

Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича

Математические Модели в Сетях Связи

СПб ГУТ)))

Система — единое целое, представимое совокупностью взаимосвязанных и взаимодействующих объектов, обладающее свойствами (хотя бы одним), которых не имеет ни одна из частей целого при любом способе его членения, и не выводимыми из свойств частей.

$$S \underset{\text{def}}{\equiv} \langle A, R \rangle = \langle \{a_i\}, \{r_j\} \rangle, \text{ где } A = \{a_i\}, R = \{r_j\}$$

$a_i \in A \quad r_j \in R$

S — система, a_i — элементы, r_j — отношения (связи), A — множество элементов, R — множество отношений.

Элемент — неделимая часть системы;

Подсистема — делимая часть системы, которая может выполнять определённые функции;

Структура — расположение элементов или групп элементов системы и связи (взаимосвязи) между элементами;

В последующем система стала включать в себя такое понятие как «свойство (атрибут)», которое может относиться как к элементам, так и к связям.

Модели. Основные определения

Моделирование – замещение исследуемого объекта его условным образцом, описанием или другим объектом, именуемым моделью и обеспечивающим близкое к оригиналу поведение в рамках некоторых допущений и приемлемых погрешностей с целью познания свойств оригинала.

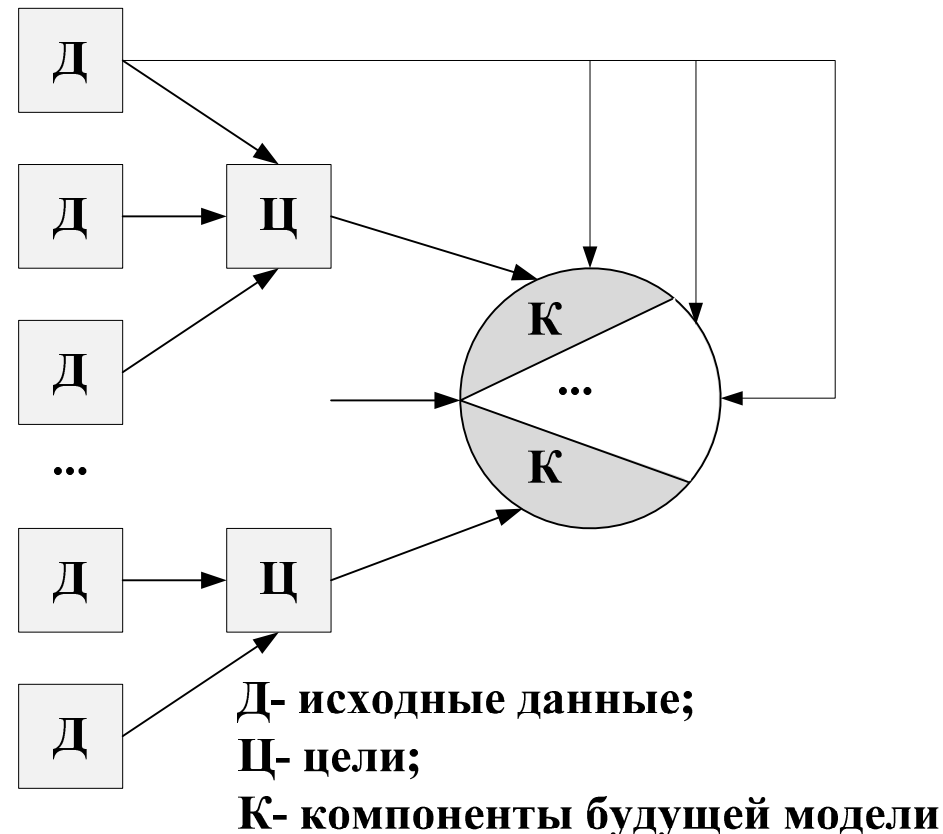
Модель – некоторый физический или абстрактный объект, свойства которого в определённом смысле сходны со свойствами исследуемого объекта.

Общие требования, предъявляемые к моделям

- адекватность – достаточно точное отображение свойств объекта;
- целенаправленность – совпадение целей функционирования системы и её модели;
- полнота – предоставление получателю всей необходимой информации об объекте;
- гибкость – возможность воспроизведения различных ситуаций во всем диапазоне изменения условий и параметров;
- трудоемкость разработки должна быть приемлемой для имеющегося времени и программных средств;
- надежность – гарантия от получения абсурдных результатов;
- наглядность и удобство взаимодействия с моделью;
- аддитивность – возможность взаимодействия с другими моделями;
- возможность изменения модели.

Подходы к моделированию

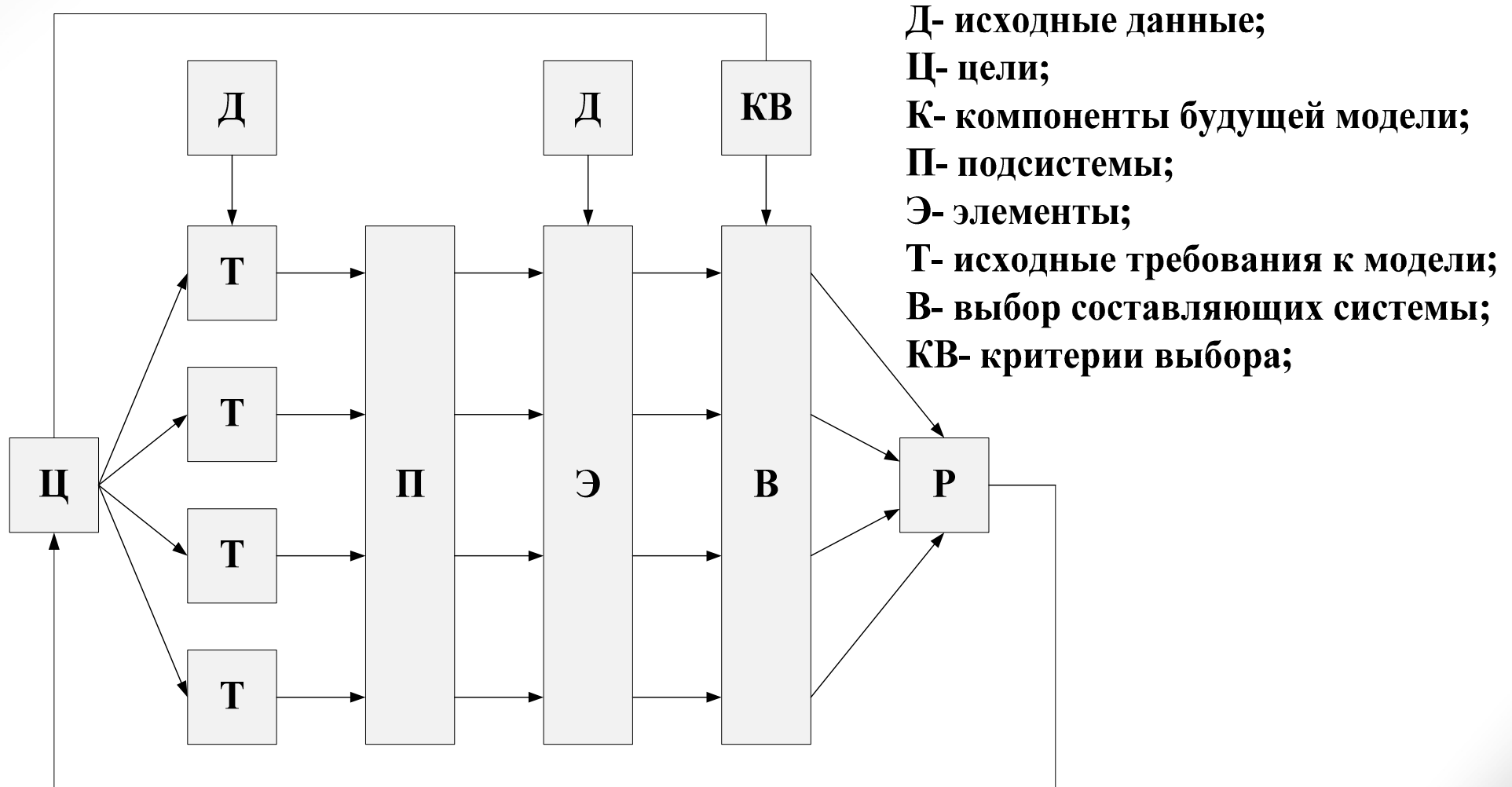
Классический подход – подход, подразумевающий суммирование отдельных компонент в единую модель, причем каждая из компонент решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели.



Отличительные стороны классического подхода

- наблюдается движение от частного к общему;
- создаваемая модель образуется путем суммирования отдельных ее компонент, и не учитывается возникновение нового системного эффекта;

Системный подход – Системный подход предполагает раскрытие целостности объекта, выявление и изучение его внутренней структуры, а также связей с внешней средой.



Этапы синтеза модели системы при системном подходе

- определяется цель функционирования системы
- вырабатываются требования к модели системы;
- на основании исходных данных и требования синтезируются подсистемы
- подсистемы разбиваются на элементы
- на основании критерия выбора осуществляется выбор элементов, определяющих конечный итог функционирования системы;

Отличительные стороны системного подхода

- последовательное продвижение по этапам создания модели;
- согласование информационных, ресурсных, надежности и других характеристик;
- правильное соотношение различных уровней построения модели;
- целостность отдельных стадий проектирования модели.

На начальных этапах анализа объекта (системы) важно определить границы между объектом исследования и средой, с которой он взаимодействует.

Окружающая среда – объекты окружающего мира, не вошедшие в систему, но оказывающие на нее влияние или подверженные влиянию со стороны системы ;

Входной полюс системы – это совокупность элементов системы, через которые окружающая среда оказывает воздействие на систему;

Выходной полюс системы – это совокупность элементов системы, через которые система воздействует на окружающую среду;

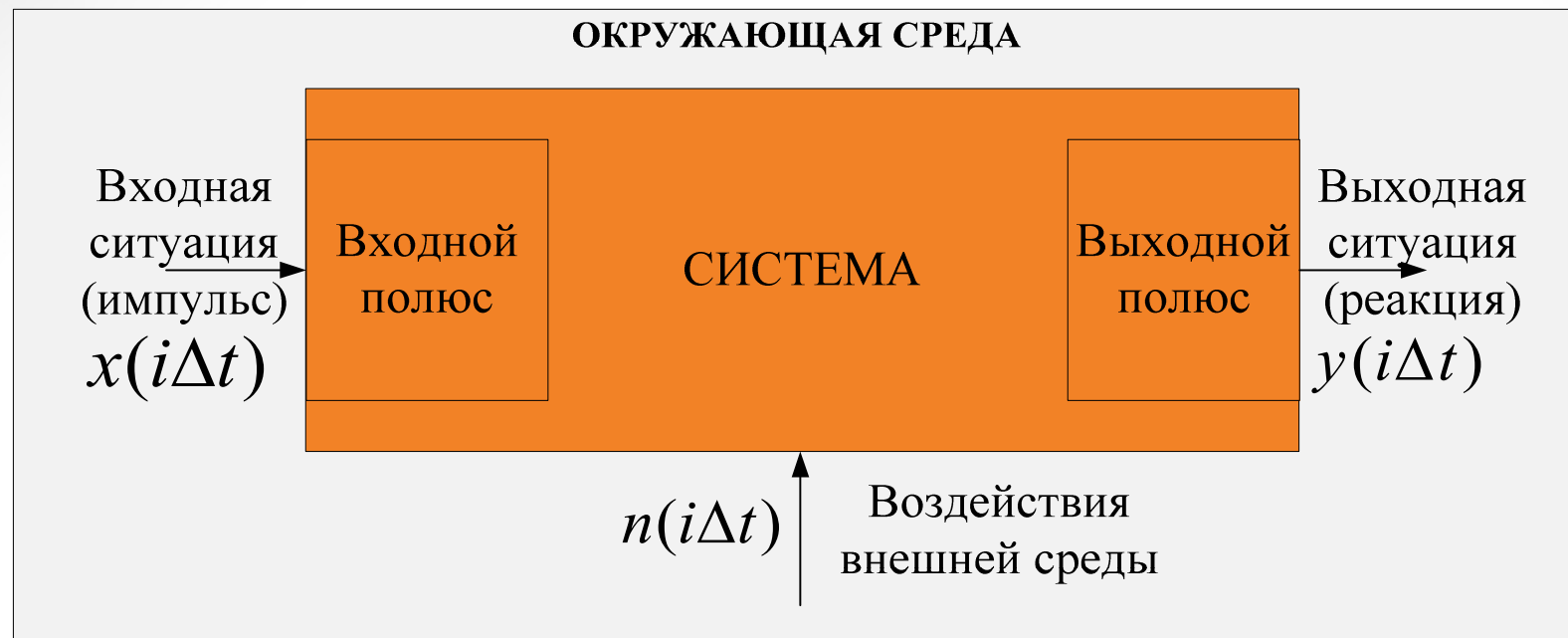
Входная ситуация – это мгновенная обстановка на входном полюсе системы, отражающая воздействие окружающей среды на систему;

Выходная ситуация – это мгновенная обстановка на выходном полюсе системы, отражающая воздействие системы на окружающую среду.

Эндогенные переменные – зависимые переменные, возникающие в системе под воздействием внутренних причин или входных переменных.

Экзогенные переменные (входные) – predetermined переменные, порождённые вне системы под воздействием внешних причин и оказывающие влияние на эндогенные переменные.

Положения наблюдателя в процессе исследования системы



$$y(i\Delta t) = f(x(i\Delta t), n(i\Delta t))$$

- Наблюдатель относит себя к среде и считает систему полностью изолированной (замкнутой), что позволяет не учитывать воздействие среды при исследовании модели, хотя среда может влиять на её формирование;
- Включать себя в систему и строить модель с учётом собственного влияния на систему и влияния системы на собственные представления о ней;
- Выделить себя из окружающей среды и системы и рассматривать систему как постоянно взаимодействующую со средой (открытую).

Состав элементов характеризует количество и качественное различие элементов

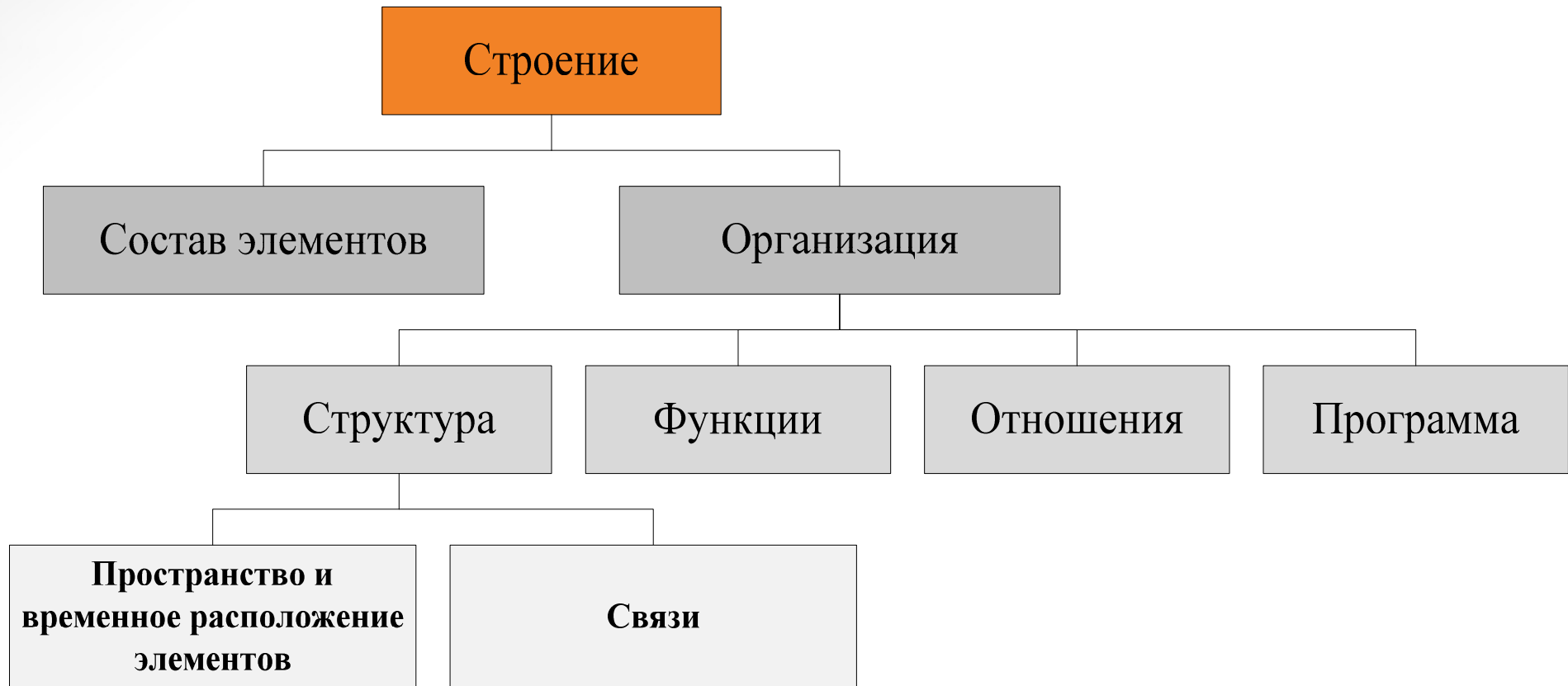
Организация – способ взаимосвязи и взаимодействия между ее элементами и подсистемами, который обеспечивает образование и существование системы;

Структура – устойчивая упорядоченность в пространстве и времени элементов и связей системы, определяющая ее целостность, строение, основы ее организации;

Связь – физический канал, по которому обеспечивается обмен между элементами системы веществом, энергией и информацией.

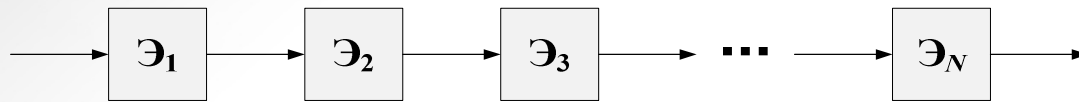
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные понятия, характеризующие систему



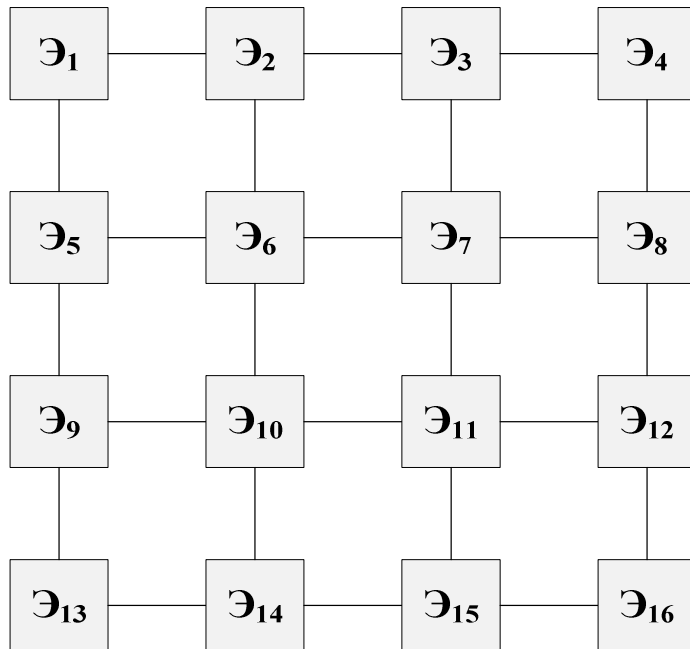
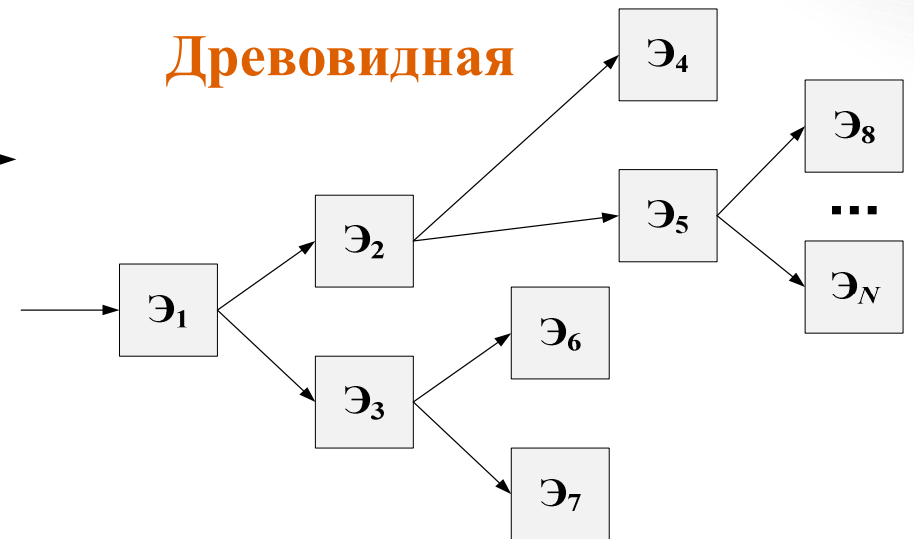
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Графы, соответствующие различным структурам

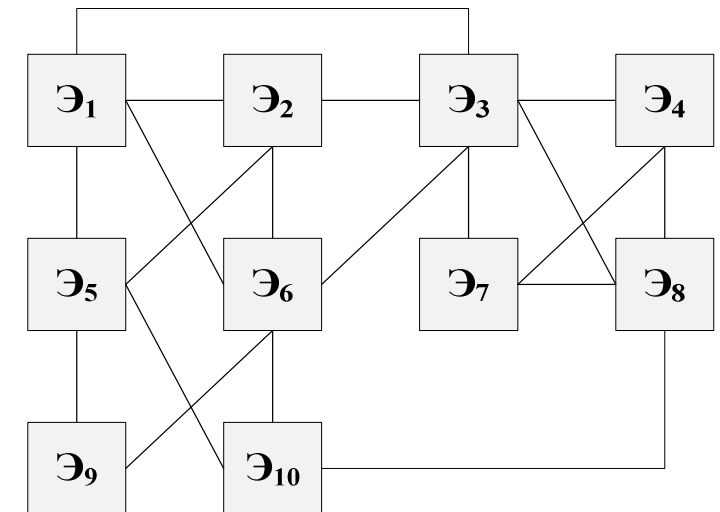


Линейная

Древовидная



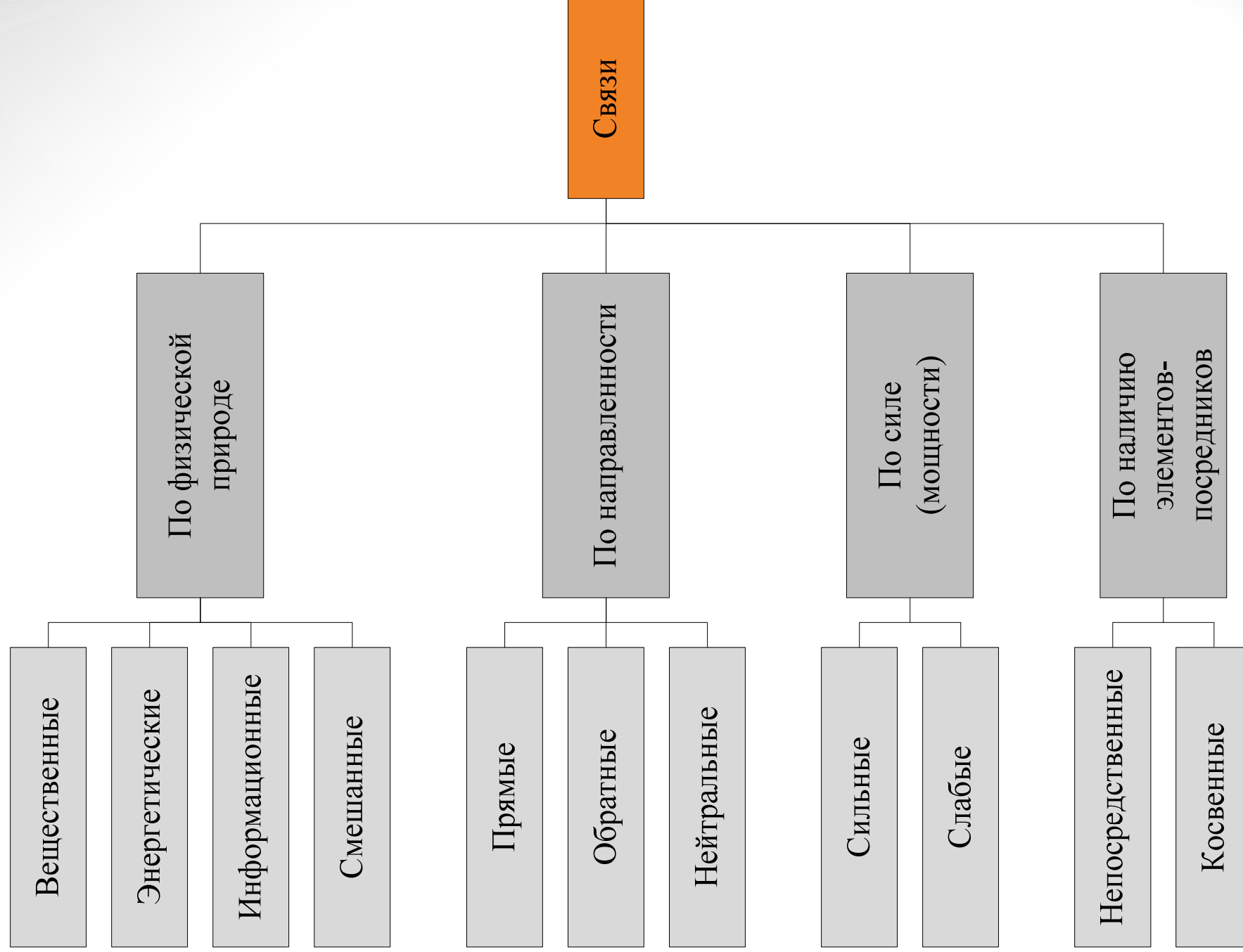
Матричная



Сетевая

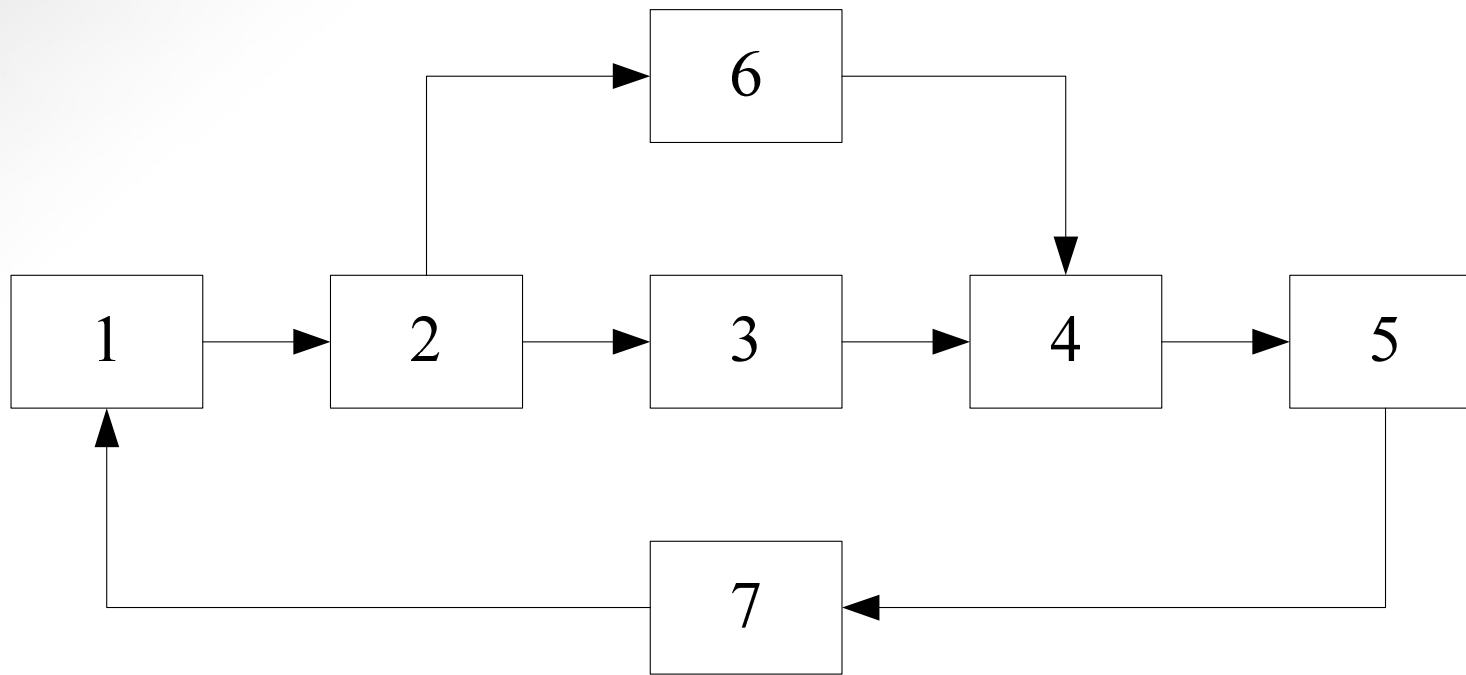
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Классификация связей в системе



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Иллюстрация видов связей в системе



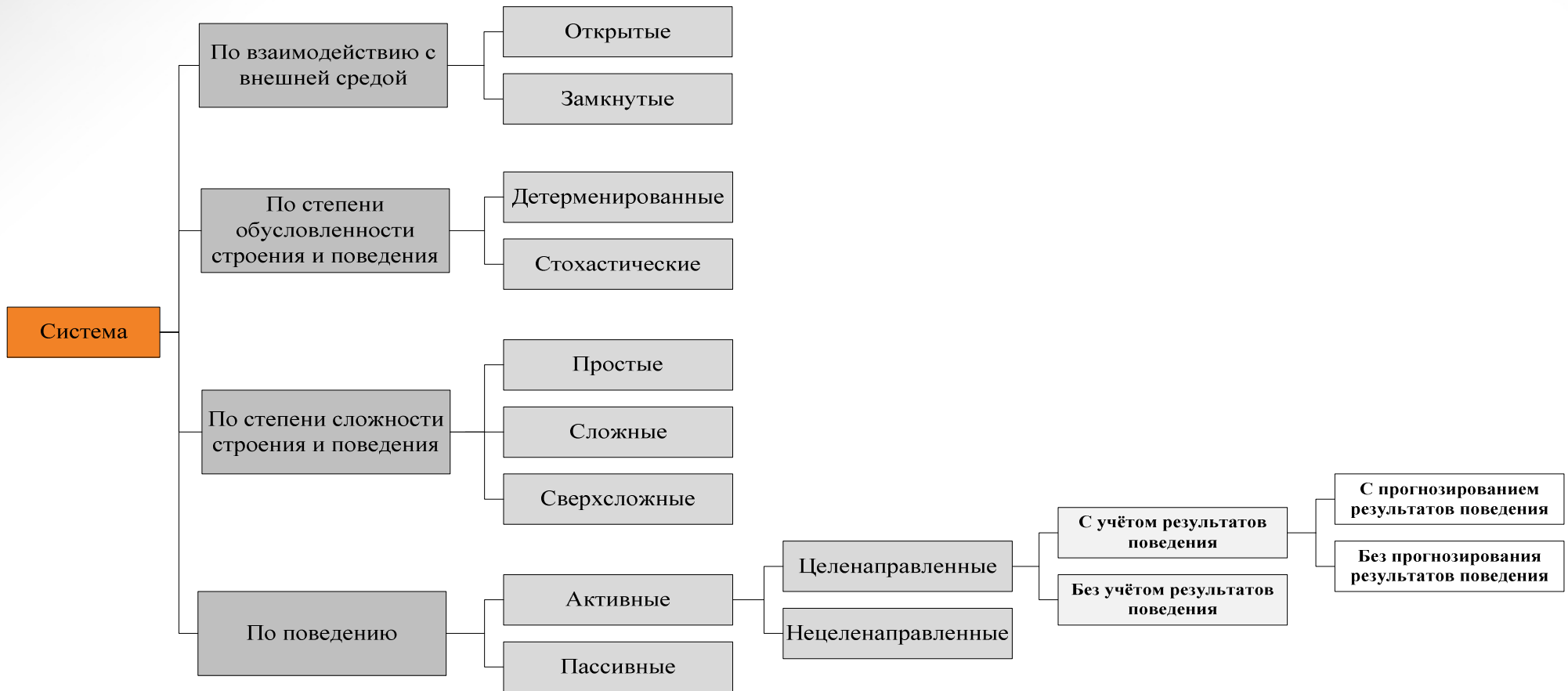
Связь элементов:

1 с 2 прямая непосредственная,

1 с 3 – прямая косвенная, 1 с 7 – обратная непосредственная,

1 с 5 – прямая косвенная (через элементы 2, 3, 4 и 2, 6, 4) и обратная косвенная (через элемент 7).

2 с 7 – нейтральная.

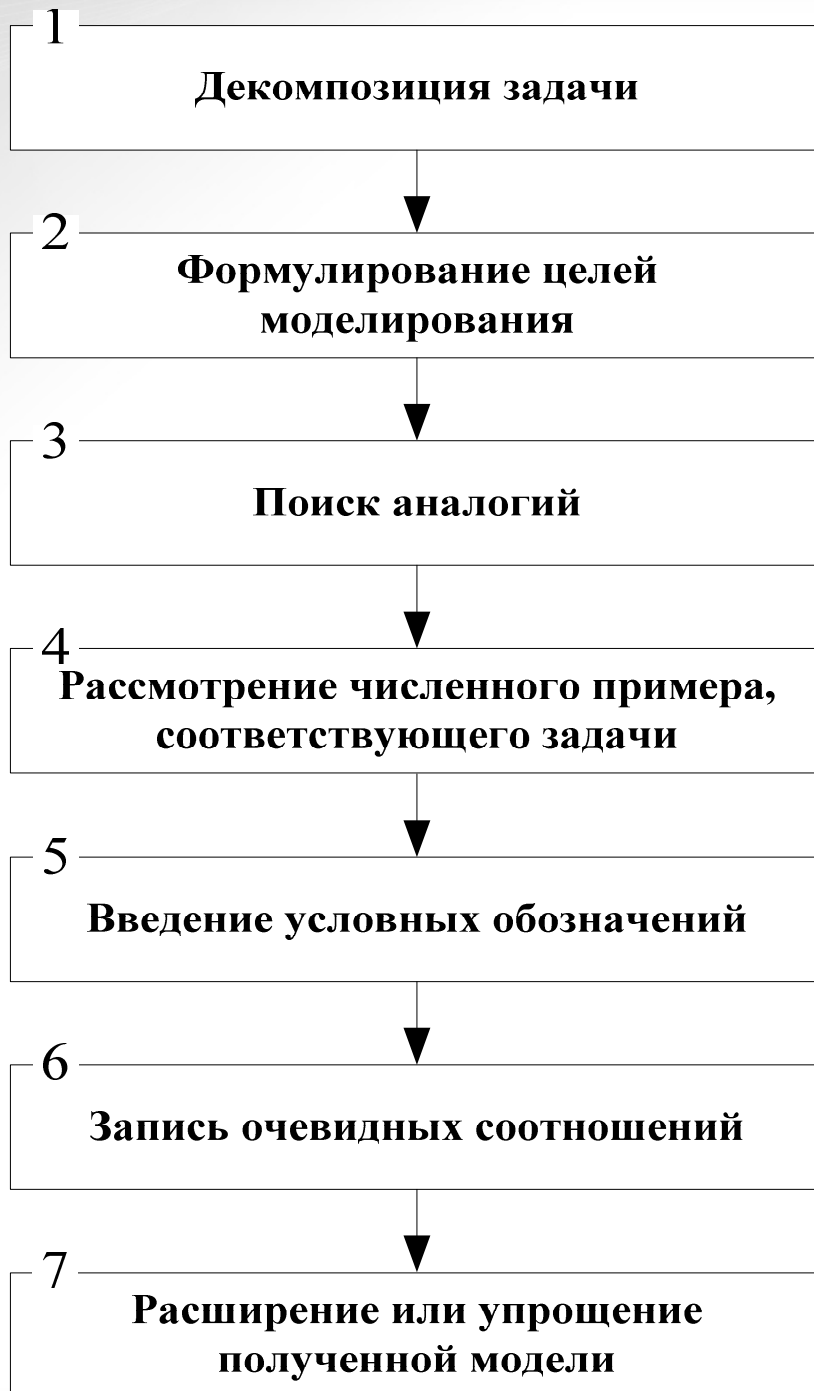


ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Общая схема любого активного действия человека

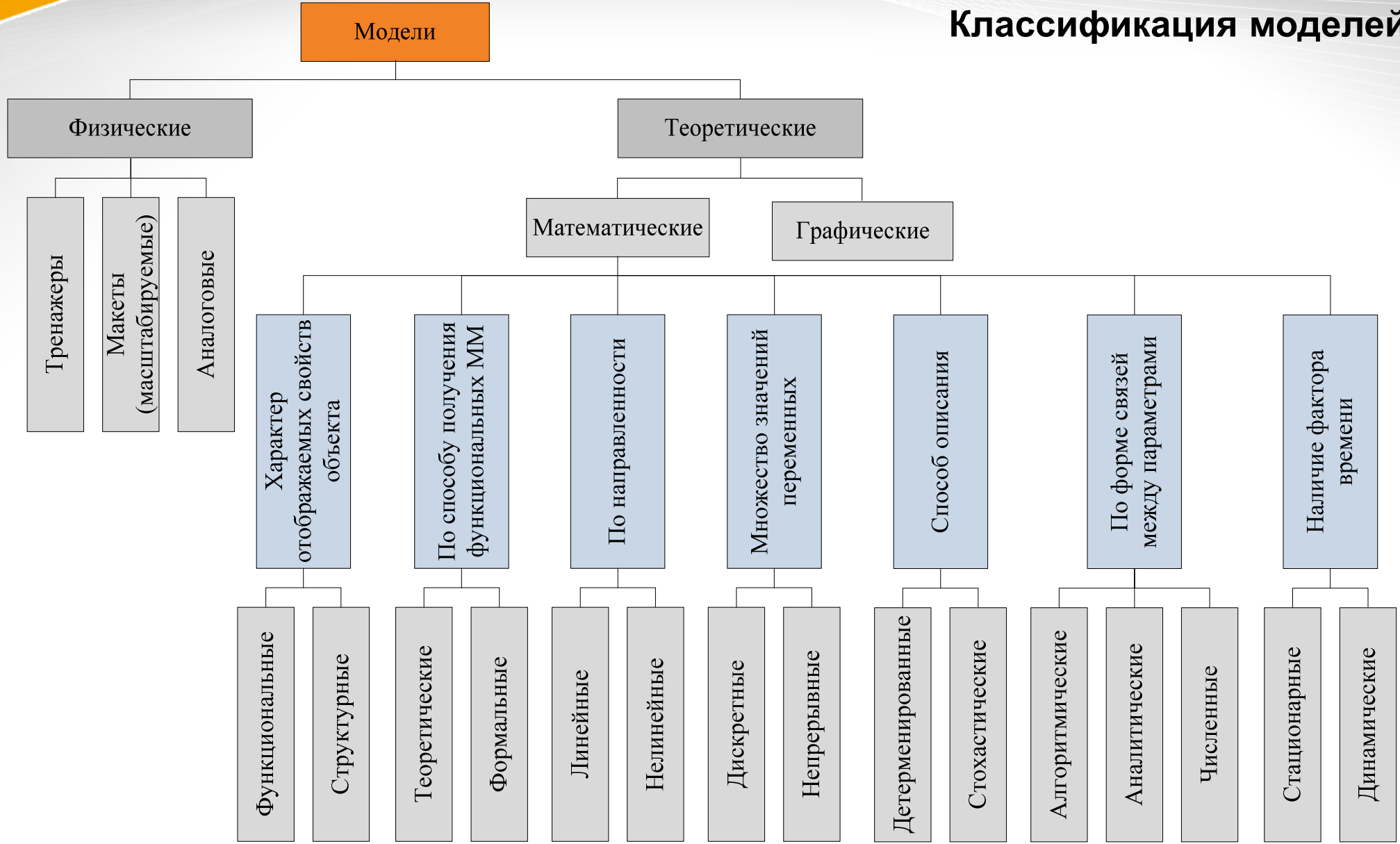


Этапы процесса моделирования



Процесс построения модели включает в себя следующие этапы:

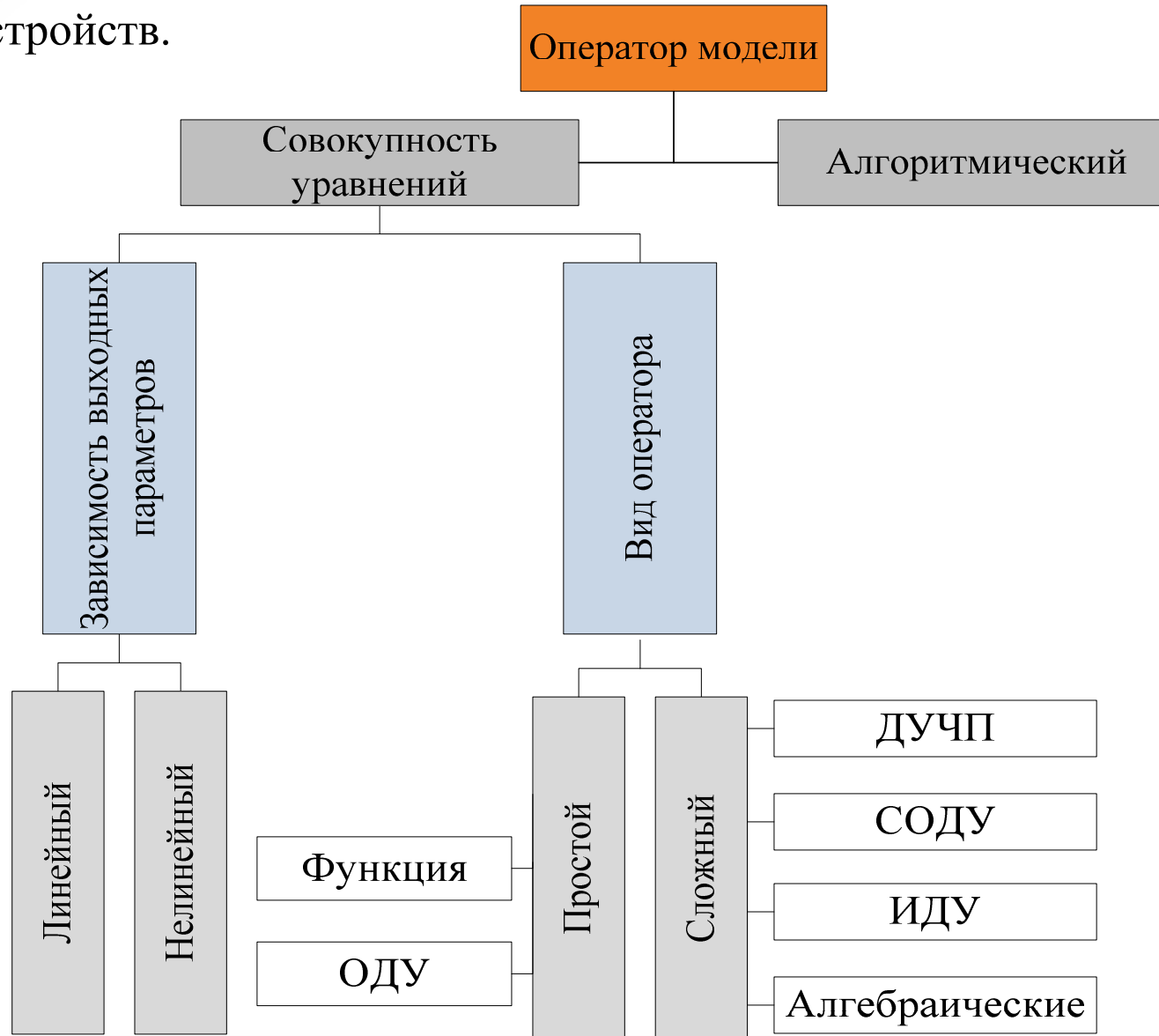
1. Словесно-смысловое описание объекта или явления;
2. Завершение идеализации объекта и упрощение описания;
3. Переход к выбору или формулировке закона и его записи в математической форме;
4. Задание начального состояния и параметров объекта. Этот этап особенно важен, поскольку формулируется цель исследования;
5. Изучение модели всеми доступными методами (в том числе с применением различных подходов и вычислительных методов);
6. В результате исследования модели достигается поставленная цель. При этом должна быть установлена всеми возможными способами ее адекватность - соответствие объекту и сформулированным предположениям.



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Классификация в зависимости от оператора модели

Математическая модель – математическое описание (схема алгоритма, система уравнений), которое обеспечивает имитацию работы систем или устройств на уровне, достаточно близком к их реальному поведению, получаемому при натурных испытаниях систем или устройств.



Математическое моделирование

Аналитическое моделирование характеризуется записью исследуемых процессов в виде функциональных соотношений (алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений).

Исследуется методами:

- 1) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для характеристик систем;
- 2) численным, когда не удается найти решение уравнений в общем виде и их решают для конкретных начальных данных;
- 3) качественным, когда при отсутствии решения находят некоторые его свойства.

Имитационное моделирование характеризуется воспроизведением исследуемого процесса во времени с сохранением логической структуры и последовательности элементарных явлений, составляющих исследуемый процесс.

При имитационном моделировании математическая модель воспроизводит логику работы системы во времени при разных значениях параметров и окружающей среды.

Статистическое моделирование — разновидность имитационного моделирования для исследования стохастических систем методом многократного повторения исследования с воспроизведением случайных величин и процессов и последующей обработкой данных

$$s(t) = K_u [a(t), s_{ku}]$$

$$r(t) = K_k [s(t), s_{kk}] = K_k [K_u [a(t), s_{ku}], s_{kk}]$$

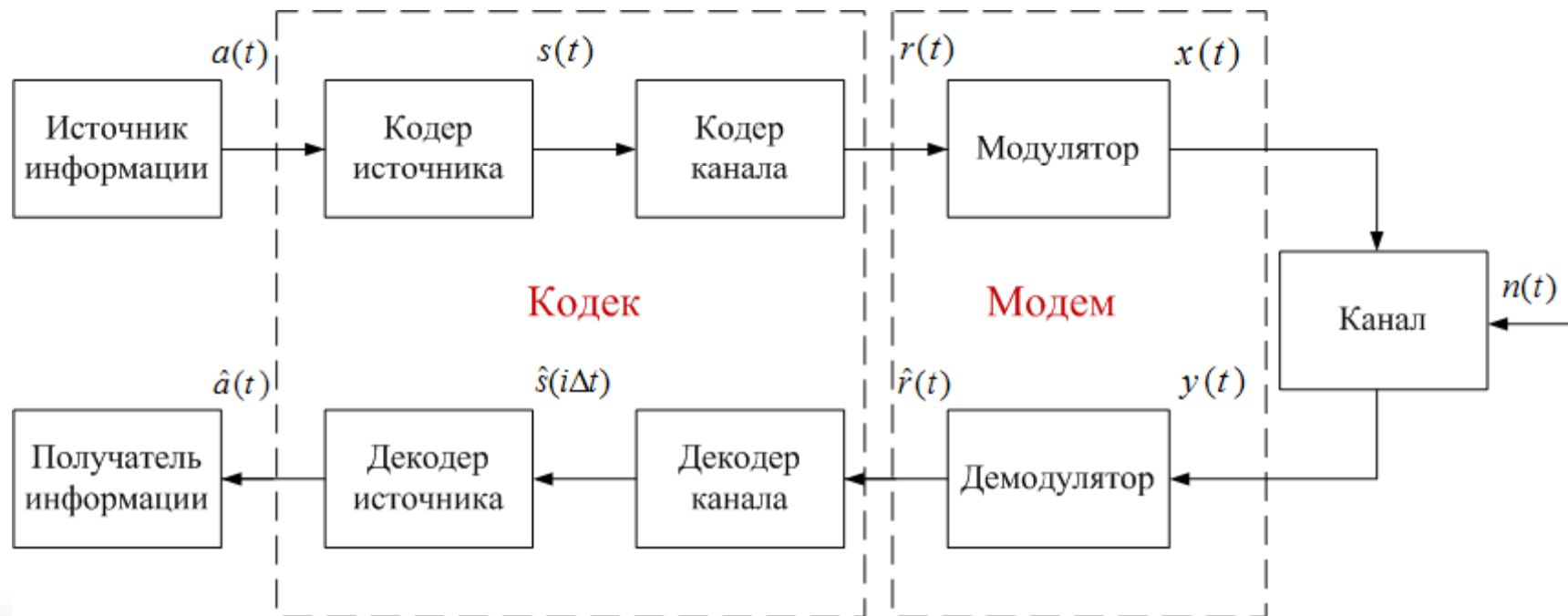
$$x(t) = M[r(t)] = M\{K_k [K_u [a(t), s_{ku}], s_{kk}]\}$$

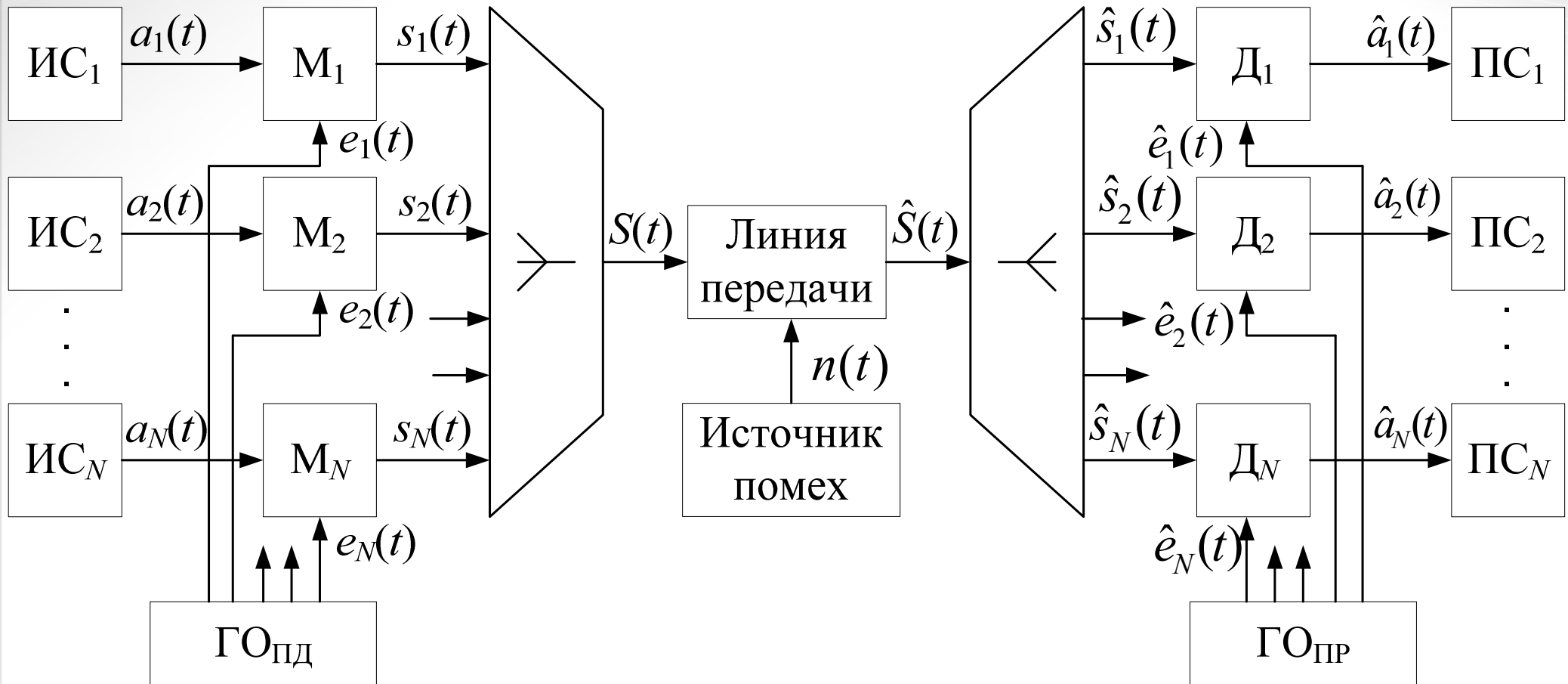
$$y(t) = L\{r(t), n(t)\} = L\{M\{K_k [K_u [a(t), s_{ku}], s_{kk}]\}, n(t)\}$$

$$\hat{r}(t) = M^{-1}[y(t)] = M^{-1}[L\{M\{K_k [K_u [a(t), s_{ku}], s_{kk}]\}, n(t)]$$

$$\hat{s}(t) = D_k [\hat{r}(t)] = D_k [M^{-1}[L\{M\{K_k [K_u [a(t), s_{ku}], s_{kk}]\}, n(t)]]$$

$$\hat{a}(t) = D_u [\hat{s}(t)] = D_u [D_k [\hat{r}(t)]] = D_u [D_k [M^{-1}[L\{M\{K_k [K_u [a(t), s_{ku}], s_{kk}]\}, n(t)]]]$$





- ИС- источник сигнала
- М- модулятор
- Д- демодулятор
- ПС- приемник сигнала
- $ГО_{ПД}$, $ГО_{ПР}$ - генераторное оборудование передачи / приема

$$s_n(t) = M_n [a_n(t)]$$

линейное преобразование:
$$\left[\sum_{n=1}^N M_n (\beta_n a_n(t)) \right] = \sum_{n=1}^N \beta_n M_n \{a_n(t)\}$$

$$S(t) = U [s_n(t)] = U [M_n [a_n(t)]] = \sum_{n=1}^N s_n(t) = \sum_{n=1}^N M_n [a_n(t)]$$

$$\hat{S}(t) = L[S(t), n(t)]$$

$$\hat{s}_n(t) = U^{-1} [\hat{S}(t)]$$

$$\hat{a}_n(t) = M_n^{-1} [\hat{s}_n(t)] = \left\{ M_n^{-1} \left[U^{-1} \left[L \left[U \left[M_n [a_n(t)] \right] \right] \right] \right] \right\}$$

Множество – совокупность элементов, объединённых неким общим свойством

Пустое множество \emptyset – множество, не содержащее ни одного элемента

Универсум – множество, содержащее все элементы из данного масштаба рассуждений (все мыслимые элементы)

$$S_1 \subseteq S_2 \Leftrightarrow x \in S_1 : x \in S_2 \quad S_1 \supseteq S_2 \Leftrightarrow S_2 \subseteq S_1$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow (S_1 \subseteq S_2) \wedge (S_2 \subseteq S_1)$$

$$S_1 \subset S_2 \Leftrightarrow (S_1 \subseteq S_2) \wedge (S_1 \neq S_2) \quad S_1 \supset S_2 \Leftrightarrow S_2 \subset S_1$$

$$S_1 \text{ и } S_2 \text{ не пересекаются} \Leftrightarrow x \in S_1 : x \notin S_2$$

$$S_1 \text{ и } S_2 \text{ в общем положении} \Leftrightarrow \dots$$

$$\dots \Leftrightarrow \exists x, y, z \mid (x \in S_1) \cap (x \notin S_2) \cap (y \notin S_1) \cap (y \in S_2) \cap (z \in S_1) \cap (z \in S_2)$$

Бинарные операции

$S_1 \cup S_2 := \{x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2\}$ – объединение

$S_1 \cap S_2 := \{x \mid x \in S_1 \wedge x \in S_2\}$ – пересечение

$S_1 \setminus S_2 := S_1 \cap \bar{S}_2 = \{x \mid x \in S_1 \wedge x \notin S_2\}$ – разность $S_1 \setminus S_2 \neq S_2 \setminus S_1$

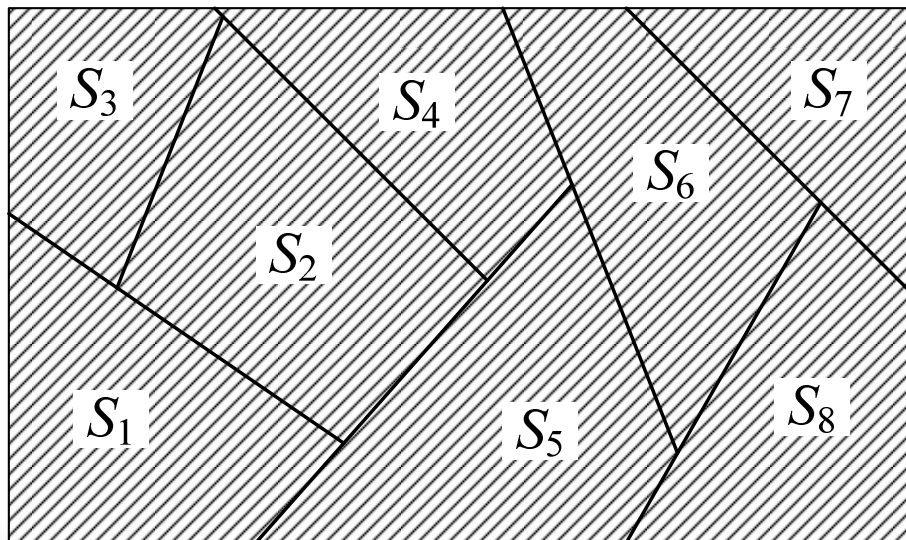
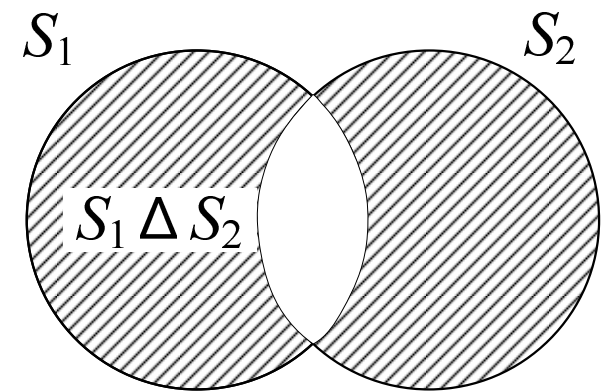
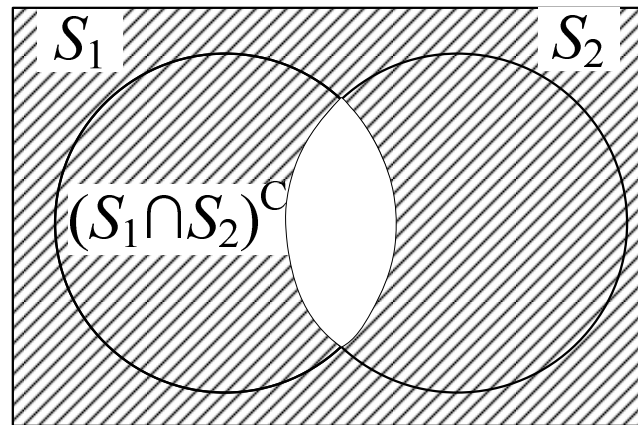
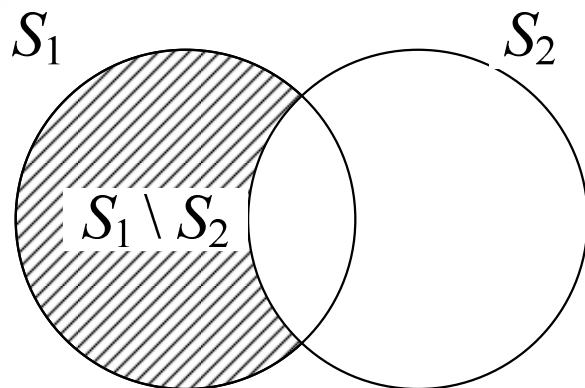
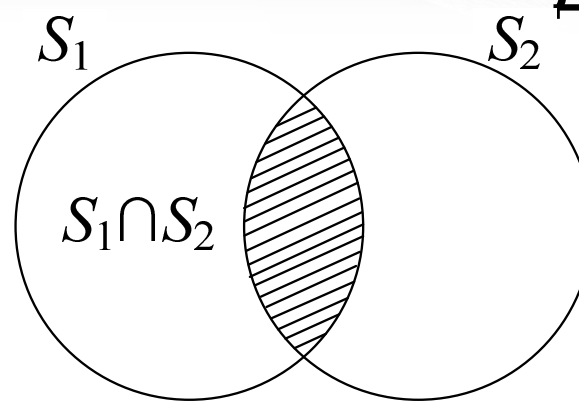
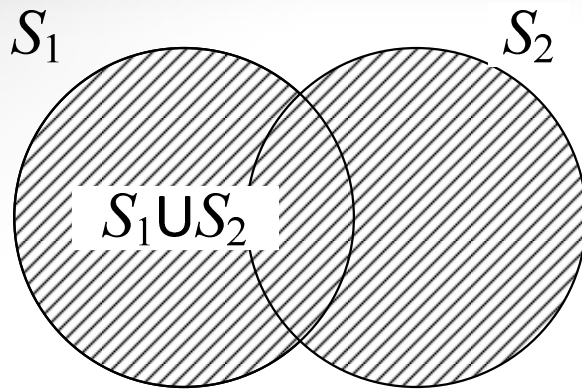
$S_1 \Delta S_2 := (S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2) = S_1 \cap \bar{S}_2 + \bar{S}_1 \cap S_2 = \dots$

$\dots = \{x \mid (x \in S_1 \wedge x \notin S_2) \vee (x \notin S_1 \wedge x \in S_2)\}$ – симметрическая разность

$S_1 \times S_2 := \{(x, y) \mid x \in S_1 \wedge y \in S_2\}$ – декартово произведение

Унитарные операции

$\bar{S}_1 \equiv S_1^C := \{x \mid x \notin S_1\} = U \setminus S_1$ – дополнение



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_N \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Выражения эквивалентности

$$x \sim x \quad \forall x$$

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x$$

$$x \sim y \cap y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

$$1) S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1 \quad S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$$

КОММУТАТИВНОСТЬ

$$2) (S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3) \quad (S_1 \cap S_2) \cap S_3 = S_1 \cap (S_2 \cap S_3)$$

ассоциативность

$$3) S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$$

дистрибутивность

$$4) S_1 \cap S_1 = S_1 \quad S_1 \cup S_1 = S_1$$

$$5) S_1 \cup U = U \quad S_1 \cap U = S_1$$

$$S_1 \cup \emptyset = S_1 \quad S_1 \cap \emptyset = \emptyset$$

$$S_1 \cup \bar{S}_1 = U \quad S_1 \cap \bar{S}_1 = \emptyset$$

$$6) \bar{\bar{S}}_1 = S_1$$

двойное дополнение

$$7) \overline{S_1 \cup S_2} = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \quad \overline{S_1 \cap S_2} = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$$

законы де Моргана

$$S = \{x, P\} \quad P \Rightarrow x \in S$$

Гармонические сигналы

$$S_2 = \left\{ x, x(t) = e^{\alpha + j(2\pi ft + \theta)}, -\infty < t < \infty, \alpha, f, \theta \in \mathfrak{R} \right\}$$

Периодические сигналы

$$S_p = \left\{ x, x(t + T) = x(t), -\infty < t < \infty \right\}$$

Ограниченные сигналы

$$S_M(K) = \left\{ x, |x(t)| \leq K, -\infty < t < \infty \right\} \quad x \in S_M(K_1) \Rightarrow x \in S_M(K_2), \text{ если } K_2 \geq K_1$$

Сигналы с ограниченной энергией

$$S_E(U) = \left\{ x, \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \leq K, -\infty < t < \infty \right\}$$

Сигналы с ограниченной длительностью

$$S_D(T) = \left\{ x, x(t) = 0, \forall |t| > T \right\} \quad x \in S_D(T_1) \Rightarrow x \in S_D(T_2), \text{ если } T_2 \geq T_1$$

Сигналы с ограниченной полосой

$$S_B(W) = \left\{ x, X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = 0, \forall |f| > K \right\}$$

Множества произвольной природы образуют **метрическое пространство**, если для любой упорядоченной пары элементов данного множества ставится в соответствие вещественное неотрицательное число ρ , называемое расстоянием

$$\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \rho(x, y), \quad x, y \in X$$

Метрика – способ измерения расстояния в заданном пространстве

Метрика должна удовлетворять следующим аксиомам:

- 1) Расстояние между двумя элементами равно нулю, только если данные элементы совпадают $\rho(x, y) \equiv 0 \Leftrightarrow \forall x = y$;
- 2) Аксиома симметрии: расстояние от элемента x до элемента y равно расстоянию от элемента y до элемента x $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) Аксиома треугольника: расстояние от элемента x до элемента y не превышает сумму расстояний от элемента x до элемента z и от элемента z до элемента y $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрические пространства

1) Тривиальная метрика

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \forall x \neq y \\ 0, & \forall x = y \end{cases}$$

2) Евклидова метрика

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2}, \forall x_n, y_n \in \mathbb{R}_N^2$$

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n - y_n|^2}, \forall x_n, y_n \in \mathbb{C}_N^2$$

3) Метрика Хемминга

$$\rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=1}^N |x_n - y_n|, \forall x_n, y_n \in \mathbb{R}_N^1$$

4) Метрика равномерного приближения

$$\rho_0(\vec{x}, \vec{y}) = \max_n |x_n - y_n|$$

Бесконечномерное пространство

$$\rho_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}, \forall x_n, y_n \in \mathbb{R}_{\infty}^2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 < \infty$$

$$\vec{y} = (y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_n \ \dots)$$

$$\vec{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n \ \dots)$$

Пространство функций непрерывных на отрезке $t_1 \dots t_2$

$$\rho_2(x(t), y(t)) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - y(t))^2 dt}$$

метрика Евклида

$$\rho_2(x(t), y(t)) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - y(t))^2 g(t) dt}$$

метрика Евклида с весом

$$\rho_1(x(t), y(t)) = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - y(t)) dt$$

метрика Хемминга

$$] x(t) \equiv y(t), \rho_{1,2} = 0 \ \forall t \in [t_1, t_0) \wedge (t_0, t_2]$$

=> функции равны почти всюду

$$\rho_0(x(t), y(t)) = \sup_{t \in [t_1, t_2]} |x(t) - y(t)|$$

метрика равномерного приближения

Множества элементов (вектора, матрицы, функции) над полем произвольной природы \mathbf{F} образуют **линейное пространство L** , если для любых элементов, таких что:

$$+ : L \times L \rightarrow L \quad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{z} = \vec{x} + \vec{y} \quad \cdot : K \times L \rightarrow L \quad (\alpha, \vec{x}) \mapsto \vec{y} = \alpha\vec{x}$$

выполняются аксиомы:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in L \quad \exists \vec{z} = \vec{x} * \vec{y} = \vec{y} * \vec{x} \text{ – абелева группа (свойство коммутативности)}$$

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \quad \text{– ассоциативность}$$

$$\vec{x} + \vec{o} = \vec{x} \quad \text{– нейтральный элемент}$$

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{o} \quad \text{– обратный элемент}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{F} \quad \alpha(\beta\vec{x}) = \alpha\beta(\vec{x})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{F} \quad (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$$

$$e\vec{x} = \vec{x} \quad \text{– единичный элемент}$$

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

Линейная комбинация векторов

$$\vec{y} = \sum_n^N \alpha_n \vec{x}_n = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_N \vec{x}_N$$

Линейная независимость векторов

$$\vec{y} = \sum_n^N \alpha_n \vec{x}_n \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$$

Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ являются линейно зависимыми, если существуют такие весовые коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, не все равные нулю, такие что линейная комбинация будет равна нулевому элементу пространства L.

Т.о. векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор выражается через все остальные.

$$\vec{x}_1 = \frac{-1}{\alpha_1} (\alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 + \dots + \alpha_N \vec{x}_N)$$

Базис линейного пространства — максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N$. Каждый вектор линейного пространства выражается через его базис причём единственным образом.

Базис можно выбрать не единственным способом, т.е. если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N$ – базис, то для $\forall \alpha \neq 0$ векторы $\alpha \vec{e}_1, \alpha \vec{e}_2, \dots, \alpha \vec{e}_N$ также образуют базис.

Т.о. линейной оболочкой базисной системы векторов является само линейное пространство L .

Если базис линейного пространства L включает в себя N векторов, то такое пространство является конечномерным, а N является размерностью пространства ($\dim L=N$).

Если в линейном пространстве для любой натурального N можно найти линейно независимую систему, состоящую из N векторов, то пространство называется бесконечномерным ($\dim L=\infty$).

] $\dim \mathfrak{R}_N = N$ и $\vec{e}_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$, $\vec{e}_2 = (0 \ 1 \ \dots \ 0)^T$, $\vec{e}_N = (0 \ 0 \ \dots \ 1)^T$
 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N$ – элементарный базис

$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – элементарный базис

Для] $\dim L(2 \times 2, \mathfrak{R}) = 4$

Нормированное пространство – линейное пространство, в котором определена норма вектора, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\|\vec{x}\| \geq 0, \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \equiv \vec{o}$;

2) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$;

3) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$.

Норму можно использовать в качестве метрики: $\rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$

Тогда $\|\vec{x}\| = \rho_1(\vec{x}, \vec{o})$

Если метрика пространства порождена его нормой, то норма показывает, насколько рассматриваемый вектор отстоит от нулевого.

В линейном пространстве отождествление нормы и метрики естественно в силу наличия нулевого вектора.

Норма вектора может быть определена через скалярное произведение: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^T \vec{x}}$

Таким образом, пространство со скалярным произведением можно сделать нормированным метрическим (евклидовым $N < \infty$, гильбертовым $N \rightarrow \infty$).

Векторы в евклидовом пространстве являются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю $\vec{x}^T \vec{y} = 0$.

Пусть A - N -мерное пространство, натянутое на базис $\{\vec{\Phi}_n\}$, $n=0 \dots N-1$, состоящее из векторов вида:

$$\vec{x} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \vec{\Phi}_n,$$

а $\{\vec{\Psi}_k\}$ - векторы, ортогональные к векторам $\{\vec{\Phi}_n\}$ и нормированные так, что:

$$\vec{\Phi}_n^T \vec{\Psi}_k = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & \forall n = k \\ 0, & \forall n \neq k \end{cases}$$

Тогда.

$$\vec{x}^T \vec{\Psi}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n (\vec{\Phi}_n^T \vec{\Psi}_k) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \delta_{nk} = \alpha_k$$

Базис $\{\vec{\Phi}_n\}$ является взаимным к $\{\vec{\Psi}_k\}$. Отсюда для любой пары взаимных базисов в пространстве A .

$$\vec{x} = \sum_{n=0}^{N-1} (\vec{x}^T \vec{\Phi}_n) \vec{\Psi}_n = \sum_{k=0}^{N-1} (\vec{x}^T \vec{\Psi}_k) \vec{\Phi}_k$$

Если базис содержит векторы нормированные попарно ортогональные векторы.

$$\vec{\varphi}_n^T \vec{\varphi}_k = \delta_{nk}$$

Базис, является ортонормальным $\vec{x} = \sum_{n=0}^{N-1} \vec{x}^T \vec{\varphi}_n \vec{\varphi}_n$.

Норма вектора по ортонормальному базису: $\|\vec{x}\| = \vec{x}^T \vec{x} = \sum_{n=0}^{N-1} |\alpha_n|^2$

Скалярное произведение $\vec{x}^T \vec{y} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \vec{\varphi}_n^T \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n \vec{\varphi}_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_n \beta_k^* \vec{\varphi}_n^T \vec{\varphi}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \beta_n^*$

Линейное представление сигналов как элементов линейного метрического пространства, натянутого на конечномерный базис, удобно тем, что позволяет описать любой сигнал набором некоторых стандартных базисных функций и набором чисел. Выбор базиса определяется удобством представления сигналов и существом задачи.

$$S(i\Delta t) = e_1 a_1(i\Delta t) + e_2 a_2(i\Delta t) + \dots + e_n a_n(i\Delta t)$$

$$S_1 = e_{11} a_1 + e_{12} a_2 + \dots + e_{1N} a_N$$

$$S_2 = e_{21} a_1 + e_{22} a_2 + \dots + e_{2N} a_N$$

... ..

$$S_N = e_{N1} a_1 + e_{N2} a_2 + \dots + e_{NN} a_N$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \dots \quad a_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} e_{11} & \dots & e_{1N} \\ e_{21} & \dots & e_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{N1} & \dots & e_{NN} \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} S_1 & \dots & e_{1N} \\ S_2 & \dots & e_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N & \dots & e_{NN} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \Delta_N = \begin{bmatrix} e_{11} & \dots & S_1 \\ e_{21} & \dots & S_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{N1} & \dots & S_N \end{bmatrix}$$

$$5 = 1a_1 + 3a_2 - 4a_N$$

$$3 = 2a_1 - a_2 + 2a_N$$

$$-2 = a_1 - 3a_2 + 2a_N$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 18 \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 34$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = -12 \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = 7$$

$$a_1 = \frac{34}{18} = 1.89 \quad a_2 = \frac{-12}{18} = -0.67 \quad a_3 = \frac{7}{18} = 0.39$$

$$a_1 \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{N1} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{N2} \end{bmatrix} + \dots + a_N \begin{bmatrix} e_{1N} \\ e_{2N} \\ \vdots \\ e_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_N \equiv 0$$

$$a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_N \mathbf{e}_N = \mathbf{0}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \gamma_{NN} \end{bmatrix} \quad \gamma_{ij} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \sum_{n=1}^N e_{in} e_{jn}$$

$\det(\Gamma) > 0 \Rightarrow \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ Линейно независимы

$\det(\Gamma) = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ Линейно зависимы

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 1a_1 + 3a_2 - 4a_N \\ 0 &= 2a_1 - a_2 + 2a_N \\ 0 &= 1a_1 - 3a_2 + 2a_N \end{aligned} \right\} \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{11} = \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6 \quad \gamma_{12} = \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) = -2$$

$$\gamma_{13} = \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_3 = 2 \quad \gamma_{21} = \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 = -2 \quad \gamma_{22} = \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 = 19 \quad \gamma_{23} = \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_3 = -20$$

$$\gamma_{31} = \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}_1 = 2 \quad \gamma_{32} = \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}_2 = -20 \quad \gamma_{33} = \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}_3 = 24$$

$$\det(\Gamma) = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 19 & -20 \\ 2 & -20 & 24 \end{vmatrix} = 324 \Rightarrow \text{Сигналы линейно независимы (ЛНС)}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 1a_1 + 3a_2 - 2a_N \\ 0 &= 2a_1 - a_2 - 4a_N \\ 0 &= 1a_1 - 3a_2 - 2a_N \end{aligned} \right\} \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = -2\mathbf{e}_1 \Rightarrow \det(\Gamma) = 0$$

Количество ЛНС в N-мерном пространстве.

$$a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_N \mathbf{e}_N = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_N \mathbf{e}_N + \mathbf{e}_{N+1} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E} \mathbf{A} + \mathbf{e}_{N+1} = \mathbf{0} \quad \mathbf{e}_{N+1} = -\mathbf{E} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{E}^{-1} \mathbf{e}_{N+1}$$

$\mathbf{E} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E}^{-1} \neq \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нулевая матрица

$\mathbf{e}_{N+1} \neq \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор

\Rightarrow в общем случае $\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{e}_{N+1} \neq \mathbf{0}$

Вывод: в N-мерном пространстве сигналов может быть только N линейно независимых сигналов.

Формирование групповых сигналов.

$$\mathbf{S} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_N \mathbf{e}_N = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{S} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}$$

При линейно независимых сигналах-переносчиках в МСП возникает проблема формирования нового базиса сигналов, взаимного базису \mathbf{e} , для выделения информационных составляющих на приемной стороне. Т.о. необходимо разрабатывать два типа генераторного оборудования для одной стойки оконечного оборудования МСП. Решением является выбор в качестве переносчиков ортогональных сигналов

$$\mathbf{E}^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \gamma_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\gamma_{ij} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, \forall i = j \\ 0, \forall i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{e}_2^T \mathbf{S} = a_1 \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 + \dots + a_N \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_N = a_2$$

В случае, когда сигналы-переносчики обладают только свойством линейной независимости, но не являются ортогональными, на сторонах передачи и приёма систем многоканальной связи используется разное генераторное оборудование (ГО). Возможно применение единого ГО за счёт формирования из базиса сигналов-переносчиков $\{e_1 \dots e_N\}$ взаимного базиса $\{b_1 \dots b_N\}$

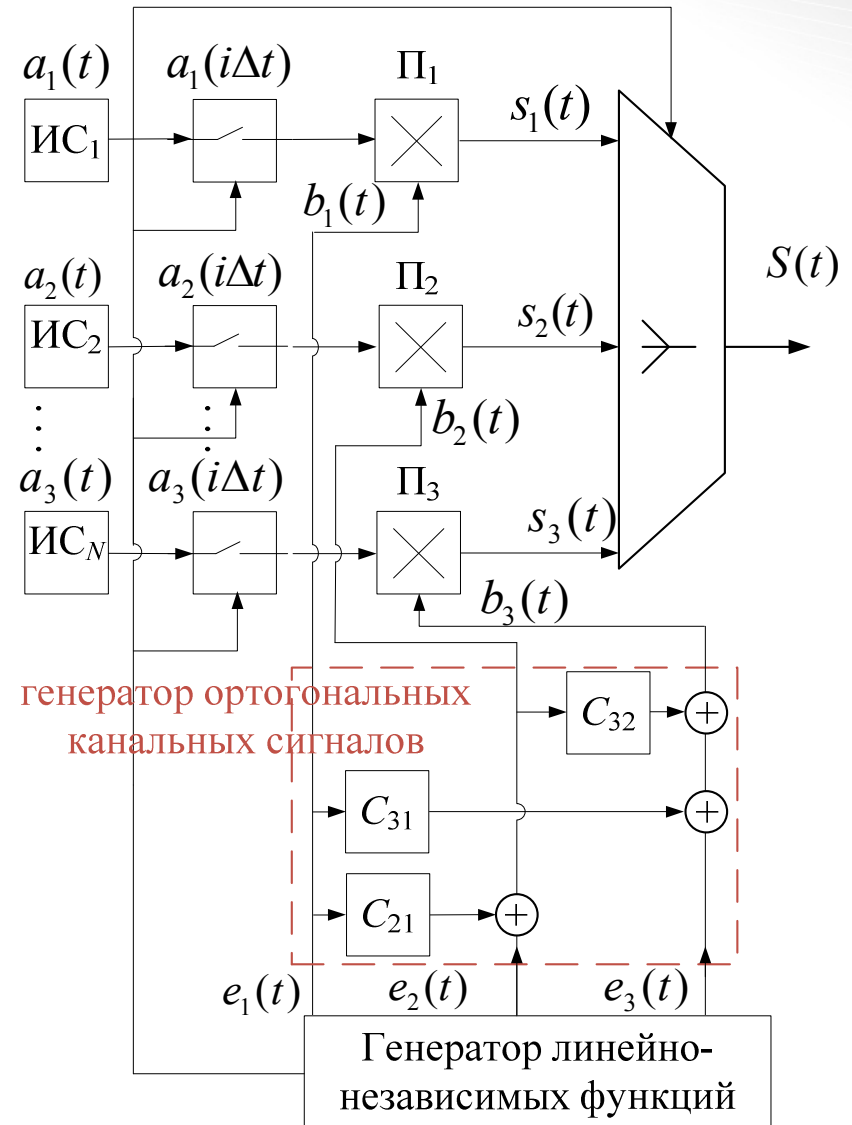
$$\mathbf{b}_1 = c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{12}\mathbf{e}_2 + \dots + c_{1N}\mathbf{e}_N$$

$$\mathbf{b}_2 = c_{21}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + c_{2N}\mathbf{e}_N$$

⋮

$$\mathbf{b}_N = c_{N1}\mathbf{e}_1 + c_{N2}\mathbf{e}_2 + \dots + c_{NN}\mathbf{e}_N$$

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & \forall i = j \\ 0, & \forall i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1 \dots N$$



$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{12}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{b}_2 = c_{21}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{b}_1^T \mathbf{e}_1 = 1 \quad \mathbf{b}_1^T \mathbf{e}_2 = 0 \quad \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_1 = 0 \quad \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_2 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_1^T \mathbf{e}_1 = c_{11}\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + c_{12}\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 = c_{11}5 + c_{12}6 = 1 \\ \mathbf{b}_1^T \mathbf{e}_2 = c_{11}\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 + c_{12}\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 = c_{11}6 + c_{12}8 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_1 = c_{21}\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 = c_{21}5 + c_{22}6 = 0 \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_2 = c_{21}\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 + c_{22}\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 = c_{21}6 + c_{22}8 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_1 = c_{21}\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 = c_{21}5 + c_{22}6 = 0 \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_2 = c_{21}\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 + c_{22}\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 = c_{21}6 + c_{22}8 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_1 = c_{21}\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 = c_{21}5 + c_{22}6 = 0 \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_2 = c_{21}\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 + c_{22}\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 = c_{21}6 + c_{22}8 = 1 \end{array} \right.$$

$$c_{11} = -0.125 \quad c_{12} = 0.271$$

$$c_{21} = -1.5 \quad c_{22} = 1.25$$

$$\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e_n^2(t) dt < \infty, \quad n = 1 \dots N$$

$$\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e_i(t)e_j(t) dt = \begin{cases} 1, & \forall i = j \\ 0, & \forall i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1 \dots N$$

$$S(t) = a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t) + \dots + a_N e_N(t) = \sum_{n=1}^N a_n e_n(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{E}(t)$$

$$\mathbf{A} = \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} s(t) \mathbf{E}(t) dt$$

$$a_n = \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} s(t) e_n(t) dt, \quad n = 1 \dots N$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) e_i(\tau) e_j(\tau) d\tau = \begin{cases} \text{const}, \forall i = j \\ 0, \forall i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1..N$$

$$g(\tau) = 2G_0 \Delta f \frac{\sin(\Delta\omega\tau)}{\Delta\omega\tau}$$

$$g(\tau) \Leftrightarrow G(\omega) = \begin{cases} G_0, 0 \leq |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0, |\omega| > \Delta\omega \end{cases}$$

$$S(t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) e_n(t)$$

$$a_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_n(\tau) s(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < -\xi \\ 0.5(t/\xi + 1) & -\xi \leq t \leq \xi \\ 1 & t > \xi \end{cases}$$

функция включения

функция Хевисайда

$$\xi \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad \sigma(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 0.5 & t = \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases}$$

$$v(t) = (1 + \exp(-nt))$$

пример определения функции включения

Динамическое представление сигнала посредством функций включения.

$$\{\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots\}$$

последовательность моментов времени

$$\{s^1, s^2, s^3, \dots\} = \{s(\Delta t), s(2\Delta t), s(3\Delta t), \dots\}$$

$$s(t) = s^0 \sigma(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (s^i - s^{i-1}) \sigma(t - i\Delta t)$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow i\Delta t \rightarrow \tau, (s^i - s^{i-1}) = \frac{ds}{d\tau} d\tau$$

Динамическое представление произвольного сигнала посредством функций Хевисайда

$$s(t) = s^0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau$$

Пример

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At^2 & t \geq 0 \end{cases}$$

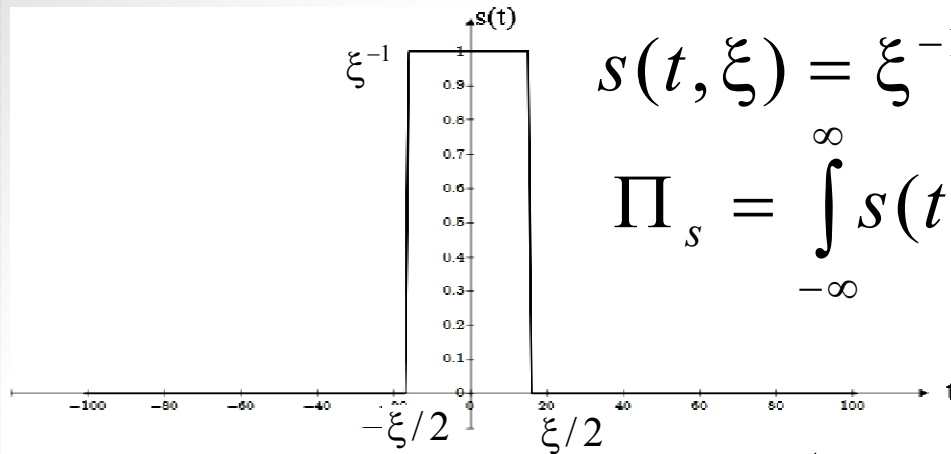
Найти динамическое представление сигнала

Решение

$$s(0) = 0, \quad \frac{ds}{d\tau} = 2A\tau \quad \Rightarrow \quad s(t) = 2A \int_{-\infty}^{\infty} \tau \sigma(t - \tau) d\tau$$

Высота элементарных ступеней линейно нарастает во времени

Сигнал прямоугольной формы.



$$s(t, \xi) = \xi^{-1} [\sigma(t + \xi / 2) - \sigma(t - \xi / 2)]$$

$$\Pi_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \xi) dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\xi \rightarrow 0 \Rightarrow \delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} s(t, \xi)$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n / 2\pi} \cdot \exp(-nt^2 / 2) \quad \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(nt / \pi t)]$$

Динамическое представление произвольного сигнала посредством функций Дирака

$$\eta^k(t) = s^k [\sigma(t - t^k) - \sigma(t - t^k - \Delta)] \quad s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta^k$$

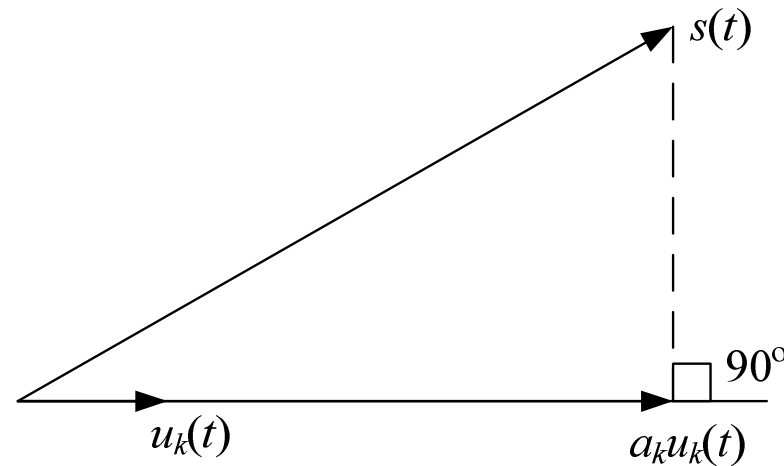
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^{-1} s^k [\sigma(t - t^k) - \sigma(t - t^k - \Delta)] \Delta$$

$$s(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} [\sigma(t - \tau) - \sigma(t - \tau - \Delta)] \quad s(t) = \int_0^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{t_1}^{t_2} u_i(t) u_k(t) dt$$

$$a_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k)$$



$$E = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_k a_i u_i(t) u_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_k a_i \int_{t_1}^{t_2} u_i(t) u_k(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$$

$$\xi(t) = \|s(t) - \hat{s}(t)\|^2 = \left\| s(t) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k u_k(t) \right\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \left(s(t) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k u_k(t) \right)^2 dt = \min \frac{\partial \xi}{\partial a_k} = 0, \quad \forall k = 0 \dots K-1$$

$$\xi(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left(s^2(t) - 2s(t) \sum_{k=0}^{K-1} a_k u_k(t) + \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{i=0}^{K-1} a_k a_i u_k(t) u_i(t) \right) dt$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a_k} = \int_{t_1}^{t_2} \left(2a_k u_k^2 - 2s(t) u_k(t) \right) dt = 2a_k - 2 \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt \Rightarrow a_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt$$

$$s(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K-1} a_k u_k(t)$$

Импульсные базисные функции

в одномерном случае: $\varphi_n(t) = \text{rect}\left[\frac{t - nT}{T}\right]$, где $\text{rect}(\arg) = \begin{cases} 1 & \arg \in [0 \dots 1] \\ 0 & \arg \notin [0 \dots 1] \end{cases}$

Взаимный базис $\{\psi_n(t)\} : \psi_n(t) = \frac{1}{T} \text{rect}\left[\frac{t - nT}{T}\right]$

в двумерном случае: $\varphi_{k,l}(t_1, t_2) = \text{rect}\left[\frac{t_1 - kT_1}{T_1}\right] \text{rect}\left[\frac{t_2 - lT_2}{T_2}\right]$

Взаимная система функций: $\Psi_{k,l}(t_1, t_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \text{rect}\left[\frac{t_1 - kT_1}{T_1}\right] \text{rect}\left[\frac{t_2 - lT_2}{T_2}\right]$

Представление сигналов по этим базисам являются средние значения на соответствующих интервалах:

$$\alpha_{k,l} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{kT_1}^{(k+1)T_1} dt_1 \int_{lT_2}^{(l+1)T_2} a(t_1, t_2) dt_2$$

Гармонические базисные функции

в одномерном случае:

$$\varphi_n^c(t) = \cos\left[2\pi n \frac{t}{T}\right], \quad \varphi_n^s(t) = \sin\left[2\pi n \frac{t}{T}\right], \quad \varphi_n^e(t) = \exp\left[j2\pi n \frac{t}{T}\right]$$

Пространство, натянутое на данный базис, составляют сигналы с периодом T или заданные на отрезке времени длиной T . Разложение сигналов по данным базисным функциям является разложением в ряд Фурье.

Взаимный базис:
$$\psi_k^e(t) = \frac{1}{T} \exp\left[j2\pi k \frac{t}{T}\right]$$

Вычисление коэффициентов ряда Фурье:

$$\alpha_{k,l} = (x, \psi_k) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(t_1) \exp\left(-j2\pi \frac{kt_1}{T}\right) dt_1$$

Двумерный базис комплексных экспонент:
$$\varphi_{kl}^e(t_1 t_2) = \exp\left[j2\pi \left(k \frac{t_1}{T_1} + l \frac{t_2}{T_2}\right)\right]$$

Пространство, натянутое на данный базис, представляют функции, заданные в прямоугольнике (T_1, T_2) , и периодические сигналы с периодом в виде данного прямоугольника

Функции Радемахера

$$rad_n(t) = \text{sign} \left[\sin \left(2^n \pi n \frac{t}{T} \right) \right]$$

Функции ортогональны между собой, но система $\{rad_n(t)\}$ не является полной, поскольку на данном отрезке T существуют другие функции, ортогональные функциям Радемахера:

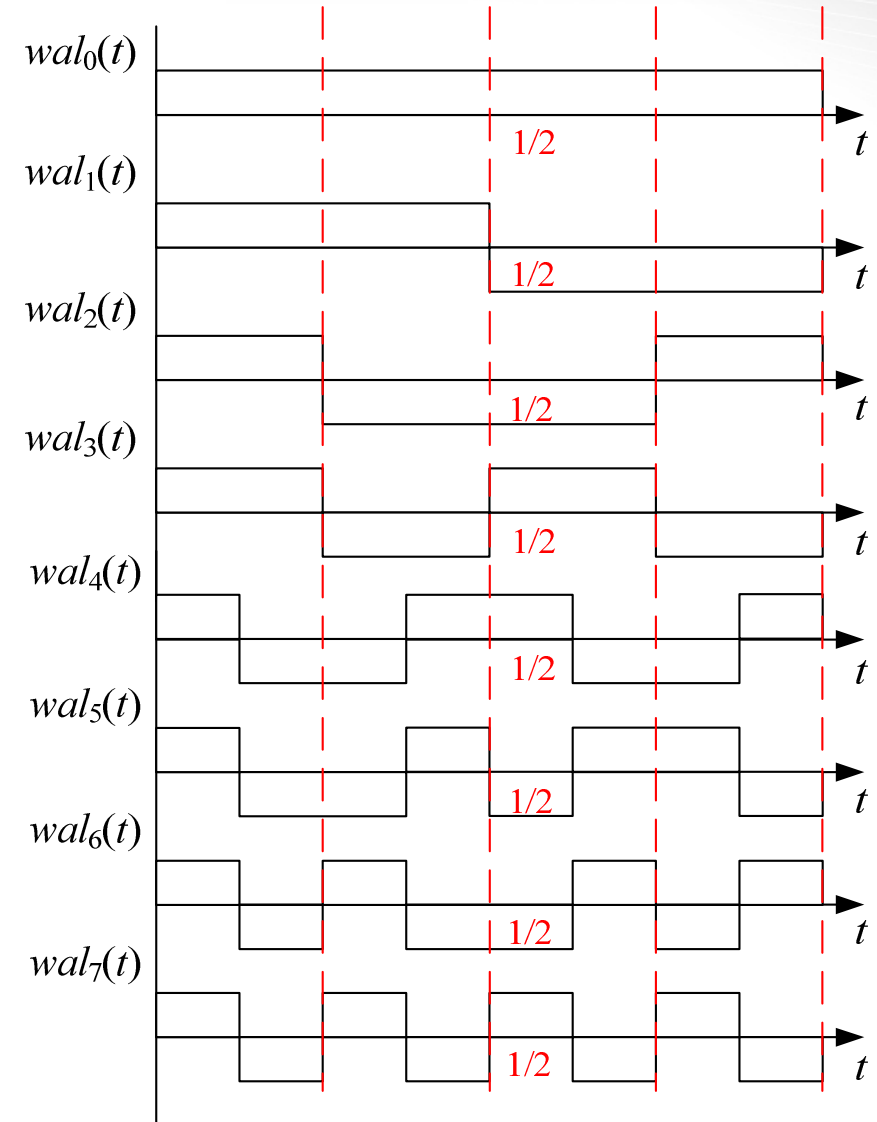
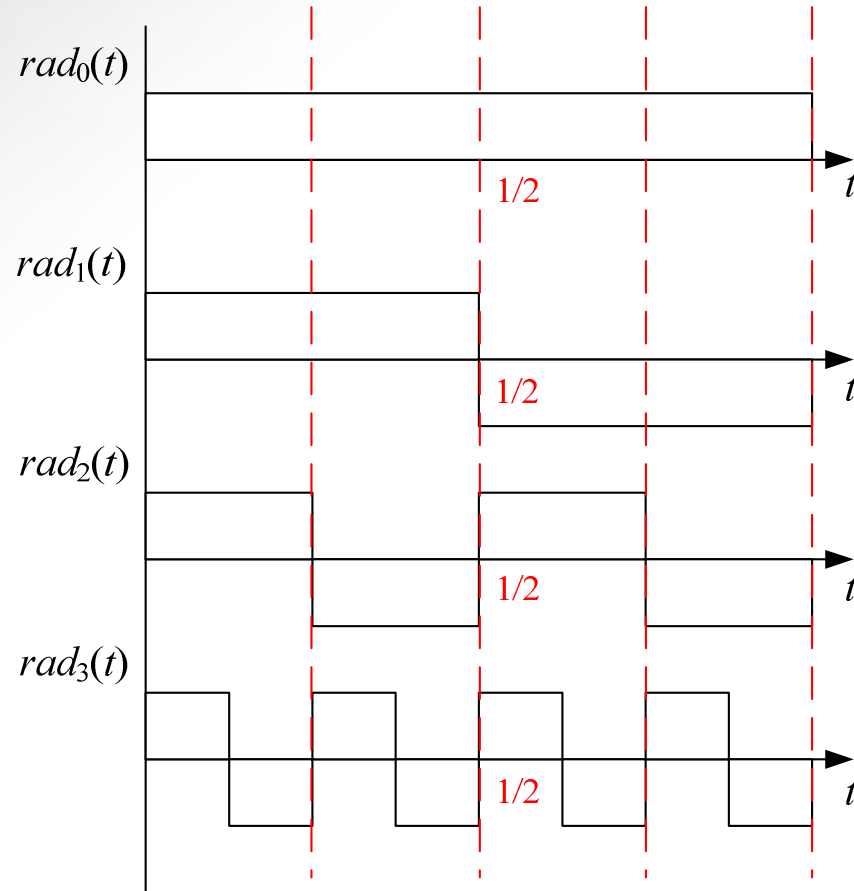
$$\text{sign} \left[\cos \left(2^n \pi n \frac{t}{T} \right) \right]$$

Функции Уолша являются расширением функций Радемахера до полной системы в одномерном случае:

$$wal_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \prod_{m=0}^{\infty} [rad_{m+1}(t)]^{k_m^\Gamma} \quad k_m^\Gamma = k_m \oplus k_{m+1} \quad wal_n(t)wal_m(t) = wal_{m+n}(t)$$

m - номер разряда (справа налево), k_m - значение двоичного разряда на позиции m в двумерном случае:

$$wal_{kl}(t_1, t_2) = wal_k(t_1)wal_l(t_2)$$



Пример

$$\int_0^1 wal(1,t)wal(2,t)dt = \int_0^{1/4} 1^2 dt + \int_{1/4}^{1/2} 1 \cdot (-1) dt +$$

$$+ \int_{1/2}^{3/4} (-1)^2 dt + \int_{3/4}^1 (-1) \cdot 1 dt = 0$$

Гармоническая функция является единственной, для которой отклик линейной системы (рассмотрим позже) сохраняет форму (такую, что $y(t)$ -гармонический сигнал, отличающийся от $x(t)$ только амплитудой и фазой).

для $n \neq m$

$$\int_t^{t+T} \cos(2\pi fnt) \cos(2\pi fmt) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_t^{t+T} [\cos(2\pi f(n+m)t) \cos(2\pi f(n-m)t)] dt =$$

$$= \frac{\sin(2\pi f(n+m)t) \Big|_t^{t+T}}{2 \cdot 2\pi f(n+m)} + \frac{\sin(2\pi f(n-m)t) \Big|_t^{t+T}}{2 \cdot 2\pi f(n-m)} = 0$$

для $n = m$

$$\int_t^{t+T} \cos(2\pi fnt) \cos(2\pi fnt) dt = \int_t^{t+T} \cos^2(\omega nt) dt = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} dt + \frac{1}{2} \int_t^{t+T} \cos(2\omega nt) dt = \frac{T}{2}$$

Тригонометрический ряд Фурье:

$$] \exists x(t) = x(t + nT), \forall n \in Z \Rightarrow x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(2\pi f_0 nt) + B_n \sin(2\pi f_0 nt)]$$

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt; \quad A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(2\pi f_0 n t) dt; \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(2\pi f_0 n t) dt$$

] начальный момент времени $t_0 = T/2$

$$] \exists x(-t) = x(t) \Rightarrow x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_0 n t)$$

$$] \exists x(-t) = -x(t) \Rightarrow x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi f_0 n t)$$

Спектральное разложение в базисе тригонометрических функций:

$$x(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi f_0 n t + \varphi_n)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \varphi_n = \arg(A_n - jB_n) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{B_n}{A_n}\right) - \text{спектры амплитуд и фаз}$$

$$A_n = C_n \cos(\varphi_n), \quad B_n = C_n \sin(\varphi_n)$$

Между периодическими сигналами и частотными спектрами существует взаимно-однозначное соответствие: периодический сигнал полностью определяет спектр и наоборот

Формулы Эйлера:

$$\cos(2\pi f_0 nt) = \frac{1}{2} [\exp(j2\pi f_0 nt) + \exp(-j2\pi f_0 nt)]$$

$$\sin(2\pi f_0 nt) = \frac{1}{2j} [\exp(j2\pi f_0 nt) - \exp(-j2\pi f_0 nt)]$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n - jB_n) \exp(j2\pi f_0 nt) + (A_n + jB_n) \exp(-j2\pi f_0 nt)] \right]$$

Введём отрицательные n , тогда с учётом чётности и нечётности функций:

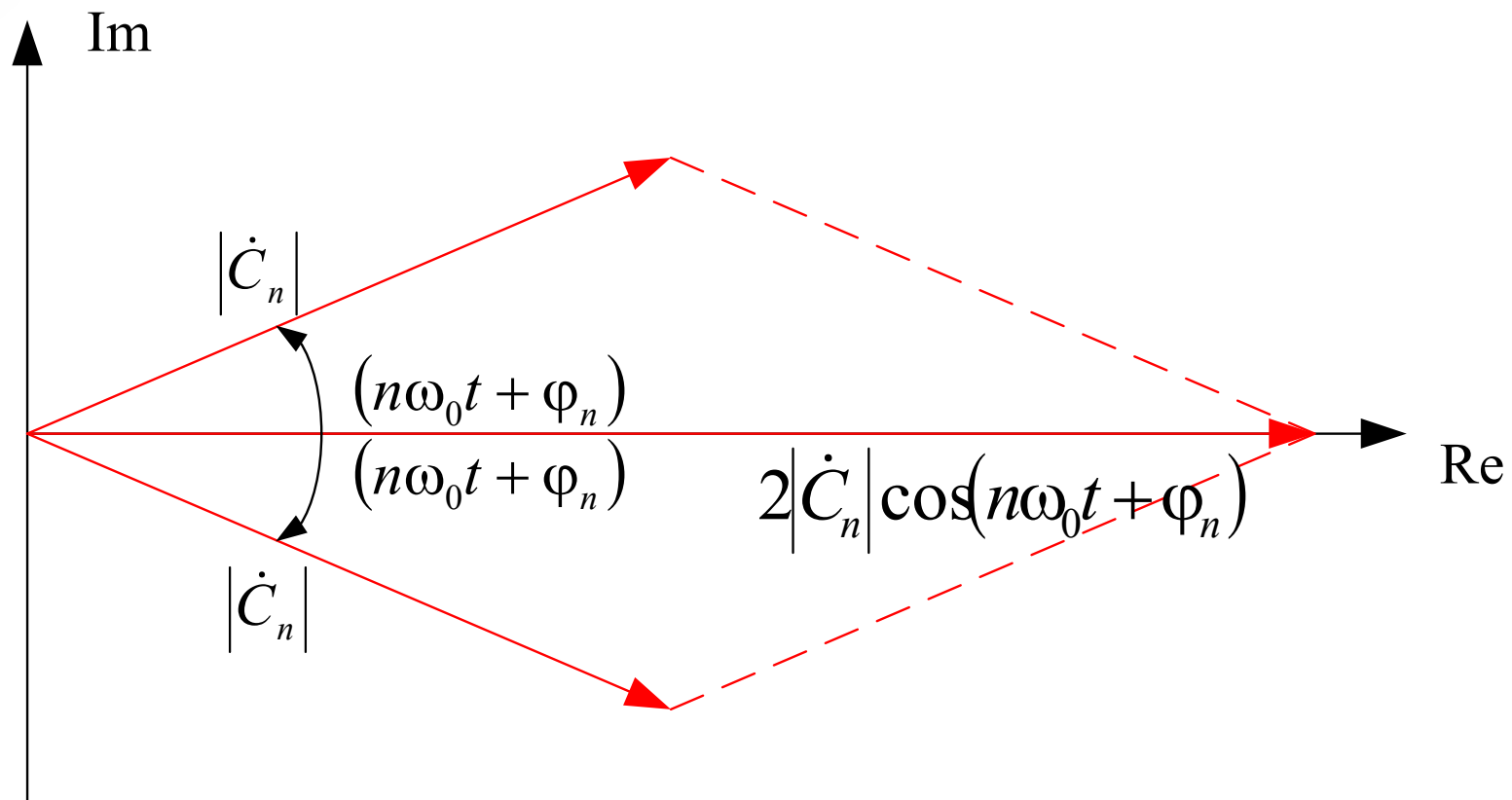
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp(j2\pi f_0 nt), \text{ где } \dot{C}_n = \frac{A_n - jB_n}{2} = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt$$

Рассмотрим некоторую n -ю составляющую $x_n(t)$:

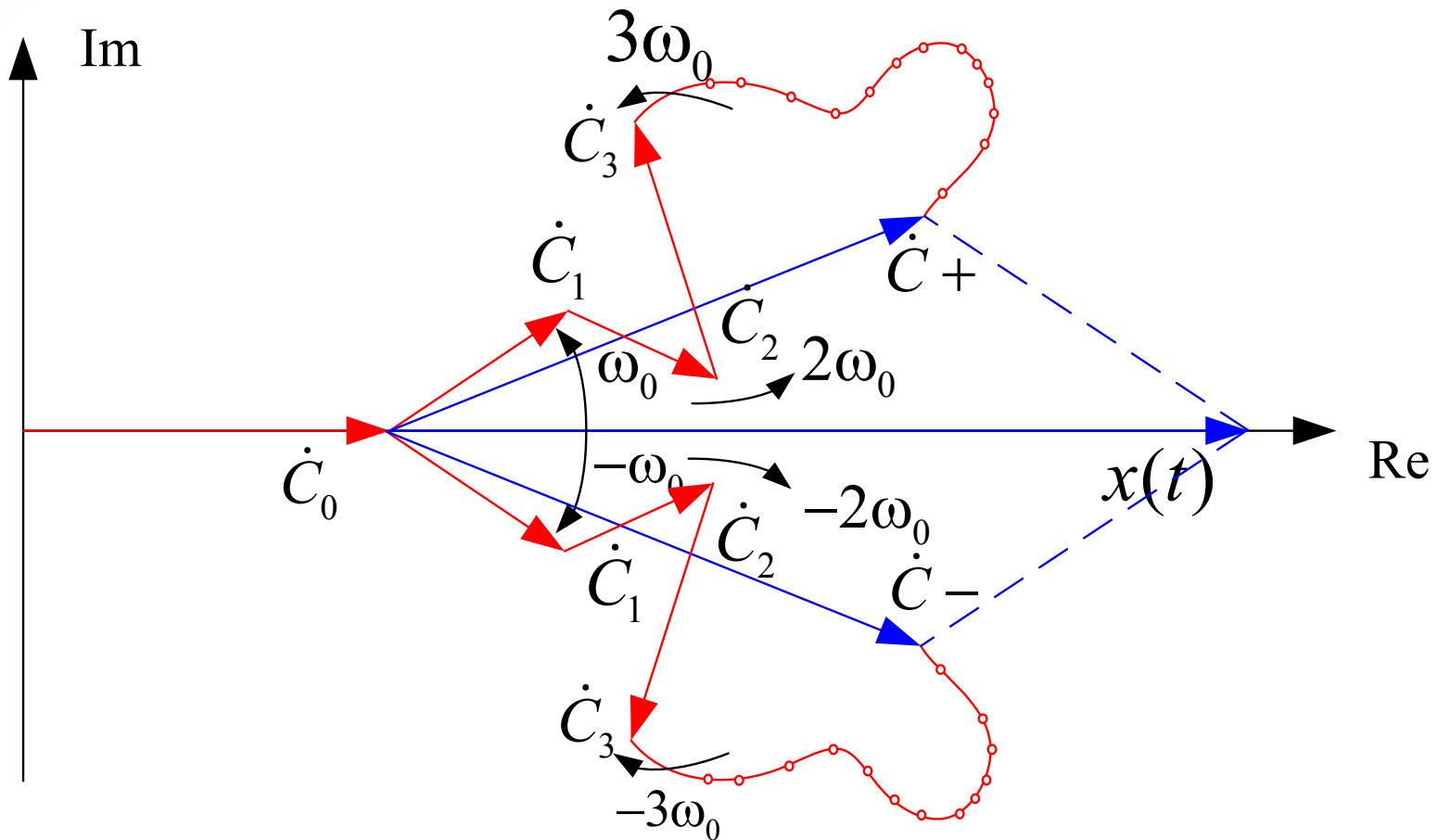
$$x_n(t) = \frac{A_n - jB_n}{2} \exp(j2\pi f_0 nt) + \frac{A_n + jB_n}{2} \exp(-j2\pi f_0 nt) = \dots$$

$$\dots = |\dot{C}_n| \cos(j2\pi f_0 nt + \varphi_n)$$

Векторная диаграмма гармонического сигнала



Графическое отображение ряда Фурье в комплексной форме



Если ряд сходится, то каждая из сумм отображается вектором конечной длины

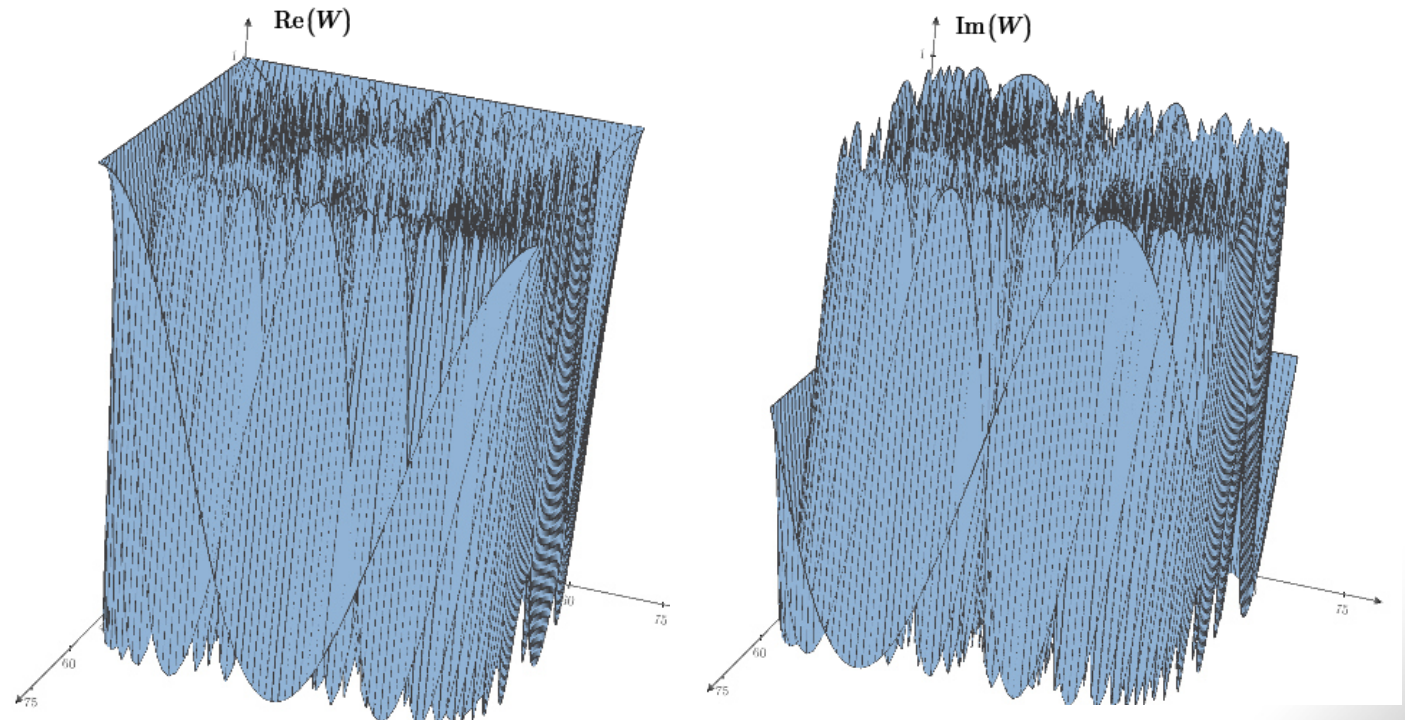
$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt \quad s(t) \Leftrightarrow S(j\omega) \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

Матрицы дискретного преобразования Фурье

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_0^1 & \dots & \omega_0^{N-1} \\ \omega_1^0 & \omega_1^1 & \dots & \omega_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1}^0 & \omega_{N-1}^1 & \dots & \omega_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \omega_m^n = \exp\left(-j2\pi \frac{n \cdot m}{N}\right)$$

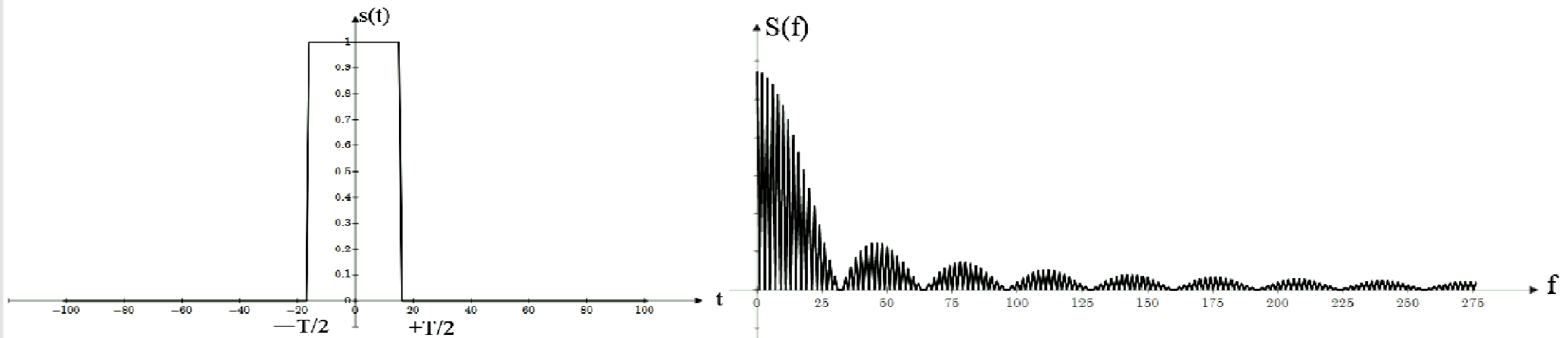
$$\mathbf{I}\mathbf{W} = \mathbf{W}^H = (\mathbf{W}^*)^T$$

$$\frac{1}{N} \mathbf{I}\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{I} = \text{diag}\{1 \quad 1$$



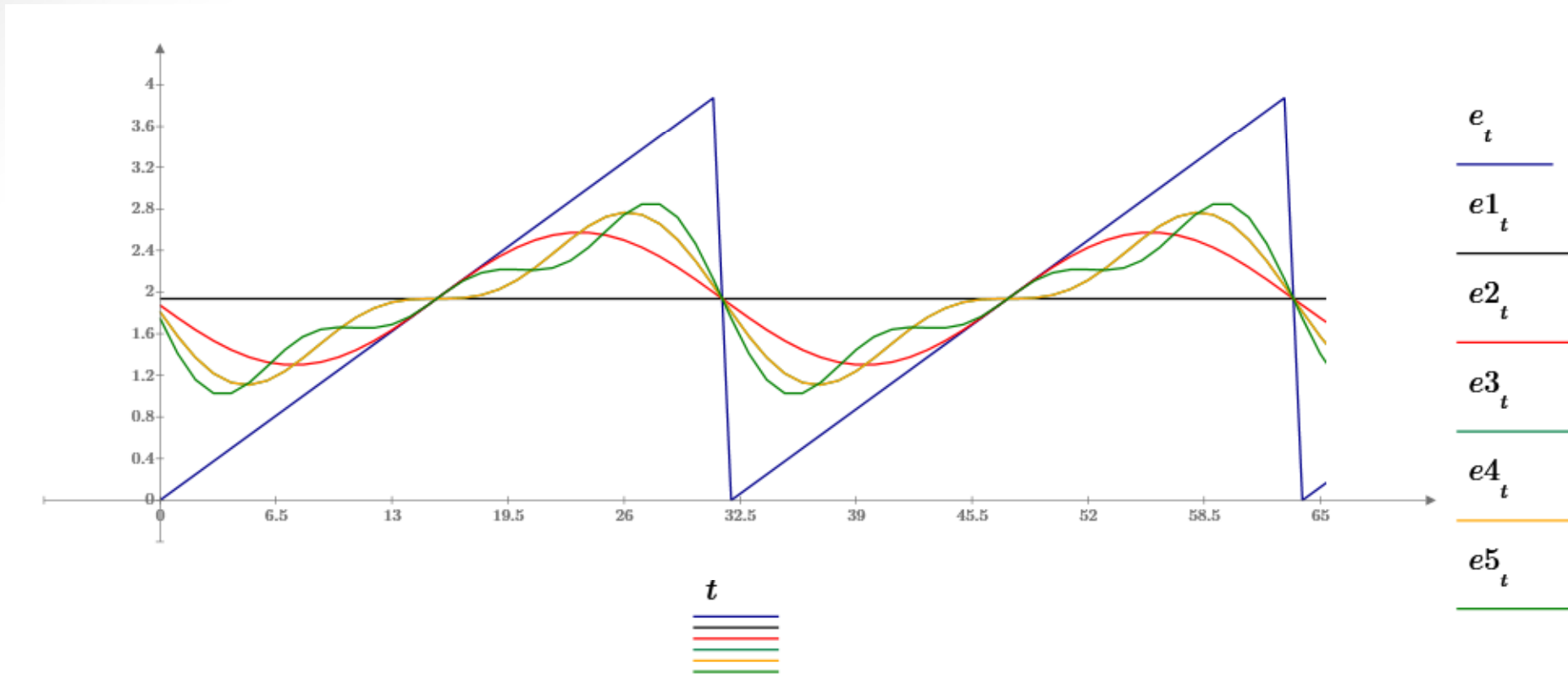
$$s(t) = \begin{cases} U, & t \in [-T/2, T/2] \\ 0, & t \notin [-T/2, T/2] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} U \exp(-j\omega t) dt \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{U}{-j\omega} \exp(-j\omega t) \right\} \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{U}{-j\omega} \cos(\omega t) - j \frac{U}{-j\omega} \sin(\omega t) \right\} \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{jU}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{U}{\omega} \sin(\omega t) \right\} \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \frac{U}{\omega} \sin(\omega T) = UT \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \end{aligned}$$

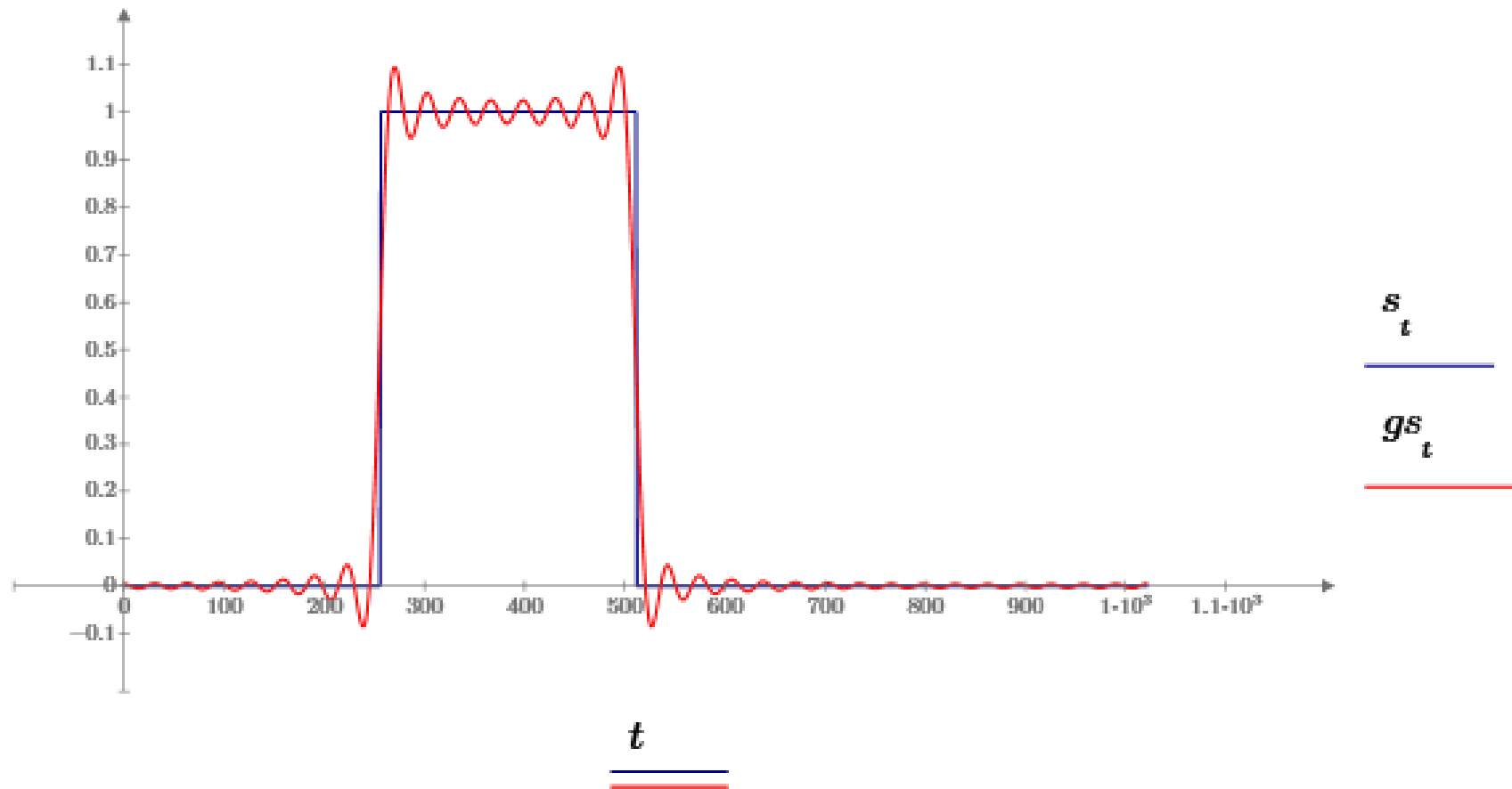


ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Пример аппроксимации пилообразного сигнала



Близость нормы сигнала к норме конечного отрезка обобщенного ряда Фурье вовсе не означает сходимость суммы ряда к мгновенному значению сигнала в каждой точке. В математике «всплески» суммы ряда Фурье получили название явления Гиббса



Условия Дирихле

Функция на интервале $[-T/2; T/2]$:

- 1) должна иметь конечное число максимумов и минимумов
- 2) может иметь конечное число разрывов первого рода при некоторых значениях аргумента $t=t_n$
- 3) должна иметь конечные (равные или неравные между собой) предельные значения $x(-T/2+0)$, $x(T/2-0)$

Если заданная функция $x(t)$ в промежутке от $-T/2$ до $T/2$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для всех значений t этого же промежутка предел суммы N первых членов ряда Фурье при неограниченном увеличении числа N :

- 1) равен $x(t)$ во всех точках непрерывности внутри промежутка
- 2) равен $[x(t_n-0)+x(t_n+0)]/2$ во всех точках разрыва
- 3) равен $[x(-T/2+0)+x(T/2-0)]/2$ на концах промежутка

$$\xi = \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - \hat{x}(t))^2 dt$$

С увеличением числа членов ряда Фурье ранее подсчитанные коэффициенты не изменяются, а среднеквадратическая ошибка ξ уменьшается

Средняя мощность периодического сигнала совпадает со средней мощностью за период

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad \text{на сопротивлении } R=1 \text{ Ом}$$

$$\begin{aligned}] \quad x(t) &= \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi f_0 n t + \varphi_n) \Rightarrow P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi f_0 n t + \varphi_n) \right]^2 dt \\ &= \frac{C_0^2}{4T} \int_0^T dt + \frac{2C_0}{T} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^T \cos(2\pi f_0 n t + \varphi_n) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \cos^2(2\pi f_0 n t + \varphi_n) dt + \\ &\dots + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} C_n C_m \cos(2\pi f_0 n t + \varphi_n) \cos(2\pi f_0 m t + \varphi_m) dt + = \frac{C_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \end{aligned}$$

Таким образом, средняя мощность периодического сигнала равна сумме средних мощностей, выделяемых отдельными гармониками и его постоянной составляющей. Для усечённого ряда:

$$P_{cp} = \frac{C_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N C_n^2$$

С увеличением числа членов ряда Фурье ранее подсчитанные коэффициенты не изменяются, а среднеквадратическая ошибка ξ уменьшается

Пусть имеется непериодический сигнал, который удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируем. Время существования сигнала $t_1 \dots t_2$. Рассмотрим произвольный участок времени T , включающий временной интервал $t_1 \dots t_2$, сформируем периодическую функцию

$$x_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$$

Очевидно, что

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_n(t) \quad \text{где} \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp(j2\pi f_0 n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp(jn\omega_0 t)$$

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt, \quad \text{где} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$x_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} [x(\tau) \exp(-jn\omega_0 \tau) d\tau] \exp(jn\omega_0 t) \omega_0$$

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_0 \rightarrow d\omega, \quad \Sigma \rightarrow \int$$

$$x_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} [x(\tau) \exp(-jn\omega_0\tau)] \exp(jn\omega_0t) d\tau d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \exp(jn\omega_0t) d\omega$$

Значения временного интервала $t_1 \dots t_2$ не определены. Отсюда

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt = \mathfrak{T} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \mathfrak{T}^{-1}$$

$$X(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(-j\omega t) dt \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(-j\omega t) dt$$

$$X(\omega) = |X(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arg X(j\omega)$$

Основные свойства преобразования Фурье

линейность

$$\exists x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{T}} X_1(j\omega), X_2(j\omega), \dots, X_n(j\omega) \cap \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$

$$\mathfrak{T} \left\{ \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n(t) \right\} = \sum_{n=1}^N \lambda_n X_n(j\omega) \quad \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^N \lambda_n X_n(j\omega) \right\} = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n(t)$$

Спектральная характеристика производной

$$\exists y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cap \mathfrak{F}\{x(t)\} = X(j\omega) \Rightarrow Y(j\omega) = \mathfrak{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$$

$j\omega$ – оператор дифференцирования, действующий в частотной области

$$\text{если } y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \Rightarrow Y(j\omega) = (j\omega)^n X(j\omega)$$

Спектральная характеристика интеграла

$$\exists x(t), \mathfrak{F}\{x(t)\} = X(j\omega) \cap \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0, \exists y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega}$$

$j\omega$ – оператор интегрирования, действующий в частотной области

Спектральная характеристика смещённого сигнала

$$\exists x_2(t) = x_1(t \pm \tau) \Rightarrow X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(t \pm \tau)\} = e^{\pm j\omega\tau} X_1(j\omega)$$

Смещение спектральной характеристики

$$\mathfrak{F}\{e^{-j\alpha t} x(t)\} = X(j(\omega + \alpha)), \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Сжатие и растяжение сигнала

$$\exists x_2(t) = x_1(kt) \Rightarrow X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(kt)\} = \frac{1}{k} X\left(j\frac{\omega}{k}\right)$$

Спектральная характеристика произведения сигналов

$$\exists y(t) = x_1(t)x_2(t) \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j(\omega - \sigma))X_2(j\sigma)d\sigma$$

Теорема Парсеваля

Если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ преобразуемы по Фурье, и их спектральные характеристики соответственно равны $X_1(j\omega)$ и $X_2(j\omega)$, причём интегралы сходятся абсолютно

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)d\omega \quad \int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\omega)d\omega, \text{ то справедливо следующее равенство}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)X_2(j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X_1(\omega)X_2(\omega)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)d\omega$$

$$H(-\omega) = H(\omega)$$

Разложение амплитудно-частотной характеристики в ряд Фурье

$$H(\omega) = H_0 + H_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\omega\right) + H_2 \cos\left(2\frac{2\pi}{T}\omega\right) + \dots + H_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}\omega\right) + \dots$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\omega_{\max}} = \frac{1}{2f_{\max}} = \tau$$

$$H(\omega) = H_0 + H_1 \cos(\omega\tau) + H_2 \cos(2\omega\tau) + \dots + H_n \cos(n\omega\tau) + \dots$$

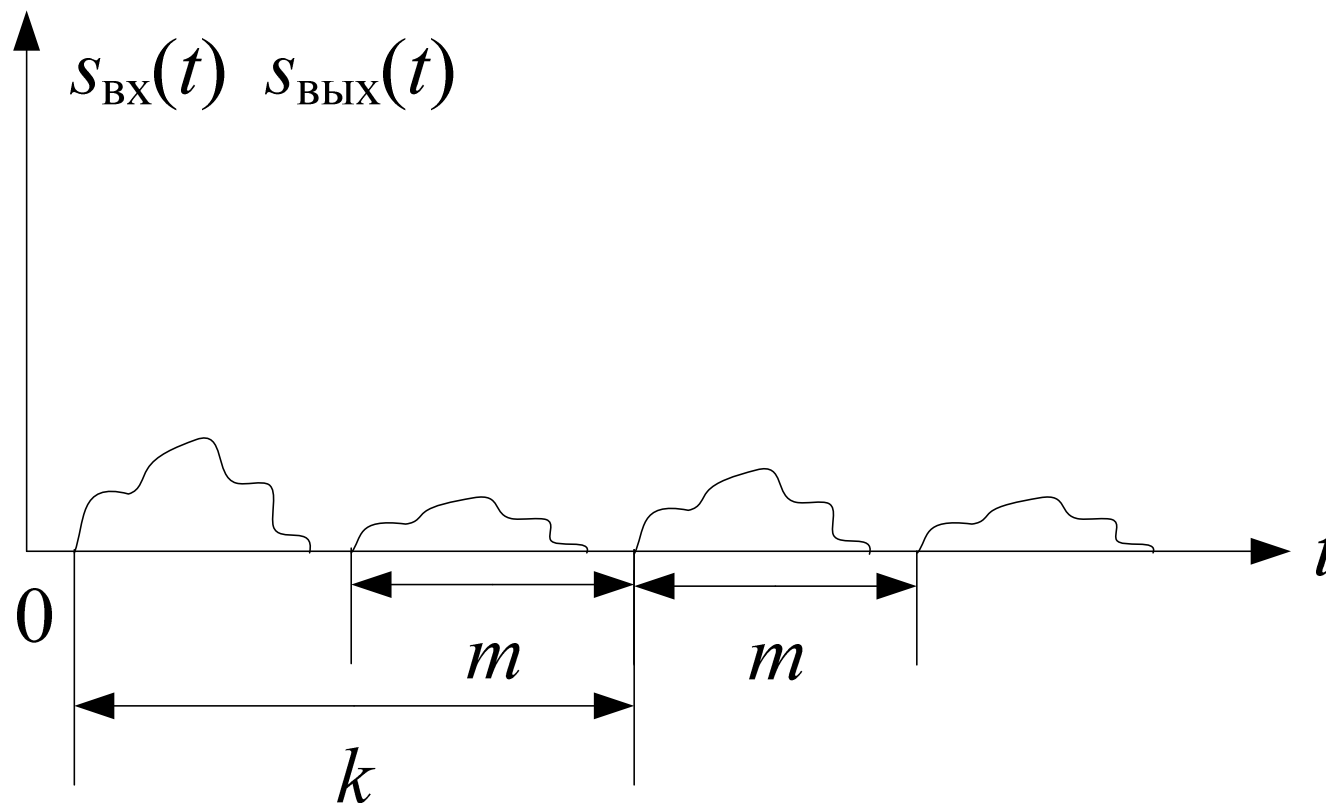
$$\varphi_k(\omega) = k\omega \pm 2\pi n$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega) &= \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega)(H_0 + H_n \cos n\omega\tau) \exp(-jk\omega) = \\ &= \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega)(H_0 + H_n \cos m\omega) \exp(-jk\omega) \end{aligned}$$

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega)(H_0 + H_n \cos n\omega\tau) \exp(j\omega(t-k)) d\omega$$

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega) H_0 \exp(j\omega(t-k)) d\omega +$$

$$+ \frac{H_n}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega) \exp(j\omega(t-k+m)) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega) \exp(j\omega(t-k-m)) d\omega \right]$$



Сигнал на входе и выходе канала передачи с амплитудно-частотными искажениями.

$$\varphi_K(-\omega) = -\varphi_K(\omega)$$

Разложение фазо-частотной характеристики в ряд Фурье

$$\varphi_K(\omega) = k\omega + \varphi_{K1} \sin(\tau\omega) + \varphi_{K2} \sin(2\tau\omega) + \dots + \varphi_{Kn} \sin(n\tau\omega) + \dots$$

$$\varphi_K(\omega) = k\omega \pm \varphi_{Kn} \sin(m\omega)$$

$$t_{\text{Гр}}(\omega) = \frac{d\varphi_K(\omega)}{d\omega} = k + m\varphi_{Kn} \cos(m\omega)$$

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega) H_0 \exp(-j(k\omega + \varphi_{Kn} \sin(m\omega)))$$

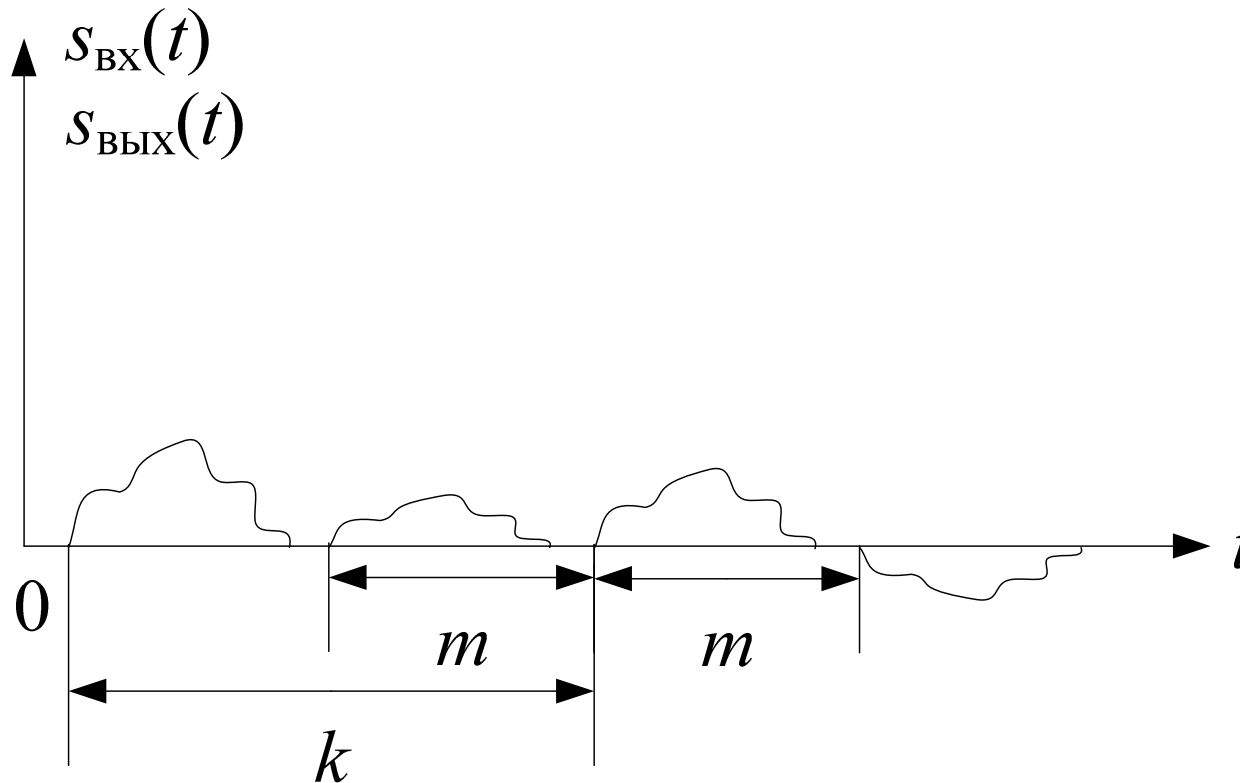
$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega) H_0 \exp(-j(k\omega + \varphi_{Kn} \sin(m\omega))) \exp(j\omega(t-k)) d\omega$$

$$\exp(-j\varphi_{Kn} \sin(m\omega)) \cong J_0(\varphi_{Kn}) + J_1(\varphi_{Kn}) \exp(-jm\omega) - J_1(\varphi_{Kn}) \exp(jm\omega)$$

$$e^{-j\varphi_{Kn} \sin(m\omega)} \cong \frac{H_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega) e^{j\omega(t-k)} \left[J_0(\varphi_{Kn}) + J_1(\varphi_{Kn}) e^{-jm\omega} - J_1(\varphi_{Kn}) e^{jm\omega} \right]$$

$$e^{-j\varphi_{kn} \sin(m\omega)} \cong \frac{H_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{BX}}(\omega) e^{j\omega(t-k)} \left[J_0(\varphi_{kn}) + J_1(\varphi_{kn}) e^{-jm\omega} - J_1(\varphi_{kn}) e^{jm\omega} \right] d\omega =$$

$$= A_0 J_0(\varphi_{kn}) s_{\text{BX}}(t-k) + A_0 J_1(\varphi_{kn}) s_{\text{BX}}(t-k-m) - A_0 J_1(\varphi_{kn}) s_{\text{BX}}(t-k+m)$$



Сигнал на входе и выходе канала передачи с фазо-частотными искажениями.

$$\dot{H}(j\omega) = \dot{H}_1(j\omega)\dot{H}_2(j\omega)\dot{H}_3(j\omega)\dots\dot{H}_M(j\omega)$$

$$\dot{H}(j\omega) \xleftrightarrow{\mathfrak{S}^{-1}} h(t) = h_1(t) * h_2(t) * h_3(t) * \dots * h_M(t)$$

