ТЕМА 3. ИНСТРУМЕНТАРИЙ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ И КАЧЕСТВА СПОД

ЛЕКЦИЯ 5. ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДА

5.1. Оценка надежности невосстанавливаемых систем с параллельным включением элементов

Параллельная надежностная схема соответствует системе, в которой один элемент является основным, а все остальные резервными. Вероятность безотказной работы невосстанавливаемой системы, состоящей из n параллельно включенных элементов, определяется через вероятность дополнительного события. Параллельно соединение элементов неработоспособно тогда, когда произошел отказ всех элементов. Вероятность отказа системы

$$Q_С(t) = (1–p_1(t))(1–p_2(t))\ldots(1–p_n(t)),$$

где $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы элемента i (i =1, 2, …, n) в течении времени t.

Вероятность безотказной работы системы

$$P_С(t)= 1 – Q_С(t) = 1 – (1–p_1(t))(1–p_2(t))\ldots(1–p_n(t)).$$

Остальные показатели невосстанавливаемой системы вычисляются обычным образом.

Теоретически за счет резервирования возможно добиться любой заданной вероятности безотказной работы. Но такой способ повышения надежности связан с существенным ростом материальных затрат. Кроме того, с ростом кратности резерва возрастает сложность реализации контроля и управления в такой системе, что также сказывается на надежности.

Приращение вероятности безотказной работы быстро уменьшается с ростом кратности резервирования. Рассмотрим случай, когда основной элемент дублируется резервным. Прирост вероятности безотказной работы системы за счет дублирования

$$\Delta P_С(t) = [1 – (1–p_1(t))(1–p_2(t))] – p_1(t) =$$
$$= [1 – 1 + p_1(t)+ p_2(t)– p_1(t)\, p_2(t)] – p_1(t) = p_2(t)\,(1 – p_1(t)).$$

Как видно, прирост надежности системы пропорционален надежности дублирующего и "ненадежности" основного элемента. Подключение последующих резервных элементов дает все меньший эффект прироста вероятности безотказной работы. Поэтому на практике обычно применяют дублирование и гораздо реже резервирование большей кратности. Наличие резерва не только повышает надежность, но и позволяет проводить техническое обслуживание и ремонт отдельных элементов без прекращения функционирования системы.

5.2. Оценка надежности восстанавливаемых систем с параллельным включением элементов

Коэффициент готовности восстанавливаемых систем с параллельным включением элементов (коэффициент готовности трактуется как вероятность нахождения объекта в работоспособном состоянии) рассчитывается аналогично вероятности безотказной работы невосстанавливаемых систем

$$k_{\text{ГС}} = 1 - (1 - k_{\text{Г},1})\,(1 - k_{\text{Г},2})\,\ldots\,(1 - k_{\text{Г},n}).$$

Оценка других показателей надежности, в том числе среднего времени наработки на отказ или среднего времени восстановления, вызывает определенные трудности. Принятие допущения, использованного при оценке указанных показателей систем с последовательным включением элементов, противоречит логике возникновения отказа в системах с параллельным включением элементов и неприменимо в этих системах.

Среднее время восстановления системы из n параллельно соединенных элементов равно средней продолжительности совпадений интервалов времени ремонта всех элементов. При отсутствии последействия, т.е. при экспоненциальном распределении интервалов времени наработки между отказами и времени восстановления у всех элементов соединения поток восстановлений системы будет простейшим. Его интенсивность равна сумме интенсивностей потоков восстановлений элементов $\mu_{\text{С}} = \mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n$.

Суммарный поток можно считать простейшим и при выполнении следующих условий [8]:

потоки восстановлений элементов стационарны и независимы. Функции плотности распределения отказов и восстановлений элементов являются произвольными, но существуют, по крайней мере, первые два момента распределения;

выполняется соотношение $\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i^2 \Big/ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\right)^2 \le 0{,}1$. Это неравенство является весьма жестким ограничением. Его выполнение требует наличия в системе не менее десяти элементов даже при одинаковой интенсивности восстановлений элементов, что нереально для параллельных соединений. Поэтому оценки для потоков с последействием носят приближенный характер.

Итак, если потоки восстановлений считаются распределенными по простейшему закону, то расчет надежности предусматривает:

оценку коэффициента готовности системы $k_{\text{Г, С}}$;

вычисление суммарной интенсивности $\mu_{\text{С}}$ потока восстановлений элементов системы;

оценку среднего времени восстановления системы $T_{\text{В, С}} = 1/\mu_{\text{С}}$;

расчет среднего времени наработки на отказ по формуле (9.6б).

Расчет надежности систем, надежностная схема которых состоит из

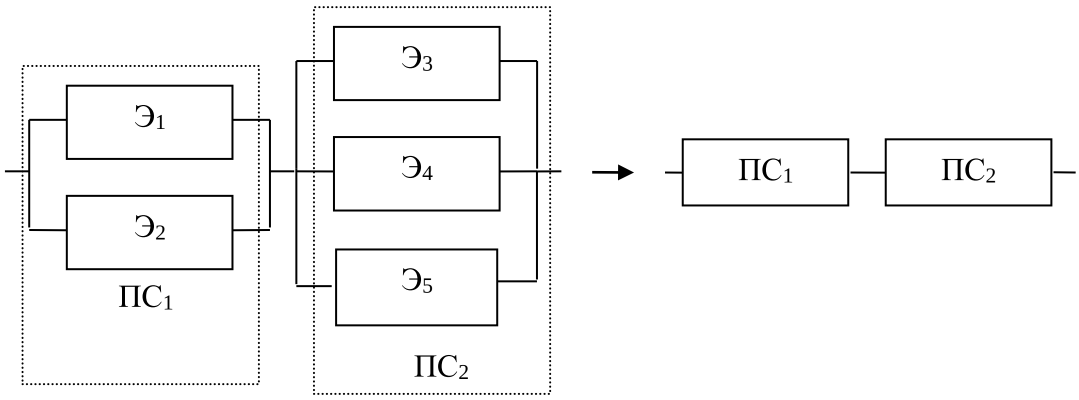

Рис. 12.1. Пример параллельно-последовательного преобразования

параллельно-последовательных соединений элементов, осуществляется путем последовательных преобразований. Примеры подобных преобразований представлены на рис. 5.1 и 5.2.

Однако такие простые преобразования надежностной схемы системы не всегда возможны. Различные подсистемы, формируемые в процессе преобразования, могут содержать в своем составе одни и те же элементы. Следовательно, эти подсистемы зависимы по надежности, и простое перемножение вероятностей недопустимо. Исследование надежности подобных объектов возможно на основе перебора несовместных состояний систем, с помощью логико-вероятностных методов или имитационного моделирования.

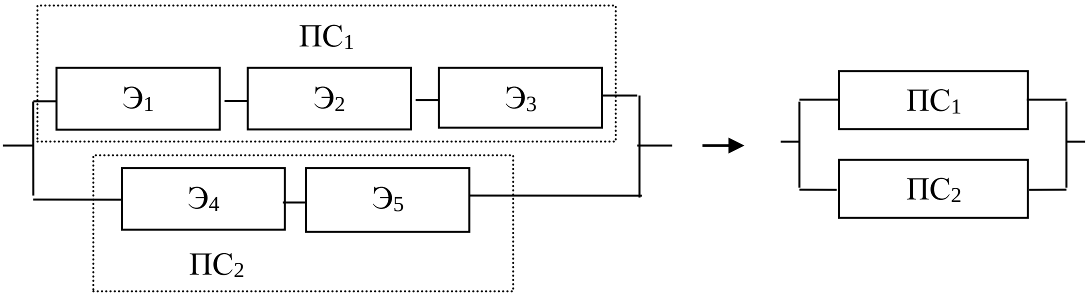

Рис. 5.2. Пример последовательно-параллельного преобразования

5.1. ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

5.1. Описание условий работоспособности системы

Не все структуры систем могут быть преобразованы к параллельно-последовательной надежностной схеме. Поэтому вероятностный метод не является универсальным. Оценку надежности систем с разветвленной структурой целесообразно осуществлять на основе логико-вероятностного метода (ЛВМ) или перебора возможных состояний. Оба этих метода применимы и для простых систем со структурной избыточностью. Специфика ЛВМ заключается в способе описания условий работоспособности системы и в переходе от этих условий к расчетным соотношениям [8, 12].

В основе ЛВМ лежат те же допущения, что и в основе вероятностного метода. Введем обозначения состояний:

элемент характеризуется булевой переменной x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), где n – количество элементов системы. Полной работоспособности элемента соответствует $x_i = 1$, отказу $x_i = 0$;

система характеризуется булевой переменной y. В состоянии полной работоспособности $y = 1$, отказа $y = 0$. Состояние системы является функцией $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Эту функцию называют функцией работоспособности системы (ФРС) или условием работоспособности, по своей форме она является функцией алгебры логики.

На практике у большинства сложных объектов их показатели надежности монотонно ухудшаются (или не улучшаются) при снижении значений параметров надежности элементов, а отказ любого элемента не повышает надежности объекта в целом. Такие объекты получили наименование систем с монотонной структурой, а их логические ФРС обладают свойством монотонности. Логическая функция является монотонной, если для любых наборов булевых аргументов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и

(β_1 , β_2 , …, β_n), таких, что $\alpha_i \le \beta_i$ при всех значениях индекса i имеет место соотношение

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \le f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Всякая ФРС, представленная в виде конъюнкции или дизъюнкции без отрицаний переменных, является монотонной. Тождественные преобразования подобной функции не изменяют свойства монотонности. Условие работоспособности системы с монотонной структурой можно записать в виде путей успешного функционирования или минимальных сечений отказов системы.

Кратчайший путь успешного функционирования (КПУФ) системы представляет собой такую конъюнкцию ее элементов, в которой ни один из элементов нельзя изъять, не нарушив условие работоспособности. Иначе говоря, КПУФ описывает один из возможных вариантов выполнения системой исследуемой функции, причем набор элементов является абсолютно необходимым для выполнения задачи. При наличии структурной избыточности в системе количество КПУФ может существенно превышать единицу. Различные пути могут содержать одинаковые элементы.

Функция работоспособности системы представляет собой дизъюнкцию КПУФ, т.е. ФРС представляет собой дизъюнктивную нормальную форму. Каждый импликант имеет ясный физический смысл, он соответствует кратчайшему пути успешного функционирования.

Минимальное сечение отказов (МСО) системы представляет такую конъюнкцию из отрицаний значений ее элементов, когда ни один из них нельзя изъять, не нарушив условие отказа системы. Иначе говоря, МСО описывает один из возможных вариантов нарушения работоспособности системы с помощью минимального набора отказавших элементов.

Условие работоспособности системы на основе минимальных сечений отказов записывается через конъюнкцию отрицаний МСО.

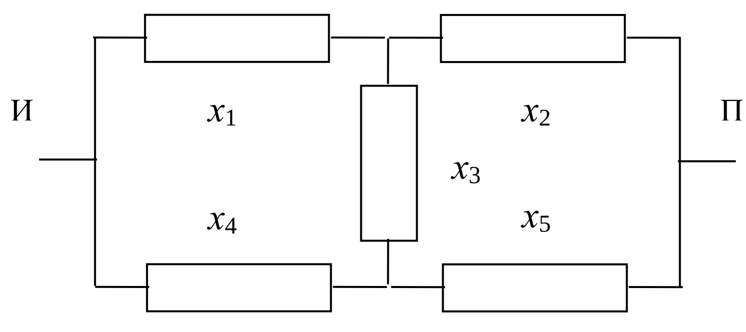

Рис. 5.1. Надежностная схема системы

Системы с конечным числом элементов имеют конечное количество кратчайших путей успешного функционирования и минимальных сечений отказов.

Пример 5.1. Необходимо составить ФРС на основе КПУФ и МСО для надежностной схемы, представленной на рис. 5.1.

Решение. В системе существует четыре КПУФ:

$$y_1 = x_1\, x_2\ ;\quad y_2 = x_4\, x_5\ ;\ y_3 = x_1\, x_3\, x_5\ ;\ y_4 = x_4\, x_3\, x_2\ .$$

Функция работоспособности системы на основе КПУФ

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = x_1\, x_2 + x_4\, x_5 + x_1\, x_3\, x_5 + x_2\, x_3\, x_4\ .$$

Здесь знаки "+" означают логическое сложение. Такая запись ФРС соответствует представлению надежностной схемы системы в виде параллельного соединения КПУФ, рис. 5.2.

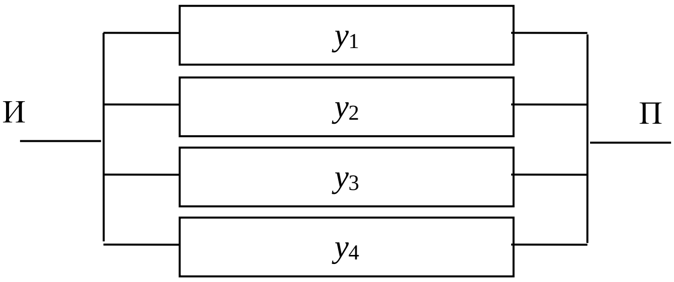

Рис. 5.2. Эквивалентное представление системы на основе КПУФ

Описанием совокупности МСО служат логические функции

$$z_1 = x_1^*\, x_4^*\ ;\ z_2 = x_2^*\, x_5^*\ ;\quad z_3 = x_1^*\, x_3^*\, x_5^*\ ;\ z_4 = x_2^*\, x_3^*\, x_4^*,$$

где символ "*" обозначает логическое отрицание переменной.

Функция работоспособности на основе МСО

$$y = z_1^*\, z_2^*\, z_3^*\, z_4^* = (x_1^*\, x_4^*)^*\, (x_2^*\, x_5^*)^*\, (x_1^*\, x_3^*\, x_5^*)^*\, (x_2^*\, x_3^*\, x_4^*)^*.$$

Такая форма записи ФРС соответствует последовательному соединению отрицаний минимальных сечений отказов, рис. 11.3.

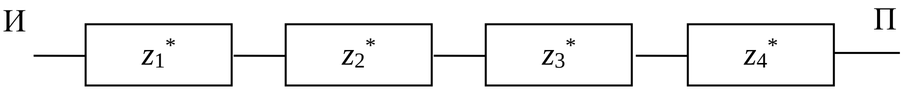

Рис. 5.3. Эквивалентное представление системы на основе МСО

В общем случае количество кратчайших путей и сечений отказов не совпадает. Оба способа описания ФРС эквиваленты. Выбор конкретного варианта описания является субъективным и зависит от сложности функции. Логическая форма записи ФРС позволяет учесть структуру системы и ограничения, накладываемые на реализацию функций, например ограничения на применение тех или иных маршрутов передачи информации.

5.2. Ортогонализация функции работоспособности

В дальнейшем будет рассматриваться функция работоспособности системы, построенная с помощью КПУФ. Исходная ФРС описывает независимые события. Независимость следует из основных допущений, принятых в качестве исходных при построении вероятностной модели. Но состояния работоспособности путей являются совместными событиями, например, два и более пути могут находиться одновременно в состоянии отказа. Это не позволяет непосредственно приступить к расчету показателей надежности – для вычисления вероятности суммы совместных событий следует знать вероятности совмещения этих событий. Поэтому ФРС необходимо так преобразовать, чтобы обеспечить несовместность описываемых событий.

Исходная ФРС представлена в дизъюнктивной нормальной форме. Преобразованную функцию работоспособности целесообразно тоже представить в дизъюнктивной нормальной форме, но так чтобы все дизъюнкты описывали несовместные события. Это означает, что конъюнкции любых пар дизъюнктов должны быть равны нулю. Данное условие можно записать в виде

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k, \text{ где } y_i\, y_j = 0 \text{ при } i \neq j;\ \ i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

Булева функция, отвечающая этому условия, называется ортогональной, а процедура ее получения ортогонализацией. Существует несколько способов ортогонализации.

Применение диаграмм Карно. Способ позволяет одновременно проводить ортогонализацию и минимизацию ФРС. Правила построения искомой формы во многом похожи на известные правила минимизации булевых функций. Однако в отличие от традиционных приемов минимизации, формируемые импликанты не должны пересекаться, т. е. каждая конституента единицы может участвовать в операции склеивания только один раз. Вполне понятно, что вариантов склеивания может быть несколько. Применение диаграмм Карно рассчитано на ручные методы решения задачи при числе переменных, не более 6 (построение диаграмм большей размерности затруднительно). Иногда это ограничение можно снять путем декомпозиции исходной задачи на ряд задач меньшей размерности.

Преобразование ФРС в совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ). Такое преобразование осуществляется известным образом путем умножения каждого дизъюнкта (импликанты) исходной функции на суммы недостающих переменных и их отрицаний. Эта операция не изменяет значение функции потому, что соответствует умножению на логическую единицу, так как для логических переменных справедливо тождество $x_i + x_i^* = 1$. Любой элемент системы может находиться только в одном из двух состояний, поэтому полученные после умножения импликанты будут несовместны. Путем подобных преобразований получается ФРС, каждый дизъюнкт которой состоит из произведения простых переменных и их отрицаний и в каждом дизъюнкте обязательно присутствует каждая переменная или ее отрицание. В ходе преобразований следует учитывать тождественные соотношения для булевых переменных: $x_i\, x_i^* = 0$; $x_i\, x_i = x_i$; $x_i + x_i = x_i$. В результате указанных действий будет получена булева функция, в которой все импликанты попарно несовместны.

Пример 5.2. Преобразовать ФРС, представленную в примере 5.1, к ортогональной форме в виде СДНФ.

Решение. Исходная функция работоспособности

$$y = x_1\, x_2 + x_4\, x_5 + x_1\, x_3\, x_5 + x_2\, x_3\, x_4$$

преобразуется к виду

$$y = x_1\, x_2\, (x_3 + x_3^*)(\, x_4 + x_4^*)(\, x_5 + x_5^*) + x_4\, x_5\, (x_1 + x_1^*)(\, x_2 + x_2^*)(\, x_3 + x_3^*) +$$

$$+ x_1 x_3 x_5 (x_2 + x_2^*)(x_4 + x_4^*)+ + x_2 x_3 x_4(x_1 + x_1^*)(x_5 + x_5^*).$$

После раскрытия скобок и тождественных преобразований получается ортогональная форма ФРС

$$y = x_1 x_2 x_3^* x_4^* x_5^* + x_1 x_2 x_3^* x_4^* x_5 + x_1 x_2 x_3^* x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3^* x_4 x_5^* +$$
$$+ x_1 x_2 x_3 x_4^* x_5^* + x_1 x_2 x_3 x_4^* x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^* +$$
$$+ x_1^* x_2^* x_3^* x_4 x_5 + x_1^* x_2 x_3^* x_4 x_5 + x_1 x_2^* x_3^* x_4 x_5 + x_1 x_2^* x_3 x_4^* x_5 +$$
$$+ x_1 x_2^* x_3 x_4 x_5 + x_1^* x_2^* x_3 x_4 x_5 + x_1^* x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1^* x_2 x_3 x_4 x_5^*.$$

Можно убедиться в несовместности любых пар импликант.

Перевод булевой функции в СДНФ прост по технике исполнения, легко формализуется и поэтому может применяться для автоматизации расчетной процедуры. Его основной недостаток состоит в максимальной избыточности формулы, так как каждая импликанта соответствует только одной конституенте единицы.

Способ П.С. Порецкого. По теореме П.С. Порецкого булева функция, заданная в дизъюнктивной нормальной форме

$$y= y_1 + y_2 + \ \dots + y_k,$$

имеет ортогональную форму представления

$$y= y_1 + y_1^* y_2 + y_1^* y_2^* y_3 \ \dots + y_1^* y_2^* \dots y_{k-1}^* y_k . \qquad (5.1)$$

Если импликанты y_i исходной функции представляют собой конъюнкции переменных, то их отрицание также следует представить в ортогональной форме, например

$$y_i^* = (x_2 x_3 x_4)^* = x_2^* + x_3^* + x_4^* = x_2^* + x_2 x_3^* + x_2 x_3 x_4^*.$$

Пример 5.3. Преобразовать ФРС, представленную в примере 11.1, к ортогональной форме по способу П.С. Порецкого.

Решение. Кратчайшие пути успешного функционирования

$$y_1 = x_1 x_2 ; \ \ y_2 = x_4 x_5 ; \ y_3 = x_1 x_3 x_5 ; \ y_4 = x_2 x_3 x_4 .$$

Обобщенная ортогональной форма ФРС

$$y = y_1 + y_1^* y_2 + y_1^* y_2^* y_3 + y_1^* y_2^* y_3^* y_4 .$$

Ортогональные формы отрицаний КПУФ

$$y_1^* = (x_1 x_2)^* = x_1^* + x_2^* = x_1^* + x_1 x_2^*;$$
$$y_2^* = (x_4 x_5)^* = x_4^* + x_5^* = x_4^* + x_4 x_5^*;$$
$$y_3^* = (x_1 x_3 x_5)* = x_1^* + x_3^* + x_5^* = x_1^* + x_1 x_3^* + x_1 x_3 x_5^*.$$

Следовательно,

$$y = x_1 x_2 + (x_1^* + x_1 x_2^*) x_4 x_5 + (x_1^* + x_1 x_2^*) (x_4^* + x_4 x_5^*) x_1 x_3 x_5 +$$
$$+ (x_1^* + x_1 x_2^*) (x_4^* + x_4 x_5^*) (x_1^* + x_1 x_3^* + x_1 x_3 x_5^*) x_2 x_3 x_4 =$$
$$= x_1 x_2 + x_1^* x_4 x_5 + x_1 x_2^* x_4 x_5 + x_1 x_2^* x_3 x_4^* x_5 + x_1^* x_2 x_3 x_4 x_5^*.$$

Полученная ортогональная форма эквивалента функции, представленной в СДНФ, но обладает существенно меньшей сложностью, так как каждая импликанта соответствует нескольким конституентам единицы. Причем это свойство характерно для любой булевой функции, ибо СДНФ является максимально избыточной.

Метод П.С. Порецкого поддается формализации и может применяться для построения автоматических процедур ортогонализации.

Итак, в результате преобразования ФРС в ортогональную форму все impликанты характеризуют несовместные события.

5.3. Построение вероятностной функции

Ортогональная форма ФРС дает возможность сформировать вероятностную функцию – вероятность безотказной работы для невосстанавливаемых систем. Построение вероятностной функции сводится к нахождению вероятности наступления события, состоящего в равенстве единице функции работоспособности $P(t) = P(y = 1)$. Правила перехода от логической функции к вероятностной основаны на теоремах сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий:

если $y = y_1 + y_2 + \ \dots + y_k$ и совокупность y_i ($i = 1, 2, \dots, k$) описывает несовместные события, то

$P(y = 1) = P(y_1 = 1) + P(y_2 = 1) + \dots + P(y_k = 1)$;

если $y = x_1\ x_2\ \dots\ x_m$ и множество x_j ($j = 1, 2, \dots, m$) характеризует независимые события, то

$P(y = 1) = P(x_1 = 1)\ P(x_2 = 1) \dots P(x_m = 1)$;

если $y = x_i^*$, то

$P(y = 1) = P(x_i^* = 1) = 1 – P(x_i = 1)$.

В дальнейшем вместо $P(x_i = 1)$ будем записывать кратко P_i .

Пример 11.4. Записать вероятностную функцию для ортогональной ФРС $y = x_1\ x_2 + x_1^* x_4\ x_5 + x_1\ x_2^*\ x_4\ x_5 + x_1\ x_2^*\ x_3\ \ x_4^*\ x_5 + x_1^*\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5^*$.

Решение. В соответствии с указанными правилами записи вероятностная функция имеет вид

$$P_\text{С} = P_1\ P_2 + (1 – P_1)\ P_4\ P_5 + P_1\ (1 – P_2)\ P_4\ P_5 + \\ + P_1\ (1 – P_2)\ P_3\ (1 – P_4)\ P_5 + (1 – P_1)\ P_2\ P_3\ P_4\ (1 – P_5).$$

Если формирование вероятностной функции производится на основе СДНФ, то результат после тождественных преобразований или просто численное значение вероятности получится то же самое.

Поиск остальных показателей надежности невосстанавливаемых систем осуществляется аналогично вероятностному методу. Для восстанавливаемых систем по рассмотренной методике производится расчет коэффициента готовности (оперативной готовности), аналитическое определение других показателей вызывает принципиальные трудности.

Логико-вероятностный метод не требует построения надежностной схемы, необходимо лишь составление кратчайших путей успешного функционирования, что является менее трудоемкой задачей. Преобразование ФРС в ортогональную форму и построение вероятностной функции можно полностью формализовать, ибо оно носит регулярный характер.

5.4. Метод перебора состояний системы

Этот численный метод основан на тех же допущениях, что и рассмотренный вероятностный или логико-вероятностный метод. В соответствии с этими допущениями, система в каждый момент времени находится в одном из 2^n возможных состояний, где n – количество элементов. Каждому состоянию системы соответствует своя совокупность состояний элементов. Множество состояний системы является несовместным и составляет полную группу событий. Сумма вероятностей таких состояний равна единице.

Состояние невосстанавливаемой системы можно представить n-разрядным двоичным числом $x_1 x_2 \ldots x_n$, каждый разряд которого отображает состояние работоспособности соответствующего элемента: $x_i = 1$ соответствует работоспособности элемента i ($i = 1, 2, \ldots, n$); $x_i = 0$ – отказу элемента.

Для системы, состоящей из независимых по надежности элементов, вероятность нахождения в конкретном состоянии определяется произведением вероятностей работоспособности элементов ($x_i = 1$) или отказа ($x_i = 0$) в соответствии с кодом двоичного числа. При известном критерии работоспособности системы, например заданном в виде кратчайших путей успешного функционирования, все ее состояния делятся на два подмножества – работоспособные и состояния отказа. Чтобы определить вероятность безотказной работы следует просуммировать все вероятности, относящиеся к состоянию работоспособности системы.

Рассмотренный метод подходит и для вычисления коэффициента готовности (оперативной готовности) восстанавливаемых систем.

При количестве элементов, не превышающем 15 – 16, метод прост в реализации, не требует сложных преобразований и вычислений. Результаты оценки показателей надежности полностью совпадают с аналогичными результатами, полученными на основе вероятностного или логико-вероятностного метода.

5.5. Вес элемента

Важным этапом проектирования технических систем является выбор рациональной структуры в целях обеспечения заданного уровня надежности. Для решения этой задачи необходимо иметь математический аппарат, позволяющий выявлять в системе "слабые" места, оценивать роль конкретных элементов в обеспечении надежности, выбирать оптимальный режим резервирования. Существенные компоненты такого аппарата можно построить на основе логико-вероятностного метода [8, 12]. В интересах оценки влияния надежности отдельных элементов на надежность системы предлагается применять следующие параметры: вес, значимость и вклад элемента в общую надежность объекта. При этом в качестве исходных показателей выступают: вероятность безотказной работы для невосстанавливаемых систем; коэффициент готовности (оперативной готовности) для восстанавливаемых систем.

На начальных стадиях создания систем в условиях отсутствия количественной информации о надежности элементов их влияние можно оценить с помощью такого показателя как вес элемента.

Вес элемента i характеризует прирост надежности системы, если в нее включить абсолютно надежный элемент ($x_i = 1$) по сравнению с отсутствием этого элемента ($x_i = 0$) при неизвестных значениях показателей надежности компонентов системы.

Вес вычисляется по ФРС, представленной в ортогональной форме. Под весом булевой функции понимается количество наборов (вершин n-мерного куба), на которых функция принимает единичное значение, т. е. вес равен количеству конституент единицы в представлении булевой функции.

Итак, пусть ФРС от n аргументов $y = y_1 + y_2 + \ \dots + y_k$ представлена в ортогональной дизъюнктивной нормальной форме. Каждый дизъюнкт определяет некоторое множество наборов переменных, на которых функция принимает единичное значение (эти наборы не пересекаются). Рассмотрим произвольный дизъюнкт:

если он содержит произведение n переменных или их отрицаний (ранг дизъюнкта r равен n), то такой дизъюнкт соответствует одной конституенте единицы, т. е. его вес равен $1 = 2^0 = 2^{n-n} = 2^{n-r}$;

если он содержит произведение $n - 1$ переменных или их отрицаний (ранг $r = n - 1$), то дизъюнкт соответствует двум наборам, на которых функция принимает единичное значение (отсутствующая переменная может принимать одно из двух значений). Вес дизъюнкта составит $2 = 2^1 = 2^{n-(n-1)} = 2^{n-r}$;

если он содержит произведение $r = n - 2$ переменных, то его вес $2^2 = 2^{n-(n-2)} = 2^{n-r}$ и т. д.

Таким образом, вес булевой функции $W(y) = \sum_{i=1}^{k} 2^{n-r(i)}$, где $r(i)$ – ранг i-го дизъюнкта. В дальнейшем будем рассматривать вес булевой функции относительно некоторой переменной x_i. Для вычисления этого веса объединим дизъюнкты ФРС в три группы:

множество дизъюнктов, содержащих переменную x_i без отрицания. Обозначим это множество как $D(x_i)$;

множество дизъюнктов, содержащих переменную с отрицанием (x_i^*). Обозначим это множество как $D(x_i^*)$;

множество дизъюнктов, не содержащих ни переменную x_i, ни ее отрицание x_i^*. Обозначим это множество как D_i.

Тогда вес функции по переменной x_i можно представить в виде

$$W_i(y) = \sum_{j \in D(x_i)} 2^{n-r(j)} + \sum_{j \in D(x_i^8)} 2^{n-r(j)} + \sum_{j \in D_i} 2^{n-r(j)} .$$

В качестве веса элемента выступает величина

$$G(x_i) = W_i(y \mid x_i = 1) - W_i(y \mid x_i = 0) =$$

$$= \sum_{j \in D(x_i)} 2^{n-[r(j)-1]} + 0 + \sum_{j \in D_i} 2^{n-r(j)} - 0 - \sum_{j \in D(x_i^8)} 2^{n-[r(j)-1]} - \sum_{j \in D_i} 2^{n-r(j)} =$$

$$= \sum_{j \in D(x_i)} 2^{n-[r(j)-1]} - \sum_{j \in D(x_i^8)} 2^{n-[r(j)-1]}.$$

При составлении соотношений учитывалось, что $1\cdot x = x$ (при замене переменной на единичное значение ранг конъюнкции понижается на единицу) и $0\cdot x = 0$ (при замене единичного значения переменной на его отрицание множитель становится равным нулю, дизъюнкт также будет равен нулю).

Вес $G(x_i)$ характеризует абсолютную важность элемента в системе. Но для систем с различным количеством компонентов этот параметр не позволяет сопоставлять вклад элемента в общую надежность. Следует перейти к относительной величине и измерять вес числом из диапазона от 0 до 1. Для этого следует провести нормирование веса. В качестве нормы целесообразно взять величину 2^n – количество всех наборов n-мерного логического пространства. Тогда относительный вес элемента

$$g(x_i)=\sum_{j\in D(x_i)}2^{-[r(j)-1]}-\sum_{j\in D(x_i^8)}2^{-[r(j)-1]}. \qquad (5.1)$$

Эта величина характеризует количество таких работоспособных состояний, в которых отказ данного элемента приводи к отказу системы (и наоборот, его восстановление приводит к восстановлению системы), среди всех состояний системы. Относительный вес не учитывает конкретные значения показателей надежности элемента, а характеризует только его роль в структуре системы.

Пример 5.1. Определить относительные веса элементов, применительно к ФРС, представленной в примере 5.3.

Решение. Функция работоспособности в ортогональной форме

$$y = x_1\, x_2 + x_1^*x_4\, x_5 + x_1\, x_2^*\, x_4\, x_5 + x_1\, x_2^*x_3\;\, x_4^*\, x_5 + x_1^*\, x_2\;\, x_3\, x_4\, x_5^*.$$

Ранги дизъюнктов с переменной x_1 равны 2, 4, 5 соответственно. Ранги дизъюнктов, содержащие отрицание этой же переменной: 3, 5. Тогда относительный вес первого элемента

$$g(x_1) = 2^{-(2-1)} + 2^{-(4-1)} + 2^{-(5-1)} - 2^{-(3-1)} - 2^{-(5-1)} = 0{,}375.$$

Можно убедиться, что относительные веса второго, четвертого и пятого элементов также равны 0,375.

Ранги дизъюнктов для переменной x_3: 5 и 5. В функции не содержится дизъюнктов с отрицанием этой переменной. Поэтому относительный вес третьего элемента

$$g(x_1) = 2^{-(5-1)} + 2^{-(5-1)} = 0{,}125.$$

Относительный вес третьего элемента меньше веса любого из остальных элементов. Следовательно, данный элемент оказывает менее весомое влияние на надежность системы, чем другие компоненты. При прочих равных условиях обеспечению высокой надежности этого элемента не следует уделять первостепенное внимание.

5.6. Значимость и вклад элемента в надежность системы

При наличии информации о надежности элементов их влияние на надежность системы можно оценить более конкретно, чем по показателю веса.

Значимость элемента характеризует потенциальный прирост надежности системы при включении в нее дополнительного абсолютно надежного элемента. Для расчета этого показателя необходимо знать показатели надежности всех элементов, за исключением вновь включаемого.

Значение показателя значимости z_i элемента определяется как частная производная от вероятности безотказной работы системы $P_С$ по вероятности безотказной работы элемента p_i

$$z_i = \frac{\partial P\lfloor y(x_1, x_2, \dots, x_n)\rfloor}{\partial p_i} = \frac{\partial P_С}{\partial p_i}.$$

Для монотонных функций работоспособности

$$z_i = P_С\,(x_i = 1) - P_С\,(x_i = 0) = \\ = P\{y(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \mid x_i = 1\} - P\{y(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \mid x_i = 0\}. \quad (5.2)$$

Здесь $P_С\,(x_i = 1)$ и $P_С\,(x_i = 0)$ – вероятности безотказной работы системы при абсолютно надежном и абсолютно ненадежном (отсутствующем) элементе x_i соответственно.

Показатель значимости позволяет выбрать место вновь включаемого в состав системы элемента по максимальному приращению надежности системы.

Вес элемента можно трактовать как частный случай его значимости при одинаковой надежности всех элементов, когда вероятность их безотказной работы равна 0,5.

Вклад элемента x_i в надежность системы определяется как произведение вероятности безотказной работы элемента p_i на его значимость $B_i = p_i z_i$. Очевидно, что $B_i \le z_i$. По аналогии с относительным весом целесообразно перейти к показателю удельного вклада

$$b_i = p_i z_i / \sum_{j=1}^{n} p_j z_j. \quad (5.3)$$

Этот показатель характеризует фактическое приращение надежности системы за счет включения элемента с конкретным значением вероятности безотказной работы.

Вес, значимость и вклад элемента в надежность системы имеют различную информационную сущность:

вес характеризует только место элемента в структуре системы. Этот показатель применяется на начальных этапах синтеза структуры, когда конкретные показатели надежности неизвестны;

значимость характеризует не только местонахождение элемента в составе системы, но и зависимость его потенциального влияния на надежность от вероятности безотказной работы все остальных элементов. Данный показатель применяют при поиске вариантов повышения надежности системы;

вклад характеризует местоположение элемента в системе и связь вероятности безотказной работы всех элементов, включая и данный элемент, с надежностью системы. Показатель вклада применяют при параметрической оптимизации надежности системы на завершающих этапах разработки проекта системы, когда известны, хотя бы приближенно, показатели надежности элементов.

Перечисленные показатели применяются и на стадии эксплуатации в интересах обоснования вариантов модернизации системы.