

### ПЗ т2. 3. Расчёт функций распределения показателей надёжности по результатам испытаний

Если закон распределения исследуемого показателя неизвестен и нет необходимости его аналитического описания, то применяют непараметрические методы [2]. Эти методы проще, чем параметрические, но они не позволяют прогнозировать значения показателей надёжности. К непараметрическим относят методы, построения "множительной" оценки, ядерных оценок и другие. Методы различаются сложностью реализации и качеством получаемых оценок.

Далее будем рассматривать вопросы оценки показателей безотказности (показатели ремонтпригодности оцениваются аналогично). Построение эмпирической функции распределения наработки до отказа по формуле  $F_N(t) = i/N$  при  $t > 0$  (где  $N$  – объем выборки;  $i$  – количество наработок до отказа, попавших в интервал  $[0, t]$ ,  $i = \overline{1, N}$ ) неприменимо для планов  $[NUR]$ ,  $[NUT]$  и  $[NUZ]$ , так как этот подход предполагает использование информации по всей выборке. Если исключить наработки до цензурирования, то будут иметь место значительные ошибки в определении  $F_N(t)$ . Наличие цензурирования приводит к неопределенности для  $F_N(t)$  в области цензурирования, которая увеличивается с ростом числа неполных наработок.

Постановка задачи определения показателей надёжности по цензурированным выборкам формулируется следующим образом.

Имеются выборочные значения наработки до отказа  $t_1, t_2, \dots, t_r$  и до цензурирования  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ . Количество наработок до отказа  $r$  и до цензурирования  $k$ , объем выборки  $N = r + k$ .

Необходимо определить: эмпирическую функцию распределения наработок до отказа, оценки вероятности безотказной работы и среднего значения наработки до отказа.

Допущения: результаты получены с использованием одного из планов типа  $[NUR]$ ,  $[NUT]$  или  $[NUZ]$ .

Решение задачи включает: предварительную обработку ЭД; построение эмпирической функции распределения  $F_N(t)$ ; оценивание вероятности безотказной работы  $p^*(t)$  и средней наработки до отказа  $TO$ .

Предварительная обработка ЭД предусматривает построение общего вариационного ряда – наработки на отказ и на цензурирование упорядочивают по возрастанию. Если наработка на отказ равна наработке до цензурирования, то в вариационном ряду первыми ставят наработку на отказ, а затем наработку до цензурирования.

В методе множительной оценки определение значений оценок  $p^*(t)$  и  $F_N(t)$  производится по простым соотношениям:

$$\begin{aligned} p^*(t) &= 1, t < t_1 \\ p^*(t_i) &= \prod_{t_j \leq t_i} [1 - 1/(N_j + 1)], \\ F_N(t_i) &= 1 - p^*(t_i), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $t_1$  – время возникновения первого отказа,  $N_j$  – количество работоспособных объектов после отказа при наработке, равной  $t_i$ . По эмпирической функции распределения наработки до отказа или по функции вероятности безотказной работы можно получить оценки других показателей надежности невосстанавливаемых изделий. Точечная оценка вероятности безотказной работы за наработку  $t$  ( $t < t_r$ ) определяется с помощью линейной интерполяции

$$p^*(t) = d p^*(t_v) + (1 - d) p^*(t_{v-1}),$$

где  $t_{v-1}$  и  $t_v$  – наработки до отказа, между которыми лежит наработка  $t$ ;  $d = (t - t_{v-1}) / (t_v - t_{v-1})$ .

При известном законе распределения средняя наработка до отказа

$$T_O = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt. \text{ Для цензурированных слева выборок время наблюдения}$$

ограничено, это обстоятельство позволяет получить только нижнюю границу средней наработки

$$T_O = \sum_{i=1}^r t_i [F_N(t_i) - F_N(t_{i-1})] + [1 - F_N(t_r)] z, \quad (2)$$

где  $z = \max(t_r, \bar{t}_k)$ ;  $t_0 = 0$ .

Для многократно цензурированных выборок при  $N_{u,i} > 0$  оценка интенсивности отказов  $\lambda^*\{t_i - t_{i-1}\} = r_i / [N_{u,i}(t_i - t_{i-1})]$ , где  $N_{u,i}$  – количество объектов, за которыми ведется наблюдение в интервале времени  $t_i - t_{i-1}$ ,  $r_i$  – количество наработок до отказа в этом интервале. Дисперсия оценки  $\lambda^*\{t_i - t_{i-1}\}$  увеличивается с ростом функции  $F_N(t)$ .

Основные свойства оценок рассмотренных параметров определяются свойствами функции распределения наработки до отказа, в частности, если оценка функции несмещенная, то и оценка нижней границы средней наработки до отказа также будет несмещенной. Предложенная оценка функции распределения применима для выборок, многократно и однократно цензурированных слева.

Эта же оценка применима и к функции распределения для выборок, цензурированных справа или интервалом. Простым переходом к такому применению является приравнивание начала неопределенных на периоде наблюдения наработок до отказа (начало таких наработок лежит вне периода наблюдения и поэтому точно неизвестно) некоторой правдоподобной величине, например правой границе или середине интервала неопределенности.

Рассмотренный подход к построению эмпирической функции распределения прост в реализации, не требует большого объема данных и сложных вычислений. С его помощью удастся получить (за исключением ситуаций, в которых  $N_{u,i} = 0$ ) несмещенные, состоятельные, асимптотически нормальные оценки значений функции распределения наработки объекта до отказа. Основным недостатком оценок является невозможность их применения в интересах прогнозирования надежности изделий. Преодоление

данного недостатка возможно на основе параметрического оценивания показателей, которое позволяет сформировать оценки с более высокой точностью, чем непараметрические методы.

**Пример 1.** По плану  $[NUz]$  проведено наблюдение за 10 объектами. Нарботки шести объектов до отказа составили 1922, 2576, 2314, 1873, 2135, 2018 часов. К моменту оценки четыре объекта безотказно проработали 2107, 3936, 2010, 2397 часов. Необходимо построить эмпирическую функцию распределения наработки до отказа и оценить вероятность безотказной работы за наработку в 2000 часов.

*Решение.* Построим общий вариационный ряд, табл. 1 (звездочками помечены наработки на цензурирование).

Таблица 1

$v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_v$	1873	1922	2010*	2018	2107*	2135	2314	2397*	2576	3936*
$t_r$	$t_1$	$t_2$		$t_3$		$t_4$	$t_5$		$t_6$	
$\tau_k$			$\tau_1$		$\tau_2$			$\tau_3$		$\tau_4$
$i$	1		2		3			4		
$r_i$	2		1		2			1		
$k_i$	1		1		1			1		

Рассчитаем оценку вероятности безотказной работы и эмпирическую функцию распределения наработки до отказа:

$$\begin{aligned}
 p^*(t < 1873) &= 1; & F_{10}(t < 1873) &= 0; \\
 p^*(t_1) = p^*(1873) &= 1 - 1/10 = 0,9; & F_{10}(t_1) &= 1 - p^*(1873) = 0,1; \\
 p^*(t_2) = p^*(1922) &= 0,9(1 - 1/9) = 0,8; & F_{10}(t_2) &= 0,2; \\
 p^*(t_4) = p^*(2018) &= 0,8(1 - 1/7) = 0,686; & F_{10}(t_4) &= 0,314; \\
 p^*(t_6) = p^*(2135) &= 0,686(1 - 1/5) = 0,549; & F_{10}(t_6) &= 0,451; \\
 p^*(t_7) = p^*(2314) &= 0,549(1 - 1/4) = 0,411; & F_{10}(t_7) &= 0,589; \\
 p^*(t_9) = p^*(2576) &= 0,397(1 - 1/2) = 0,206; & F_{10}(t_9) &= 0,794.
 \end{aligned}$$

Оценка средней наработки до отказа

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 1873(0,1 - 0) + 1922(0,2 - 0,1) + 2018(0,314 - 0,2) + \\
 &\quad + 2135(0,451 - 0,314) + 2314(0,589 - 0,451) + \\
 &\quad + 2576(0,794 - 0,589) + (1 - 0,794)3936 = 2559,9 \text{ часа.}
 \end{aligned}$$

Простое вычисление среднего значения по всем наработкам дает величину, равную 2328,8 часа, что меньше  $T_0$ .

Оценка вероятности безотказной работы за наработку 2000 часов:

$$\begin{aligned}
 d &= (2000 - 1922)/(2018 - 1922) = 0,813; \\
 p^*(2000) &= 0,813 * 0,686 + (1 - 0,813)0,8 = 0,707.
 \end{aligned}$$

Построить графики функций распределения.