с возрастающими индексами, вниз коэффициентами с убывающими индексами;
- 3) на месте коэффициентов с индексами больше  $n$  и меньше нуля проставляются нули.

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 & 0 \\
 a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n
 \end{vmatrix}$$

Сам критерий формируется следующим образом: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при  $a_1 > 0$  были положительными  $n$  главных диагональных определителя матрицы Гурвица.

Главные определители матрицы Гурвица имеют вид:

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \text{ и так далее.}$$

Частные случаи.

1. Система 1-го порядка, характеристическое уравнение которой  $a_0s + a_1 = 0$ , устойчива, если  $a_0 > 0$  и  $a_1 > 0$ , т. е. Если оба коэффициента характеристического уравнения положительны.

2. Система 2-го порядка (характеристическое уравнение  $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$ ) устойчива, если  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$  и  $a_1a_2 > 0$ , т. е. Если все три коэффициента положительны.

3. Положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым, но недостаточным условием устойчивости системы любого порядка.

4. Наличие хотя бы одного отрицательного коэффициента является признаком неустойчивого состояния системы.



5. Равенство нулю свободного коэффициента  $a_n = 0$ , означает, что система находится на границе устойчивости.

6. Равенство нулю любого другого коэффициента свидетельствует либо о неустойчивости системы, либо о нахождении ее на границе устойчивости.

Критерий Гурвица удобен не только для проверки устойчивости замкнутой системы. С его помощью легко выясняется влияние того или иного параметра системы на ее устойчивость, а также легко определяются границы значений параметра, в которых система остается устойчивой.

### **Критерий Рауса**

При использовании критерия Рауса для проверки устойчивости замкнутой системы составляется таблица Рауса (табл. 3.1). Она содержит  $n + 1$  строк и число столбцов, равное числу четных коэффициентов характеристического уравнения. В первой строке записываются коэффициенты с четными индексами, начиная с  $a_0$ , во второй – коэффициенты с нечетными индексами, начиная с  $a_1$ . Любой из остальных элементов таблицы определяется по выражению  $C_{i,j} = C_{i-2,j+1} - r_i \cdot C_{i-1,j+1}$ , где  $r_i = \frac{C_{i-2,1}}{C_{i-1,1}}$ ;  $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца таблица Рауса.

Таблица 3.1.

Коэффициенты $r_i$	$i$	Номер столбца			
		1	2	3	...
–	1	$C_{1,1} = a_0$	$C_{1,2} = a_2$	$C_{1,3} = a_4$	...
–	2	$C_{2,1} = a_1$	$C_{2,2} = a_3$	$C_{2,3} = a_5$	...
$r_3 = \frac{C_{1,1}}{C_{2,1}}$	3	$C_{3,1} = C_{1,2} - r_3 \cdot C_{2,2}$	$C_{3,2} = C_{1,3} - r_3 \cdot C_{2,3}$	$C_{3,3} = C_{1,4} - r_3 \cdot C_{2,4}$	...
$r_4 = \frac{C_{2,1}}{C_{3,1}}$	4	$C_{4,1} = C_{2,2} - r_4 \cdot C_{3,2}$	$C_{4,2} = C_{2,3} - r_4 \cdot C_{3,3}$	$C_{4,3} = C_{2,4} - r_4 \cdot C_{3,4}$	...
$r_5 = \frac{C_{3,1}}{C_{4,1}}$	5	$C_{5,1} = C_{3,2} - r_5 \cdot C_{4,2}$	$C_{5,2} = C_{3,3} - r_5 \cdot C_{4,3}$	$C_{5,3} = C_{3,4} - r_5 \cdot C_{4,4}$	...
...	...	...	...	...	...
$r_i = \frac{C_{i-2,1}}{C_{i-1,1}}$	$i$	$C_{i,1} = C_{i-2,2} - r_i \cdot C_{i-2,2}$	$C_{i,2} = C_{i-2,3} - r_i \cdot C_{i-1,3}$	$C_{i,3} = C_{i-2,4} - r_i \cdot C_{i-1,4}$	...
...	...	...	...	...	...
$r_{n+1} = \frac{C_{n-1,1}}{C_{n,1}}$	$n+1$	$C_{n+1,1} = C_{n-2,2} - r_{n+1} \cdot C_{n,2}$	Не составляются		

Критерий устойчивости Рауса формируется следующим образом.

Для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы элементы первого столбца таблицы Рауса были положительны.

При наличии отрицательных элементов в 1-ом столбце система будет неустойчивой. Число таких элементов равно числу корней характеристического уравнения, находящихся в правой полуплоскости плоскости  $s$ .

Если один из элементов первого столбца равен нулю, а остальные элементы положительны, то система будет находиться на границе устойчивости колебательного типа (характеристическое уравнение будет иметь пару чисто мнимых корней).

Если равен нулю  $(n + 1)$ -элемент или равны нулю  $k$  последних элементов 1-го столбца, система также будет находиться на границе устойчивости, а характеристическое уравнение будет иметь один или  $k$  нулевых корней.

Таблица и критерий Рауса положены в основу алгоритма и программы проверки устойчивости в ряде компьютерных пакетов анализа моделей различных систем.

### 3.1.2.2. Частотные критерии устойчивости

Среди частотных критериев устойчивости, используемых в практике анализа устойчивости непрерывных и дискретных систем автоматического управления, наибольшее признание получили критерий годографа характеристического полинома замкнутой системы (известный в отечественной литературе как критерий Михайлова) и критерий Найквиста, обеспечивающий определение устойчивости по виду частотных характеристик разомкнутой системы.

В основу названных выше критериев положено следствие из известного в теории функции комплексной переменной принципа аргумента. Оно устанавливает соответствие между числом корней в левой и правой полуплоскости и суммарным приращением аргумента вектора характеристического полинома замкнутой системы, при изменении частоты в диапазоне  $0 \leq \omega \leq +\infty$ . Рассмотрим это соответствие.

Характеристическое уравнение замкнутой непрерывной системы:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

где левая часть уравнения  $D(s)$  называется характеристическим полиномом. Его можно представить в соответствии с теоремой Безу следующим образом:

$$D(s) = a_0 \cdot (s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_n),$$

где  $s_i (i=1, 2, \dots, n)$  – корни характеристического уравнения  $D(s)=0$ ;  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ . На комплексной плоскости каждый корень может быть представлен вектором (рис. 3.2). Длина вектора  $|s_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2}$ , угол поворота от положительной вещественной полуоси равен аргументу  $\text{Arg} s_i = \arctg\left(\frac{\omega_i}{\alpha_i}\right)$ . Отдельные сомножители  $D(s)$  вида  $(s - s_i)$  могут быть представлены векторами, проведенными из точек  $s_i$  в точке  $s$ .

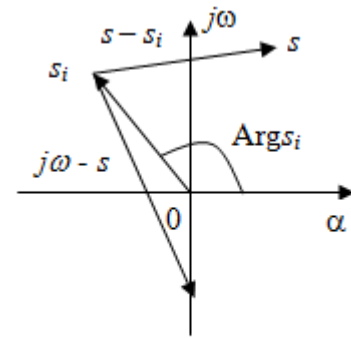


Рис. 3.2. Представление корней в виде векторов

Положим  $s = j\omega$ , тогда вектор  $(s - s_i) = (j\omega - s_i)$  будет скользить своим концом по мнимой оси при изменении частоты  $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ .

Приращение аргумента

$$D(s) = \sum_{\substack{s=j\omega \\ -\infty \leq \omega \leq \infty}} D(s) = \sum_{\substack{s=j\omega \\ -\infty \leq \omega \leq \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta \text{Arg}(j\omega - s_i),$$

причем корень  $s_i$ , расположенный в левой полуплоскости, обеспечивает приращение аргумента  $+\pi$  (рис. 3.3, а), а корень, находящийся в правой полуплоскости, дает  $\Delta \text{Arg} s_i = -\pi$  (рис. 3.3, б).

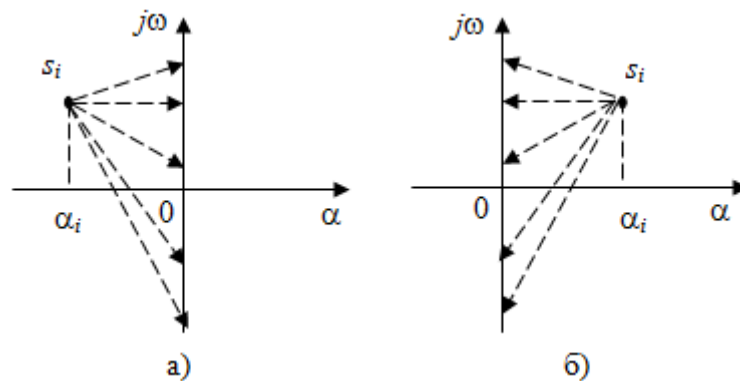


Рис. 3.3. Приращение аргумента в зависимости от расположения корней

Если общее число корней характеристического уравнения  $n$ , а в правой полуплоскости находится  $m$  корней, то суммарное приращение аргумента  $D(s)$ :

$$\sum_{i=1}^n \Delta \text{Arg}(j\omega - s_i) = (n - m) \cdot \pi - m \cdot \pi = (n - 2m) \cdot \pi.$$

Если изменять частоту только в положительном диапазоне  $0 \leq \omega \leq \infty$ , то суммарное приращение аргумента  $D(s)$  будет в 2 раза меньше:

$$\Delta \text{Arg} D(s) = (n - 2m) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Полученное соотношение положено в основу частотных критериев устойчивости непрерывных систем.

***Критерий годографа характеристического полинома***

На основании полученного в предыдущем параграфе соотношения для непрерывных систем и полагая, что в правой полуплоскости нет ни одного корня ( $m = 0$ ), находим, что

$$\Delta \text{Arg} D(s) = n \frac{\pi}{2}.$$

$s = j\omega$   
 $0 \leq \omega \leq \infty$

Отсюда вытекает следующая формулировка критерия.

Для устойчивости замкнутой непрерывной системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты в диапазоне  $0 \leq \omega \leq \infty$  годограф характеристического полинома начинался на положительной вещественной оси и обошел в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно  $n$  квадрантов, нигде не обращаясь в нуль и нигде не пересекаясь сам с собой.

Годографы устойчивых систем показаны на рис. 3.4, а, для неустойчивых систем на рис. 3.4, б.

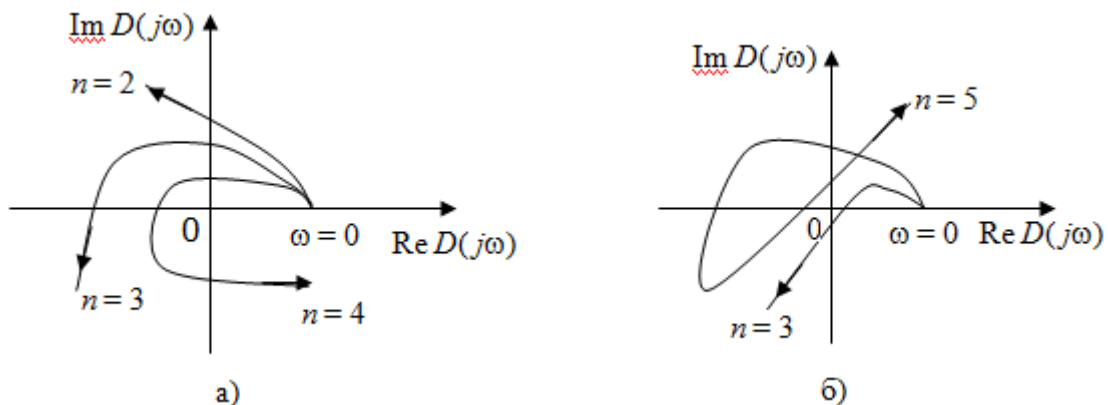


Рис. 3.4. Годографы: а) устойчивых систем; б) неустойчивых систем

Если систем находится на границе устойчивости, то годограф  $D(j\omega)$  проходит через начало координат.

### **Критерий Найквиста**

Критерий Найквиста позволяет оценивать устойчивость замкнутой системы автоматического управления по частотным характеристикам разомкнутой системы. В качестве частотных характеристик используется амплитудно-фазовая (АФХ) характеристика и ЛАФЧХ разомкнутой системы.

Рассмотрим сначала критерий Найквиста на базе АФХ разомкнутой системы.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m \leq n.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)},$$

где  $A(s) + B(s) = D(s)$  – характеристический полином замкнутой системы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(s) = 1 + W(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = \frac{D(s)}{A(s)}.$$

Заметим, что числитель  $\Phi(s)$  равен  $D(s)$  характеристическому полиному замкнутой системы, а знаменатель  $A(s)$  – характеристический полином разомкнутой системы. Заметим также, что степени числителя и знаменателя равны, так как  $m \leq n$ .

Предположим, что разомкнутая система устойчива, т. е. все корни  $A(s) = 0$  лежат в левой полуплоскости. Для того, чтобы и замкнутая система была устойчивой, необходимо, чтобы все корни  $D(s) = 0$  находились также в левой полуплоскости.

Положим  $s = j\omega$  и будем изменять  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . Согласно принципа аргумента

$$\Delta \text{Arg} \Phi(j\omega) = \Delta \text{Arg} D(j\omega) - \Delta \text{Arg} A(j\omega) = n \cdot \frac{\pi}{2} - n \cdot \frac{\pi}{2} = 0.$$

Это значит, что годограф вспомогательной функции  $\Phi(j\omega)$  при  $0 \leq \omega \leq \infty$  не будет охватывать начало координат (рис. 3.5, а). Заметим, что комплексная передаточная функция разомкнутой системы отличается от  $\Phi(j\omega)$  на единицу

$$W(j\omega) = \Phi(j\omega) - 1.$$

Поэтому вместо  $\Phi(j\omega)$  можно рассматривать  $W(j\omega)$ , но в координатах, где мнимая ось перенесена на  $(-1)$  (рис. 3.5, б).

Отсюда следует формулировка критерия Найквиста для случая устойчивой разомкнутой системы.

Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы не охватывала критическую точку с координатами  $(-1, j0)$ .

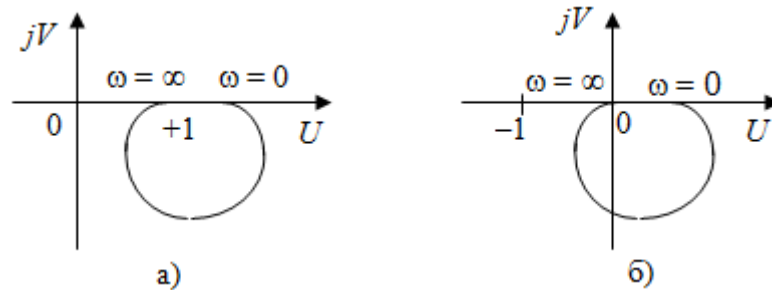


Рис. 3.5. Годограф вспомогательной функции:

а) не охватывающей начало координат; б) охватывающей начало координат

На рис. 3.6 показаны различные случаи прохождения АФХ разомкнутой системы относительно критической точки  $(-1, j0)$ , штриховыми линиями показаны АФХ при уменьшении коэффициента усиления разомкнутых систем.

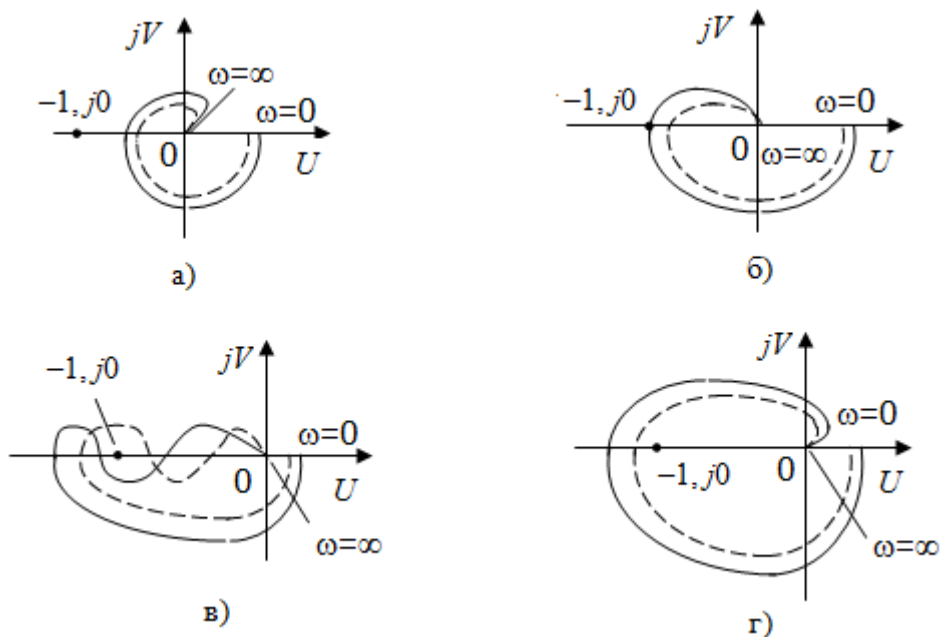


Рис. 3.6. Примеры прохождения АФХ: а) – абсолютно устойчивая система; б) – система на границе устойчивости; в) – условно устойчивая система, которая при уменьшении коэффициента усиления может стать неустойчивой; г) – неустойчивая система

Для астатических систем ( $\nu > 0$ ) применение критерия Найквиста имеет свою особенность. Дело в том, что АФХ таких систем в области низких частот приближаются к одной из осей комплексной плоскости. Поэтому для определения устойчивости по критерию Найквиста необходимо предварительно дополнять АФХ дугами  $-\nu \frac{\pi}{2}$  окружности бесконечно большого радиуса (рис. 3.7).

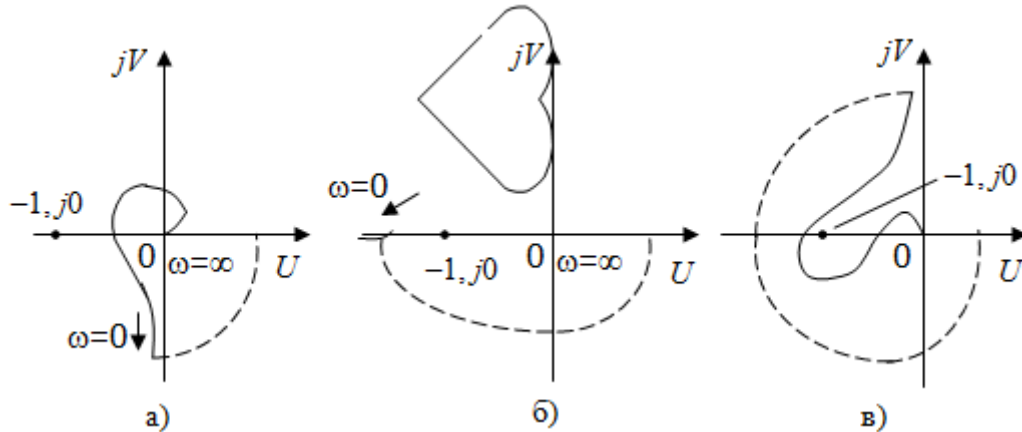


Рис. 3.7. Устойчивость системы: а) устойчивая; б) неустойчивая; в) условно устойчивая

Теперь предположим, что разомкнутая система не устойчива, т. е.  $l$  корней характеристического уравнения находятся в правой полуплоскости.

Тогда при изменении частоты от 0 до  $\infty$  суммарное приращение аргумента будет:

$$\Delta \text{Arg}[1+W(j\omega)] = \Delta \text{Arg}D(j\omega) - \Delta \text{Arg}A(j\omega) = n \cdot \frac{\pi}{2} - (n-l) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{l}{2} \pi.$$

Отсюда формулировка критерия Найквиста.

Если разомкнутая система неустойчива, то для того, чтобы была устойчивой замкнутая система, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы охватывала критическую точку в положительном направлении  $\frac{l}{2}$  раз, где  $l$  – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы в правой полуплоскости.

На рис. 3.8 показана АФХ разомкнутой системы, имеющая два корня в правой полуплоскости. Система, имеющая такую АФХ, будет устойчивой в замкнутом состоянии.

При сложной форме АФХ определить число охватов критической точки  $(-1, j0)$  затруднительно. В этом случае удобнее считать число переходов АФХ через отрезок  $(-\infty, -1)$  отрицательной вещественной оси. Переход сверху вниз считается положительным,

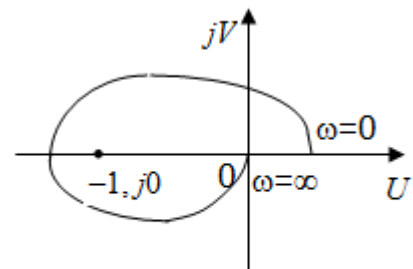


Рис. 3.8. АФХ разомкнутой системы

снизу вверх – отрицательным. Если АФХ начинается на отрезке  $(-\infty, -1)$  при  $\omega = 0$  и заканчивается на нем при  $\omega = \infty$ , то считается, что она совершает  $\frac{l}{2}$  перехода.

Формулировка критерия Найквиста по числу переходов будет следующей.

Если разомкнутая система неустойчива, то для того, чтобы разность между числами положительных и отрицательных переходов АФХ разомкнутой системы через отрезок вещественной

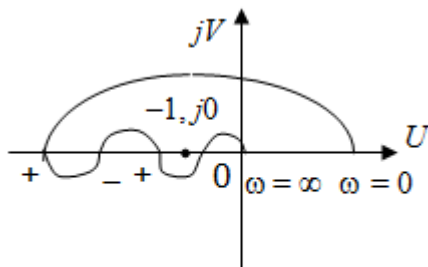


Рис. 3.10. АФХ устойчивой системы

оси  $(-\infty, -1)$  была равна  $\frac{l}{2}$ , где  $l$  – число корней разомкнутой системы в правой полуплоскости.

Так система, АФХ которой показана на рис. 3.10, будет устойчивой, если число корней в правой полуплоскости  $l = 2$ .

Рассмотрим теперь, как будет формироваться критерий Найквиста с использованием логарифмических амплитудно-частотных фазочастотных характеристик. Прежде всего установим, где будет расположена критическая точка с координатами  $(-1, j0)$  в плоскости

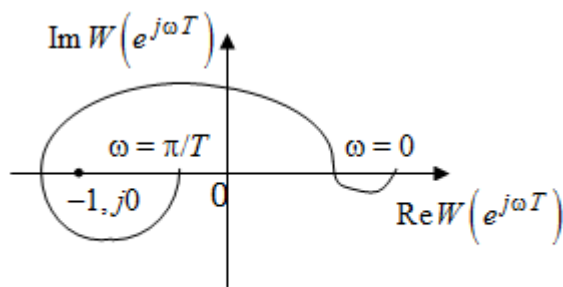


Рис. 3.11. Расположение основных точек для построения ЛАФЧХ

АФХ разомкнутой системы. Отметим, что критической точке  $(-1, j0)$  соответствует точка, в которой модуль вектора АФХ  $|W(j\omega)| = 1$ , а угол сдвига  $\varphi = \text{Arg}W(j\omega) = -180^\circ$  (рис. 3.11).

В плоскости ЛАФЧХ этой точке соответствует частота, на которой  $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 0$ , т. е. график  $L(\omega)$  пересекает ось частот, и

$\varphi(\omega) = -180^\circ$ , т. е. график  $\varphi(\omega)$  пересекает линию  $(-180^\circ)$ . Таким образом, если замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, то ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы пересекают линии  $L(\omega) = 0$  и  $\varphi(\omega) = -180^\circ$  одновременно, на одной и той же частоте (рис. 3.12).

Если же система устойчива в разомкнутом и замкнутом состояниях, то ее АФХ проходит справа от критической точки, т. е.  $|W(j\omega)|_{\varphi=-\pi} < 1$ .



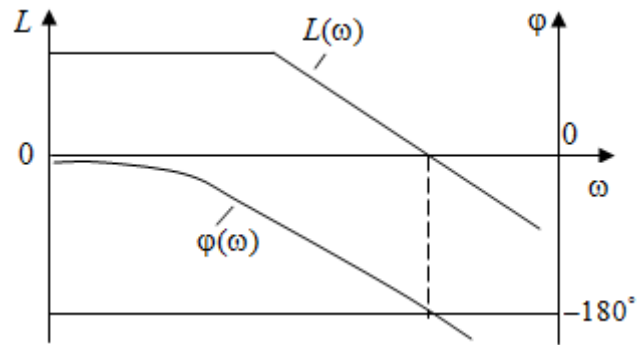


Рис. 3.12. ЛАЧХ системы, стоящей на границы устойчивости

Отсюда следует первая формулировка критерия Найквиста по ЛАФЧХ разомкнутой системы: если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы ЛАЧХ системы пересекала ось частот раньше, чем ЛФЧХ пересечет линию  $\varphi = -180^\circ$ .

Иллюстрация взаимного расположения ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы, устойчивой в замкнутом состоянии, показана на рис. 3.13.

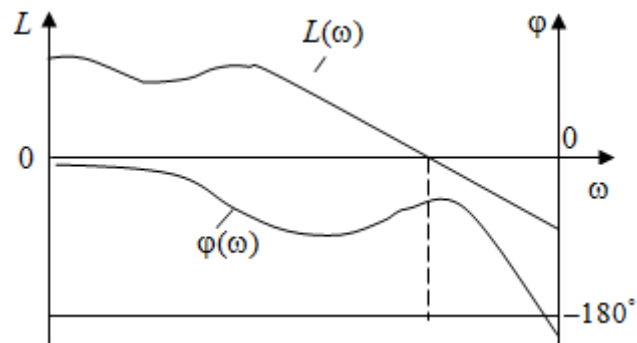


Рис. 3.13. ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы устойчивой в замкнутом состоянии

При сложной форме АФХ и ЛАФЧХ может иметь место неоднократное пересечение линии  $\varphi = -180^\circ$  характеристикой  $\varphi(\omega)$  на участке частот, где  $L(\omega) > 0$ , т. е. до точки пересечения  $L(\omega)$  оси частот. То же явление может наблюдаться и в плоскости ЛАФЧХ системы, неустойчивой в разомкнутом состоянии. В этом случае проще делать заключение о том, устойчива система или нет в замкнутом состоянии по числу, переходов графика  $\varphi(\omega)$  через линию  $\varphi = -180^\circ$  левее точки пересечения графиком  $L(\omega)$  оси частот (рис. 3.14).

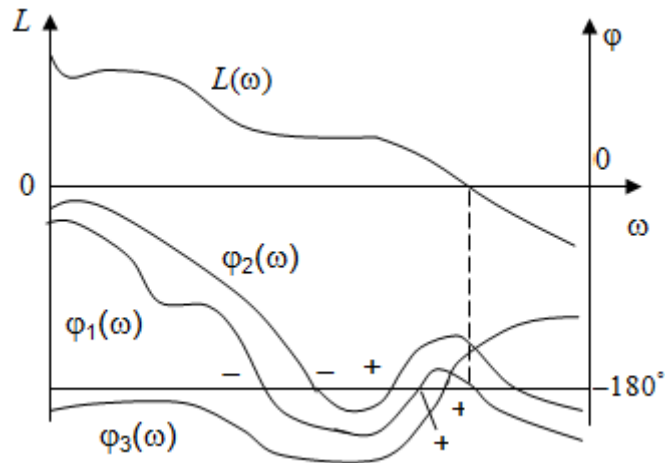


Рис. 3.14. Определение устойчивости по переходу графика ФЧХ

Формулировка критерия Найквиста в этом случае следующая: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при положительных значениях ЛАЧХ разность между числом положительных и отрицательных переходов ФЧХ через линию  $\varphi = -180^\circ$  равнялась  $\frac{l}{2}$ , где  $l$  – число корней, расположенных в правой полуплоскости. Положительным считается переход ФЧХ линии  $\varphi = -180^\circ$  снизу вверх, отрицательным – сверху вниз. Характеристика  $\varphi_1(\omega)$  соответствует системе, устойчивой в разомкнутом состоянии и находящейся на границе устойчивости в замкнутом состоянии. Характеристика  $\varphi_2(\omega)$  принадлежит системе устойчивой в разомкнутом и замкнутом состояниях. И, наконец,  $\varphi_3(\omega)$  свидетельствует о неустойчивости в разомкнутом состоянии и устойчивости в замкнутом, если число неустойчивых корней  $l = 2$ .

Сформулированные выше правила определения (не) устойчивости замкнутой системы по ЛАФЧХ разомкнутой системы полностью применимы и для дискретных систем. Особенностью является лишь то, что ЛФЧХ дискретных систем строятся в функции псевдочастоты  $\lambda$ , а в случае формулировки устойчивости для неустойчивой в разомкнутом состоянии дискретной системы  $l$  означает число корней, по модулю больше единицы, т. е. находящихся вне круга единичного радиуса.

## 3.2. Анализ точности и качества процессов управления

### 3.2.1. Оценка точности САУ в установившихся режимах

#### 3.2.1.1. Точность САУ в режиме стабилизации

Среди типовых режимов работы САУ простейшим, но и широко используемым в технике и технологии режимом является работа при постоянной величине управляющего воздействия или просто стабилизация. Основная задача системы стабилизации – поддержание регулируемой величины на заданном постоянном уровне в условиях существования возмущающих воздействий.

В этом параграфе мы оценим ошибки системы в режиме стабилизации, когда и управляющее и возмущающее воздействия имеют ступенчатую форму. В качестве объекта исследования примем одноконтурную систему с возмущающим воздействием  $f$ , приложенным в середине прямого канала системы (рис. 3.15).

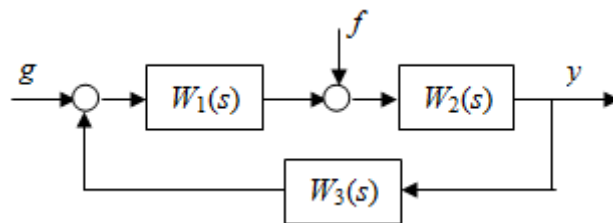


Рис. 3.15. Одноконтурная система с возмущающим воздействием

Рассмотрим три варианта состава звеньев в прямом канале системы:

- 1) все звенья являются позиционными;
- 2) в составе  $W_2(s)$  есть хотя бы одно интегрирующее звено;
- 3) в составе  $W_1(s)$  есть хотя бы одно интегрирующее звено.

Позиционными будем называть звенья безинерционные  $W_i(s) = k_i$  или динамические звенья 1-го и 2-го порядка, свободные члены передаточных функций которых равны единице. Например,

$$W_i(s) = \frac{k_i}{T_i s + 1}, \quad W_i(s) = k_i \cdot (T_i s + 1), \quad W_i(s) = \frac{k_i}{T_i^2 s^2 + 2\xi T_i s + 1},$$

и их комбинации  $W_i(s) = k_i \frac{Q_i(s)}{P_i(s)}$ ,

где  $Q_i(s)$  и  $P_i(s)$  полиномы со свободными членами равными единице.

Первый вариант – все звенья прямого канала позиционные. Канал обратной связи во всех случаях будет приниматься позиционным. Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \prod_{i=1}^n k_i \frac{Q_i(s)}{P_i(s)} = kW'(s),$$

где  $k = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  – общий коэффициент передачи разомкнутой системы;  $W'(s)$  – рациональная дробь при  $s = 0$  равная единице.

Пусть на систему действует только управляющее воздействие  $g(t) = g_0(t) \cdot 1(t)$  ступенчатой формы. Тогда установившееся значение ошибки от управляющего воздействия

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sE_g(s),$$

$$\text{где } E_g(s) = G(s)\Phi_g(s) = \frac{g_0}{s} \frac{1}{1+W(s)} = \frac{g_0}{s} \frac{1}{1+kW(s)}.$$

Окончательно

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s \frac{g_0}{s} \frac{1}{1+kW'(s)} = \frac{g_0}{1+k}.$$

Таким образом, система, состоящая только из позиционных звеньев, обрабатывает ступенчатое управляющее воздействие с ошибкой, пропорциональной величине воздействия  $g_0$  и обратно пропорциональной (с точностью до единицы) общему коэффициенту передачи разомкнутой системы.

Пусть теперь на систему действует возмущение ступенчатой формы  $f(t) = f_0(t) \cdot 1(t)$ . Установившееся значение ошибки от возмущения

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sE_f(s),$$

$$\text{где } E_f(s) = F(s) \cdot \Phi_f(s), \quad E_f(s) = \frac{f_0}{s},$$

$$\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1+kW'(s)} = \frac{k_2W_2'(s)k_3W_3'(s)}{1+kW'(s)}.$$

Подставляя в общую формулу, получим:

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_0}{s} \frac{k_2W_2'(s)k_3W_3'(s)}{1+kW'(s)} = f_0 \frac{k_2k_3}{1+k}.$$

Таким образом, система, состоящая только из позиционных звеньев, имеет ошибки, определяемые как управляющим, так и возмущающим воздействием. Обе составляющие ошибки обратно пропорциональны (с точностью до единицы) общему коэффициенту передачи разомкнутой системы  $k$ .

Чем больше  $k$ , тем меньше ошибки. Увеличение  $k$  в рассматриваемой системе возможно только до определенного значения, называемого критическим, при котором система будет находиться на границе устойчивости (рис. 3.16).

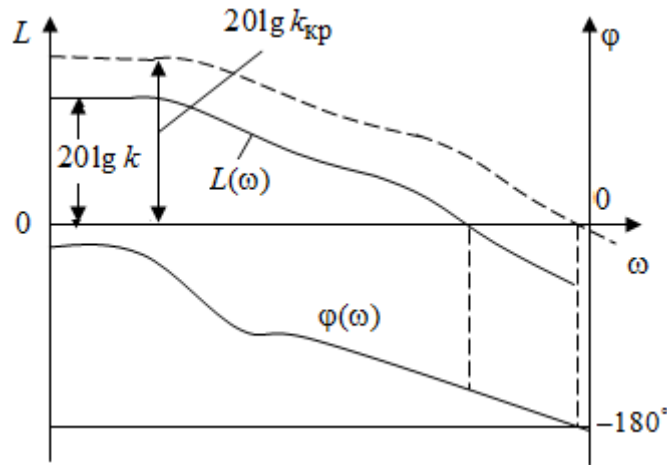


Рис. 3.16. Система на границе устойчивости

Второй вариант: в составе звеньев, описываемых передаточной функцией  $W_2(s)$ , есть интегрирующее звено

$$W_2(s) = \frac{k_2 Q_2(s)}{s P_2(s)},$$

где  $Q_2(s) = P_2(s) = 1$ .  
 $\lim_{s \rightarrow 0} Q_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} P_2(s) = 1$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{k}{s} W'(s),$$

где  $W'(s) = 1$ .  
 $\lim_{s \rightarrow 0} W'(s) = 1$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от управляющего воздействия

$$\Phi_g(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{1}{1+k/s W'(s)} = \frac{s}{s+kW'(s)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия

$$\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1+W(s)} = \frac{\frac{k_2 Q_2(s)}{s P_2(s)} k_3 W_3'(s)}{1+k/s W'(s)} = \frac{k_2 k_3 W_2'(s) W_3'(s)}{s+kW'(s)}.$$

Ошибка установившегося режима по управляющему воздействию

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sE_g(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{g_0}{s} \frac{s}{s + kW'(s)} = 0.$$

Ошибка установившегося режима по возмущающему воздействию

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sE_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_0}{s} \frac{k_2 W_2'(s) k_3 W_3'(s)}{1 + kW'(s)} = f_0 \frac{k_2 k_3}{1 + k} = \frac{f_0}{k_1}.$$

Таким образом, система, имеющая в прямом канале интегрирующее звено, расположенное после точки приложения возмущающего воздействия, обеспечивает отсутствие ошибки от ступенчатого управляющего воздействия и имеет постоянную ошибку, обусловленную ступенчатым возмущающим воздействием.

Третий вариант: интегрирующее звено включено в группу звеньев, описываемых передаточной функцией  $W_1(s)$ , т. е.  $W_1(s) = \frac{k_1 Q_1(s)}{s P_1(s)}$ , где

$$Q_1(s) = P_1(s) = 1.$$

Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{k}{s} W'(s).$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от управляющего воздействия

$$\Phi_g(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + k/s W'(s)} = \frac{s}{s + kW'(s)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия

$$\Phi_f = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 + kW(s)} = \frac{k_2 W_2'(s) k_3 W_3'(s)}{1 + k/s W'(s)} = \frac{sk_2 W_2'(s) k_3 W_3'(s)}{s + kW'(s)}.$$

Ошибка установившегося режима по управляющему воздействию ступенчатой формы

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s \frac{g_0}{s} \frac{s}{s + kW'(s)} = 0.$$

Ошибка установившегося режима по возмущающему воздействию ступенчатой формы

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s \frac{f_0}{s \rightarrow 0} \frac{sk_2 W_2'(s) k_3 W_3'(s)}{s + kW'(s)} = 0.$$

Таким образом, система, содержащая интегрирующее звено в прямом канале, расположенное до точки приложения возмущающего воздействия, не имеет ошибок как от управляющего, так и от возмущающего воздействий ступенчатой формы.

Система, имеющая интегрирующее звено в прямом канале, называется астатической системой 1-го порядка.

Астатическая система 1-го порядка воспроизводит ступенчатое управляющее воздействие без ошибки в установившемся режиме и полностью подавляет ступенчатое возмущающее воздействие, если оно действует в прямом канале после интегрирующего звена.

Вот почему интегральный или пропорционально-интегральные регуляторы ставятся всегда вначале прямого канала сразу после узла сравнения.

### 3.2.1.2. Установившиеся ошибки при обработке медленно меняющихся внешних воздействий

Под медленно меняющимися внешними воздействиями будем понимать сигналы, описываемые степенными временными рядами

$$g(t) = (g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_l t^l) \cdot 1(t).$$

В эту группу воздействий входят почти все типовые воздействия, принятые в ТАУ для анализа и синтеза систем управления. В частности, первое слагаемое  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$  – ступенчатое воздействие; второе слагаемое  $g(t) = g_0 \cdot t \cdot 1(t)$  – скоростное (линейное) воздействие; третье слагаемое  $g(t) = g_0 \cdot t^2 \cdot 1(t)$  – параболическое (квадратичное) воздействие.

Для установившейся ошибки воспроизведения медленно меняющихся воздействий было получено специальное выражение, имеющее для непрерывных систем следующую форму

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + C_i \frac{1}{i!} \frac{d^i g(t)}{dt^i},$$

где  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_i$  – коэффициенты ошибок, определяемые по выражению

$$C_i = \left[ \frac{d^i \Phi_{eg}(s)}{ds^i} \right]_{s=0}.$$

Так  $C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0}$ ;  $C_1 = \left[ \frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0}$ , где  $\Phi_{eg}(s)$  – передаточная

функция замкнутой системы по ошибке от воздействия  $g(t)$ . На практике значения коэффициентов ошибок для  $l > 2$  определяют по формулам, приведенным в справочнике. Для  $i = 0, 1, 2$  коэффициенты можно определять непосредственно по вышеприведенным формулам.

Используя выражение для установившейся ошибки через коэффициенты ошибок, найдем значение коэффициентов ошибок при обработке непрерывной системой типовых воздействий:  $g(t) = g_0(t)$ ;  $g(t) = g_0 \cdot t$ ;  $g(t) = g_0 \cdot t^2$ .

1. Система статическая (порядок астатизма  $\nu = 0$ ), воздействие ступенчатое  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$ .

Установившаяся ошибка при обработке ступенчатого воздействия

$$e_g(t) = C_0 g(t) = C_0 g_0.$$

$t \rightarrow \infty$

Заметим, что другие слагаемые выражения ошибки, содержащие производные от  $g(t)$  по времени будут равны нулю, так как  $\frac{d^i g(t)}{dt^i} = 0$  при  $i > 0$ .

Коэффициент ошибки

$$C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0} = \left[ \frac{1}{1 + kW'(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{1 + k},$$

так как  $W'(s) = 1$  и значение установившейся ошибки  $e_g(t) = \frac{1}{1 + k} g_0$ .

$t \rightarrow \infty$

Отсюда следует, что:

$$C_0 = \frac{1}{1 + k}.$$

2. Система астатическая 1-го порядка ( $\nu = 1$ ).

Воздействие линейное  $g(t) = g_0 \cdot t \cdot 1(t)$ .



Передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1}{1 + k/s W'(s)} = \frac{s}{s + kW'(s)}.$$

Установившаяся ошибка при обработке линейного воздействия

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} = C_0 g_0 t + C_1 g_0.$$

$$C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s}{s + kW'(s)} \right]_{s=0} = 0,$$

$$C_1 = \left[ \frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0} = \left[ \frac{d}{ds} \frac{s}{s + kW'(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{k};$$

$$C_1 = \frac{1}{k}.$$

Установившееся значение ошибки  $e_g(t) = \frac{g_0}{k}$ . Ошибка при обработке

линейного внешнего воздействия называется скоростной ошибкой. Она пропорциональна скорости изменения воздействия  $g_0$  и обратно пропорциональна общему коэффициенту усиления разомкнутой астатической системы 1-го порядка, который называется добротностью системы по скорости.

3. Система астатическая 2-го порядка ( $\nu = 2$ ).

Воздействие параболическое  $g(t) = g_0 \cdot t^2 \cdot 1(t)$ .

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1}{1 + k/s^2 W'(s)} = \frac{s^2}{s^2 + kW'(s)}.$$

Установившаяся ошибка при обработке параболического воздействия:

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = C_0 g_0 t^2 + 2g_0 t C_1 + C_2 g_0,$$

где коэффициенты ошибок равны:

$$C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s^2}{s^2 + kW'(s)} \right]_{s=0} = 0,$$

$$C_1 = \left[ \frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0} = \left[ \frac{d}{ds} \frac{s^2}{s^2 + kW'(s)} \right]_{s=0} = 0,$$

$$C_2 = \left[ \frac{d^2\Phi_{eg}(s)}{ds^2} \right]_{s=0} = \left[ \frac{d^2}{ds^2} \frac{s^2}{s^2 + kW'(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{k},$$

$$C_2 = \frac{1}{k}.$$

Установившееся значение ошибки  $e_g(t) = \frac{g_0}{k}$ .

Ошибка при обработке параболического внешнего воздействия называется ошибкой по ускорению. Она пропорциональна ускорению внешнего воздействия  $g_0$  и обратно пропорциональна общему коэффициенту передачи разомкнутой астатической системы 2-го порядка, который называется добротностью системы по ускорению.

### 3.2.1.3. Анализ влияния порядка астатизма системы на установившиеся ошибки при обработке типовых степенных воздействий

Обобщая приведенный анализ установившихся ошибок в системах различного порядка астатизма при обработке ступенчатых и медленно меняющихся воздействий, получим общие выражения установившихся ошибок в функции порядка астатизма и степени внешнего воздействия.

Пусть управляющее воздействие имеет форму  $g(t) = \frac{g_0}{m!} t^m$ , и изобра-

жения по Лапласу  $G(s) = \frac{g_0}{s^{m+1}}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Изображение ошибки при таком воздействии будет

$$E_g(s) = G(s)\Phi_{eg}(s) = \frac{g_0}{s^{m+1}} \frac{1}{1+W(s)}.$$

Установившееся значение ошибки

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sE_g(s) = \lim_{s \rightarrow 0} g_0 \frac{1}{s^m [1 + W(s)]}.$$

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s^v} W'(s),$$

где  $k$  – общий коэффициент передачи системы;  $v$  – порядок астатизма системы;  $W'(s)$  – передаточная функция, не содержащая нулевых полюсов.

Тогда установившееся значение ошибки

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_0 s^{v-m}}{s^v + kW'(s)}.$$

Отсюда видно, что  $e_g(t) = 0$  только при  $v > m$ , т. е. порядок астатизма системы  $v$  должен быть больше степени  $m$  воздействия.

При  $v = m$  установившаяся ошибка имеет постоянную величину

$e(t) = \frac{g_0}{k}$ , что означает, что системы с астатизмом 1-го и 2-го порядка будут иметь постоянные ошибки при обработке линейного и квадратичного воздействий соответственно.

При  $v = m = 0$   $e(t) = \frac{g_0}{1+k}$ . Это ошибка системы с  $v = 0$  при обработке ступенчатого воздействия.

И, наконец, при  $v < m$   $e(t) = \infty$ . Так система, не имеющая интеграторов, будет иметь бесконечную ошибку уже при воздействии  $g(t) = g_0 \cdot t$ , т. е. при  $m = 1$ .

В табл. 3.2 сведены установившиеся ошибки непрерывных систем различного порядка астатизма при обработке внешних воздействий степенной формы.

Таблица 3.2

Порядок	Внешнее воздействие
---------	---------------------

астатизма системы	Ступенчатое $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$	Линейное $g(t) = g_0 \cdot t \cdot 1(t)$	Квадратичное $g(t) = g_0 \cdot t^2 \cdot 1(t)$
$\nu = 0$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \frac{g_0}{1+k}$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \infty$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \infty$
$\nu = 1$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = 0$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \frac{g_0}{k}$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \infty$
$\nu = 2$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = 0$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = 0$	$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \infty$

Таким образом,

1) Система с астатизмом  $\nu = 0$  (статическая система) не способна воспроизводить линейные и квадратичные сигналы и поэтому не используются как следящая или программного управления;

2) Система с астатизмом 1-го порядка ( $\nu = 1$ ) способна работать как СПУ;

3) Система с астатизмом 2-го порядка ( $\nu = 2$ ) обеспечивает точное воспроизведение ступенчатых и линейных сигналов и может обрабатывать квадратичные воздействия с постоянной ошибкой; может работать в режиме слежения.

Значение установившейся ошибки от возмущающего воздействия степенной формы зависит не только от соотношения порядка астатизма системы и степени воздействия, но и от распределения интегрирующих звеньев между регулятором и объектом управления, т. е. зависит от точки приложения возмущающего воздействия в системе.

Пусть регулятор содержит  $l_p$ , а объект управления  $l_o$  интеграторов. Тогда порядок астатизма системы  $\nu = l_p + l_o$ .

ПФ замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия (рис. 3.15)

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{W_2(s)}{1+W(s)} = \frac{k_0 / s^{l_o} W_2'(s)}{1 + \frac{k}{s^\nu} W'(s)},$$

где  $W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s)$ ;  $W_1(s) = \frac{k_p}{s^{l_p}} W_1'(s)$ ,  $W_2(s) = \frac{k_0}{s^{l_0}} W_2'(s)$ ,

$W_3(s) = k_3 W_3'(s)$ ;  $W_1'(s)$ ,  $W_2'(s)$ ,  $W_3'(s)$  – передаточные функции, не имеющие нулевых полюсов.

Тогда

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{k_0 s^{v-l_0} W_2'(s)}{s^v + kW'(s)} = \frac{k_0 s^{l_0} W_2'(s)}{s^v + kW'(s)}.$$

Установившееся значение ошибки от возмущающего воздействия степенной формы  $f(t) = \frac{f_0}{k!} t^k$ ,  $F(s) = \frac{f_0}{s^{k+1}}$ .

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s E_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{f_0}{s^{k+1}} \frac{k_0 s^{l_p} W_2'(s)}{s^v + kW'(s)} = f_0 k_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{l_p - k} W_2'(s)}{s^v + kW'(s)}.$$

Из полученного выражения следует, что:

1. установившееся значение ошибки от возмущающего воздействия определяется соотношением числа интеграторов в регуляторе и степени воздействия и не зависит от числа интеграторов объекта управления;

2. отсутствие интеграторов в регуляторе вызывает ошибку:

$$e_f(\infty) = \frac{f_0 k_0}{1+k} \text{ при } k=0, v=0;$$

$$e_f(\infty) = \frac{f_0}{k_p} \text{ при } k=0, v \neq 0;$$

$$e_f(\infty) = \infty \text{ при } k \geq 1.$$

3. наличие интеграторов в регуляторе вызывает ошибку:

$$e_f(\infty) = 0 \text{ при } l_p > k;$$

$$e_f(\infty) = \frac{f_0}{k_p} \text{ при } l_p = k;$$

$$e_f(\infty) = \infty \text{ при } l_p < k.$$

Таким образом, размещения интеграторов в регуляторе до точки приложения возмущения позволяет свести к нулю ошибки установившегося режима, выбирая число интеграторов больше степени возмущающего воздействия.

### 3.2.2. Оценка показателей качества работы САУ

Для оценки качества переходных процессов в системах автоматического управления используются различные показатели, которые могут быть подразделены на четыре группы: 1) показатели переходной характеристики замкнутой системы; 2) частотные показатели качества; 3) корневые показатели; 4) интегральные оценки качества переходных процессов.

#### 3.2.2.1. Показатели качества по переходной характеристике

Показатели переходной характеристики непосредственно связаны с требованиями автоматизируемых процессов и поэтому называются прямыми

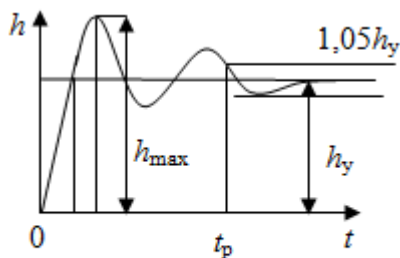


Рис. 3.17. Переходная характеристика

показателями качества. К ним относятся (рис. 3.17): максимальное значение переходной характеристики  $h_{\max}$ , время достижения максимального значения  $t_{\max}$ , перерегулирование  $\sigma = \frac{h_{\max} - h_y}{h_y} 100\%$ ; установившееся значение;

время первого согласования (время подъема)  $t_1$ ; время регулирования  $t_p$  — время от начала переходной характеристики до момента ее входа в зону  $(0.95-1.05) \cdot h_y$ , после которого она остается в этой зоне. Величина зоны может быть иной, например  $\pm 0.01 h_y$ , но в этом случае ее величина специально оговаривается.

Такие же показатели определяются по переходной характеристике дискретно непрерывной или дискретной САУ. Разница состоит лишь в том, определение происходит по дискретным значениям переходной характеристики. При достаточно малом периоде квантования свойства дискретно непрерывной системы близки к свойствам непрерывной системы, поэтому дискретные значения переходной характеристики с большой долей уверенности могут быть соединены в плавную кривую.

В ряде случаев получение переходной характеристики экспериментальным путем затруднительно как для непрерывной, так и для дискретной системы. Поэтому вместо прямых показателей качества используют косвенные показатели качества переходных процессов: частотные и корневые. Частотные показатели качества могут быть получены как экспериментальным, так и теоретическим путем. Они подразделяются на две группы:

1) показатели, определяемые по ЛАФЧХ разомкнутой системы (рис. 3.18): частота среза  $\omega_{ср}$ , запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi$  и запас устойчивости по модулю  $\Delta L$ ; наиболее информативны первые два показателя: частота среза  $\omega_c$  служит оценкой быстродействия замкнутой системы, запас по фазе  $\Delta\varphi$  тесно связан со степенью колебательности переходной характеристики;

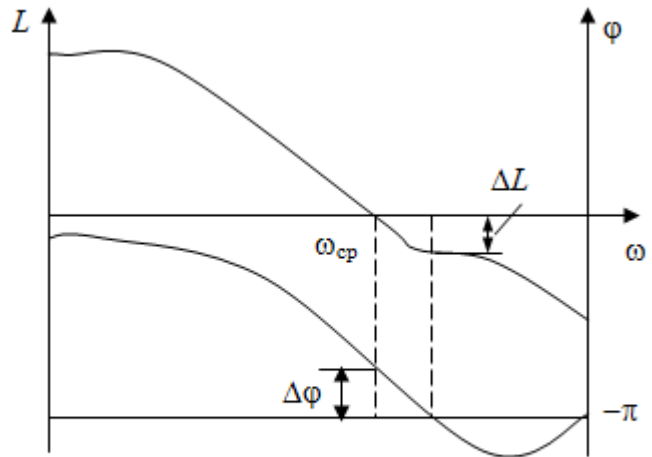


Рис. 3.18. Определение показателей по разомкнутой ЛАФЧХ

2) показатели, определяемые по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы (рис. 3.19).

Показатель колебательности

$$M = \frac{A_{3\max}}{A_3(0)}$$

связан также со степенью колебательности замкнутой системы. Считаются удовлетворительными значения показателя колебательности в пределах  $1.1 \leq M \leq 1.5$ .

Резонансная частота системы  $\omega_p$  характеризует частоту колебаний, пропускаемую системой с наибольшим усилением.

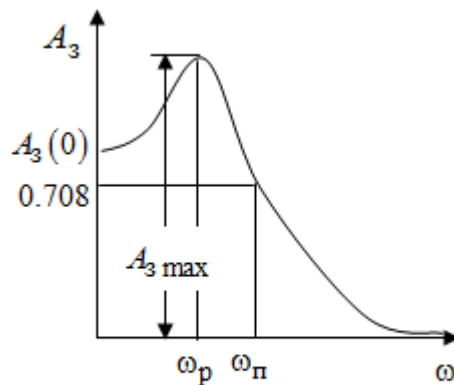


Рис. 3.19. Определение показателей по АЧХ

Полоса пропускания  $\omega_{п}$  – частота, на которой  $A_3(\omega)$  снижается на 3 дБ от начального значения  $A_3(0)$ .

### 3.2.2.2. Показатели качества по корневой плоскости

Корневые оценки качества переходных процессов замкнутой непрерывной системы включает в себя следующие показатели (рис. 3.20):

1) показатель быстродействия (степень устойчивости)  $\eta$  – определяется как расстояние от мнимой оси до ближайших вещественного или пары сопряженных комплексных корней;

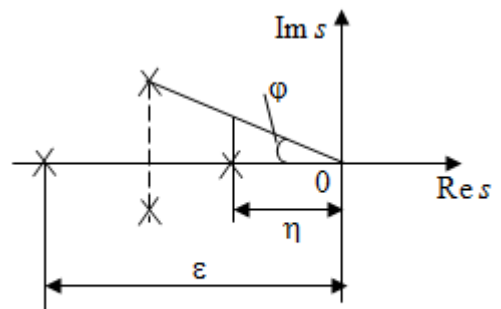


Рис. 3.20. Корневая плоскость

2) колебательность  $\xi = |\operatorname{tg}\varphi|_{\max}$  опре-

деляется как максимальный угол наклона к вещественной оси луча, проведенного из начала координат к одному из пары сопряженных комплексных корней; увеличение  $\xi$  прямо пропорционально связано с перерегулированием  $\sigma$  и числом колебаний за время регулирования  $t_p$ ;

3) показатель затухания  $\varepsilon$  является характеристикой степени затухания переходных процессов и определяется как расстояние от мнимой оси до самых дальних вещественного или пары сопряженных комплексных корней.

### 3.2.2.3. Интегральные показатели качества

Интегральные оценки качества широко используются для анализа и синтеза непрерывных систем. Различают простую интегральную и улучшенную интегральную оценки.

*Простая оценка* (ИКО) определяется как

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt,$$

где  $e(t)$  – ошибка переходного процесса. Улучшенные оценки определяются следующим образом:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt + a_1 \int_0^{\infty} e^2(t) dt.$$

Чаще используются улучшенные оценки, так как минимуму простой ИКО соответствует слабо затухающий переходный процесс.

### 3.2.2.4. Связь частотных показателей с основными прямыми показателями качества

Установить связь между частотными показателями (рис. 3.18)  $\omega_{ср}$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta\phi$ ,  $M$ ,  $\omega_p$  и прямыми показателями качества по переходной характеристике (рис. 3.17)  $h_{max}$ ,  $t_{max}$ ,  $\sigma$ ,  $t_p$  в общем случае невозможно, так как такая связь существует в конкретной форме для конкретной системы. Если речь идет о качественных показателях математической модели системы, то проблемы установления связи между различными показателями качества не существует. Имеющиеся в настоящее время компьютерные программы по моделированию для непрерывных САУ, позволяют быстро и с достаточной точностью определить значения всех известных показателей качества. Со всем по-другому ставится задача оценки показателей качества в процессе



анализа и настройки существующей реальной САУ автоматизируемого объекта, на котором недопустимы эксперименты по снятию переходных характеристик. В связи с широким использованием в задачах анализа САУ частотных характеристик, особенно, логарифмических, которые часто могут быть получены экспериментальным путем, целесообразно иметь в распоряжении справочный материал в виде номограмм для определения основных показателей качества по параметрам ЛАЧХ разомкнутой системы.

Установлена форма типовой логарифмической характеристики (рис. 3.21). Она характеризуется следующими параметрами:  $\omega_{\text{ср}}$  – частота

среза ЛАЧХ разомкнутой системы;  $\frac{\omega_1}{\omega_{\text{ср}}}$  и  $\frac{\omega_3}{\omega_{\text{ср}}}$  – относительные границы

нижнечастотного и высокочастотного участков ЛАЧХ;  $\mu_1$  – усиление (в дБ) на частоте  $\omega_1$ ;  $-40$  дБ/дек,  $-60$  дБ/дек – наклоны на участках  $(\omega_1 - \omega_2)$  и  $(\omega_3 - \infty)$ .

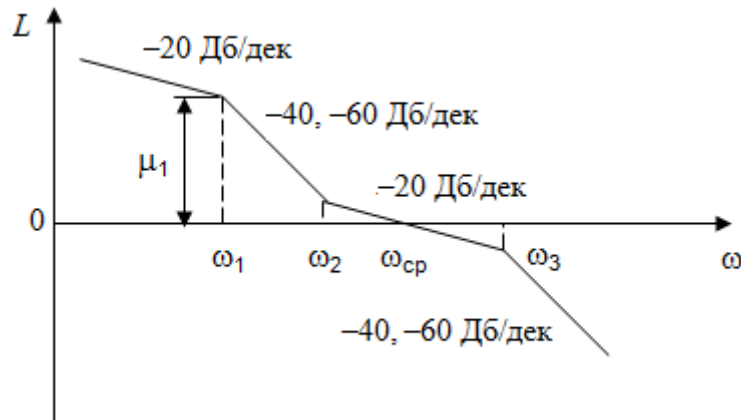


Рисунок 3.21. Типовая логарифмическая характеристика

### Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение устойчивости системы с физической и математической точек зрения.
2. Какой характер имеет переходный процесс в устойчивой и неустойчивой системах?
3. Сформулируйте необходимое условие устойчивости.
4. Что такое критерии устойчивости?
5. Что такое граница устойчивости? Каким образом при этом расположены корни характеристического уравнения системы на плоскости комплексного переменного?
6. Сформулируйте критерий устойчивости Гурвица.
7. Каким образом по критерию Гурвица определяются границы устой-

чивости?

8. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста.
9. Что такое запасы устойчивости? Каким образом они определяются по АФЧХ разомкнутой системы?
10. Как определяются запасы устойчивости по ЛЧХ?
11. Дайте понятие качества работы системы управления. Чем оно определяется?
12. Что представляют собой критерии качества?
13. Как производится оценка точности работы систем?
14. Чему равны первые два коэффициента ошибок в системах с астатизмом первого и второго порядков?
15. Определите показатели качества переходного процесса и частотные показатели, поясните их физический смысл.
16. Поясните связь частотных показателей качества работы системы с частотными характеристиками разомкнутой цепи.
17. Что представляют собой корневые оценки качества?
18. В чем удобство и недостатки интегральных критериев качества?
19. Каким образом экспериментальным путем можно оценить качество работы системы?

## 4. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ

### 4.1. Задачи и классификация методов синтеза

Под синтезом САУ понимается выбор структуры и параметров системы управления, которые в соответствии с заданными техническими условиями обеспечивают наилучшие показатели по запасу устойчивости, по качеству переходных режимов и точности работы в установившихся режимах.

В результате синтеза САУ решается одна из двух задач: 1) выбор структуры и параметров системы, если задано описание только объекта управления; 2) выбор количества и типа усилительных и корректирующих устройств, если заданы описания не только объекта управления, но и исполнительного органа системы управления, датчиков обратных связей и устройств сравнения. Параллельно с решением задач, перечисленных выше, рассматриваются и решаются вопросы, связанные с обеспечением надежности систем, весовых и стоимостных характеристик, экономичности и других подобных ограничений. Однако, решение подобного рода задач выходит за рамки теории автоматического управления и рассматривается в других технических дисциплинах.

Следует отметить, что выполнение основных задач синтеза САУ: выбора структуры и параметров всей системы или ее части – представляет собой многовариантную и полностью неформализованную процедуру, что усложняет работу проектировщика, но в тоже время делает эту работу более творческой и привлекательной.

В настоящее время известно множество методов синтеза линейных непрерывных и дискретных систем управления, которые различаются по:

- 1) математическому аппарату описания объекта и систем управления;
- 2) критериям качества работы САУ в установившихся и переходных режимах;
- 3) инструментальным средствам решения задач синтеза САУ.

По используемому типу математической модели системы методы синтеза разделяются на:

- 1) методы, использующие описание в виде дифференциальных уравнений в обычной или матричной форме;
- 2) методы, использующие представление систем с помощью передаточных функций;
- 3) методы, базирующиеся на частотных характеристиках элементов и систем управления.

По второму признаку методы синтеза разделяются, главным образом, по критериям качества в переходных режимах, так как определение параметров усилительных и регулирующих устройств, обеспечивающих заданные показатели точности работы в установившихся режимах, практически

не отличается в различных методах синтеза. Таким образом, существуют следующие методы синтеза, использующие различные критерии качества в переходных режимах:

- метод В.В. Солодовникова, в котором критерием качества являются показатели переходной характеристики замкнутой скорректированной системы;

- метод В.А. Бесекерского, использующий в качестве критерия показатель колебательности замкнутой скорректированной системы;

- метод подчиненного управления, в котором настройки регуляторов рассчитываются по формулам, обеспечивающим приближение к единице амплитудно-частотной характеристики по управлению замкнутой синтезированной системы;

- метод модального управления, обеспечивающий достижение заданного распределения корней характеристического уравнения замкнутой синтезируемой системы управления.

Следует заметить, что в рамках настоящей работы не упоминаются и не рассматриваются такие методы синтеза, как методы оптимального, экстремального и адаптивного управления, а также методы синтеза, например, по минимуму СКО (средне квадратичной ошибки), используемые для построения и расчета стохастических систем управления. Необходимые сведения по таким методам можно найти в специальных монографиях и пособиях по различным разделам теории автоматического управления.

Отметим также, что первые два из перечисленных выше методов (Солодовникова и Бесекерского) считаются частотными, так как используют для синтеза понятие желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы. Метод подчиненного управления оперирует с передаточными функциями, хотя часто для разъяснения и для большего понимания существа настройки оказывается необходимым привлечение аппарата частотных характеристик. Наконец, метод модального управления строится на использовании векторно-матричного описания синтезируемой системы.

## **4.2. Синтез желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы**

В частотных методах синтеза по заданным показателям качества в переходных режимах (по переходной характеристике или по показателю колебательности) основным этапом синтеза является построение желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы.

Желаемой мы будем называть такую ЛАЧХ, достижение которой в системе обеспечит заданные в технических требованиях показатели по точности обработки оговоренных управляющих воздействий в установившихся и переходных режимах, а также степень подавления наиболее характерных для систем возмущающих воздействий.

Отметим, что использование для синтеза САУ только ЛАЧХ без ФЧХ предполагает, что синтезируемая система является так называемой минимально-фазовой, т. е. 1) в системе отсутствуют звенья, передаточные функции которых имеют нули и полюса в правой полуплоскости; 2) для системы существует однозначная связь между ЛАЧХ и ФЧХ.

У ЛАЧХ разомкнутой системы, в том числе и у желаемой ЛАЧХ, принято различать три основные частотные области (рис. 4.1): область низких частот (НЧ)  $0 \leq \omega \leq \omega_1$ , область средних частот (СЧ)  $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$  и область высоких частот (ВЧ)  $\omega_3 \leq \omega \leq \infty$ .

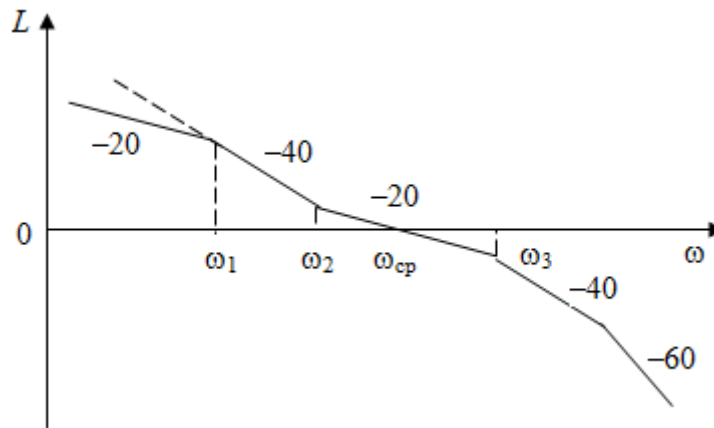


Рис. 4.1. Желаемая ЛАЧХ

Как показали исследования, вид ЛАЧХ в области низких частот полностью определяет точность работы системы управления в установившихся режимах. Установившимися считаются режимы как при постоянном значении управляющего сигнала, так и при изменении его с постоянной скоростью или ускорением.

Участок средних частот является определяющим для формы переходного процесса в системе, вызванного изменением параметра управляющего сигнала или приложением возмущающего воздействия. Для того чтобы обеспечить приемлемую по перерегулированию и по степени затухания переходную характеристику системы, участок средних частот должен иметь наклон  $-20$  дБ/дек. Противоположность среднечастотного участка ЛАЧХ определяет степень затухания переходного процесса. Чем шире этот участок, тем более демпфирована система, меньше перерегулирование и время затухания переходного процесса.

Наконец, участок высоких частот определяет степень подавления высокочастотных возмущений, действующих в системе, и с этой точки зрения значение ЛАЧХ в этой области должно быть как можно меньше.

Переходные участки между областями, как правило, имеют наклон  $-40$  дБ/дек, но иногда приходится допускать наклон  $-60$  дБ/дек.

#### 4.2.1. Синтез желаемой ЛАЧХ в области низких частот

Как было отмечено выше, вид ЛАЧХ в области низких частот определяет точность замкнутой системы в установившихся режимах. Это значит, что для определения параметров нижнечастотного участка желаемой ЛАЧХ: наклона характеристики и коэффициента передачи разомкнутой системы на контрольной частоте, могут быть использованы результаты анализа установившихся ошибок при отработке различных типовых воздействий.

Рассмотрим порядок определения параметров нижнечастотного участка желаемой ЛАЧХ для систем различного порядка астатизма и различных управляющих и возмущающих воздействий.

##### *Статическая система (с астатизмом равным нулю)*

Статические системы в соответствии с результатами табл. 3.2 могут работать только со ступенчатыми управляющими сигналами и выдерживать только ступенчатые возмущения, поэтому параметры нижнечастотной части желаемой ЛАЧХ должны определяться по ошибкам таких систем при отработке управляющих воздействий ступенчатой формы и ступенчатых возмущающих воздействий.

Пусть задана ошибка при ступенчатом управлении  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$  равная  $e_{\text{доп}}$  или в относительной форме  $\Delta e_{\text{доп}} = \frac{e_{\text{доп}}}{g_0}$ . Тогда, приравнивая допустимую ошибку ошибке установившегося режима

$$e_{\text{доп}} = g_0 \Delta e_{\text{доп}} = \frac{g_0}{1+k},$$

имеем  $e_{\text{доп}} = \frac{1}{1+k}$ , откуда необходимый коэффициент разомкнутой системы

мы

$$k_{\text{н}} \geq \frac{1}{\Delta e_{\text{доп}}} - 1.$$

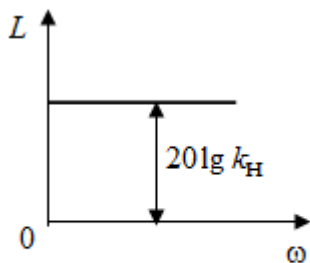


Рис. 4.2. Нижнечастотный участок желаемой ЛАЧХ

Нижнечастотный участок желаемой ЛАЧХ должен представлять прямую, параллельную оси частот (рис. 4.2) и удаленную от оси частот на  $20\lg k_{\text{н}}$ .

Следует заметить, что, если статическая си-

система работает в режиме стабилизации с диапазоном  $D = \frac{g_{0\max}}{g_{0\min}}$  стабилизируемых значений, то необходимо использовать для расчета  $k_H$  относительную ошибку  $\Delta e_{\text{доп}} = \frac{e_{\text{доп}}}{g_{0\min}}$ .

Теперь пусть задана относительная ошибка при обработке ступенчатого возмущающего воздействия  $f(t) = f_0 \cdot 1(t)$   $\Delta e_{f \text{ доп}} = \frac{e_{f \text{ доп}}}{y(\infty)}$ .

Приравняем  $e_{f \text{ доп}}$  ошибке системы от возмущения

$$e_{f \text{ доп}} = \Delta e_{f \text{ доп}} \cdot y(\infty) = e_f(\infty) = \frac{k_f f_0}{1+k}$$

Кроме того примем  $y(\infty) = g_0 \frac{k}{1+k}$ , что учитывает ошибку от управляющего сигнала. Тогда

$$e_{f \text{ доп}} \cdot g_0 \cdot \frac{k}{1+k} = \frac{k_f f_0}{1+k},$$

откуда

$$k_H \geq \frac{k_f f_0}{\Delta e_{f \text{ доп}} \cdot g_0}$$

В этом случае  $20 \lg k_H$  будет учитывать ошибки от управляющего и возмущающего воздействий, и, значит, нижнечастотный участок желаемой ЛАЧХ в виде прямой, удаленной от оси частот на  $20 \lg k_H$ , будет построен с учетом необходимой точности при обработке и управляющего и возмущающего воздействий ступенчатой формы.

При расчете  $k_H$  следует использовать  $g_0 = g_{0\min}$ , если синтезируемая система будет работать в определенном диапазоне стабилизирующих значений  $D = \frac{g_{0\max}}{g_{0\min}}$ .

### ***Астатическая система первого порядка***

Это наиболее распространенный тип систем управления, так как астатические системы первого порядка могут работать как следящие системы, системы программного управления, системы стабилизации. Поэтому целесообразно рассмотреть методику синтеза нижнечастотного участка желаемой ЛАЧХ для различных типов управляющих воздействий.

1. Управляющее воздействие линейной формы  $g(t) = V \cdot t$ . Ошибка установившегося режима (рис. 4.3)  $e(\infty)$  не должна превышать допустимую  $e_{\text{доп}} \geq e(\infty)$ .

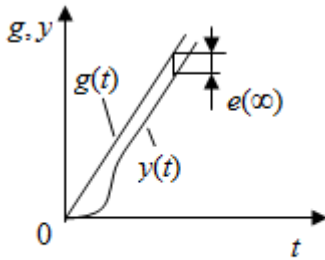


Рис. 4.3. Ошибка установившегося режима

Известно, что  $e(\infty) = \frac{V}{k}$ , где  $V$  – скорость изменения управляющего воздействия;  $k$  – общий коэффициент передачи разомкнутой системы, называемый добротностью по скорости. Тогда для определения значения  $k$  необходимо чтобы

$$e_{\text{доп}} \leq e(\infty) \text{ и } k_{\text{н}} \geq \frac{V}{e_{\text{доп}}}.$$

Нижнечастотная асимптота желаемой ЛАЧХ (рис. 4.4) будет представлять собой прямую линию с наклоном ( $-20$  дБ/дек) и проходящую через точку с координатами:

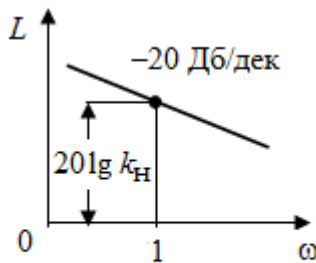


Рис. 4.4. Нижнечастотная асимптота желаемой ЛАЧХ

$$\left( \omega = 1 \text{ с}^{-1}; L = 20 \lg k_{\text{н}} \right).$$

2. Управляющее воздействие синусоидальной формы  $g(t) = G_{\text{max}} \sin(\omega_g t)$

Ошибка установившегося режима  $e(\infty)$  не должна превышать допустимого значения  $e_{\text{доп}} \geq e(\infty)$ .

При синусоидальном управляющем сигнале ошибка также будет изменяться по синусоидальному закону

$$e_g(t) = E_{\text{max}} \sin(\omega_g t + \psi),$$

где максимальное значение ошибки

$$E_{\text{max}} = G_{\text{max}} \left| \frac{1}{1 + W(j\omega_g)} \right|.$$

Полагая, что значение комплексной передаточной функции на частоте воздействия  $W(j\omega_g) \ll 1$ , получим

$$E_{\text{max}} \cong \frac{G_{\text{max}}}{W(j\omega_g)}.$$



Приравнивая  $E_{\max}$  и  $e_{\text{доп}}$ , имеем

$$e_{\text{доп}} = \frac{G_{\max}}{W(j\omega_g)},$$

откуда  $|W(j\omega_g)| \geq \frac{G_{\max}}{e_{\text{доп}}}$ . Тогда нижнечастотная асимптота ЛАЧХ (рис.4.5)

это прямая линия с наклоном (-20 дБ/дек), проходящая через точку с координатами:

$$\left( \omega = \omega_g, L = 20 \lg \left( \frac{G_{\max}}{e_{\text{доп}}} \right) \right).$$

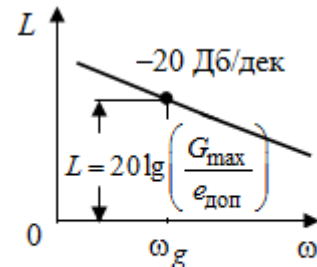


Рис. 4.5. Нижнечастотная асимптота ЛАЧХ

### 3. Управляющее воздействие $g(t)$ произвольной формы.

Об управляющем воздействии известно, что максимальная скорость его изменения  $\left( \frac{dg(t)}{dt} \right)_{\max} = V_{\max}$  и максимальное ускорение

$$\left( \frac{d^2g(t)}{dt^2} \right)_{\max} = a_{\max}.$$

Так как форма управляющего сигнала не задана для решения задачи синтеза нижнечастотной асимптоты желаемой ЛАЧХ вводится в рассмотрение эквивалентное синусоидальное воздействие, максимальные скорость и ускорение которого равны  $V_{\max}$  и  $a_{\max}$  соответственно:  $g_3(t) = G_3 \sin(\omega_3 t)$ .

Для определения  $G_3$  и  $\omega_3$  находим  $\left( \frac{dg_3(t)}{dt} \right)_{\max}$  и  $\left( \frac{d^2g_3(t)}{dt^2} \right)_{\max}$  и приравниваем их  $V_{\max}$  и  $a_{\max}$ .

$$\frac{dg_3(t)}{dt} = G_3 \omega_3 \cos(\omega_3 t); \quad \left( \frac{dg_3(t)}{dt} \right)_{\max} = G_3 \omega_3 = V_{\max}. \quad (4.1)$$

$$\frac{d^2g_3(t)}{dt^2} = -G_3 \omega_3^2 \sin(\omega_3 t); \quad \left( \frac{d^2g_3(t)}{dt^2} \right)_{\max} = G_3 \omega_3^2 = a_{\max} \quad (4.2)$$

Разделив (4.2) на (4.1) и получим

$$\omega_3 = \frac{a_{\max}}{V_{\max}}. \quad (4.3)$$

Подставим (4.3) в (4.1) и получим

$$G_3 = \frac{V_{\max}^2}{a_{\max}}. \quad (4.4)$$

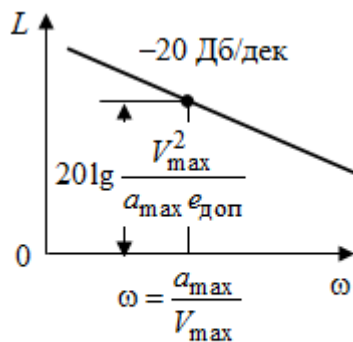
Определив параметры эквивалентного воздействия, находим максимальную ошибку

$$E_{\max} \cong \frac{G_3}{|W(j\omega_3)|}.$$

Приравняв максимальную и допустимую ошибки  $e_{\text{доп}} = E_{\max}$ , получим:

$$|W(j\omega_3)| = \frac{G_3}{e_{\text{доп}}} = \frac{V_{\max}^2}{a_{\max} e_{\text{доп}}}.$$

Значит нижнечастотная асимптота желаемой ЛАЧХ (рис. 4.6) должна пройти через контрольную точку с координатами:



$$\left( \omega = \omega_3 = \frac{a_{\max}}{V_{\max}}, L = 20 \lg \left( \frac{V_{\max}^2}{a_{\max} e_{\text{доп}}} \right) \right);$$

$$L = 20 \lg \left( \frac{V_{\max}^2}{a_{\max} e_{\text{доп}}} \right).$$

Рис. 4.6. Нижнечастотная асимптота желаемой ЛАЧХ

Если в контрольной точке асимптоту прерывает излом с наклона (-20 дБ/дек) на наклон (-40 дБ/дек), то ордината контрольной точки рассчитывается по формуле:

$$L(\omega_3) = 20 \lg \frac{\sqrt{2} V_{\max}^2}{a_{\max} e_{\text{доп}}},$$

где  $\sqrt{2}$  учитывает отличие действительной ЛАЧХ от асимптотической.

## 4.2.2. Синтез желаемой ЛАЧХ в области средних частот

Как отмечалось выше, желаемая ЛАЧХ в области средних частот должна иметь наклон  $(-20 \text{ дБ/дек})$ . Поэтому задачей синтеза желаемой ЛАЧХ в области средних частот является определение местоположения участка с наклоном  $(-20 \text{ дБ/дек})$ , задаваемое, например, с помощью частоты среза  $\omega_{\text{ср}}$  и его протяженности.

Существует три метода определения  $\omega_{\text{ср}}$  и протяженности участка с наклоном  $(-20 \text{ дБ/дек})$ : метод В.В. Солодовникова, метод В.А. Бесекерского и метод А.А. Вавилова.

В методе В.В. Солодовникова частота среза  $\omega_{\text{ср}}$  определяется по номограмме Солодовникова (рис. 4.7), для которой входными данными являются:  $t_p$  – время регулирования (до входа в зону  $\pm 5\% h_{\text{уст}}$ ) и  $\sigma_{\text{max}}$ , % – максимальное перерегулирование переходной характеристики. Из номограммы определяется частота среза  $\omega_{\text{ср}}$  и значение  $P_{\text{max}}$  типовой вещественной характеристики замкнутой системы (рис. 4.8).

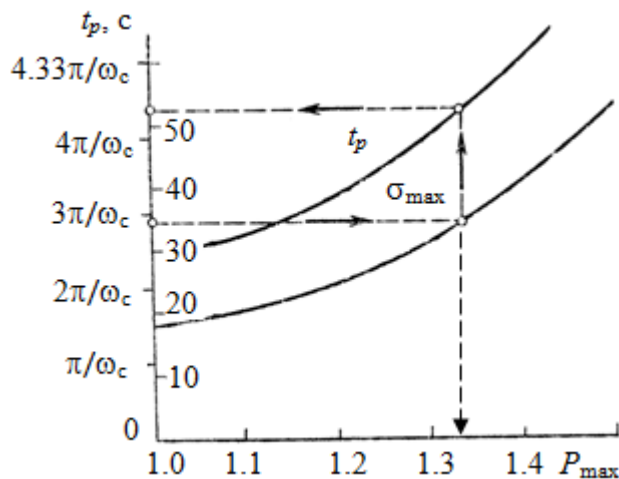


Рис. 4.7. Номограмма В.В. Солодовникова

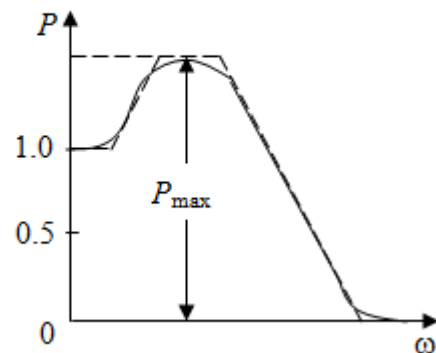


Рис. 4.8. Типовая вещественная характеристика замкнутой системы

Из рис. 4.7 видно (штриховыми стрелками), что для заданных  $\sigma_{\text{max}} = 34\%$  и времени регулирования  $t_p = 0.5 \text{ с}$  значения  $\omega_{\text{ср}}$  и  $P_{\text{max}}$  равны соответственно:  $\omega_{\text{ср}} = 4.33\pi/0.5 = 27.26 \text{ с}^{-1}$ , значение  $P_{\text{max}} = 1.33$ .

Протяженность участка с наклоном  $(-20 \text{ дБ/дек})$  определяется значением  $L_\gamma$  (рис. 4.9), которое находится из графика  $L_\gamma = f(P_{\text{max}})$  (рис. 4.10) по найденному выше значению  $P_{\text{max}}$ .

Так для найденного из примера  $P_{\text{max}} = 1.33$  по графику (4.10) находим  $L_\gamma = 12.5 \text{ дБ}$ .

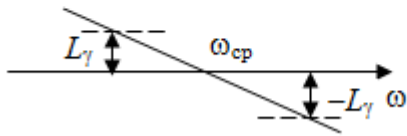


Рис. 4.9. Определение участка ЛАЧХ с наклоном (-20 дБ/дек)

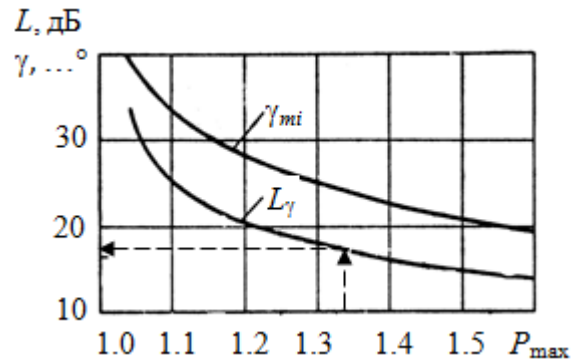


Рис. 4.10. График  $L_\gamma = f(P_{\max})$  для определения значения  $L_\gamma$

В методе Бессекерского по принятой величине показателя колебательности  $M$  рассчитываются значения частот, ограничивающих среднечастотный участок желаемой ЛАЧХ и задающих его местоположение (рис. 4.11).

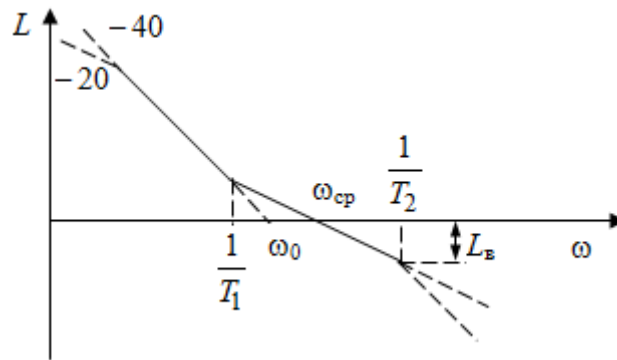


Рис. 4.11. Построение желаемой ЛАЧХ по методу Бессекерского

Слева от частоты среза участок ЛАЧХ с наклоном (-20 дБ/дек) ограничивается точкой пересечения с низкочастотной асимптотой, имеющей наклон (-40 дБ/дек) на частоте  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ , где  $T_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}$ .

Справа от частоты среза, среднечастотный участок ограничивается частотой  $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ , где  $T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}}$ .

После частоты  $\omega_2$  наклон желаемой ЛАЧХ может быть любым, но не положительным. Ограничением наклона в области высоких частот служит нулевой, при котором ЛАЧХ будет проходить параллельно оси частот на расстоянии  $L_B = 20 \lg \left( \frac{M}{M+1} \right)$ .

Наконец, метод А.А. Вавилова предлагает использовать для построения среднечастотного участка желаемой ЛАЧХ специальные номограммы

синтеза по критерию максимального быстродействия при заданном значении максимальной динамической ошибки (рис. 4.12, а и б). Метод используется для синтеза сложных систем с высоким порядком астатизма и оптимизирует переходные процессы по ошибке при степенных воздействиях.

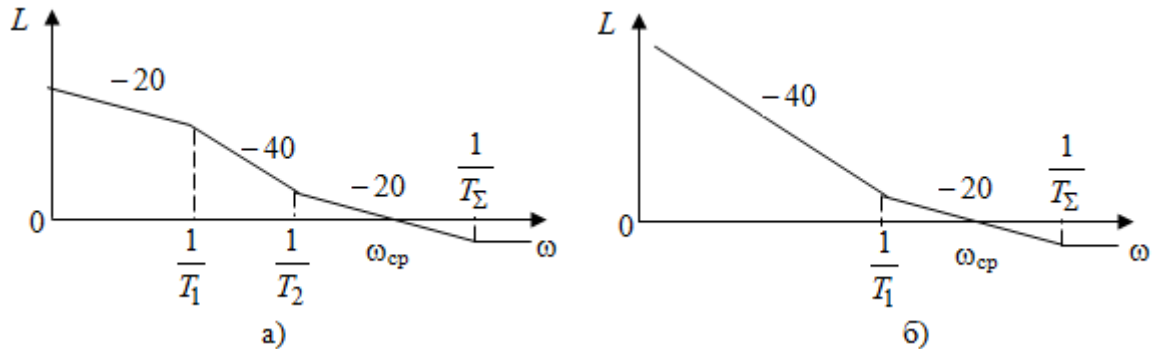


Рис. 4.12. Варианты построения желаемой ЛАЧХ методом А.А. Вавилова

Желаемая ЛАЧХ непрерывных систем в области низких частот  $0 \leq \omega \leq \omega_{cp}$  совпадают с желаемыми ЛАЧХ (наклон ЛАЧХ и коэффициент передачи на контрольной частоте) определяется исходя из требований к точности в установившемся режиме.

В области средних частот желаемые ЛАЧХ имеют наклон ( $-20$  дБ/дек). Параметры ЛАЧХ в этой области определяют запас устойчивости, системы, вид и время затухания переходного процесса. Частота среза  $\omega_{cp}$  и протяженность участка с наклоном ( $-20$  дБ/дек) определяются или по заданным  $\sigma_{max}$  и  $t_p$  или по заданному показателю колебательности  $M$ . Заданный показатель будет достигаться, если выполняются условия:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{T_j} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{T_i} \leq \omega_{cp} \frac{M-1}{M} \text{ при } \omega \leq \omega_{cp};$$

$$\frac{T}{2} + T_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M+1} \text{ при } \omega > \omega_{cp}.$$

### 4.3. Синтез корректирующих устройств

#### 4.3.1. Схемы включения и классификация корректирующих устройств

Корректирующим устройством, в общем случае, называется дополнительная часть системы, вводимая для улучшения ее динамических свойств.

Существует три способа включения корректирующих устройств в основную систему:

- последовательно в прямой канал передачи (рис. 4.13, а);
- в виде положительной или обратной связи, охватывающей часть элементов прямого канала (рис. 4.13, б);
- в виде параллельной прямой связи, включаемой параллельно участку прямого канала (рис. 4.13, в).

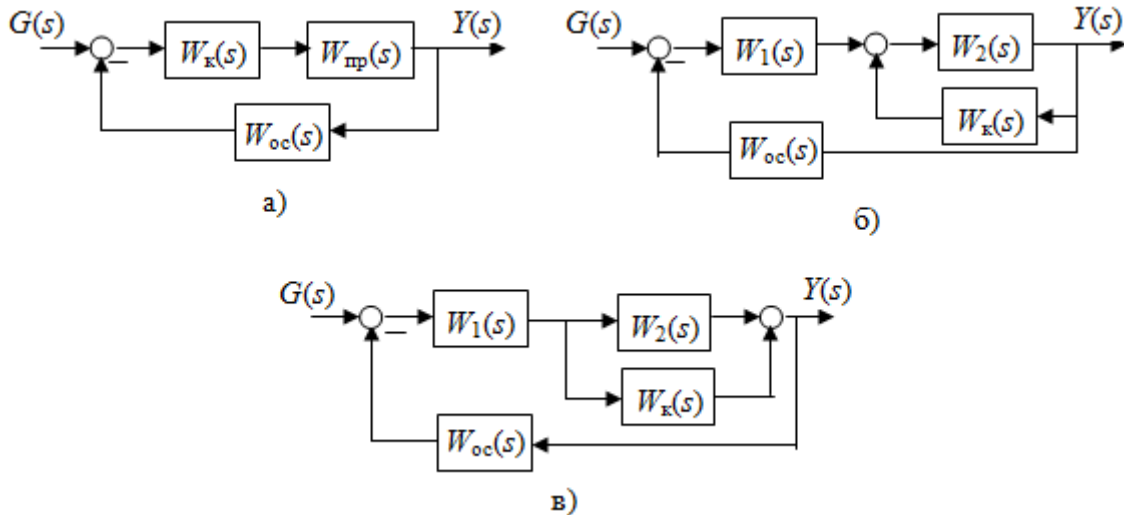


Рис. 4.13. Способы включения корректирующих устройств: а) последовательно в прямой канал передачи; б) в виде положительной или обратной связи; в) в виде параллельной прямой связи

В соответствии со способом включения корректирующего устройства называются последовательными, параллельными обратными и параллельными прямыми.

В соответствии с физической природой сигналов в системе управления корректирующие устройства могут быть механическими, гидравлическими, пневматическими, электрическими, электронными и, как разновидность электронных, программными, реализованными на интегральных схемах или микроконтроллерах.

Наконец, корректирующие устройства могут быть пассивными и активными в зависимости от того, использует ли корректирующее устройство энергию внешнего источника или не использует. Примерами пассивных корректирующих устройств являются электрические четырехполюсники, компонентами которых служат резисторы и конденсаторы. Примером активных корректирующих устройств являются операционные усилители и программно реализуемые корректирующие алгоритмы.

### 4.3.2. Определение передаточной функции последовательного корректирующего звена

Если известны передаточные функции скорректированной разомкнутой системы ( $W_{\text{ск}}(s)$ ) и некорректированной системы ( $W_{\text{нк}}(s)$ ), то передаточная функция корректирующего устройства определяется просто как

$$W_{\text{ку}}(s) = \frac{W_{\text{ск}}(s)}{W_{\text{нк}}(s)}.$$

Если желаемая передаточная функция неизвестна, и синтез корректирующего устройства выполняется совместно с синтезом желаемой ЛАЧХ, то определить ЛАЧХ корректирующего устройства можно графически (рис. 4.14), соблюдая условие получения наиболее простой реализуемой характеристики и передаточной функции корректирующего устройства:

$$L_{\text{ку}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{нк}}(\omega).$$

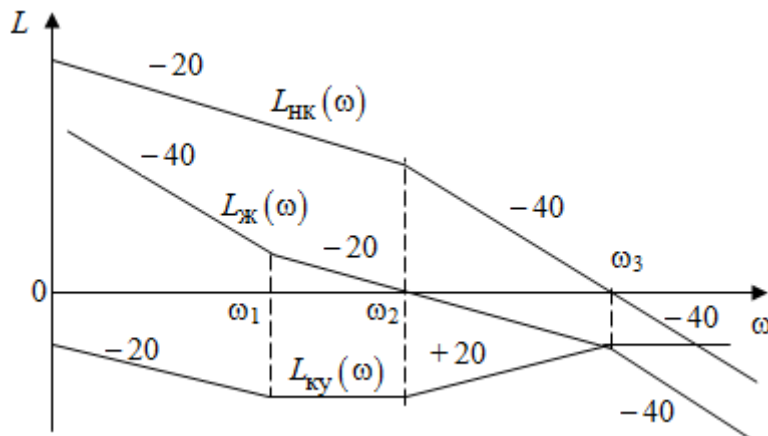


Рис. 4.14. Графическое определение желаемой ЛАЧХ корректирующего устройства

Согласно найденной ЛАЧХ корректирующего устройства  $L_{\text{ку}}(\omega)$  на рис. 4.14, передаточная функция запишется в виде:

$$W_{\text{ку}}(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\omega_1} + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_2} + 1\right)}{\left(\frac{1}{\omega_3} + 1\right)},$$

где  $k$  определяется по  $L_{\text{ку}}(\omega)$  на частоте  $\omega = 1\text{с}^{-1}$ .

### 4.3.3. Определение передаточной функции корректирующего устройства в виде отрицательной местной обратной связи

Часто корректирующие устройства, включаемые в цепь обратной связи части некорректируемой системы, называют параллельными, подчеркивая их отличие от последовательных корректирующих устройств.

Параллельными корректирующими звеньями охватывают, как правило, звенья исходной системы, имеющие большие коэффициенты усиления и частично нелинейные характеристики. Включение параллельного корректирующего устройства сглаживает нелинейность характеристик и повышает степень стабильности контура.

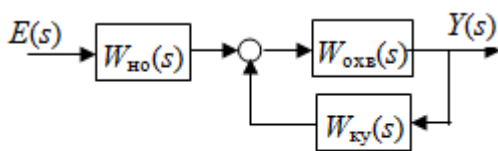


Рис. 4.15. Исходная система

Обозначим через  $W_{\text{ОХВ}}(s)$  передаточную функцию звеньев, охваченных местной обратной связью и через  $W_{\text{НО}}(s)$  передаточную функцию остальных звеньев системы (рис. 4.15).

Тогда передаточная функция разомкнутого контура

$$W(s) = \frac{W_{\text{НО}}(s)W_{\text{ОХВ}}(s)}{1 + W_{\text{ОХВ}}(s)W_{\text{КУ}}(s)}$$

Принимая равенство  $W_{\text{Ж}}(s) = W(s)$ , получим:

$$W_{\text{КУ}}(s) = \frac{1}{W_{\text{ОХВ}}(s)} \left[ \frac{W_{\text{НО}}(s)W_{\text{ОХВ}}(s)}{W_{\text{Ж}}(s)} - 1 \right].$$

Если принять во внимание свойство звеньев, охваченных местной обратной связью, т. е.

$$W_{\text{ОХВ}}(s) \cdot W_{\text{КУ}}(s) \ll 1,$$

что практически выполняется, то передаточная функция корректирующего устройства может быть принята равной

$$W_{\text{КУ}}(s) \cong \frac{W_{\text{НО}}(s)}{W_{\text{Ж}}(s)}.$$

Если формирование  $W_{\text{Ж}}(s)$  выполняется графически с помощью желаемой ЛАЧХ, то определение передаточной функции корректирующего устройства проще выполнить также графически через ЛАЧХ (рис. 4.14):

$$L_{\text{КУ}}(\omega) = L_{\text{НО}}(\omega) - L_{\text{Ж}}(\omega).$$



В соответствии с характеристикой  $L_{\text{кy}}(\omega)$ , полученной на рис. 4.15 графически, передаточная функция запишется в виде:

$$W_{\text{кy}}(s) = \frac{\left(\frac{1}{\omega_2} + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_3} + 1\right)}{\left(\frac{1}{\omega_1} + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_4} + 1\right)}.$$

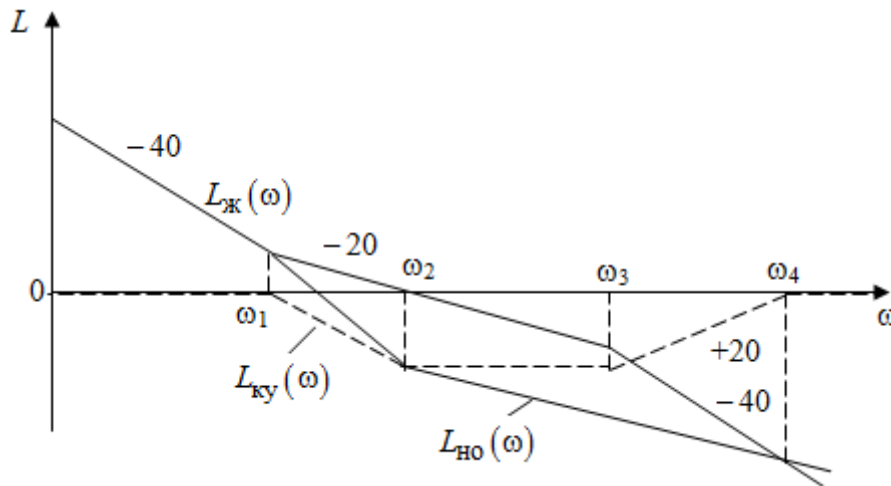


Рис. 4.15. Графическое определение  $L_{\text{кy}}(\omega)$

#### 4.4. Синтез последовательных корректирующих устройств в системах подчиненного регулирования

Системой подчиненного управления (СПУ) называется система автоматического управления, состоящая из нескольких вложенных друг в друга замкнутых контуров, настроенных так, что внутренний контур подчиняется внешнему контуру, который вырабатывает сигнал управления для внутреннего контура и управляет им. Классическая структура СПУ показана на рис. 4.16. Она включает в себя три контура, каждый из которых содержит свой собственный регулятор  $W_{\text{p1}}(s), W_{\text{p2}}(s), W_{\text{p3}}(s)$  и датчик регулируемой величины  $W_{\text{д1}}(s), W_{\text{д2}}(s), W_{\text{д3}}(s)$  соответственно.

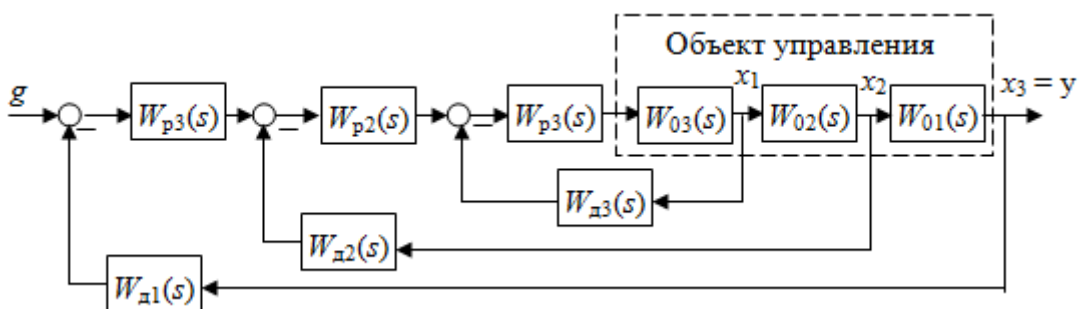


Рис. 4.16. Классическая структура СПУ

Таким образом, основными принципами построения СПУ являются:

- декомпозиция объекта управления на несколько на три управляемых частей с контролем и управлением выходной величины каждой части;
- последовательная коррекция свойств каждого контура с помощью включаемых в начало прямого канала каждого контура регуляторов; основным назначением регулятора является компенсация основных инерционностей контура;
- подчиненность внутренних контуров внешним.

Структура и параметры последовательных корректирующих устройств (регуляторов) выбираются исходя из определенных критериев. Сам процесс выбора структуры и параметров регулятора в контуре системы подчиненного управления получил название способа настройки контура. В настоящее время для настройки контуров СПУ используются, главным образом, два основных способа настройки:

- настройка на “оптимум по модулю” (ОМ);
- настройка на “симметричный оптимум” (СО).

#### 4.4.1. Настройка на оптимум по модулю

Настройка контура на ОМ обеспечивает характеристики, замкнутого контура, подобные характеристикам устойчивого колебательного звена второго порядка с коэффициентом демпфирования  $\varepsilon = 0.707$  и быстродействием, определяемым суммарной малой постоянной времени контура.

Передаточная функция замкнутого контура, настроенного на ОМ

$$\Phi(s) = \frac{1}{k_d} \frac{1}{2T_\mu s (T_\mu s + 1) + 1},$$

где  $k_d$  – коэффициент передачи датчика обратной связи контура;  $T_\mu$  – суммарная малая постоянная контура, равная сумме малых постоянных времени части объекта управления, входящей в контур и датчика обратной связи.

Передаточная функция разомкнутого контура, настроенного на ОМ

$$W(s) = \frac{1}{2T_\mu s (T_\mu s + 1)}$$
 соответствует системе с астатизмом первого порядка.

ЛАФЧХ разомкнутого и замкнутого контуров представлены на рис. 4.17.

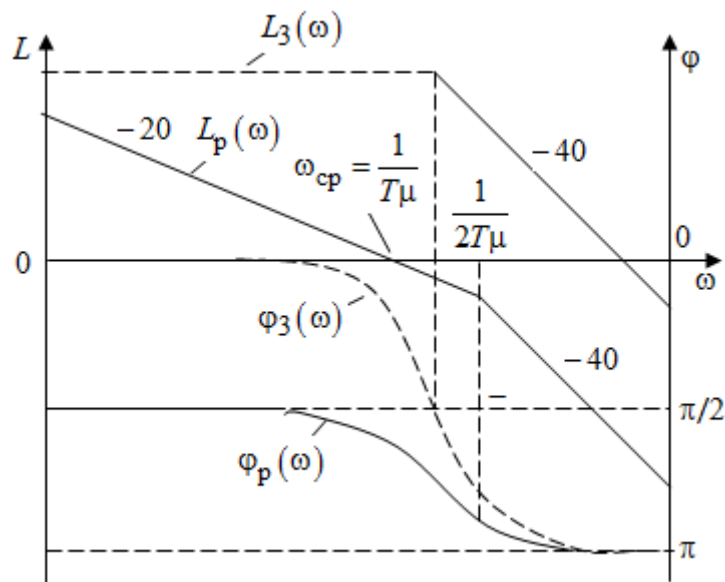


Рис. 4.17. ЛАФЧХ разомкнутого и замкнутого контуров

Переходная характеристика контура, настроенного на ОМ, будет иметь вид, показанный на рис. 4.18.

Она характеризуется перерегулированием  $\sigma = 4.3\%$  и временем первого согласования  $t_1 = 4.7T_\mu$ .

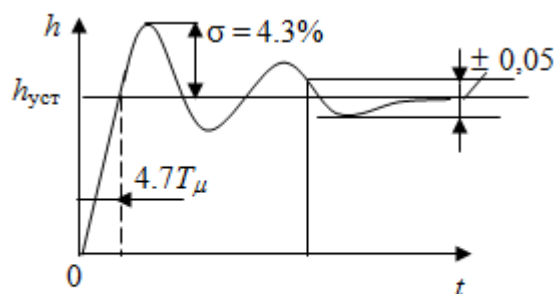


Рис. 4.18. ПХ системы, настроенной на ОМ

Рассмотрим, какими должны быть тип и параметры регуляторов при настройке на ОМ контуров с различными передаточными функциями объектов управления. Объектом управления в контуре считаются

все элементы контура, включая датчик обратной связи, кроме регулятора.

1. Позиционный объект с одной главной инерционностью:

$$W_0(s) = \frac{k_0}{(T_0s + 1)(T_\mu s + 1)},$$

где  $k_0$  – коэффициент передачи объекта (равный произведению коэффициентов всех элементов, входящих в объект);  $T_0$  – основная постоянная времени объекта, характеризующая главную инерционность объекта.

Желаемая передаточная функция разомкнутого контура при настройке на ОМ:

$$W_{OM}(s) = \frac{1}{2T_\mu s (T_\mu s + 1)}.$$

Учитывая, что регулятор включен последовательно с объектом, имеем

$$W_p(s) = \frac{W_{OM}(s)}{W_0(s)} = \frac{1}{2T_\mu s(T_\mu s + 1)} \frac{(T_0 s + 1)(T_\mu s + 1)}{k_0} =$$

$$= \frac{T_0}{2T_\mu k_0} \frac{T_0 s + 1}{T_0 s} = k_p \frac{T_p s + 1}{T_p s} = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_p s} \right).$$

Получим передаточную функцию регулятора, реализующего пропорционально-интегральный (ПИ) закон регулирования, у которого коэффициент  $k_p = \frac{T_0}{2T_\mu k_0}$ , а постоянная времени  $T_p = T_0$ .

2. Объект интегрального типа:

$$W_0(s) = \frac{k_0}{T_0 s(T_\mu s + 1)}.$$

Передаточная функция регулятора

$$W_p(s) = \frac{W_{OM}(s)}{W_0(s)} = \frac{1}{2T_\mu s(T_\mu s + 1)} \frac{T_0 s(T_\mu s + 1)}{k_0} = \frac{T_0}{2T_\mu k_0} = k_p.$$

Из полученного выражения видно, что необходим пропорциональный (П) регулятор с коэффициентом  $k_p = \frac{T_0}{2T_\mu k_0}$ .

3. Позиционный объект с двумя преобладающими постоянными времени:

$$W_0(s) = \frac{k_0}{(T_{01} s + 1)(T_{02} s + 1)(T_\mu s + 1)}.$$

Действуя аналогично пп 1 и 2, находим передаточную функцию регулятора:

$$W_p(s) = \frac{W_{OM}(s)}{W_0(s)} = \frac{1}{2T_\mu s(T_\mu s + 1)} \frac{(T_{01} s + 1)(T_{02} s + 1)(T_\mu s + 1)}{k_0} =$$

$$= \frac{T_{01}}{2T_\mu k_0} \frac{(T_{01} s + 1)(T_{02} s + 1)}{T_{01} s} = k_p \frac{(T_{p1} s + 1)(T_{p2} s + 1)}{T_{p1} s}.$$

Необходим регулятор с передаточной функцией

$$W_p(s) = k_p \frac{(T_{p1}s + 1)(T_{p2}s + 1)}{T_{p1}s},$$

где  $k_p = \frac{T_{01}}{2T_\mu k_0}$ ;  $T_{p1} = T_{01}$ ;  $T_{p2} = T_{02}$ .

Такой регулятор называется пропорционально-интегрально-дифференциальным (ПИД), который имеет три параметра настройки ( $k_p, T_{p1}, T_{p2}$ ).

#### 4.4.2. Настройка на симметричный оптимум

Настройка на симметричный оптимум (СО) обеспечивает более быстрые процессы в контуре по сравнению с контуром, настроенным на ОМ.

В замкнутом состоянии контур, настроенный на СО, имеет передаточную функцию

$$\Phi_{CO}(s) = \frac{4T_\mu s + 1}{8T_\mu^3 s^3 + 8T_\mu^2 s^2 + 4T_\mu s + 1}.$$

ЛАЧХ разомкнутого контура будет иметь вид, показанный на рис. 4.19.

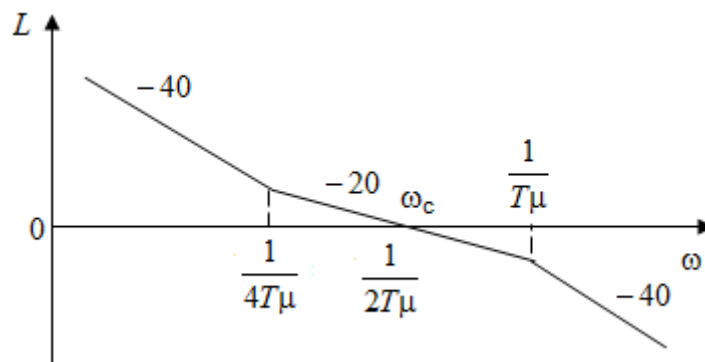


Рис. 4.20. ЛАЧХ разомкнутого контура

Эта ЛАЧХ совершенно симметрична относительно оси частот и частоты среза  $\omega_c$ , поэтому способ настройки, обеспечивающий такую ЛАЧХ, получил название симметричный оптимум, передаточная функция которого равна:

$$W_{CO}(s) = \frac{4T_\mu s + 1}{8T_\mu^2 s^2 (T_\mu s + 1)}.$$

Переходная характеристика контура, настроенного на СО (рис. 4.20)

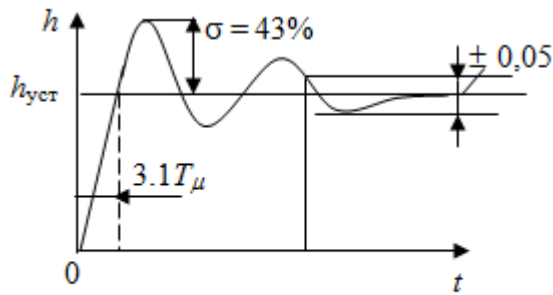


Рис. 4.20. ПХ системы, настроенной на СО

характеризуется временем первого согласования  $t_1 = 3.1T_\mu$  и перерегулированием  $\sigma = 43\%$ .

Определим тип и параметры регуляторов при настройке на СО контуров с различными объектами.

1. Объект интегрального типа:

$$W_0(s) = \frac{k_0}{T_0 s (T_\mu s + 1)}.$$

Желаемая передаточная функция

$$W_{\text{ж}}(s) = W_{\text{СО}}(s) = \frac{4T_\mu s + 1}{8T_\mu^2 s^2 (T_\mu s + 1)}.$$

Передаточная функция регулятора

$$\begin{aligned} W_p(s) &= \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W_0(s)} = \frac{W_{\text{СО}}(s)}{W_0(s)} = \frac{4T_\mu s + 1}{8T_\mu^2 s^2 (T_\mu s + 1)} \frac{T_0 s (T_\mu s + 1)}{k_0} = \\ &= \frac{T_0}{2T_\mu k_0} \frac{4T_\mu s + 1}{4T_\mu s} = k_p \frac{T_p s + 1}{T_p s}. \end{aligned}$$

Для того чтобы контур был настроен на СО, необходим ПИ- регулятор с передаточной функцией

$$W_p(s) = k_p \frac{T_p s + 1}{T_p s},$$

где  $k_p = \frac{T_0}{2T_\mu k_0}$ ,  $T_p = 4T_\mu$ .

Из полученного выражения видно, что коэффициент регулятора рассчитывается по такой же формуле, как и при настройке на ОМ, но постоянная времени другая, меньше чем  $T_0$  ( $T_0 > 4T_\mu$ ).

2. Объект позиционный с одной преобладающей постоянной времени:

$$W_0(s) = \frac{k_0}{(T_0 s + 1)(T_\mu s + 1)}, \quad (T_0 \gg 4T_\mu).$$

Для определения типа и параметров регулятора построим ЛАЧХ системы и регулятора (рис. 4.21).

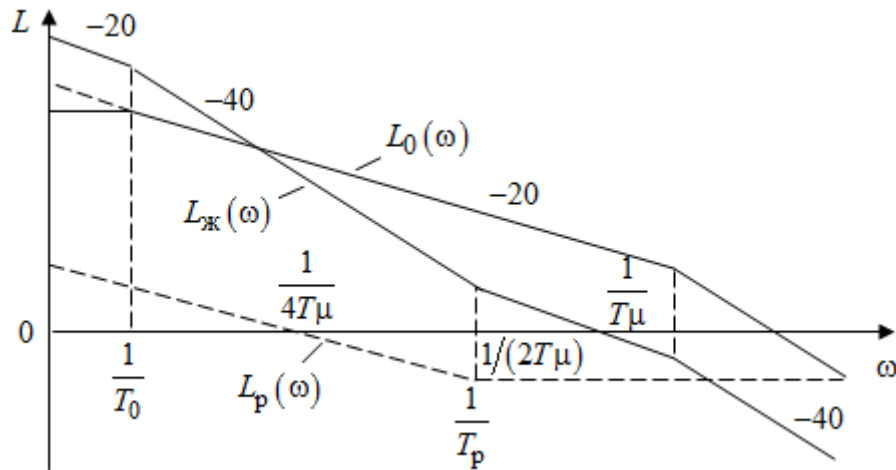


Рис. 4.21. ЛАЧХ системы и регулятора

Из рис. 4.21 следует, что необходим ПИ-регулятор с передаточной функцией  $W_p(s) = k_p \frac{T_p s + 1}{T_p s}$ , где  $k_p = \frac{T_0}{2T_\mu k_0}$ ,  $T_p = 4T_\mu$ . Но желаемая характеристика  $L_{\text{ж}}(\omega)$  на частоте  $\omega = \frac{1}{T_0}$  претерпевает излом и теряет свойства характеристики системы с астатизмом второго порядка. Переходный процесс при  $T_0 \ll 4T_\mu$  близок к стандартному для настройки на ОМ.

### Вопросы для самопроверки

1. Каким образом экспериментальным путем можно оценить качество работы системы?
2. Какова роль моделирования систем управления?
3. Перечислите общие методы повышения точности систем управления. Поясните их.
4. Дайте понятие астатических системы управления. Каким образом определяется степень астатизма?
5. В чем преимущество повышения степени астатизма системы с помощью изодромных устройств?
6. Какая система является инвариантной по отношению к внешним воздействиям?
7. Что понимается под комбинированным управлением?
8. Как определяются передаточные функции компенсирующих устройств в комбинированных системах?
9. Для каких целей используются неединичные главные обратные связи?
10. Сформулируйте понятие чувствительности систем управления.
11. Каким образом можно получить уравнения чувствительности?
12. Что представляют собой функции чувствительности и коэффициенты чувствительности?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлова, Л.П. Теория автоматического управления. ч. 1: учебно-методический комплекс [Текст] / Л.П. Козлова, О.И. Золотов – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2009. – 252 с.
2. Теория автоматического управления [Текст] : учебник для вузов / С. Е. Душин [и др.] ; ред. В. Б. Яковлев ; рец.: В. В. Григорьев, Г. А. Дидук. - М. : Высш. шк., 2003. - 562 с.



*Козлова Людмила Петровна  
Козлова Ольга Александровна  
Золотов Олег Иванович*

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор \_\_\_\_\_

Компьютерная верстка \_\_\_\_\_

План 2016 г, п.

Подписано к печати \_\_\_\_\_, 2016

Объем 6,0 усл.-печ. л. Тираж 30 экз. Заказ \_\_\_\_\_

РИЦ СПбГУТ. 191186 СПб., наб. р. Мойки, 61  
Отпечатано в СПбГУТ

**Л. П. Козлова, О.А. Козлова,  
О.И. Золотов**

**ОСНОВЫ  
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2016**