

Лекция. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

- **Учебные вопросы**
- **1. Предварительная обработка результатов**
- **2. Проверка однородности дисперсии воспроизводимости**
- **3. Проверка адекватности модели**
- **4. Проверка значимости оценок коэффициентов модели**
- **5. Постановка задачи оптимизации**

Литература

1.Ходасевич Г.Б., Пантюхин О.И., Ногин С.Б. Планирование эксперимента и обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Учебное пособие, часть2. СПб.: СПбГУТ, 2014. 88с.

1.Предварительная обработка результатов

- После того, как составлен план проведения эксперимента, можно приступить к его проведению. Вопросы непосредственного осуществления эксперимента рассматривать не будем, а перейдем к обработке результатов. Сущность обработки результатов эксперимента во многом одинакова для различных областей применения – поиска оптимума функции, описания поверхности отклика и др.
- Необходимо учитывать, что любой эксперимент сопровождается погрешностями (методическими, измерений) и содержит элементы неопределенности (случайности). Проведение повторных опытов не дает полностью совпадающих результатов. Поэтому процедура обработки должна учитывать эти обстоятельства. Обработка результатов включает предварительную обработку результатов экспериментов, вычисление оценок коэффициентов функции отклика и проведение ряда проверок: однородности дисперсии воспроизводимости, адекватности модели и значимости коэффициентов. Расчетные соотношения будут приведены в предположении, что в каждой точке плана производится различное количество повторных опытов n_i .

1. Предварительная обработка результатов

В ходе предварительной обработки вычисляются следующие параметры для всех точек $u = \overline{1, N}$ плана экспериментов:

среднее значение функции отклика $\bar{y}_u = \frac{1}{r_u} \sum_{i=1}^{r_u} y_{ui}$;

несмещенная оценка дисперсии функции отклика $\sigma_u^2 = \frac{1}{r_u - 1} \sum_{i=1}^{r_u} (y_{ui} - \bar{y}_u)^2$.

Для данной величины количество степеней свободы $\varphi_u = r_u - 1$;

оценка дисперсии среднего значения функции отклика (*оценка дисперсия воспроизводимости*) $D(\bar{y}_u) = \sigma_u^2 / r_u = D_u$.

На основе частных оценок вычисляется средняя величина оценки *дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика* по всей области планирования

$$\sigma^2(y) = \left\{ \sum_{u=1}^N (r_u - 1) D_u \right\} / \left\{ \sum_{u=1}^N (r_u - 1) \right\} = \left\{ \sum_{u=1}^N (r_u - 1) D_u \right\} / \left\{ \sum_{u=1}^N r_u - N \right\}. \quad (1)$$

Эта оценка является несмещенной и ее можно рассматривать как случайную величину с количеством степеней свободы $\varphi(y) = \sum_{u=1}^N r_u - N$. Именно величину σ^2

(y) следует использовать как оценку дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика

2. Проверка однородности дисперсии воспроизводимости

Необходимым условием применения метода наименьших квадратов для расчета оценок коэффициентов модели является однородность оценок дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика во всех точках плана. Поэтому обязательным этапом обработки должна быть проверка статистической гипотезы об однородности совокупности дисперсий воспроизводимости. В условиях различного количества опытов в точках плана применяют критерии Фишера или Бартлетта [1].

Если количество повторных опытов в каждой точке плана достаточно велико (больше 7), то средние значения функции отклика можно считать распределенными по нормальному закону.

- Проверка однородности по критерию Фишера сводится к проверке гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин:

из совокупности оценок дисперсии среднего значения функции отклика выбирается минимальное $D_{u \min}$ и максимальное $D_{u \max}$ значения с числом степеней свободы соответственно $\varphi_{u \min}$ и $\varphi_{u \max}$;

вычисляется значение критерия Фишера $F = D_{u \max} / D_{u \min}$, которое сравнивается с критическим значением $F_{кр} = F(\alpha; \varphi_{u \max}; \varphi_{u \min})$, где α – уровень значимости (обычно α выбирают в пределах от 0,01 до 0,1). Критическая область является односторонней (альтернативная гипотеза допускает между проверяемыми оценками дисперсии соотношение $D_{u \max} > D_{u \min}$). Критическое значение определяют по специальным таблицам (например, табл. П.1 приложения) или с использованием стандартных функций математических пакетов;

гипотеза об однородности оценок дисперсии воспроизводимости в различных точках плана принимается, если условие $F \leq F_{кр}$ выполняется, и отвергается в противном случае.

2. Проверка однородности дисперсии воспроизводимости

Если не выявлена неоднородность дисперсии воспроизводимости, то обработку результатов экспериментов можно продолжать дальше. Иначе следует выявить и устранить причины неоднородности. Обычно она является следствием принятых решений по проведению экспериментов.

Во-первых, возможно в экспериментальном исследовании не учтен некоторый существенный фактор (факторы), который изменялся в ходе опытов. Такой фактор (факторы) следует выявить, включить в модель или обеспечить его стабильность в ходе исследований и повторить опыты.

Во-вторых, количество повторных опытов в точках плана с большой дисперсией функции отклика проведено недостаточно. Дисперсия функции отклика σ_u^2 может существенно различаться в разных точках плана. Так, дисперсия среднего количества заявок в очереди для одноканальной СМО при пуассоновском входном потоке и экспоненциально распределенном времени обслуживания равна $\rho / (1 - \rho)^2$, где ρ – загрузка системы. Иначе говоря, эта дисперсия заведомо неоднородна при изменении загрузки. В частности, изменение загрузки от 0,8 до 0,9 приводит к увеличению дисперсии в 4,5 раза. Поэтому для обеспечения однородности дисперсии среднего значения в точке плана при $\rho = 0,9$ следует провести в 4,5 раза больше повторных опытов по сравнению с точкой плана, в которой $\rho = 0,8$.

Неоднородность можно снизить за счет уменьшения интервала варьирования факторов или увеличения количества опытов в соответствующих точках плана. После этого можно приступить к вычислению оценок коэффициентов функции отклика. Оценки коэффициентов функции отклика вычисляются по формулам (6.1). Результаты вычислений этих оценок всегда отличаются от нуля. Но это не значит, что они являются значимыми, т.е. сами коэффициенты не равны нулю. Проверку значимости оценок обычно осуществляют после проверки адекватности модели.

3. Проверка адекватности модели

Проверка адекватности математической модели данным эксперимента проводится только в случае ненасыщенного планирования на основе сопоставления дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика $\sigma^2(y)$ и дисперсии адекватности. Оценка дисперсия адекватности характеризует отклонения между результатами наблюдений и значениями, формируемыми по функции отклика

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N - m} \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - y'_u)^2, \quad N > m,$$

где m – количество оцениваемых коэффициентов модели; \bar{y}_u – среднее значение результатов наблюдения в u -й точке плана; y'_u – значение отклика в этой же точке, предсказанное на модели. Количество степеней свободы дисперсии адекватности $\varphi_a = N - m$. При насыщенном планировании нет степеней свободы и сумма отклонений равна нулю.

Проверка адекватности сводится к проверке гипотезы об однородности оценки дисперсии воспроизводимости $\sigma^2(y)$ с количеством степеней свободы $\varphi(y)$ и оценки дисперсии адекватности. Проверка осуществляется по критерию Фишера аналогично рассмотренной выше проверке однородности дисперсий воспроизводимости. Оценки дисперсий в формуле расчета критерия расставляются так, чтобы его величина была больше единицы, критическая область является двусторонней.

3. Проверка адекватности модели

- Если вычисленное значение критерия меньше критического, то нет оснований для сомнений в адекватности модели. Однако положительный исход статистической проверки не гарантирует достоверной адекватности, а тем более истинности модели, хотя и не противоречит такому предположению. Когда гипотеза отклоняется, следует вывод о неадекватности модели, следовательно, она заведомо не является истинной. Дальнейшее применение неадекватной модели обычно нецелесообразно, и надо принять меры по ее совершенствованию.
- Причиной неадекватности могут являться: ошибки в организации и проведении опытов, например неконтролируемое изменение неучтенных в модели факторов; погрешности в задании исходных данных и в измерении результатов; большой размах варьирования факторов и другие причины. Иначе говоря, анализ причин неадекватности требует серьезного изучения сущности исследуемого процесса и методов его исследования.

4. Проверка значимости оценок коэффициентов модели

Проверка значимости оценок коэффициентов полинома производится на основе проверки статистической гипотезы о равенстве математического ожидания случайной величины нулю, т.е. проверки условия $b_i = 0$ для всех коэффициентов. Проверка осуществляется с помощью критерия Стьюдента $t_i = (|\beta_i| - 0) / \sigma(\beta_i) = |\beta_i| / \sigma(\beta_i)$.

Критическое значение $t_{кр} = t(\alpha; \varphi(y))$ находится стандартным образом: критическая область является двусторонней, так как коэффициент может быть положительным или отрицательным; количество степеней свободы соответствует количеству степеней свободы для оценки дисперсии воспроизводимости $\varphi(y)$. Если вычисленное значение критерия больше $t_{кр}$, то данный коэффициент отличается от нуля и оставляется в уравнении функции отклика, иначе коэффициент незначим. Отсутствие значимости коэффициента в моделях описания поверхности отклика говорит о целесообразности исключения соответствующего слагаемого из уравнения (частный градиент равен нулю).

После проверки значимости коэффициентов может оказаться, что все коэффициенты незначимы.

4. Проверка значимости оценок коэффициентов модели

Эти выводы являются следствием одной из следующих причин:
достигнута область оптимума функции отклика. Следует перейти к построению функции на основе полных полиномов второго порядка;
интервал варьирования факторов слишком мал. Необходимо увеличить интервал варьирования факторов;

отклик системы не зависит от выбранных факторов. В выбранной области значений факторы не оказывают влияние на функцию отклика или для анализа выбраны несущественные факторы.

Формальных правил выявления соответствующих ситуаций не существует.

Рассмотренные этапы обработки результатов экспериментов должны выполняться не только в случае полного или дробного факторного эксперимента, но и при реализации других планов оптимизации и описания поверхности отклика.

В условиях относительно небольшого влияния случайности на значение функции отклика (например, случайные ошибки измерительных приборов) в каждой точке плана проводится только по одному опыту. Очевидно, что в такой ситуации оценка дисперсии воспроизводимости невозможна. Следовательно, проверки однородности дисперсии воспроизводимости и адекватности модели не проводятся. И только в условиях ненасыщенного планирования возможна проверка значимости коэффициентов полинома, если в качестве дисперсии коэффициентов взять величину $\sigma^2(\beta_i) = \sigma_a^2/N$ с количеством степеней свободы $\varphi_a = N - m$.

5. Постановка задачи оптимизации

Поиск оптимальных значений параметров является одной из важных задач, решаемых при создании новых технических систем, управлении производством или технологическими процессами. В соответствии с теорией эффективности необходимо [1]:

- **сформировать критерий эффективности (функцию отклика в терминах ТПЭ). В большинстве случаев эффективность определяется совокупностью показателей, характеризующих частные свойства исследуемой системы и выполняемой ею операции. Критерий эффективности строится на множестве значений частных показателей с использованием теории полезности или методов векторной оптимизации. В некоторых случаях критерий эффективности удается построить на множестве значений одного показателя, переведя все остальные показатели в разряд ограничений;**
- **выделить управляемые и неуправляемые параметры (факторы) системы и среды, оказывающие существенное влияние на критерий эффективности;**
- **определить ограничения на значения параметров.**

Задача оптимизации заключается в нахождение экстремума функции отклика в области допустимых значений параметров. Чтобы найти экстремум, необходимо иметь описание поверхности отклика в диапазоне варьирования параметров, что далеко не всегда удается получить исходя из теоретических соображений, так как функция отклика в аналитическом виде может быть априори неизвестна.

5. Постановка задачи оптимизации

- **Реализация задачи оптимизации, основанная на применении ТПЭ, как и любой задачи экспериментального исследования, начинается с определения объекта анализа, цели исследования, изучении сущности исследуемого процесса, анализе имеющихся ресурсов, возможности проведения экспериментов с изучаемым объектом в необходимом диапазоне изменения факторов.**
- Объектом анализа выступает заданный критерий эффективности исследуемой системы, рассматриваемый как функция от существенных параметров системы и внешней среды. Система может представлять собой реальный физический объект или его модель – физическую или математическую (имитационную, сложную аналитическую).
- Изучение процесса функционирования объекта позволяет выявить факторы, оказывающие существенное влияние на функцию отклика. Выбор существенных переменных потенциально определяет степень достижения адекватности получаемой модели: отсутствие в исходном перечне существенных параметров, да еще и произвольно меняющихся в ходе эксперимента, не позволяет правильно решить задачу оптимизации; включение несущественных параметров усложняет модель, вызывает значительное увеличение объема экспериментов, хотя по результатам исследования несущественность соответствующих параметров будет выявлена.

5. Постановка задачи оптимизации

Для каждой переменной следует определить диапазон и характер изменения (непрерывность или дискретность). Ограничения на диапазон изменений могут носить принципиальный или технический характер. Принципиальные ограничения факторов не могут быть нарушены при любых обстоятельствах. Эти ограничения задаются исходя из физических представлений (например, емкость устройств памяти всегда имеет положительное значение). Второй тип ограничений связан с технико-экономическими соображениями, например, с наличием соответствующего аппаратно-программного комплекса, принятой технологией обработки информации.

Выделение области изменения факторов является не формальной задачей, а основывается на опыте исследователя. **В рамках области допустимых значений факторов необходимо выделить начальную область планирования эксперимента.** Этот выбор включает определение основного (нулевого) уровня как исходной точки построения плана и интервалов варьирования. Интервал варьирования задает относительно основного уровня значения фактора, при которых будут производиться эксперименты. Обычно интервалы являются симметричными относительно центрального значения. **Интервал варьирования должен отвечать двум ограничениям:** его применение не должно приводить к выходу фактора за пределы области допустимых значений; он должен быть больше погрешности задания значений фактора (в противном случае уровни фактора станут не различимыми). В пределах этих ограничений выбор конкретного значения является неформальной процедурой, учитывающей ориентировочную информацию о кривизне поверхности функции отклика.

5. Постановка задачи оптимизации

Фактор должен быть управляемым, т.е. экспериментатор может поддерживать его постоянное значение в течение всего опыта. Для фактора необходимо указать его конкретные значения и средства контроля. Сам фактор должен быть первичным, ибо сложно управлять фактором, который в свою очередь является функцией других факторов. Для каждого фактора следует указать точность его задания и поддержания в ходе эксперимента.

- Одновременное изменение факторов предполагает их совместимость, что означает осуществимость и безопасность всех их сочетаний. Необходимо также обеспечить независимость изменения каждого фактора, что означает возможность установления любого значения фактора вне связи со значениями других факторов.
- Цель исследования, требуемая точность получаемых результатов, имеющиеся ресурсы ограничивают множество допустимых моделей функции отклика (с усложнением модели и повышением точности оценки показателей резко возрастает объем необходимых опытов) и соответственно определяют план проведения экспериментов.

Заключение

Теоретические вопросы для зачёта по дисциплине

1. Методология науки.
2. Планирование научных исследований.
3. Характеристика научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ.
4. Общая характеристика экспериментальных данных.
5. Эмпирическая функция распределения.
6. Оценки параметров распределения и их свойства.
7. Оценки моментов и квантилей распределения.
8. Этапы статистической обработки.
9. Сущность задачи проверки статистических гипотез.
10. Типовые распределения.
11. Проверка гипотез о законе распределения.
12. Методы оценки параметров распределения.
13. Однофакторный дисперсионный анализ.
14. Обработка цензурированных выборок.
15. Основные понятия и определения теории планирования эксперимента.
16. Критерии оптимальности и типы планов.

Заключение

17. Постановка задачи оптимизации.
18. Полный факторный эксперимент типа 2к.
19. Оценки коэффициентов функции отклика.
20. Дробный факторный эксперимент.
21. Обработка результатов эксперимента.

Практические задачи:

1. Построить вариационный ряд для функции распределения.
2. Построить эмпирическую функцию распределения.
3. Построить статистический ряд для функции распределения.
4. Найти частоты и частости для функции распределения.
5. Построить функцию распределения по статистическому ряду.
6. Построить функцию плотности распределения по статистическому ряду.
7. Провести оценку 4х центральных моментов.
8. Провести оценку 4х начальных моментов.
9. Провести оценку квантилей распределения.
10. Определить этапы статистической обработки.
11. Найти оценки коэффициентов функции отклика.