Тема № 2 **Модели и методы оценки показателей эффективности и качества СПОД**

Лекция № 3 **Модели и методы оценки показателей эффективности и качества СПОД (5 час.)**

Доцент кафедры ССиПД
Доцент, ктн Пантюхин О.И.

I. Учебные цели

1. Рассмотреть методологические основы оценки эффективности решений в операциях.

II. Воспитательные цели

1.Формировать у студентов ответственное отношение к освоению методологических основ оценки эффективности решений в операциях.

III. Расчет учебного времени

Содержание и порядок проведения лекции	Время, мин
Вступительная часть	5
Основная часть (текст лекции) Введение Учебные вопросы: 1. Теоретические методы и модели оценки эффективности и качества СПОД. 2. Оценка эффективности решений: уровни и подходы. 3. Организация процесса выработки решений на операцию. 4. Этапы процесса выработки решений. 5. Понятие функции полезности. 6. Модельный метод к определению функции полезности и оценки показателей. Аппроксимационный метод оценки качества 7. Экспертные способы определения функции полезности Заключение	215
Заключительная часть	5

IV. Литература

1. Анфилатов В.С., Авраменко В.С., Пантюхин О.И. Теоретические основы автоматизации управления войсками и связью. Часть1. Системные основы автоматизации управления войсками и связью: Учебное пособие. СПб.: ВАС, 2014. 312с. [1, с.187-254].

V. Учебно-материальное обеспечение

1. Наглядные пособия: презентация.
2. Технические средства обучения: ПЭВМ, видеопроектор.
3. Раздаточный материал: файл д/занятия.

VI. Текст лекции

Введение

Слова «эффект» и «эффективность» относятся сейчас к числу наиболее распространенных (как в научной работе, так и в повседневной жизни) слов и как всегда в подобных случаях имеют много толкований. Слово «эффект» происходит от латинского effectus, одно из значений которого – «результат действия», а слово «эффективность», производное от «эффекта» в обыденном употреблении означает результативность, действенность, производительность.

Проблема эффективности является одной из основных проблем, подлежащих решению в современном обществе, потому как затрагивает все сферы его жизни. Материальные потребности общества в целом, составляющих его институтов и индивидов буквально безграничны, а экономические ресурсы (средства производства товаров и услуг) ограничены и их необходимо использовать эффективно (получать из доступных ему ресурсов максимальное количество полезных товаров и услуг). Исследованием проблемы такого использования ресурсов, при котором достигается наибольшее удовлетворение потребностей общества (цель производства), занимается наука, получившая за рубежом название “экономикс”.

1. Теоретические методы и модели оценки эффективности и качества СПОД.

Оценку своих решений на житейском уровне люди производят с давних пор. Достаточно вспомнить известные пословицы: “Игра не стоит свеч”, “Овчинка выделки не стоит”, “За морем телушка полушка да рубль перевоз” и др. Но одно дело житейский подход к оценке решений, другое – научный. Когда говорят, что лучше быть здоровым и богатым, чем больным и бедным, с оценкой решений в этой шутке легко согласиться. Если решения переиначить (одно – быть богатым и больным, а другое - быть бедным и здоровым), их оценка уже не будет простой. Нужно разбираться с содержанием используемых в решениях понятий (“богатый”, “бедный”, “здоровый”, “больной”, “лучше”) и использовать определенный методический инструментарий – короче говоря, проводить оценку на научной основе, которую дает *теория эффективности (efficiency theory),* выступающая частью **теории исследования операций**.

Теория эффективности возникла вскоре после окончания второй мировой войны и получила быстрое развитие. В настоящее время ее уже можно считать сформировавшейся научной дисциплиной, имеющей свой объект и свой предмет исследования, а также многочисленные и разнообразные приложения. В качестве объекта исследования выступает общее свойство всех систем с управлением – их приспособленность к выполнению операций, в качестве предмета – закономерности процесса оценки этого свойства.

Каждая операция связывается с определенной целью как идеальным предвосхищением в сознании ЛПР того результата, на достижение которого направлены действия системы с управлением. Очевидно, что требуемый (желаемый) и реально достигаемый (ожидаемый) результаты могут соотноситься между собой (соответствовать друг другу) по-разному. Все определяется тем, насколько система приспособлена (пригодна) к выполнению операции. Это свойство соответствия и является свойством эффективности системы. *Эффективность системы* – свойство системы с управлением, определяющее соответствие исхода реализуемой ею операции поставленной цели.

Свойство эффективности проявляется только при функционировании систем с управлением и по существу представляет собой качество их функционирования. Исходя из этого правильней говорить об эффективности не самой системы, а выполняемой ею операции (совокупности операций). *Эффективность операции* – свойство операции, определяющее соответствие ее исхода поставленной цели.

Так как ожидаемый или достигаемый результат выполнения (исход) операции определяется принимаемым (принятым) решением, то можно говорить (в переносном смысле) и об эффективности решения. *Эффективность решения* – свойство решения на операцию, определяющее соответствие ее исхода поставленной цели.

Из всех свойств, присущих решению, свойство эффективности следует считать главным, дающим основание судить о качестве решения как такового и осуществлять по нему сравнение решений между собой.

Таким образом, термин “эффективность” правомочно связывать и с системой, и с операцией, и с решением. Образуемые при этом понятия равносильны – в конечном счете каждое из них отражает соответствие исхода операции поставленной цели.

Следует отметить различия между понятиями качества и эффективности:

1) Качество присуще всем системам, эффективность – только системам с управлением;
2) Качество связывается с назначением системы, эффективность – с целью операции, выполняемой системой;
3) Наборы свойств, используемых при оценке качества и эффективности одной системы, могут не совпадать;
4) Система определенного уровня качества в разных операциях может иметь разные оценки эффективности.

Центральным вопросом в теории эффективности является определение меры для ее оценки - критерия (от греческого kriterion - мерило оценки, средство для суждения; в словаре русского языка - признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо), предназначенного для того, чтобы выявлять предпочтения на решениях и тем самым обеспечивать обоснованный выбор решения.

Так как эффективность решения определяет степень соответствия исхода операции поставленной цели, то, очевидно, *критерий эффективности решений* $U(\bar{x}_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ должен прямо или косвенно выражаться через показатель исхода операции – быть функцией (функционалом) показателя исходов операции $\bar{r}_k$, $k=1,2,\dots,l$

$$U(\bar{x}_i) = \Omega(\bar{r}_k).$$

Математическое выражение критерия эффективности решений называют также *целевой функцией*, поскольку ее экстремизация является отображением цели операции. В отдельных случаях показатель исхода операции может прямо выступать критерием эффективности.

Критерии эффективности могут быть скалярными и векторными. По сравнению со скалярным критерием векторный критерий позволяет более полно оценивать решение. Однако оценка и выбор решений по векторному критерию эффективности являются более сложными. Компоненты векторного критерия эффективности принято называть *показателями эффективности*.

Для формирования критерия эффективности решений на операцию необходимо:
1) определить поставленную цель,
2) найти множества управляемых и неуправляемых характеристик для операции,
3) определить показатели исходов операции,
4) установить функциональную зависимость $\Omega(\bar{r}_k)$.

Формирование критерия эффективности решений – центральный, самый ответственный момент выработки решения на операцию. Считается, что гораздо лучше найти неоптимальное решение по правильно выбранному критерию, чем оптимальное решение по неправильно выбранному критерию. Процесс формирования критерия эффективности является в значительной мере субъективным, творческим, требующим в каждой операции индивидуального подхода. Наибольшие трудности возникают с его реализацией в операциях, реализуемых иерархическими системами. При формировании критериев эффективности решений следует руководствоваться теми же принципиальными требованиями, что и при выборе показателей исхода операции.

2. Оценка эффективности решений: уровни и подходы.

Оценка эффективности решений может осуществляться на качественном и количественном уровнях. Качественную оценку эффективности решений выполняют, когда для выбора лучшего решения не требуется определять, на сколько сравниваемые решения отличаются друг от друга. Обычно она предшествует количественной оценке и помогает установить целесообразность ее проведения.

В настоящее время сложились два методологических подхода к оценке эффективности: внешняя оценка и внутренняя оценка.

При *внешней оценке* решение системы (операции) оценивается с точки зрения решения суперсистемы (суперbegin операции), элементом которого оно выступает. Производится анализ функционирования суперсистемы и системы, определяются показатели исхода суперoперации и операции, устанавливаются функциональные связи между ними. Критерий эффективности решения выражается некоторым функционалом на множестве установленных функциональных связей.

При *внутренней оценке* решение системы оценивается как самостоятельное (без связи с решением суперсистемы). Определяется показатель исхода выполняемой системой операции. Критерий эффективности решения представляется в виде некоторой функции (функционала) от показателя исхода операции, выполняемой системой.

Если критерий эффективности системы и критерий эффективности суперсистемы согласовываются, то оценки решений, получаемые при использовании первого и второго подходов, при сравнении по предпочтительности будут совпадать.

Эффективность решений оценивают перед выполнением операции - на этапе планирования (априорная оценка) или/и после ее выполнения (апостериорная оценка). Априорная оценка эффективности решений носит характер прогноза.

3. Организация процесса выработки решений на операцию

Выработка решений осуществляется группой исследования операций (ГИО) в следующем составе: лицо, принимающее решение, эксперты, операционалисты.

Лицо, принимающее решение (ЛПР) – должностное лицо (группа лиц) органа управления, имеющее цель, которая предопределяет операцию и поиск решения для нее, наделенное необходимыми полномочиями и несущее ответственность за принятое решение. В функции ЛПР входит предоставление информации об условиях проведения операции, выделение множества допустимых решений и формулирование принципов оптимальности.

Эксперты – специалисты, достаточно компетентные по исследуемому типу операции. На них возлагается оценка условий проведения операции и альтернативных решений. Они не несут прямой ответственности за принятое решение, но отвечают за свои оценки и рекомендации.

Операционалисты – специалисты по исследованию операций, призванные организовывать действия ЛПР и экспертов и осуществлять информационно-аналитическую работу в интересах выработки решения (выбор или разработку моделей, проведение исследований на моделях, формирование процедуры выбора решения).

Процесс выработки решений организуется в виде совокупности этапов, имеющих прямые и обратные связи. Наличие обратных связей отражает итеративный характер процесса. Итеративность обусловлена необходимостью уточнения и корректировки данных после выполнения того или иного этапа. Этапы могут выполняться неформальным путем и с использованием формальных средств. При выполнении этапов решаются такие общие задачи информационной деятельности как поиск, обобщение, распознавание, классификация, упорядочение и выбор.

4.Процесс выработки решений в системах управления строится с выделением следующих этапов (рисунок 1):

Рисунок 1 - Этапы выработки решения

1) Анализ условий проведения операции,
2) Построение модели функционирования системы при проведении операции,
3) Выбор оптимального решения в рамках построенной модели,
4) Формирование принимаемого решения.

Анализ условий проведения операции. К условиям проведения операции относятся:

- цель (множество значений управляемых и неуправляемых характеристик, определяющих состояния системы и среды, которые должны быть достигнуты),
- множество состояний обстановки (множество векторов неуправляемых характеристик $\boldsymbol{Y = (y_1, y_2, \dots , y_n)}$),
- множество допустимых решений $\boldsymbol{X = (x_1, x_2, \dots , x_m)}$.

При анализе данных условий основное внимание уделяется тому, чтобы уяснить до конца цель. Нужно добиваться максимально возможной определенности в понимании цели, так как этот момент является главенствующим для принятия правильного решения. Цель проверяется по критериям акронима (от гр. akros - высокий и onyma – имя) SMART:

- Specific - определенная. Цель "немедленно нажимать кнопку" не является четкой, альтернативой ей будет "нажимать на кнопку в течение 1-2 секунд";
- Measurable - измеримая. Цель должна допускать либо оговаривать возможность измерения/проверки результата;
- Achieveable - достижимая. Цель должна быть выполнимой для конкретного исполнителя;
- Resourced – ресурсообеспеченная. На достижение цели должен быть выделен достаточный объем ресурсов;
- Time-bounded - ограниченная во времени. Если временные рамки достижения цели не определены - цели нет цели (есть мечтания).

Затем выявляются значения управляемых и неуправляемых характеристик на начало операции.

Все допустимые решения делятся на два класса:

- решения с различиями в содержании (типы решений),
- решения с различиями в значениях параметров (экземпляры решений).

Для каждого типа управляемых объектов число типов решений, как правило, невелико (исчисляется единицами). К примеру, для восстановления участка трассы связи могут использоваться следующие типы решений:

1) перевести участок трассы связи на резервный канал,
2) восстановить участок трассы связи,
3) перехватить канал передачи на участке трассы связи,
4) организовать новый участок трассы связи.

Напротив, число экземпляров решений может быть весьма значительным. Так, решение “перехватить канал передачи на участке трассы связи” варьируется в пределах числа используемых каналов передачи.

Сначала находятся возможные типы решений, а в рамках выбранных типов – экземпляры решений.

В иерархических системах мощность множества решений определяется мощностью прямого произведения альтернатив для управляемых объектов нижних уровней иерархии.

Построение модели функционирования системы при проведении операции. Для оценки решений по всем состояниям обстановки нужен проигрыш операции. Сделать его на реальной системе и в реальной среде – дело трудное, а в большинстве своем невозможное. Поэтому прибегают к использованию упрощенного аналога реальной системы в среде – строят ее модель, которая описывает взаимосвязи между характеристиками системы и влияние управляемых характеристик на оценку решения. Процесс построения модели является весьма трудоемким и требует четкого понимания особенностей рассматриваемой системы. С помощью моделирования получают оценки решений и выбирают лучшее из них.

Выбор оптимального решения в рамках построенной модели. Выбор решения предполагает наличие двух компонентов: множества допустимых решений (предмета выбора) и некоторой совокупности правил упорядочения этих решений по предпочтительности (мотивов выбора). В ряде случаев формализовать процесс выбора оптимального решения не удается. Тогда ограничиваются получением нескольких приближенных решений.

Формирование принимаемого решения. Полученное при моделировании оптимальное или близкое к нему решение является таковым только в рамках построенной формальной модели и должно рассматриваться как рекомендуемый вариант, который требует естественно осмысления и зачастую последующей корректировки. В него могут вноситься необходимые изменения, соответствующие неподдающимся формализации факторам (психологическим, моральным и др.) и введенным при построении модели ограничениям. Модифицированное таким образом решение после согласования и утверждения принимается для реализации. Само принятие решения – это волевой акт ЛПР, выступающий проявлением власти и ответственности за его последствия. В этом акте очень велика роль субъективных факторов.

Не исключается, что полученное при моделировании решение будет полностью отвергнуто ЛПР и тогда придется серьезно дорабатывать модель.

5. Понятие функции полезности

Прямой переход от показателей исходов операции к критерию эффективности решений во многих случаях затруднителен. Предпочтения на решениях зависят от предпочтений на исходах операции и, следовательно, необходимо их знать. Показатели, определяющие исходы операции, не всегда позволяют сразу сказать, какой из исходов лучше, а какой хуже. Пусть, например, известны два исхода встречного боя с показателями в виде относительных потерь каждой стороны: $\bar{r}_1$ = (0,3; 0,4) и $\bar{r}_2$ = (0,1; 0,2). Выявить формально отношение предпочтения или безразличия на этих исходах непосредственным сравнением значений показателей затруднительно. Еще боле сложной становится оценка, когда показатели исходов операции имеют большую размерность, разный физический смысл и разные шкалы измерений. Пример такого показателя для оценки функционирования направления связи: $\bar{r}$ = (пропускная способность, коэффициент оперативной готовности, вероятность вскрытия, коэффициент использования каналов, численность обслуживающего персонала).

Было бы очень удобно иметь для оценки исходов операции какую-то единую меру – что-то вроде денег. Хотя деньги тоже не выступают универсальной мерой ценности - через них не все можно оценивать (например, репутацию, настроение, моральное состояние людей). Кроме того, они обеспечивают измерение по равномерной шкале (100 рублей в пять раз ценнее 20 рублей). Вместе с тем известно, что иногда ценность денежной суммы возрастает не пропорционально ее величине.

Поскольку в нашей практике нет универсальной меры, обладающей физическим смыслом и позволяющей соизмерять исходы любых операций по неравномерной шкале, а потребность в ней существует, остается одно – ввести какую-то искусственную меру. Такой мерой на сегодня выступает *полезность исхода операции*. Идея полезности возникла по меньшей мере в 17 веке. Вопросы обоснования, определения и использования этой меры исследуются в рамках *теории полезности*. Подобно другим теориям она включает:

1) множество определений и аксиом, которые обеспечивают существование функции полезности с определенными свойствами;

2) интерпретации каждого из формальных элементов, связывающие их с действительными альтернативами и поведением человека.

В зависимости от даваемой интерпретации теория полезности определяется либо как предписывающая либо как описательная. В случае предписывающей теории ее логические следствия позволяют подсказать человеку, как действовать при выборе решения. Описательная теория ограничивается описанием возможного поведения человека в сложившейся ситуации.

Считается, что никакой исход операции не обладает полезностью сам по себе – полезности исходов могут выявляться только через лицо, принимающее решение в виде последовательности предпочтений. Большинство людей использует сравнительно простой подход к оценке исходов операции – упорядочение их по возрастанию полезности относительно цели операции (от наименее полезных к наиболее полезным исходам). Свое отношение к исходам люди могут выразить и количественно, приписав каждому исходу некоторое число, определяющее его относительную предпочтительность. Например, наименее полезный исход может быть отображен числом 1, следующий за ним – числом 3 и т.д. до наиболее полезного исхода.

Так вводится понятие полезности исхода операции (вообще любого объекта) при оценке его предпочтительности.

Полезность исхода операции – это действительное число, приписываемое исходу операции и характеризующее его предпочтительность по сравнению с другими исходами относительно цели операции.

Зная возможные исходы с их полезностями, можно построить функцию полезности, которая дает приемлемую основу для оценки, сравнения и выбора решений.

Функция полезности – это числовая ограниченная функция $F(\bar{r}_k)$, *определенная на множестве исходов* $R=\{\bar{r}_k\}$, $k=1,2,\ldots,l$ *так, что* $F(\bar{r}_i)>F(\bar{r}_j)$, $\bar{r}_i, \bar{r}_j \in R$, $i\neq j$, *когда исход* $\bar{r}_i$ *предпочтительней исхода* ($\bar{r}_i \succ \bar{r}_j$), *и* $F(\bar{r}_i) = F(\bar{r}_j)$, *когда исходы* $\bar{r}_i$ *и* $\bar{r}_j$ *неразличимы - нельзя отдать предпочтения ни тому, ни другому исходу* ($\bar{r}_i \sim \bar{r}_j$).

С математической точки зрения функцию полезности можно рассматривать как отображение упорядоченного множества исходов *R* во множество действительных чисел (рисунок 1).

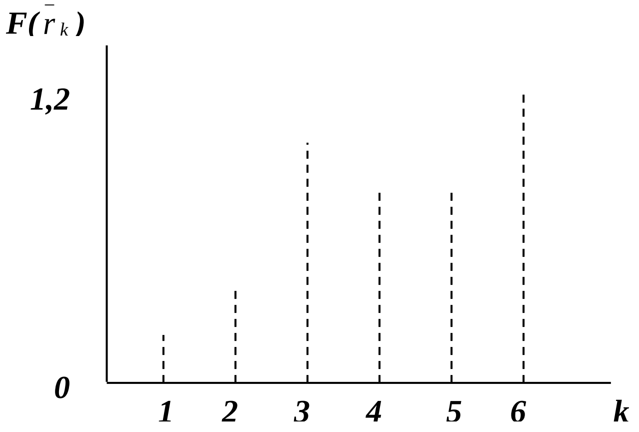


Рисунок 1 - К определению функции полезности

Доказывается, что при вполне естественных допущениях относительно поведения лица, принимающего решение, такая функция существует. Например, допущениями, вводимыми применительно к выбору решений без риска в статической среде, являются:

1) *Допущение о существовании множества исходов операции* – существует непустое множество различных и полностью определенных исходов $R=\{\bar{r}_k\}$, $k=\overline{1,l}$;

2) *Допущение об отношениях предпочтения на исходах операции* – для всех $\bar{r}_i$ и $\bar{r}_j$ либо $\bar{r}_i \succ \bar{r}_j$, либо $\bar{r}_i \prec \bar{r}_j$, либо $r_i \sim r_j$;

3) *Допущение об измеримости исходов операции* – каждому исходу операции $\bar{r}_k$ может быть поставлено в соответствие неотрицательное действительное число p_k, рассматриваемое как мера относительной полезности рассматриваемого исхода;

4) *Допущение о зависимости предпочтений от времени* – с течением времени предпочтения остаются постоянными;

5) *Допущение о полезности составных исходов* - полезность составного (векторного) исхода может быть определена из совокупности полезностей его составляющих;

6) *Допущение об определении полезности разными людьми* – полезности, определяемые разными людьми для одного и того же исхода, не должны изменять его предпочтительность относительно других исходов.

Из данных предположений относительно полезности вытекает ряд проверенных эмпирически следствий:

1) *Следствие транзитивности отношений предпочтения исходов операции.* Если исход $\bar{r}_i$ предпочтительней исхода $\bar{r}_j$ $(\bar{r}_i \succ \bar{r}_j)$, а исход $\bar{r}_j$ предпочтительней исхода $\bar{r}_k$ $(\bar{r}_j \succ \bar{r}_k)$, то исход $\bar{r}_i$ тоже предпочтительней исхода $\bar{r}_k$ $(\bar{r}_i \succ \bar{r}_k)$**.** Аналогично, если исход $\bar{r}_i$ эквивалентен исходу $\bar{r}_j$ $(\bar{r}_i \sim \bar{r}_j)$, а исход $\bar{r}_j$ эквивалентен исходу $\bar{r}_k$ $(\bar{r}_j \sim \bar{r}_k)$, то исход $\bar{r}_i$ тоже эквивалентен исходу $\bar{r}_k$ $(\bar{r}_i \sim \bar{r}_k)$;

2) *Следствие коммутативности отношений предпочтения исходов операции.* Предпочтение исхода $\bar{r}_i$ исходу $\bar{r}_j$ не зависит от порядка, в котором они названы и представлены;

3) *Следствие предпочтительности смесей исходов*. Под смесью исходов $\bar{r}_i$ и $\bar{r}_j$ понимается исход, заключающийся в появлении одного из них с некоторой вероятностью *p*, например, исхода $\bar{r}_i$ с вероятностью p_i, а исхода $\bar{r}_j$ с дополнительной вероятностью

$p_j = 1- p_i$**.** Если исход $\bar{r}_i$ предпочтительней исхода $\bar{r}_j$ и, кроме того, существует исход $\bar{r}_k$, который не оценивается относительно исходов $\bar{r}_i$ и $\bar{r}_j$, то смесь исходов $\bar{r}_i$ и $\bar{r}_k$ предпочтительней смеси исходов $\bar{r}_j$ и $\bar{r}_k$**.**

Для функции полезности справедливо следующее утверждение. Пусть на множестве исходов операции $R=\{\bar{r}_k\}, k=1,2,...,l$ задана функция полезности $F(\bar{r}_k)$. Если *a* и *b* – произвольные постоянные величины такие, что $a > 0$**,** а *b* – действительное число, то функция $F`(\bar{r}_k) = aF(\bar{r}_k)+b$ является также функцией полезности. Из этого утверждения следует, что любое положительное линейное преобразование функции полезности не меняет отношения предпочтительности на исходах операции $R=\{\bar{r}_k\}, k=1,2,...,l$. Так как функция полезности ограничена, то всегда можно подобрать такие коэффициенты *a* и *b*, с помощью которых область ее изменения приведется к интервалу *[0,1]*.

Таким образом, функция полезности не является единственной. Причина этого в том, что отсутствует соглашение о нулевой полезности, единице полезности и шкале полезности (можно произвольно выбирать нуль, единицу изменения и шкалу полезности исходов операции).

Важно подчеркнуть, что функция полезности определяет лишь относительную, а не абсолютную предпочтительность исходов операции. Так, если $F`(\bar{r}_i) = 2$, а $F`(\bar{r}_j) = 1$, то не следует считать, что исход $\bar{r}_i$ <u>всегда</u> в два раза (на единицу) предпочтительней исхода $\bar{r}_j$. Стоит произвести линейное преобразование функции полезности и полезностные оценки исходов операции $\bar{r}_i$ и $\bar{r}_j$ будут уже другими.

Итак, полезность как мера предпочтительности исходов операции является <u>количественной</u> и <u>относительной</u>.

В зависимости от типа значений показателей исходов операции функция полезности может быт либо *непрерывной*, либо *дискретной*. Функцию полезности называют *прямой*, если с увеличением значения показателя исхода операции значение его полезности растет, и *обратной*, если убывает.

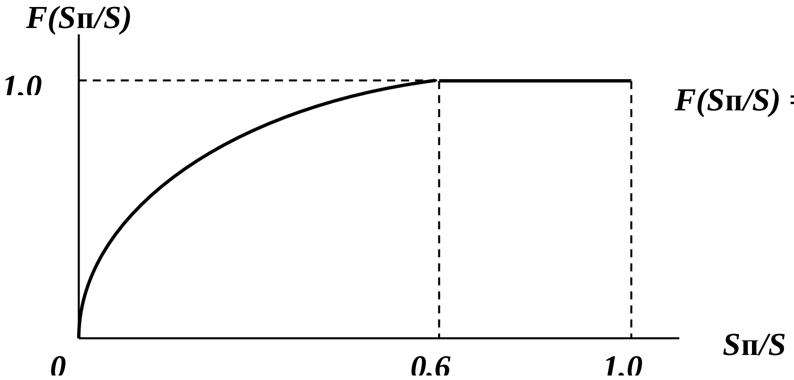
В число характеристик функции полезности входит также ее мерность, определяемая размерностью показателя исходов операции. Скалярному показателю соответствует одномерная функция полезности, векторному показателю с двумя компонентами – двумерная и т.д.

Рассмотрим примеры функции полезности для некоторых операций.

Пример 1. Нанесение огневого удара по площадному объекту противника. Считается, что при поражении 60% площади, занимаемой объектом, противник несет потери, не позволяющие ему оказывать сопротивление. Показателем исхода операции выступает доля пораженной площади Sп/S. Функция полезности на множестве исходов операции непрерывная, прямая, одномерная, имеющая вид кривой насыщения (рисунок 2).

В области задания функции полезности выделяются две зоны:

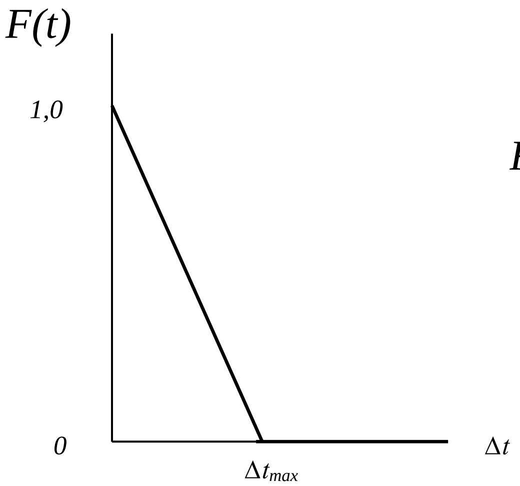
- зона зависимых значений *F(Sn/S) - 0≤ Sn/S<0,6;*
- зона независимых значений *F(Sn/S) - Sn/S ≥0,6*.



$$F(Sп/S) = \begin{cases} 0, & Sп/S=0; \\ 0<a<1, & 0<Sп/S<0{,}6; \\ 1, & Sп/S\geq 0{,}6. \end{cases}$$

Рисунок 2 - Пример одномерной непрерывной прямой полезности

Пример 2. Выход корреспондента радиосети глубинной разведки на связь. Корреспондент должен выходить на связь в момент времени t_0. Исход операции характеризуется отклонением времени выхода Δ ***t***. Преждевременный выход связан ($\Delta\ t<0$) с обнаружением и постановкой помех. Задержка с выходом ($\Delta\ t>0$) снижает вероятность установления связи. Оба вида отклонений равнозначны по последствиям. Из практики известно максимально допустимое отклонение времени выхода $|\Delta\ t_{max}|$. Функция полезности имеет вид ломаной линии из двух отрезков (рисунок 3).



$$F(t)= \begin{cases} 1\geq a>0, & 0\leq t < \Delta t_{max} \\ 0, & \Delta t\geq t_{max} \end{cases}$$

Рисунок 3 - Пример одномерной непрерывной обратной функции полезности

Первый отрезок соответствует допустимым значениям *t* и отражает обратную зависимость *F(t),* второй – недопустимым значениям *t*.

Пример 3. Передача направлением связи сообщений двух категорий срочности. Показатель исхода операции векторный – его компонентами выступают относительная пропускная способность по сообщениям первой категории Q_1 и относительная пропускная способность по сообщениям второй категории Q_2. Известны минимально требуемые значения пропускной способности для сообщений каждой категории - Q_{1min} и $Q_{2\,min}$. Функция полезности двумерная и представляется в виде усеченной с двух сторон палатки (рисунок 4).

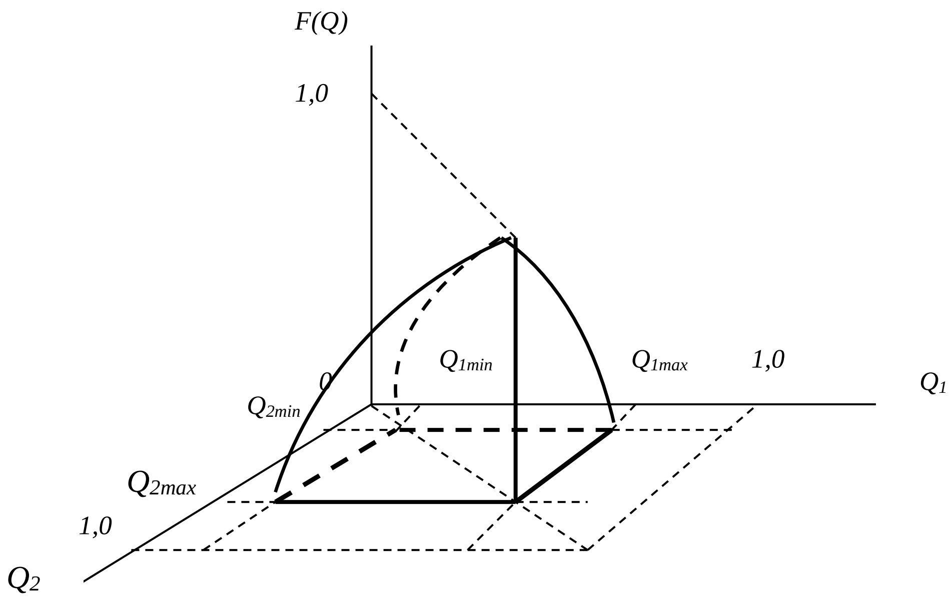


Рисунок 4 - Пример двумерной непрерывной прямой функции полезности

Функция полезности является универсальным и весьма удобным средством математического выражения предпочтений на множестве исходов операций.

5.2. Определение функции полезности

Чтобы определить функцию полезности, требуется:

- выбрать показатель исхода операции $\bar{r}$ =(r_1, r_2, …, r_s);
- установить множество исходов операции R= { $\bar{r}_k$ }, k=1,2,…,l;
- найти полезности исходов операции $F(\bar{r}_k)$, k=1,2,…,l.

Определение функции полезности как меры оценки исхода той или иной операции представляет собой достаточно сложную задачу, точных методов решения которой пока не найдено, хотя в этом направлении и прилагаются значительные усилия. Для определения функции полезности используются следующие подходы: модельный, экспертный и аппроксимационный.

Модельный метод к определению функции полезности и оценки показателей.

Модельный подход. При данном подходе моделируется супероперация для операции, на исходах которой требуется найти функцию полезности. Показатель исхода исследуемой операции будет выступать одним из управляемых параметров, описывающих супер継операцию. В результате моделирования находится зависимость критерия эффективности суперoперации от данного управляемого параметра, которая и принимается в качестве функции полезности для исходов исследуемой операции.

Так, чтобы найти значения функции полезности на исходах операции по передаче команд в сети управления радиопеленгаторными постами, необходимо рассмотреть всю операцию пеленгования радиоэлектронных средств. Если удастся определить, как влияет время передачи команд на вероятность определения координат пеленгуемой радиостанции, то полученная функция будет функцией полезности.

Достоинством способов, основанных на моделировании суперооперации, является относительно высокая объективность. Субъективные моменты в определение функции полезности хотя и вносятся, но не прямо, как при других способах, а косвенным образом (через построение модели суперооперации). Очевиден и основной недостаток – трудности реализации. Переход к операциям более высокого уровня естественно сопровождается повышением сложности их анализа. Поэтому для оценки решений в условиях дефицита времени моделирование суперооперации не может быть рекомендовано. К нему прибегают, главным образом, при предварительной оценке операций, и особенно тех, которые имеют вспомогательное значение. К таким операциям относятся все операции по обеспечению боевых действий: разведка, охранение, маскировка и т.п.

Экспертные методы оценки качества

Экспертный подход. Данный подход предполагает привлечение экспертов. Эксперт (от лат. expert – опытный) - это специалист, обладающий необходимыми знаниями, опытом, интуицией и беспристрастностью для представления объективных заключений об исходах исследуемой операции. *Процесс определения экспертами некоторых характеристик (оценок) объектов в интересах принятия решения называется экспертизой.* По своему существу экспертиза — это процедура измерения, в которой в качестве приборов выступают люди. Иногда задачей эксперта является не только оценка имеющихся объектов, но и построение самих объектов. Получаемая в результате экспертизы оценка может быть как скалярной, так и векторной.

Известно, что знания и практический опыт людей трудно заменить дедуктивными построениями формального характера. В силу этого способам на экспертной основе присущи определенные преимущества по сравнению с другими способами и они усиленно развиваются.

Принципиально любой экспертный способ представляет собой систему непротиворечивых правил, позволяющих использовать мнения экспертов для оценки предпочтительности исходов операции. При любом способе выполнения экспертизы в ней можно выделить следующие основные моменты:

- упорядочение множества исходов операции по их предпочтительности

$(\bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \ldots > \bar{r}_l)$;

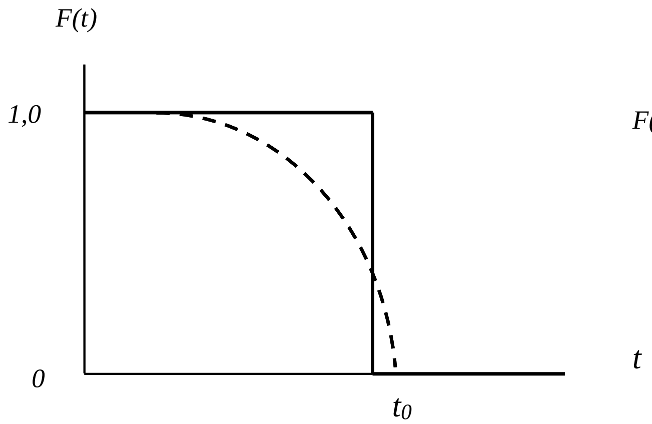
- определение полезности каждого исхода операции $F(\bar{r}_k)$, $k=1,2,\ldots,l$;
- проверка полученных оценок на непротиворечивость с оценками предпочтительности исходов операции;
- устранение противоречий в оценках путем корректировки либо ряда упорядоченности исходов операции, либо ряда их полезностей, либо того и другого вместе.

Аппроксимационный метод оценки качества.

Апроксимационный подход. Существо данного подхода заключается в следующем. Исходя из рассмотрения исходов конкретной операции определяются характерные точки функции полезности, например, экстремумы, перегибы, разрывы и т.п., а неизвестные значения между ними задаются с помощью одной или разных зависимостей. Вид зависимости для каждой пары точек выбирается на основании имеющихся сведений и качественных соображений о полезностях соответствующего подмножества исходов операции. В качестве первых приближений функции полезности могут использоваться линейное представление и одноступенчатое представление (которому соответствует два значения – минимальное и максимальное). Из более сложных видов аппроксимации, используемых на практике, следует отметить такие как ломаная линия, экспонента, косинусоида и некоторые другие.

Приведем несколько иллюстративных примеров определения функции полезности с помощью аппроксимации.

Пример1. Передача информации направлением связи. Данная операция является составной, представляя собой совокупность операций по передаче отдельных сообщений. Передаваемые сообщения могут иметь различный приоритет. Для экспрессоценки работы направления связи допустимо ограничиться рассмотрением только передачи сообщений высшего приоритета, к которой предъявляются самые высокие требования. Показатель исхода операции – время передачи *t*. Реальная функция полезности *F(t)* будет представляться какой- то непрерывной убывающей монотонной функцией. Если принять, что направление связи справляется с передачей сообщений, когда сообщения высшего приоритета передаются за время меньше заданной величины t_0 и не справляется – в противном случае, то функцию полезности можно аппроксимировать с помощью одной ступеньки (рисунок 5). Характерными точками для нее являются $t=0$ и $t=t_o$.



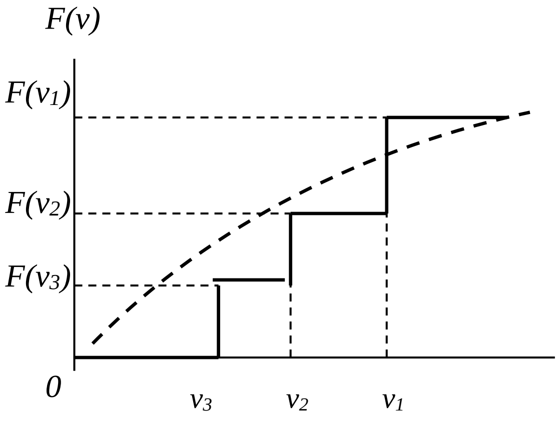
$$F(t)=\begin{cases} 1, & t \le t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

Рисунок 5 - Пример одноступенчатой аппроксимации функции полезности

Пример 2. Проверка квалификации радиотелеграфиста. Квалификация радиотелеграфистов проверяется исходя из скорости радиообмена в соответствии с установленными нормативами классности:

- 1 класс – передача и прием 9 телеграмм определенного содержания общим объемом 1800 слов/час,
- 2 класс - передача и прием 8 телеграмм определенного содержания общим объемом 1600 слов/час,
- 3 класс - передача и прием 6 телеграмм определенного содержания общим объемом 1200 слов/час.

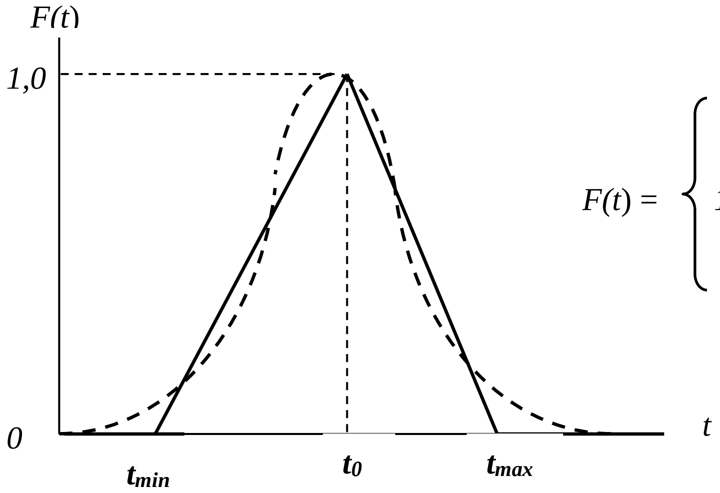
Операция заключается в проведении контрольного радиообмена. Показателем исхода операции может служить скорость радиообмена *v* (число переданных и принятых слов за один час работы). При анализе исходов операции легко выделяются четыре характерные точки, соответствующие нулевому и нормативным значениям скорости радиообмена. Используя для определения неизвестных значений функции полезности между этими точками линейную аппроксимацию, получим трех ступенчатое представление *F(v)*. На самом деле функция полезности должна иметь вид монотонной кривой (рисунок 6).



$$F(v)=\begin{cases} 0, & 0 \le v < v_3, \\ F(v_3), & v_3 \le v < v_2, \\ F(v_2), & v_2 \le v < v_1, \\ F(v_1), & v_1 \le v \end{cases}$$

Рисунок 6 - Пример многоступенчатой аппроксимации функция полезности (по точкам перегибов)

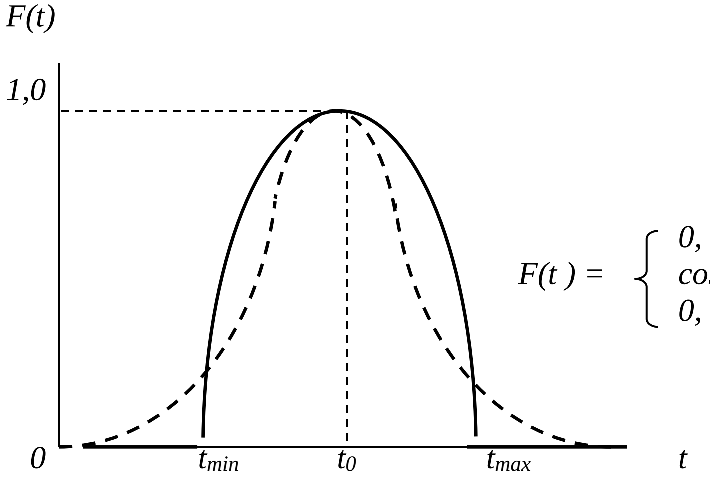
Пример 3. Подготовка ракетного комплекса к пуску ракет. Исходы данной операции характеризуются временем доклада о приведении комплекса в состояние готовности к пуску t. Установленное время пуска - t_0. Готовность ранее установленного срока может привести к ошибкам в расчетах в связи с возможными изменениями метеоусловий. При задержке с готовностью растет вероятность того, что цель изменит свое местоположение. Минимально и максимально допустимые значения времени готовности равны соответственно t_{min} и t_{max}. К характерным точкам функции полезности следует отнести точки, соответствующие нулевому, минимальному, требуемому и максимальному значениям времени готовности t. Полагая изменение полезности исходов операции с другими значениями t линейным, получим функцию полезности в виде ломаной линии из четырех отрезков (рисунок 7).



$$F(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t_{min}; \\ 0<a<1, & t_{min} < t < t_0; \\ 1, & t = t_0; \\ 0<a<1, & t_0 < t > t_{max}; \\ 0, & t > t_{max} \end{cases}$$

Рисунок 7 - Пример треугольной аппроксимации функция полезности (по точкам экстремумов)

Два крайних отрезка соответствуют недопустимым значениям t, два средних – допустимым (первый из них отражает прямую зависимость $F(t)$, а второй - обратную). Аппроксимация значений $F(t)$ в области задания $[t_{min}, t_{max}]$ отрезком косинусоиды (рисунок 8) может приблизить $F(t)$ к реальному виду.



$$F(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t_{min}; \\ \cos(t - t_0), & t_{min} < t < t_{max}; \\ 0, & t \ge t_{max} \end{cases}$$

Рисунок 8 - Пример косинусоидальной аппроксимации функция полезности (по точкам экстремумов)

7. Экспертные способы определения функции полезности

7.1. Классификация экспертных способов определения функции полезности

Экспертный подход к определению функции полезности представлен большим числом различных способов (таблица 1).

Наиболее просто реализуется индивидуальная экспертиза. Но у нее имеется серьезный недостаток – субъективизм получаемых результатов. Усложнение объекта экспертизы вынуждает использовать групповую экспертизу. При этом обычно предполагается, что групповые экспертные оценки надежнее оценок отдельного эксперта. В некоторых теоретических исследованиях отмечается, что данное предположение не является очевидным.

Сильными сторонами групповой экспертизы являются:

а) используется больший объем знаний и большее разнообразие подходов к получению экспертных оценок;

Таблица 1 – Классификация экспертных способов

<table>
<tr><th>Номер</th><th>Название признака классификации</th><th colspan="2">Название классификационной группировки</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Число экспертов</td><td colspan="2">Индивидуальные</td></tr>
<tr><td colspan="2">Групповые</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Степень учета квалификации экспертов</td><td colspan="2">Без учета квалификации экспертов</td></tr>
<tr><td colspan="2">С учетом квалификации экспертов</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">Способ оценки квалификации экспертов</td><td colspan="2">С само – и взаимооценками экспертов</td></tr>
<tr><td colspan="2">С привлечением метаэксперта</td></tr>
<tr><td colspan="2">С тестированием экспертов</td></tr>
<tr><td colspan="2">С комбинированным оцениванием экспертов</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">Число туров</td><td colspan="2">Однотуровые</td></tr>
<tr><td colspan="2">Многотуровые</td></tr>
<tr><td rowspan="5">5</td><td rowspan="5">Вид общения экспертов</td><td colspan="2">Без общения</td></tr>
<tr><td rowspan="2">С заочным общением</td><td>анонимно</td></tr>
<tr><td>открыто</td></tr>
<tr><td rowspan="2">С очным общением</td><td>при ограничениях</td></tr>
<tr><td>без ограничений</td></tr>
<tr><td rowspan="7">6</td><td rowspan="7">Способ получения экспертной информации</td><td rowspan="3">С совещанием</td><td>комиссией (дискуссией)</td></tr>
<tr><td>мозговым штурмом</td></tr>
<tr><td>“судом”</td></tr>
<tr><td colspan="2">С интервьюированием</td></tr>
<tr><td colspan="2">С анкетированием</td></tr>
<tr><td colspan="2">С деловой игрой</td></tr>
<tr><td colspan="2">С разработкой сценария</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td rowspan="2">Форма экспертных оценок</td><td colspan="2">С качественными оценками</td></tr>
<tr><td colspan="2">С количественными оценками</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">Тип шкалы оценок</td><td colspan="2">С порядковой шкалой оценок</td></tr>
<tr><td colspan="2">С интервальной шкалой оценок</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Способ обработки первичных оценок</td><td colspan="2">С ранжированием оценок
С парным сравнением оценок
С последовательным сравнением оценок
С непосредственной оценкой</td></tr>
<tr><td rowspan="5">10</td><td rowspan="5">Показатель согласованности оценок экспертов</td><td colspan="2">По дисперсии</td></tr>
<tr><td colspan="2">По коэффициенту вариации</td></tr>
<tr><td colspan="2">По дисперсионному коэффициенту конкордации</td></tr>
<tr><td colspan="2">По энтропийному коэффициенту конкордации</td></tr>
<tr><td colspan="2">По коэффициенту корреляции</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11</td><td rowspan="2">Способ получения итоговой оценки</td><td colspan="2">С итоговой оценкой по принципу большинства</td></tr>
<tr><td colspan="2">С итоговой оценкой по принципу среднего</td></tr>
</table>

б) в процессе оценивания происходит сопоставление различных мнений его участников, отстаивание ими своих точек зрения, соревнование за больший вклад в групповую оценку и необходимость защиты предлагаемых оценок.

К слабым сторонам групповой экспертизы относятся:

а) конформное (от лат. conformis - подобный, сообразный) давление большинства. Порождаемое им конформное мышление приводит к отказу ряда экспертов от самостоятельной мыслительной работы и принятия необычных, оригинальных вариантов решений. Если же кто-то не отказывается от своих точек зрения, его могут изолировать или даже изгнать из группы;

б) доминирование сильной личности. Нередко в группе выдвигается индивид с более высоким статусом или выраженными ораторскими способностями, который начинает подавлять других членов группы, пресекать выступления, не согласующиеся с его точкой зрения, глушить инициативу. Это приводит к затуханию групповой работы или ее искажению в пользу точек зрения данного индивида;

в) активизация в группе психологического климата самозащиты и эмоциональной напряженности. В условиях повышенной критичности к чужим мнениям и неприятия их некоторые эксперты становятся неспособны к высказыванию своего мнения;

г) убеждение во всесилии группы (сверхоптимизм). Члены группы слишком уповают на групповой эффект, снимая с себя ответственность за ход работы и ее результат.

д) сложность организации групповой экспертизы.

Чтобы уменьшить влияние слабых сторон групповой экспертизы, необходимо развивать у ее участников следующие ценностные ориентиры:

- взаимное доверие и сотрудничество;
- воздержание от выражения согласия или несогласия с оценками, пока не достигнуто их полное понимание;
- поиск различий в восприятии объекта и подходах к оцениванию его с целью достижения разнообразия в мышлении и оценках;
- взаимное стимулирование мышления в направлении формирования коллективной оценки;
- принятие всего, что предлагается другим экспертом как важного и интересного;
- рассмотрение конфликта между экспертами как противоречия между двумя точками зрения (двумя позициями).

Экспертизы могут состоять из одного или большего числа туров, причем это число может заранее фиксироваться или не фиксироваться. Переход от тура к туру связан с повторным рассмотрением объекта экспертизы. Чем больше туров, тем обоснованней экспертные оценки. Но одновременно увеличивается общее время на экспертизу и возрастает ее стоимость.

<u>Отсутствие общения</u> между экспертами означает, что каждый эксперт должен формировать свою оценку, ничего не зная о других экспертах и их оценках. Он полностью независим, что и хорошо и плохо. Обычно общение отсутствует в однотуровой экспертизе.

При <u>заочном общении</u> эксперта знакомят с оценками и их аргументацией других экспертов либо без указания авторства (анонимно), либо с указанием авторства (открыто). Анонимный вариант общения предполагает проведение экспертизы не менее, чем в два тура (например, как в способе Делфи). Любая из заочных экспертиз хороша тем, что не нужно собирать экспертов вместе.

<u>Очное общение</u> предполагает устную форму обмена информацией при формировании оценок экспертами (возможности которой выше, чем письменной формы) и реализуется в двух вариантах: с ограничениями и без ограничений. Примером экспертизы с очным общением может служить любое собрание, проводимое по фиксированному регламенту. Экспертиза без ограничений на очное общение - это свободная дискуссия. Очным экспертизам присущи недостатки, обусловленные с возможностями появления конформизма и его отрицательного влияния на результаты

Реальные экспертизы часто представляют собой комбинации различных классов экспертиз. В качестве примера можно привести экспертизу дипломного проекта.

Экспертные способы определения функции полезности весьма многочисленны и продолжают пополняться. Однако способов, имеющих достаточную обоснованность и практическую известность, сравнительно немного. В их число входят способы, одинаково приспособленные как для групповой, так и для индивидуальной реализации.

4. Оценка эффективности решений на основе функции полезности

Полезность является универсальной и достаточно объективной мерой оценки исходов операций. Знание функции полезности дает общую основу для оценки эффективности решений и в детерминированных, и в вероятностных, и в неопределенных операциях (рисунок 11). Однако сами критерии эффективности решений для каждого типа операции строятся на

$$X = \{\bar{x}_i\}, i = \overline{1,m}$$

$$\Downarrow$$

$$R = \{\bar{r}_k\}, k = \overline{1,l}$$

$$\Downarrow$$

$$F(\bar{r}_k), k = \overline{1,l}$$

$$\Downarrow$$

$$U(\bar{x}_i), = W[F(\bar{r}_k)],$$
$$i = \overline{1,m}; k = \overline{1,l}$$

$$\Downarrow$$

$$U_o = \sup_i u(\bar{x}_i), i = \overline{1,m}$$

Рисунок 11 – Схема оценки эффективности решений с использованием функции полезности

этой основе по-разному. Наиболее просто эффективность решений оценивается в случае детерминированных операций, наиболее сложно - в случае неопределенных операций.

Рассмотрим критерии и процедуры оценки эффективности решений применительно к каждому типу операций.

4.1. Оценка эффективности решений в детерминированных операциях

Детерминированные операции являются наиболее простым типом операций. Информация, требуемая управляющему объекту для принятия решения, известны полностью. Решения и исходы операции связаны однозначно – каждому решению соответствует один вполне определенный исход. В этом случае безразлично, что выбирать, решения или исходы операции и данные понятия могут отождествляться.

Простой характер связи между решениями на операцию и ее исходами определяет и простоту оценки эффективности решений. Так как каждое решение связано с одним исходом операции, то полезность исхода может служить одновременно и мерой оценки соответствующего ему решения с точки зрения достижения поставленной цели, а функция полезности – выступать функцией эффективности. Условия оценки представляются таблицей 8.

Таблица8 - Условия оценки эффективности решений в детерминированной операции

$\bar{x}_i$	$\bar{r}_k$	$F(\bar{r}_k)$	$U(\bar{x}_i)$
$\bar{x}_1$	$\bar{r}_1$	$F(\bar{r}_1)$	$U(\bar{x}_1)$
$\bar{x}_2$	$\bar{r}_2$	$F(\bar{r}_2)$	$U(\bar{x}_2)$
…	…	…	…
$\bar{x}_m$	$\bar{r}_m$	$F(\bar{r}_m)$	$U(\bar{x}_m)$

Таким образом, критерий эффективности решений в детерминированной операции определяется непосредственно по функции полезности

$$U(\bar{x}_i) = F(\bar{r}_k),\ i = 1,2,\dots,m;\ k=i.$$

Выбор оптимального решения в условиях определенности сводится к определению того, какое решение приводит к исходу операции, обладающему максимальной полезностью

$$U(x_o) = \max_i U(\bar{x}_i) = \max_k F(\bar{r}_k),\ k = 1,2,\dots,m;\ k=i,$$

$$\bar{x}_o = U^{-1}[\max_i U(\bar{x}_i)],\ i = 1,2,\dots,m.$$

Заметим, что выбор оптимального решения в детерминированных операциях возможен и без определения самой функции полезности – достаточно установить относительную предпочтительность исходов операции

$$\bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \dots > \bar{r}_k$$

Решение, которому соответствует наиболее предпочтительный исход, и будет оптимальным. Очевидно, такая возможность легко реализуема лишь при небольшой размерности множества исходов операции.

Как правило, реальные операции не являются детерминированными. Однако трудности исследования вероятностных и неопределенных операций нередко вынуждают искусственно вводить в них тем или иным путем детерминизм. Например, заменяют случайные величины их математическими ожиданиями и оперируют ими как детерминированными. Трансформированная таким образом вероятностная операция называется *квазидетерминированной.*

Детерминированным операциям соответствуют более простые модели и для них разработан достаточно мощный математический аппарат. Поэтому нередко выгодней проводить оценку эффективности решений на упрощенной (детерминированной) модели операции с использованием точных математических методов, чем на более адекватной (вероятностной) модели, но с использованием приближенных математических методов.

4.2. Оценка эффективности решений в вероятностных операциях

Однозначность соответствия между решениями и исходами для вероятностных операций нарушается. Каждому решению ставится в соответствие не один исход, а множество возможных исходов операции $R=\bar{r}_k$ $(k= 1,2,\ \dots,\ l)$ с известными вероятностями их появления $p(\bar{r}_k / \bar{x}_i)$.

Это означает, что решения в операциях вероятностного типа принимаются в условиях риска и оценивать их так, как в детерминированных операциях, нельзя. Теория полезности для условий определенности должна быть распространена на условия с риском. Это распространение заключается в следующем:

- вводится понятие вероятностной смеси исходов операции R_p как исхода, состоящего из множества исходов с известной вероятностью получения каждого из них;

- предполагается, что полезность вероятностной смеси исходов R_p находится как математическое ожидание полезностей на входящих в нее исходах

$$F(R_p) = M[F(R_p/\bar{x}_i)]$$

Соответственно эффективность решений в вероятностных операциях будет равна

$$U(\bar{x}_i) = M[F(R_p/\bar{x}_i)]$$

При исходах операции с дискретными значениями показателей $\bar{r}_k$ $(k= 1,2, \ldots, l)$, каждый из которых появляется с условной вероятностью $p(\bar{r}_k/\bar{x}_i)$ и имеет полезность $F(\bar{r}_k)$, выражение для определения математического ожидания функции полезности на множестве исходов операции записывается в виде

$$U(\bar{x}_i) = \sum_{k=1}^{l} p(\bar{r}_k/\bar{x}_i)F(\bar{r}_k), i = \overline{1, 2, \ldots, m}.$$

Из этого выражения как частный случай может быть получена оценка эффективности решений в детерминированных операциях, если принять, что исход операции, соответствующий решению, наступает с вероятностью, равной единице, а вероятности остальных исходов равны нулю.

Условия оценки эффективности решений в вероятностной операции в случае, когда показатели ее исхода являются дискретными величинами, удобно задавать таблично (таблица 9).

При исходах с непрерывными значениями показателей математическое ожидание функции полезности определяется как

$$U(\bar{x}_i) = \int_{R_d} f(\bar{r}/\bar{x}_i)F(\bar{r})d\bar{r}, \quad i = \overline{1, m}$$

где $f(\bar{r}/\bar{x}_i)$ - плотность вероятностей исходов операции;

R_d - допустимая область векторного пространства исходов операции.

Таким образом, для оценки эффективности решений в вероятностной операции необходимо:

- определить исходы операции по каждому решению;
- построить функцию полезности на множестве исходов операции;
- найти распределение вероятностей на множестве исходов операции;
- рассчитать математическое ожидание функции полезности на множестве исходов операции для каждого решения.

Таблица 9 - Условия оценки эффективности решений в вероятностной операции с дискретными показателями ее исхода

$\bar{x}_i$	$\bar{r}_k$	$p(\bar{r}_k/\bar{x}_i)$	$F(\bar{r}_k)$	$U(\bar{x}_i$
$\bar{x}_1$	$\bar{r}_1$	$p(\bar{r}_1/\bar{x}_1)$	$F(\bar{r}_1)$	$U(\bar{x}_1)$
	$\bar{r}_2$	$p(\bar{r}_2/\bar{x}_1)$	$F(\bar{r}_2)$	
	…	…	…	
	$\bar{r}_k$	$p(\bar{r}_k/\bar{x}_1)$	$F(\bar{r}_k)$	
$\bar{x}_2$	$\bar{r}_1$	$p(\bar{r}_1/\bar{x}_2)$	$F(\bar{r}_1)$	$U(\bar{x}_2)$
	$\bar{r}_2$	$p(\bar{r}_2/\bar{x}_2)$	$F(\bar{r}_2)$	
	…	…	…	
	$\bar{r}_k$	$p(\bar{r}_k/\bar{x}_2)$	$F(\bar{r}_k)$	
…	….	…	…	…
$\bar{x}_m$	$\bar{r}_1$	$p(\bar{r}_1/\bar{x}_m)$	$F(\bar{r}_1)$	$U(\bar{x}_m)$
		$p(\bar{r}_2/\bar{x}_m)$	$F(\bar{r}_2)$	
	…	…	…	
	$\bar{r}_k$	$p(\bar{r}_k/\bar{x}_m)$	$F(\bar{r}_k)$	

Оптимальным решением будет решение, которое максимизирует ожидаемую полезность его возможных исходов:

$$x_o = U^{-1}[\max_{i} M[F(R/\bar{x}_i)]],\ i = \overline{1,\mathrm{m}}.$$

Приведем примеры оценки эффективности решений в вероятностных операциях.

Пример 1. Оценка вариантов размещения пеленгаторной сети. Исследуемая операций - пеленгование радиоизлучателей, решения – варианты размещения пеленгаторов, показатель исхода операции – число пеленгуемых радиоизлучателей (дискретная величина). Числовые данные для оценки приведены в таблице 10.

Таблица 10 - Числовые данные для примера 1

x_i	r_k	$p(r_k/x_i)$	$F(r_k)$	$U(x_i)$
Вариант 1	60	0,0	0,8	
	40	0,4	0,6	
	20	0,6	0,4	
Вариант 2	60	0,2	0,8	
	40	0,3	0,6	
	20	0,5	0,4	

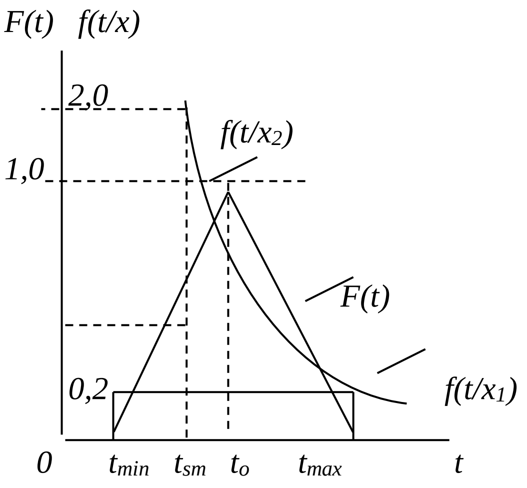
$U(x_1) = 0{,}0\times x0{,}8 + 0{,}4\times 0{,}6 + 0{,}6\times 0{,}4 = 0{,}48$

$U(x_2) = 0{,}2\times 0{,}8 + 0{,}3\times 0{,}6 + 0{,}7\times 0{,}4 = 0{,}62$

$Uo = U(x_2) = 0{,}62$

Пример 2. Оценка способов выбора вероятностно-оптимальных частот на очередной сеанс радиосвязи частотно-диспетчерским пунктом. Исследуемая операция – удовлетворение потребностей радиосвязей в частотах с учетом требований распространения радиоволн и электромагнитной совместимости; решения - ручной и автоматизированный способы выбора частот; показатель исхода операции – время удовлетворения потребностей радиосвязей в частотах t (непрерывная случайная величина).

Введем следующие предположения относительно вида функции полезности $F(t)$ в области задания значений показателя исхода операции t и законов их распределения $f(t/x_1)$ и $f(t/x_2)$ (рисунок 11):



$t_{min}=1,\ t_{max}=6,\ t_o=3,5$

$\lambda=2,0,\ \ t_{sm}=2,5$

$$f(t/x_1)_{max}=\frac{1}{t_{\max}-t_{\min}}=\frac{1}{6-1}=0,2$$

$$f(t/x_2)_{max}=\lambda e^{-\lambda(t-t_{sm})}\,/_{\,t=t_{sm}}=\lambda=2,0$$

Рисунок 11 - Зависимости $F(t)$, $f(t/x_1)$ и $f(t/x_2)$

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{t-t_0}{t_0-t_{\min}},t_{\min}<t\le t_0;\\ F(t)=\dfrac{t_{\max}-t_0}{t_{\max}-t_0},t_0<t\le t_{\min};\end{cases}$$

$$f(t/x_1)=\begin{cases}0,t<t_{\min},t>t_{\max};\\ \dfrac{1}{t_{\max}-t_{\min}},t_{\min}<t\le t_{\max};\\ 0,t<t_{\min},t>t_{\max};\end{cases}$$

$$f(t/x_2)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(t-t_{sm})},t\ge t_{sm}\\ 0,t<t_{sm}.\end{cases}$$

Получим выражения для оценки эффективности решений в общем виде и числовые значения:

$$U(x_1)=\int_{t_{\min}}^{t_{\max}}F(t)f(t/x_1)dt=\int_{t_{\min}}^{t_0}(\frac{t-t_{\min}}{(t_0-t_{\min})(t_{\max}-t_{\min})}dt+\int_{t_0}^{t_{\max}}\frac{t_{\max}-t}{(t_{\max}-t_0)(t_{\max}-t_{\min})}dt=$$

$$=\frac{1}{t_{\max}-t_{\min}}\Big(\frac{1}{t_0-t_{\min}}\int_{t_{\min}}^{t_0}(t-t_{\min})dt+\frac{1}{t_{\max}-t_0}\int_{t_0}^{t_{\max}}(t_{\max}-t)dt\Big)=$$

$$=\frac{1}{t_{\max}-t_{\min}}\Big[\frac{1}{t_0-t_{\min}}\Big(\int_{t_{\min}}^{t_0}tdt-t_{\min}\int_{t_{\min}}^{t_0}dt\Big)+\frac{1}{t_{\max}-t_0}\Big(t_{\max}\int_{t_0}^{t_{\max}}dt-\int_{t_0}^{t_{\max}}tdt\Big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{t_{\max}-t_{\min}}\Big[\frac{1}{t_0-t_{\min}}\Big(\frac{t^2}{2}/_{t_{\min}}^{t_0}-t_{\min}t/_{t_{\min}}^{t_0}\Big)+\frac{1}{t_{\max}-t_0}\Big(t_{\max}t/_{t_0}^{t_{\max}}-\frac{t^2}{2}/_{t_0}^{t_{\max}}\Big)\Big]\approx0,62;$$

$$U(x_2)=\int_{t_{sm}}^{t_{\max}}F(t)f(t/x_2)dt=\int_{t_{sm}}^{t_0}\frac{t-t_{\min}}{t_0-t_{\min}}\times\lambda e^{-\lambda(t-t_{sm})}dt+\int_{t_0}^{t_{\max}}\frac{t_{\max}-t}{t_{\max}-t_0}\times\lambda e^{-\lambda(t-t_{sm})}dt=$$

$$= \lambda e^{\lambda t_{sm}}\Big[\frac{1}{t_0 - t_{\min}}\int_{t_{sm}}^{t_0}(t - t_{\min})e^{-\lambda t}dt + \frac{1}{t_{\max} - t_0}\int_{t_0}^{t_{\max}}(t_{\max} - t)e^{-\lambda t}dt\Big] =$$

$$= \lambda e^{\lambda t_{sm}}\Big[\frac{1}{t_0 - t_{\min}}\Big(\int_{t_{sm}}^{t_0} te^{-\lambda t}dt - t_{\min}\int_{t_{sm}}^{t_0} e^{-\lambda t}dt\Big) + \frac{1}{t_{\max} - t_0}\Big(t_{\max}\int_{t_0}^{t_{\max}} e^{-\lambda t}dt - \int_{t_0}^{t_{\max}} te^{-\lambda t}dt\Big)\Big] =$$

$$= \lambda e^{\lambda t_{sm}}\Big\{\frac{1}{t_0 - t_{\min}}\Big[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\big(-\lambda t - 1\big) - t_{\min}\big(-\frac{1}{\lambda}\big)e^{-\lambda t}\Big]\Big/_{t_{sm}}^{t_0} + \frac{1}{t_{\max} - t_0}\Big[t_{\max}\big(-\frac{1}{\lambda}\big)e^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\big(-\lambda t - 1\big)\Big]\Big/_{t_0}^{t_{\max}}\Big\} =$$

$$= 2e^5[0,4(e^{-5} - 1,5e^{-7}) + 0,4(e^{-7} + 0,25e^{-12})] = 0,8\, e^5\, (e^{-5} - 0,5e^{-7} + 0,25e^{-12}) \approx 0,75.$$

Использование в качестве критерия эффективности решений математического ожидания функции полезности на пространстве исходов операции (ожидаемой полезности) справедливо только в случае, когда одно и тоже решение приходится применять достаточно большое число раз (если $r_1, r_2, ..., r_n$ – значения случайной величины R с математическим ожиданием $M[R]$ и дисперсией $D[R]$, то их среднее арифметическое $\tilde{r} = \frac{r_1 + r_2 + ... + r_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{DR}{n}$ и согласно предельной теореме теории вероятности $\frac{DR}{n} \to 0$ и $\bar{x} \to M[R]$ при $n \to \infty$).

Соответственно и оптимизация в условиях вероятностной операции - это оптимизация в среднем. Она не исключает случаи принятия неоптимального решения на конкретную реализацию операции. Однако если операция будет многократно повторяться, то оптимальное в среднем решение приведет к наибольшему успеху (наименьшему риску).

Риск - характеристика деятельности, означающая вероятность появления неблагоприятного исхода по сравнению с прогнозируемым исходом

4.3. Оценка эффективности решений в неопределенных операциях

По сравнению с вероятностными операциями для неопределенных операций характерно отсутствие вероятностных характеристик по параметрам обстановки. В силу этого нельзя определить и законы распределения вероятностей на множестве исходов операции. Недостаточность сведений об обстановке порождает ситуацию неопределенности. На практике обычно стремятся к тому, чтобы снять неопределенность путем проведения специальных мероприятий (например, разведки). Если это удается сделать, то операция становится либо определенной, либо вероятностной. Однако добиться полного снятия неопределенности во многих операциях, особенно военных, не представляется возможным. Какие-то данные обстановки будут все-таки отсутствовать.

Условия оценки эффективности решений для неопределенных операций можно представить в виде таблицы, которую принято называть *матрицей эффективности* (таблица 11). В этой таблице:

$\bar{x}_i$ - вектор управляемых параметров, определяющий решение, $i = \overline{1,m}$;

$\bar{y}_j$ - вектор неуправляемых параметров, определяющий состояние обстановки, $j = \overline{1,n}$;

u_{ij} - значение эффективности решения x_i для состояния обстановки y_j;

$U(\bar{x}_i)$ - эффективность решения x_i.

Каждая строка таблицы содержит значения эффективности одного решения для всех состояний обстановки $\bar{y}_j$ ($j = \overline{1,n}$), а каждый столбец - значения эффективности для всех решений

Таблица 11- Матрица эффективности

$\bar{x}_i$	$\bar{y}_j$						$U(\bar{x}_i)$
	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	…	$\bar{y}_j$	…	$\bar{y}_n$	
$\bar{x}_1$	u_{11}	u_{12}	…	u_{1j}	…	u_{1n}	
$\bar{x}_2$	u_{21}	u_{22}	…	u_{2j}	…	u_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	
$\bar{x}_m$	u_{m1}	u_{m2}	…	u_{mj}		u_{mn}	

$\bar{x}_i$ $(i = \overline{1,m})$ при одном и том же состоянии обстановки. В случае задания состояний обстановки одним параметром матрица эффективности может быть представлена наглядно диаграммой (рисунок 12).

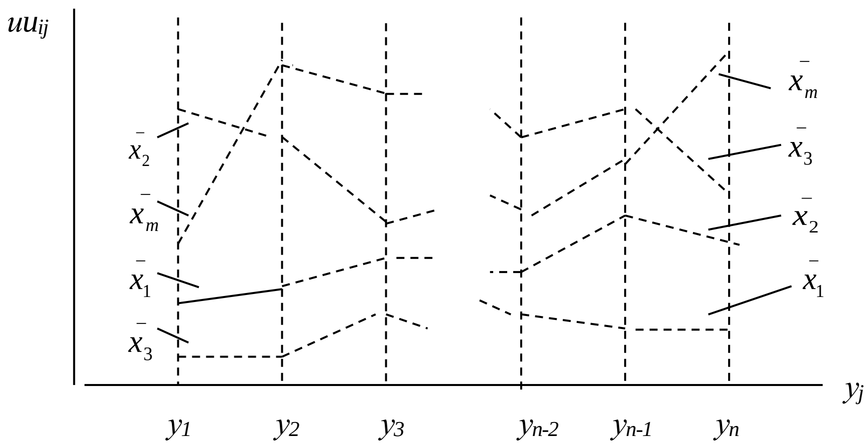


Рисунок 12 - Диаграмма эффективности

В неопределенной операции известны множество состояний обстановки и эффективности решений для каждого из них, но неизвестно, с какой вероятностью может появиться то или иное состояние. Неопределенная операция как бы распадается на ряд из *n* операций, которые могут быть либо детерминированными, либо вероятностными (порядок оценки эффективности этих решений известен). В зависимости от характера неопределенности операции делятся на игровые и статистически неопределенные.

В *игровых операциях* неопределенность вносит своими сознательными действиями противник. Для исследования игровых операций используется теория игр - раздел прикладной математики, который изучает модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Под конфликтом понимается явление, в котором участвуют различные стороны, имеющие различные интересы и возможности выбирать доступные для них действия в соответствии с этими интересами. Теория игр была основана Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в 1944 году. Изначально в теории рассматривались именно игры, но впоследствии она превратилась в общую математическую теорию конфликтов, в рамках которой поддаются математическому описанию военные и правовые конфликты, спортивные состязания, «салонные» игры, а также явления, связанные с биологической борьбой за существование. Название же осталось традиционным.

Условия *статистически неопределенных операций* зависят от объективной действительности, называемой «природой». Природа рассматривается как незаинтересованная, безразличная к операции сторона (она пассивна по отношению к лицу, принимающему решение). Такие операции исследуются с применением *теории статистических решений*.

Неопределенность в обстановке приводит к неопределенности оценки решений, заключающейся в том, что неизвестно, как оценивать решения по всем состояниям обстановки. Для разрешения неопределенности может использоваться только один путь - введение некоторых субъективных вероятностей. По этой причине единого критерия оценки эффективности для неопределенных операций нет. Предложен и используется целый ряд критериев – *базовых и производных.* Сформулированы также общие требования к критериям и процедурам оценки и выбора оптимальных решений. Основными требованиями являются:

1) оптимальное решение не должно меняться с перестановкой строк и столбцов матрицы эффективности;

2) оптимальное решение не должно меняться при добавлении к матрице эффективности тождественной строки или тождественного столбца;

3) оптимальное решение не должно меняться от добавления к значению каждого элемента матрицы эффективности постоянного числа;

4) оптимальное решение не должно становиться неоптимальным, а неоптимальное - оптимальным в случае добавления новых решений, среди которых нет ни одного более эффективного решения;

5) если решения $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$ оптимальны, то вероятностная смесь этих решений (совокупность решений $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$, одно из которых имеет вероятность *p*, а другое – дополнительную вероятность *1-p*) тоже должна быть оптимальна.

Оценка и выбор решения производятся применительно к условиям конкретной операции на основе неформальных соображений.

Рассмотрим некоторые из получивших широкое распространение критериев оценки эффективности решений с иллюстрацией на конкретном примере (таблица 12). Необходимо оценить решения на серийное производство одного из трех разрабатываемых типов станций помех для борьбы с одним из четырех находящихся в разработке типов радиосредств противника.

Таблица 12 - Матрица эффективности для примера

x_i	y_j			
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0,5	0,1	0,2
x_2	0,2	0,3	0,2	0,4
x_3	0,1	0,4	0,4	0,3

Базовые критерии. К базовым критериям относятся: критерий среднего (Байеса), критерий Лапласа, критерий максимина (Вальда), критерий максимакса и критерий минимаксных потерь (Сэвиджа).

Критерий Байеса (среднего). Данный критерий предложен английским математиком Томасом Байесом (1702 – 1761). Он предполагает задание (хотя бы ориентировочное) вероятностей состояний обстановки p_j $(j = \overline{1,n})$. Эффективность решения оценивается как среднее ожидаемое значение (математическое ожидание) оценок эффективности по всем состояниям обстановки:

$$U(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij}, \; i = \overline{1,m}.$$

Оптимальному решению будет соответствовать эффективность

$$Uo = \max_i \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij}, \; \overline{1,m}.$$

Если в заданном примере задаться вероятностями применения противником радиосредств $p_1 = 0{,}4$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}1$ и $p_4=0{,}3$, то получим следующие оценки решений:

$U(x_1) = 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}1 \times 0{,}1 + 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}21;$

$U(x_2) = 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}28;$
$U(x_3) = 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}1 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}25.$
Оптимальное решение – x_2.

Для применения критерия среднего необходим по существу перевод операции из неопределенной в вероятностную, причем достаточно произвольным образом.
Ситуации, для принятия решения в которой может использоваться данный критерий, присущи следующие особенности:

- некоторая информированность о состояниях обстановки,
- вероятности появления состояний p_j не зависят от времени,
- многократность реализации решения (при малом числе реализаций решения риск возрастает).

Критерий Лапласа (Лаплас Пьер Симон (1749-1827) - французский астроном, математик, физик, на вопрос императора Наполеона, почему в его системе мира нет места Богу, с гордостью ответил: ”Я не нуждаюсь в этой гипотезе”)**.** В основе критерия лежит следующее предположение: поскольку о состояниях обстановки ничего не известно, то их можно считать равновероятными ($p_j = const = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1,n}$). Исходя из этого предположения получаем

$$U(\bar{x}_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij},\ i = \overline{1,m};$$

$$Uo = \max_i \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\right),\ i = \overline{1,m}.$$

Рассчитаем эффективность решений по данному критерию для рассматриваемого примера:
$U(x_1) = 0{,}25 \times (0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}2) = 0{,}225;$
$U(x_2) = 0{,}25 \times (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}4) = 0{,}275;$
$U(x_э) = 0{,}25 \times (0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}3) = 0{,}3.$

Так как множитель $\frac{1}{n}$ не влияет на предпочтительность решений, при расчетах $U(x_i)$ его можно опускать
$U(x_1) = 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}9;$
$U(x_2) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}9;$
$U(x_э) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1{,}2.$
Оптимальное решение - x_3.

Критерий Лапласа представляет собой частный случай критерия среднего (иногда их даже считают одним критерием - под именем Байеса-Лапласа).

Критерий Вальда (максимина). Его предложил американский математик-статистик Абрахам Вальд. Критерий основывается на том, что если состояние обстановки не известно, нужно поступать самым осторожным образом - ориентируясь на минимальное значение эффективности каждого решения. В каждой строке матрицы эффективности находится минимальная из оценок решения по различным состояниям обстановки

$$U(\bar{x}_i) = \min_j u_{ij},\ j = \overline{1,n};\ \ i = \overline{1,m}.$$

Оптимальным решением считается решение из строки с максимальным значением эффективности

$$Uo = \max_i (\min_j u_{ij}),\quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Применение критерия максимина к нашему примеру дает следующие оценки:
$U(x_1) = min(0{,}1l;\ 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}2) = 0{,}1;$
$U(x_2) = min\ (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}4) = 0{,}2;$
$U(x_э) = min(0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}3) = 0{,}1.$
Оптимальное решение - x_2.

Максиминный критерий ориентирует на решение, не содержащее элементов риска - при любом из возможных состояний обстановки результат операции оказывается не хуже найденного максимина. Это свойство позволяет считать ММ-критерий одним из фундаментальных. Вместе с тем крайняя осторожность является в ряде случаев недостатком критерия. Чтобы подтвердить это, изменим оценки, соответствующие решению x_1 для состояний обстановки y_2, y_3 и y_4 на 0,9 (таблица 13).

Таблица 13 Иллюстрация недостатка критерия Вальда

x_i	y_j			
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0,9	0,9	0,9
x_2	0,2	0,3	0,2	0,4
x_3	0,1	0,4	0,4	0,3

Значения эффективности решений согласно максиминному критерию не изменяются и оптимальным решением остается x_2. Вместе с тем очевидно, что решение x_2 имеет незначительное преимущество над решением x_1 лишь для состояния обстановки y_1, а при всех других состояниях обстановки значительно ему уступает. В этом случае стоит рискнуть, остановив выбор на x_1.

Другой недостаток критерия - он не удовлетворяет требованию 3 (добавление постоянного числа к каждому элементу столбца матрицы эффективности влияет на выбор решения).

Применение критерия Вальда бывает оправдано, если для ситуации, в которой принимается решение, характерны следующие особенности:

- о возможности появления внешних состояний ничего не известно;
- приходится считаться с появлением различных внешних состояний,
- решение реализуется только один раз;
- необходимо исключить какой бы то ни было риск.

Критерий максимакса. Этим критерием предписывается оценивать решения по максимальному значению эффективности и выбирать в качестве оптимального решение, обладающее эффективностью с наибольшим из максимумов:

$$U(\bar{x}_i) = \max_j u_{ij},\ j = \overline{1,n};\ \ i = \overline{1,m}.$$

$$Uo = \max_i (\max_j u_{ij}),\ \ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Оценки решений на основе максимаксного критерия в нашем примере принимают следующие значения:

$U(x_1)$ = max(0,l; 0,5; 0,1; 0,2) = 0,5;

$U(x_2)$ = max(0,2; 0,3; 0,2; 0,4) = 0,4;

$U(x_3)$ = max (0,1; 0,4; 0,4; 0,3) = 0,4.

Оптимальное решение - x_1.

Критерий максимакса - самый оптимистический критерий. Те, кто предпочитает им пользоваться, всегда надеются на лучшее состояние обстановки и, естественно, в большой степени рискуют.

$U(x_1) = 0,6 \times 0,5 + (1 - 0,6) \times 0,1 = 0,34;$

$U(x_2) = 0,6 \times 0,5 + (1 - 0,6) \times 0,2 = 0,32;$

$U(x_3) = 0,6 \times 0,4 + (1 - 0,6) \times 0,1 = 0,28.$

Оптимальным решением будет решение x_3.

Критерий Сэвиджа (минимаксных потерь). Для оценки решений на основе данного критерия матрица эффективности должна быть преобразована в матрицу потерь (риска). Каждый элемент матрицы потерь определяется как разность между максимальным и текущим значениями оценок эффективности в столбце:

$$\Delta u_{ij} = \max_i u_{ij} - u_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

После преобразования матрицы используется критерий минимакса:

$$U(\bar{x}_i) = \max_j \Delta u_{ij},\ j = \overline{1,n};\ \ i = \overline{1,m}.$$

$$Uo = \min_i (\max_j \Delta u_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Оценим эффективность решений для примера по выбору типа станции помех в соответствии с данным критерием. Матрице эффективности (таблица 3.10) будет соответствовать следующая матрица потерь (таблица 14):

Таблица 14 - Матрица потерь

x_i	y_j			
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0	0,3	0,2
x_2	0	0,2	0,2	0
x_3	0,1	0,1	0	0,1

Найдем оценки для решений:

$U(x_1) = max(0,1;\ 0;\ 0,3;\ 0,2) = 0,3;$

$U(x_2) = max(0;\ 0,2;\ 0,2;\ 0) = 0,2;$

$U(x_3) = max(0,l;\ 0,1;\ 0;\ 0,1) = 0,1.$

Оптимальное решение - x_3.

Критерий минимаксных потерь отражает сожаление по поводу упущенных возможностей (что выбранное решение не оказалось наилучшим при определенном состоянии обстановки). Так, если произвести выбор решения x_1, а состояние обстановки в действительности y_3, то сожаление, что не выбрано наилучшее из решений (x_3), составит 0,3.

Процедура оценки решений по Сэвиджу свободна от влияния субъективного фактора и дает более полное представление принимаемом решении. О критерии Сэвиджа можно сказать, что он, как и критерий Вальда, относится к числу осторожных критериев. По сравнению с критерием Вальда в нем придается несколько большее значение выигрышу, чем проигрышу. Основной недостаток критерия - не выполняется требование 4.

Очевидно, ситуации, в которых целесообразно принимать решение с использованием критерия Сэвиджа, совпадают с ситуациями для максиминного критерия.

Производные критерии. Данные критерии строятся на основе базовых критериев и соответственно наследуют их преимущества и недостатки.

Критерий Гурвица (обобщенного максимина). При оценке и выборе решений согласно критерию Гурвица неразумно проявлять как осторожность, так и азарт, а следует, учитывая самое высокое и самое низкое значения эффективности, занимать промежуточную позицию. Для этого вводится коэффициент оптимизма α ($0 \le \alpha \le 1$), характеризующий отношение к риску лица, принимающего решение. Эффективность решения находится как взвешенная с помощью коэффициента a сумма максимальной и минимальной оценок:

$$U(\bar{x}_i) = \alpha \max_j u_{ij} + (1 - \alpha) \min_j u_{ij},\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m};\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Условие оптимальности записывается в виде

$$U_0 = \max_i [\alpha \max_j u_{ij} + (1 - \alpha) \min_j u_{ij}],\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m};\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Зададимся значением $\alpha = 0,6$ и рассчитаем эффективность решений для рассматриваемого примера:

$U(x_1) = 0,6 \times 0,5 + (1 - 0,6) \times 0,1 = 0,34;$

$U(x_2) = 0,6 \times 0,5 + (1 - 0,6) \times 0,2 = 0,32;$

$U(x_3) = 0,6 \times 0,4 + (1 - 0,6) \times 0,1 = 0,28.$

Оптимальным решением будет решение x_3.

При $\alpha = 0$ критерий Гурвица сводится к критерию максимина, при $\alpha = 1$ - к критерию максимакса. На практике пользуются значениями коэффициента α в пределах 0,3 - 0,7. В технических приложениях определить значение α трудно и поэтому его обычно принимают равным 0,5.

Критерию Гурвица присущи следующие недостатки: не известно, как выбирать для конкретной операции значение коэффициента оптимизма α; не выполняются требования 4 и 5.

Критерий Гурвица применяется в случае, когда:

- о возможности появления внешних состояний ничего не известно;
- приходится считаться с появлением различных внешних состояний;
- реализуется малое число решений;
- допускается некоторый риск.

Критерий Ходжа–Лемана. Этот критерий опирается одновременно на критерий среднего и критерий максимина. Эффективность решения находится как взвешенная с помощью коэффициента β сумма оценок по критерию среднего и: критерию максимина:

$$U(\bar{x}_i) = \beta \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij} + (1 - \beta) \min_j u_{ij},\ j=\overline{1,n},\ i = \overline{1,m};\ 0 \le \beta \le 1.$$

Условие оптимальности записывается в виде

$$U_0 = \max_i [\beta \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij} + (1 - \beta) \min_j u_{ij}].\ j=\overline{1,n},\ i = \overline{1,m};\ 0 \le \beta \le 1.$$

Коэффициент β выражает степень доверия к используемому закону распределения вероятностей в критерии среднего. Если доверие велико, доминирует критерий Байеса-Лапласа, в противном случае – ММ-критерий. При $\beta = 1$ критерий Ходжа-Лемана становится критерием среднего, при $\beta = 0$ – критерием максимина. Выбор β субъективен, так как о степени достоверности какой-либо функции распределения судить весьма трудно.

Зададимся значением $\beta = 0{,}6$ и рассчитаем эффективность решений в рассматриваемом примере, воспользовавшись оценками, полученными по критериям среднего и максимина:

$U(x_1) = 0{,}6 \times 0{,}21 + (1 - 0{,}6) \times 0{,}1 = 0{,}166;$

$U(x_2) = 0{,}6 \times 0{,}28 + (1 - 0{,}6) \times 0{,}2 = 0{,}222;$

$U(x_3) = 0{,}6 \times 0{,}25 + (1 - 0{,}6) \times 0{,}1 = 0{,}210.$

Оптимальным решением будет решение x_2.

Для применения критерия Ходжа-Лемана желательно, чтобы ситуация, в которой принимается решение, удовлетворяла следующим условиям:

- возможны некоторые предположения о распределении вероятностей состояний обстановки;
- принятое решение допускает много реализаций;
- при малых числах реализации допускается некоторый риск.

Критерий Гермейера (Ю. Б. Гермейер – советский математик). Этот критерий обобщает критерий максимина путем учета вероятностей состояний обстановки p_j. Эффективность решения определяется как наименьшее из произведений оценки u_{ij} на вероятность соответствующего состояния p_j.

$$U(\bar{x}_i) = \min_j p_j u_{ij},\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m};$$

Оптимальному решению соответствует значение

$$U_0 = \max_i \min_j p_j u_{ij},\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m};$$

Критерий Гермейера, как и критерий Вальда является критерием крайнего пессимизма лица, принимающего решение, но, в отличие от него при максимальной осмотрительности учитывает вероятности состояний природы.

В случае равномерного распределения состояний обстановки ($p_j = \frac{1}{n},\ j = \overline{1,n}$) критерии Гермейера и максимина становятся идентичными.

Условия применимости критерия Гермейера:

- некоторая информированность о состояниях обстановки позволяет задать вероятности их появления;
- допускается некоторый риск;
- решение может реализоваться один или несколько раз.

Если задание функции распределения состояний не очень надёжно, а число реализаций решения мало, использование критерия Гермейера приводит, вообще говоря, к неоправданно большому риску.

BLMM - критерий. Данный критерий получен путем объединения критериев Байеса-Лапласа (*BL)* и минимакса (*MM)*:

$$U(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij} \;/ \varepsilon_i \le \varepsilon_{доп}, \; \max_j u_{ij} \le \varepsilon_i, \; i = \overline{1,m},$$

где ε_i - оценка риска, $\varepsilon_i = \max_i \max_j u_{ij} - \min_j u_{ij}$,

$\varepsilon_{доп}$ - допустимое значение риска.

Матрица эффективности $\| u_{ij} \|$ дополняется не одним, а тремя столбцами. В первом столбце записываются математические ожидания оценок эффективности каждой из строк, во втором - разности между значением $\max_i \max_j u_{ij}$ и значениями $\min_j u_{ij}$ соответствующих строк, в третьем - разности между значениями $\max_j u_{ij}$ и значением $\max_i \max_j u_{ij}$.

Оптимальному решению соответствует эффективность

$$Uo = \max_i \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij} \;/ \; \varepsilon_i \le \varepsilon_{доп}, \; \max_j u_{ij} \le \varepsilon_i, \; i = \overline{1,m}.$$

Для ситуаций, в которых использование BLMM-критерия оправдано, характерны следующие признаки:

1) вероятности появления состояний обстановки неизвестны, однако имеется некоторая априорная информация в пользу какого-либо определенного распределения;
2) необходимо считаться с появлением различных состояний обстановки как по отдельности, так и в комплексе;
3) допускается ограниченный риск;
4) принятое решение реализуется один раз или многократно.

BLMM-критерий хорошо приспособлен для принятия решений прежде всего в области техники, где может считаться достаточно надежным. В нем влияние субъективного фактора ослаблено, но не исключено полностью – допустимая граница риска $\varepsilon_{доп}$ задается без какого-либо основания. Если установить допустимый риск $\varepsilon_{доп}$ заранее, не зависимо от принимаемого решения, затруднительно, то прибегают к вычислению ожидаемого риска $\epsilon_{ож}$.

Условие $\max_j u_{ij} \le \varepsilon_i, \; i = \overline{1,m}$. существенно, когда решение реализуется малое число раз. В этих случаях недостаточно ориентироваться на риск, связанный только с невыгодными состояниями обстановки и средними значениями. Правда, из-за этого возможны некоторые потери состояния обстановки окажутся благоприятными. При большом числе реализаций необходимость в проверке условия отпадает. Однако четких количественных указаний на этот счет нет.

Таким образом, эффективность решений в неопределенных операциях может оцениваться по целому ряду критериев. На выбор того или иного критерия оказывают влияние следующие факторы:

- природа и цель конкретной операции (в одних операциях допустим риск, в других нужен гарантированный результат);
- причины неопределенности (одно дело, когда неопределенность является случайным результатом действия объективных законов природы, и другое - когда она вызывается действиями разумного противника, стремящегося помешать в достижении цели);
- уровень системы управления, в которой принимается решение (в системах низкого уровня допустим больший риск);
- характер лица, принимающего решение (одни люди склонны к риску в надежде добиться большего успеха, другие предпочитают действовать всегда осторожно).

шенно отличным от решений, диктуемых другими критериями. Это наглядно подтверждают результаты оценки эффективности решений применительно к взятому примеру по рассмотренным критериям (таблица 15).

Таблица 15 - Результаты оценки эффективности решений для примера по различным критериям

x_i	y_i				$U(x_i)$ по критериям					
	y_1	y_2	y_3	y_4	Среднего	Лапласа	Вальда	Максимакса	Гурвица	Сэвиджа
x_1	0,1	0,5	0,1	0,2	0,21	0,225	0,1	0,5	0,34	0,3
x_2	0,2	0,3	0,2	0,4	0,28	0,275	0,2	0,4	0,32	0,2
x_3	0,1	0,4	0,4	0,3	0,25	0,3	0,1	0,4	0.28	0,1
				U_0	0,28	0,3	0,2	0,5	0,34	0,1
				x_o	x_2	x_3	x_2	x_1	x_1	x_3

Из существования нескольких критериев оценки эффективности решений для неопределенных операций вытекает необходимость поиска еще одного критерия (метакритерия), с помощью которого можно было бы определить, какой критерий является лучшим в каждой конкретной операции. Однако такого метакритерия найти пока не удалось и вряд ли удастся найти в будущем.

Рассчитывать на высокую степень точности решения в неопределенных операциях нельзя. В связи с этим практические задачи оценки и выбора решений с элементами неопределенности стремятся свести к вероятностным задачам. В задачах, которые сохраняют неопределенную постановку, оценка и выбор решений производятся, как правило, на основе использования нескольких критериев. Рассмотрим два способа такой оценки.

Первый способ состоит в следующем:

- формируется множество решений $X=\{\bar{x}_i\}, i=\overline{1,m}$;
- определяется множество критериев эффективности $U=\{U_k(\bar{x}_i)\}, k=\overline{1,l}$;
- находится оценка каждого решения $\bar{x}_i$ $(i=\overline{1,m})$ по каждому критерию U_k $(k=\overline{1,l})$;
- выбирается решение или множество решений X^* с наиболее предпочтительными наборами значений эффективности.

Недостаток данного способа в том, что поиск оптимального решения ведется перебором и нужно формировать все множество допустимых решений.

Второй способ предполагает следующие действия:

- определяется множество критериев эффективности $U=\{U_k(\bar{x}_i)\}, k=1, 2, \ldots, l$;
- задается система ограничений, выделяющая область допустимых значений критериев эффективности D_U;
- производится определение вектора или области наиболее предпочтительных значений критериев эффективности $G_U \subset D_U$;
- находится решение или множество решений, соответствующих области G_U.

Область G_U может определяться с помощью алгоритмов направленного перебора на основе использования свойств области D_U. Основную трудность при реализации этого способа представляет нахождение решения (множества решений), соответствующего области с наиболее предпочтительными оценками G_U.

При выделении множества решений окончательный выбор решения должен осуществляться лицом, принимающим решение.

5. Оценка эффективности решений непосредственно по показателям исхода операции

Из рассмотрения процедур оценки эффективности решений с использованием функции полезности во всех типах операций следует, что она действительно обеспечивает общий подход к формированию критериев (таблица 16). Эффективность решений определяется как

$$U(\bar{x}_i) = W[F(\bar{r}_k)]\ ,\ i = \overline{1,m}; k = \overline{1,l}\ .$$

Таблица 16 - Критерии эффективности решений для операций на основе функции полезности

Тип операций	Решение $\bar{x}_i$	Исход $\bar{r}_k$	Вероятность исхода $p(\bar{r}_k / \bar{x}_i)$	Полезность исхода $F(\bar{r}_k)$	Эффективность решения $U(x_i)$
Детерминированные	$\bar{x}_1$	$\bar{r}_1$	$p(\bar{r}_1 / \bar{x}_1)=1$	$F(\bar{r}_1)$	$\mathbf{U}(\bar{x}_i) = \mathbf{F}(\bar{r}_k)$
	$\bar{x}_2$	$\bar{r}_2$	$p(\bar{r}_2 / \bar{x}_2)=1$	$F(\bar{r}_2)$	$U_0 = \max\limits_i U(\bar{x}_i)$
	…		…	…	$i = k = \overline{1,m}$
	$\bar{x}_m$	$\bar{r}_m$	$p(\bar{r}_m / \bar{x}_m) = 1$	$F(\bar{r}_m)$	
Вероятностные	$\bar{x}_1$	$\bar{r}_1$	$0 \le p(\bar{r}_1 / \bar{x}_1) \le 1$	$F(\bar{r}_1)$	$\mathbf{U}(\bar{x}_i) = \sum\limits_{k=1}^{l} p(\bar{r}_k / \bar{x}_i) F(\bar{r}_k)$
		$\bar{r}_2$	$0 \le p(\bar{r}_2 / \bar{x}_1) \le 1$	$F(\bar{r}_2)$	$i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, l$
		…	…	...	$\mathbf{U}(\bar{x}_i) = \int\limits_{Rd} f(\bar{r}/\bar{x}_i) F(\bar{r}) d\bar{r}$
		$\bar{r}_m$	$0 \le p(\bar{r}_m / \bar{x}_1) \le 1$	$F(\bar{r}_m)$	
	$\bar{x}_2$	$\bar{r}_1$	$0 \le p(\bar{r}_1 / \bar{x}_2) \le 1$	$F(\bar{r}_1)$	$\bar{r} \subset R_d$
		$\bar{r}_2$	$0 \le p(\bar{r}_2 / \bar{x}_2) \le 1$	$F(\bar{r}_2)$	$U_0 = \max\limits_i U(\bar{x}_i),\ i = \overline{1,m}$
		…	…	...	
		$\bar{r}_m$	$0 \le p(\bar{r}_m / \bar{x}_2) \le 1$	$F(\bar{r}_m)$	
	…	…			
	$\bar{x}_m$	$\bar{r}_1$	$0 \le p(\bar{r}_1 / \bar{x}_m) \le 1$	$F(\bar{r}_1)$	
		$\bar{r}_2$	$0 \le p(\bar{r}_2 / \bar{x}_m) \le 1$	$F(\bar{r}_2)$	
		…	…	...	
		$\bar{r}_m$	$0 \le p(\bar{r}_m / \bar{x}_m) \le 1$	$F(\bar{r}_m)$	
Неопределенные	$\bar{x}_1$	$\bar{r}_1$	$p(\bar{r}_1 / \bar{x}_1)=?$	$F(\bar{r}_1)$	$U(\bar{x}_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j u_{ij}\ ,\ i = \overline{1,m}$
		$\bar{r}_2$	$p(\bar{r}_2 / \bar{x}_1)=?$	$F(\bar{r}_2)$	$u_{ij} = \Psi\ [F(\bar{r}_k / \bar{x}_i);\ k = 1, 2, \ldots, l$
		…	…	...	$U(\bar{x}_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} u_{ij}\ ,\ i = \overline{1,m}$
		$\bar{r}_m$	$p(\bar{r}_m / \bar{x}_1)=?$	$F(\bar{r}_m)$	
	$\bar{x}_2$	$\bar{r}_1$	$p(\bar{r}_1 / \bar{x}_2)=?$	$F(\bar{r}_1)$	$U(\bar{x}_i) = \min\limits_j u_{ij}\ ,\ j = \overline{1,n}$
		$\bar{r}_2$	$p(\bar{r}_2 / \bar{x}_2)=?$	$F(\bar{r}_2)$	$U(\bar{x}_i) = \max\limits_j u_{ij}\ ,\ j = \overline{1,n}$

		…	…	…	$U(\bar{x}_i) = \alpha \max\limits_j u_{ij} + (1-\alpha) \min\limits_j u_{ij}$,
		$\bar{r}_m$	$p(\bar{r}_m / \bar{x}_2)$=?	$F(\bar{r}_m)$	$j = \overline{1,n}$, $0 \le \alpha \le 1$
	…	…	...	…	$U(\bar{x}_i) = \max\limits_j (\max\limits_i u_{ij} - u_{ij})$
	$\bar{x}_m$	$\bar{r}_1$	$p(\bar{r}_1 / \bar{x}_m)$=?	$F(\bar{r}_1)$	
		$\bar{r}_2$	$p(\bar{r}_2 / \bar{x}_m)$=?	$F(\bar{r}_2)$	
		…	…	…	
		$\bar{r}_m$	$p(\bar{r}_m / \bar{x}_m)$=?	$F(\bar{r}_m)$	

Несмотря на универсальный характер полезностного подхода возможности его использования ограничены объективными трудностями определения функции полезности, особенно в сложных операциях. Поэтому при исследовании операций наряду с полезностной оценкой эффективности решений практикуется более простая оценка - непосредственно **по показателям исходов операции** (рисунок 13).

$$X = \{\bar{x}_i\}, i = \overline{1,m}$$

$$\Downarrow$$

$$R = \{\bar{r}_k\}, k = \overline{1,l}$$

$$\Downarrow$$

$$U(\bar{x}_i) = \Omega(\bar{r}_k),\quad i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,l}$$

$$\Downarrow$$

$$U_o = \sup_i u(\bar{x}_i), i = \overline{1,m}$$

Рисунок 13 – Схема оценки эффективности решений без использования функции полезности

Однако такое упрощение допустимо лишь для операций с определенными видами функции полезности. Среди различных видов функции полезности можно указать на два характерных вида: пороговый и монотонный.

5. 1. Оценка эффективности решений при функции полезности порогового вида

Функция полезности порогового вида характеризуется наличием более или менее резко выраженного значения (порога) r_d, разделяющего области с низкой и высокой полезностями (рисунок 14). При любых значениях показателя исхода операции, превосходящих (не превосходящих) этот порог, полезность настолько низка, что цель не может считаться достигнутой. С другой

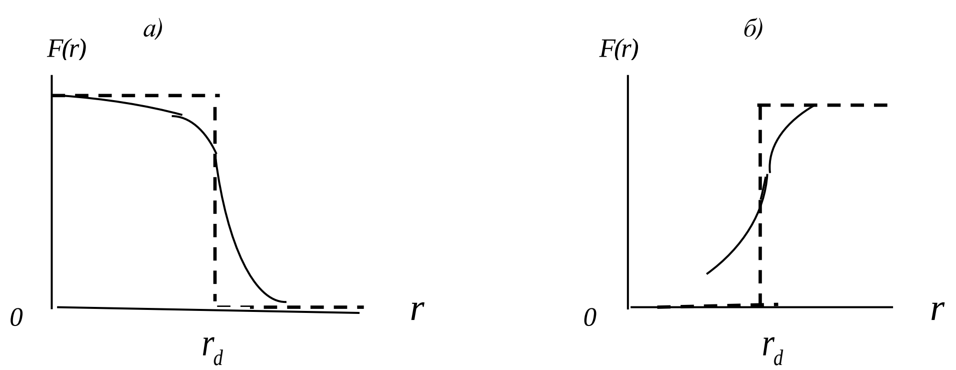


Рисунок 14 - Аппроксимация функции полезности порогового вида стороны, при любых значениях показателя исхода операции ниже (выше) порогового полезность оказывается очень высокой и соответствует достижению цели. Без большой погрешности функция полезности такого вида может быть аппроксимирована ступенькой

$$F(\bar{r}) = \begin{cases} 1, \ \bar{r} \subset R_d \\ \\ 0, \ \bar{r} \not\subset R_d \end{cases}$$

Оценим в общем виде эффективность решений для вероятностной операции с одноступенчатой функцией полезности на исходах:

$$U(\bar{x}_i) = \sum_{k=1}^{l} p(\bar{r}_k / \bar{x}_i) F(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^{l} p(\bar{r}_k / \bar{x}_i) = p(\bar{r} \subset R_d), \ i = \overline{1, m};$$

$$U(\bar{x}_i) = \int_{Rd} f(\bar{r} / \bar{x}_i) F(\bar{r}) d\bar{r} = \int_{Rd} f(\bar{r} / \bar{x}_i) d\bar{r} = p(\bar{r} \subset R_d), \ i = \overline{1, m}.$$

Полученное выражение для критерия эффективности определяет не что иное, как вероятность появления исхода операции со значением показателя, принадлежащим области допустимых значений R_d. Если операция не вероятностная, а детерминированная, значение этой вероятности будет равно либо нулю, либо единице.

Функция полезности, допускающая одноступенчатую аппроксимацию, соответствует операциям, целью которых является достижение вполне определенного результата. Данный результат может быть только или достигнут, или не достигнут (да или нет, все или ничего) - промежуточные результаты интереса не представляют.

Пример 1. Работа радиосети, предназначенной для передачи сигналов оповещения.. Нагрузка на радиосеть, как правило, низкая. Требуется, чтобы радиосеть была работоспособной в момент передачи сообщений. В качестве критерия эффективности можно выбрать коэффициент готовности.

Пример 2. Пеленгование источника радиоизлучений. В этой операции важно получить пеленги по источнику и определить его координаты. Критерием эффективности будет выступать вероятность пеленгования.

5. 2. Оценка эффективности решений при функции полезности монотонного вида

Функции полезности монотонного вида (рис. 17а, б) не имеют явно видимого скачка в значениях. Полезность тем выше (ниже), чем больше значение показателя исхода операции. Функция является монотонной и допускает просто линейную или кусочно-линейную аппроксимацию $F(\bar{r}) = a\bar{r} + b, a > 0$ (рисунок 15).

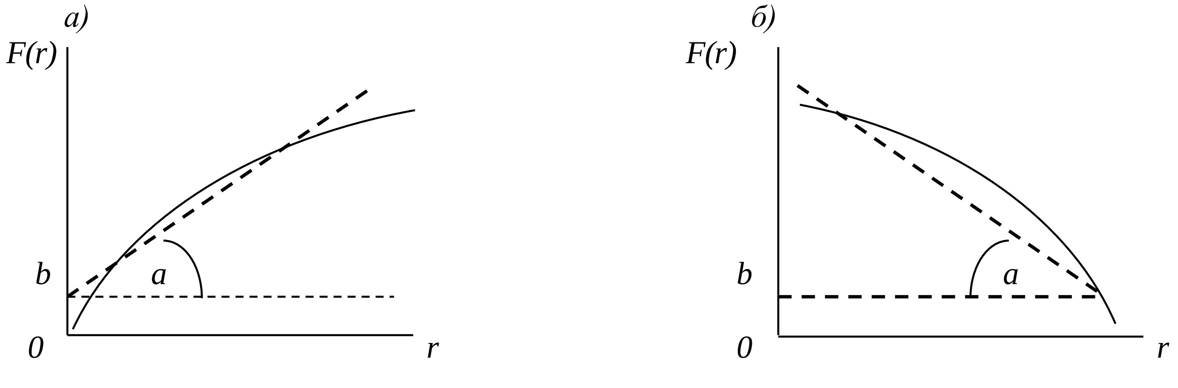


Рисунок 15 - Аппроксимация функции полезности монотонного вида

Определим, какой вид будет иметь выражение для оценки эффективности решений в операциях с линейной функцией полезности на исходах.

$$U(\bar{x}_i) = \sum_{k=1}^{l} p(\bar{r}_k/\bar{x}_i)F(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^{l} p(\bar{r}_k/\bar{x}_i)(a\bar{r}_k + b) = a\sum_{k=1}^{l} p(\bar{r}_k/\bar{x}_i)\bar{r}_k + b\sum_{k=1}^{l} p(\bar{r}_k/\bar{x}_i) =$$

$$= aM[\bar{r}\,] + b,\ i = \overline{1,m}\ ;$$

$$U(\bar{x}_i) = \int_{Rd} f(\bar{r}/\bar{x}_i)F(\bar{r})d\bar{r} = \int_{Rd} f(\bar{r}/\bar{x}_i)(a\bar{r}+b)d\bar{r} = a\int_{Rd} f(\bar{r}/\bar{x}_i)\bar{r}\,d\bar{r} + b\int_{Rd} f(\bar{r}/\bar{x}_i)d\bar{r} =$$

$$= aM[\bar{r}\,] + b,\ i = \overline{1,m}\ .$$

При сравнении решений важно знать не сами абсолютные значения оценок, а отношение предпочтения на решениях. Известно, что любое линейное преобразование числовых значений не меняет отношения между ними. Исходя из этого $aM[\bar{r}\,] + b \sim M[\bar{r}\,]$. Для показателей исхода операции, являющихся детерминированными величинами, $M[\bar{r}\,] = \bar{r}$.

Таким образом, при линейной функции полезности эффективность решения может быть определена через математическое ожидание непосредственно показателя исхода операции.

Монотонная функция полезности присуща операциям, направленным на достижение возможно большего результата (чем больше, тем лучше).

Пример 1. Проведение технического обслуживания средств связи на ремонтной базе. Эффективность вариантов организации обслуживания будет определяться математическим ожиданием числа обслуженных средств.

Пример 2. Работа вычислительного центра на учении. Для оценки эффективности решений на данную операцию может быть выбрано математическое ожидание числа вариантов решенных задач.

Рассмотренные типы операций весьма распространены в военной практике.

Итак, в операциях, которым в зависимости от характера соответствует либо пороговая, либо монотонная функция полезности, эффективность решений правомочно оценивать непосредственно по показателям исходов. Для детерминированных операций критерием эффективности будет служить сам показатель, для вероятностных - либо вероятность получения допустимого значения показателя (при пороговой функции полезности), либо математическое ожидание значения показателя (при линейной функции полезности).

Оценка эффективности решений с прямым использованием показателей исходов в других случаях может приводить к неправильному выбору. В этом легко убедиться на примере выполнения операции к заданному сроку. Как правило, в качестве критерия эффективности таких операций берется математическое ожидание времени отклонения от заданного срока $M[\Delta t]$, $\Delta t = |t - t_0|$ (рисунок 16). Если функция полезности симметрична относительно t_0 ,

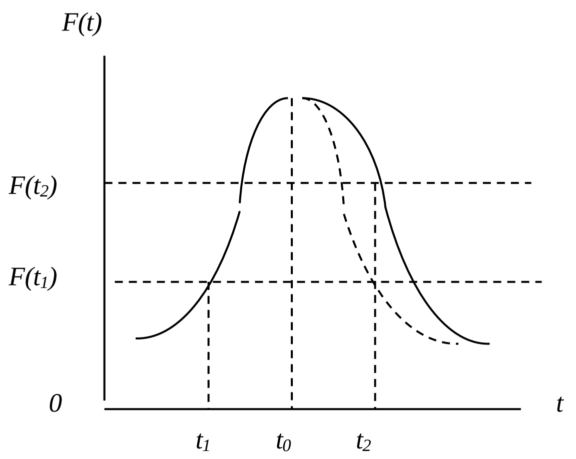


Рисунок 16 - Пример некорректной оценки эффективности решений прямо по показателю исхода операции то критерий правомочен, в противном случае – нет. Отношения предпочтительности решений, получаемые с использованием функции полезности и непосредственно по показателю исхода операции, не будут совпадать, так как значения функции полезности при $t < t_0$ и $t > t_0$ не равны. Поэтому переход к оценке эффективности решений без использования функции полезности должен всегда сопровождаться обоснованием.

5.3. Скаляризация векторных показателей исходов операций

Сложность оценки эффективности решений во многом зависит от того, каким показателем определяется показатель исхода операции – скалярным или векторным. При одном скалярном показателе решать вопросы оценки проще. Однако такие операции встречаются сравнительно редко. В большинстве операций определение исхода требует не одного, а нескольких скалярных показателей, образующих вектор $\bar{r}_k = (r_{1k}, r_{2k}, \ldots, r_{l\,m})$.

К подобным операциям относятся:

♦ операции, представляющие собой совместные действия различных объектов со своими исходами (например, функционирование системы связи как совокупности информационных направлений),

♦ операции, выполняемые за несколько этапов (например, функционирование направления связи по периодам ведения боевых действий),

♦ операции, характеризуемые несколькими важными свойствами (например, функционирование комплекса средств автоматизации, определяемое оперативностью преобразования данных, достоверностью результатов преобразования, безопасностью и др.).

Векторный показатель позволяет более полно оценивать исходы операции, а значит и решения. В то же время оценка и выбор решений непосредственно по векторному показателю затруднительны. Известно, что человек выполняет их с существенными погрешностями, которые проявляются как противоречия в оценках. Трудности связаны с тем, что скалярные показатели, образующие вектор, обычно имеют разный физический смысл, разные шкалы измерений, разную функциональную связь своих значений с полезностью исходов (прямую, обратную). Формальное сравнение исходов с такими показателями проводить нельзя. К тому же известные математические методы позволяют находить оптимальные решения лишь по скалярному критерию оптимальности. Чтобы обойти эти трудности, на практике производят искусственное сведение (свертывание) множества скалярных (частных) показателей $(r_{1k}, r_{2k}, \ldots, r_{tl})$ в один обобщенный скалярный показатель R_k или говоря иначе скаляризацию векторного показателя $\bar{r}_k$ (таблица 17).

Таблица 17 - К скаляризации векторного показателя

Номер исхода k	Значения частных показателей исхода $\bar{r}_k$				Значение обобщенного показателя исхода R_k
	r_{k1}	r_{k2}	…	r_{kt}	
1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1t}	R_1
2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2t}	R_2
…	…	…	…	…	
l	r_{ll}	r_{lt}	…	r_{lt}	R_l

Известен целый ряд способов скаляризации векторных показателей. К основным способам относятся:

- аддитивное взвешивание частных показателей,
- мултипликативное взвешивание частных показателей,
- выделение главного частного показателя (доминирование).

Аддитивное взвешивание частных показателей. Каждому показателю приписывается исходя из его важности некоторый весовой коэффициент $v_s (s = \overline{1,t}\,)$. В качестве обобщенного показателя берется взвешенная сумма частных показателей

$$R_k = \sum_{s=1}^{t} v_s r_{ks}.$$

Принципиально никаких ограничений на значения весовых коэффициентов $v_s (s = \overline{1,t}\,)$ не накладывается, но чаще их принято выбирать из условия $\sum_{s=1}^{t} v_s = 1$.

Для определения весов широко применяются экспертные процедуры. Простейшие из них основаны на ранжировании частных показателей. После расположения в порядке важности каждый частный показатель получает определенное значение ранга a_s : наиболее важный – максимальное, наименее важный – минимальное. Вес показателей находится с помощью одного из выражений:

$$v_s = \frac{a_s}{\sum_{s=1}^{t} a_s} \text{ или}$$

$$v_s = \frac{\prod_{s=i}^{t} a_s}{\sum_{s=1}^{t}\prod_{j=s}^{t} a_s}, \; s = \overline{1,t}\,.$$

Так, при значениях рангов $a_1 = 5$, $a_2 = 2$ и $a_3 = 1$ показателям r_1, r_2 и r_3 согласно первому выражению будут соответствовать веса $v_1 = \frac{5}{8}$, $v_2 = \frac{3}{8}$ и $v_3 = \frac{1}{8}$, согласно второму –

$$v_1 = \frac{10}{13}, \; v_2 = \frac{2}{13} \text{ и } v_3 = \frac{1}{13}.$$

Очевидно, суммироваться могут показатели лишь одной размерности. Если это требование не выполняется переходят от абсолютных значений показателей к относительным. Переход может иметь вид

$$r_{io} = \frac{r_i}{\max\limits_i r_i}, \; i = \overline{1,m}\,.$$

К аддитивному взвешиванию можно прибегнуть, например, при оценке распределения частот для систем связи. Частными показателями исходов в этой операции будут выступать коэффициенты относительной удовлетворенности каждой системы связи в частотах

$$r_i = \frac{q_i}{p_i}, \; i = \overline{1,m}\,,$$

где q_i - выделенное число частот для системы связи i,

p_i - потребное число частот для системы связи i.

Если учесть важность систем связи, обобщенный показатель запишется как

$$R = \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{q_i}{p_i}.$$

Недостатки аддитивного способа очевидны:

- теряется физический смысл обобщенного показателя,
- значение одного частного показателя может компенсироваться за счет других,
- с изменением условий операции веса не остаются постоянными,
- при определении весов допускается субъективизм.

Мультипликативное взвешивание частных показателей. При этом способе свертки обобщенный показатель исхода операции формируется в виде произведения частных показателей со своими весами

$$R=\prod_{i=1}^{m} v_i r_i .$$

Определение весовых коэффициентов производится так же, как и при формировании аддитивного показателя. Соответственно сохраняются и недостатки, связанные с взвешиванием частных показателей.

По сравнению с аддитивной мультипликативная свертка в определенной мере инвариантна к шкалам измерения свертываемых компонентов (в некоторых случаях обеспечивает получение результирующего показателя с физическим смыслом). Кроме того, она весьма чувствительна к значениям компонентов и не допускает нулевого значения хотя бы одного из них.

Выделение главного показателя (доминирование). Согласно этому способу за обобщенный показатель исходов операции принимается один из показателей, наиболее важный (доминирующий над остальными показателями) с точки зрения лица, оценивающего решение. Остальные показатели или просто отбрасываются, или в лучшем случае для них устанавливаются некоторые допустимые значения, которые расширяют перечень ограничений в модели операции. Например, работа направления связи часто оценивается лишь по времени передачи сообщений с заданной достоверностью.

Способ может применяться в случае ярко выраженной значимости (доминирования) одного из частных показателей. Доказано, что выбор на основе одного показателя правомочен лишь в случае, когда его вес не меньше суммы весов остальных показателей исхода операции. С учетом этого

$$R = r_j \,/\, v_j \geq \sum_{k=1}^{l} v_k \, , \; k \neq j.$$

Недостатки способа следующие:

- сводится на нет первоначальное стремление к более полному учету всех сторон исхода операции,

- нет четких рекомендаций по отбору показателей, которые отбрасываются и переводятся в ограничения, а также установлению для них допустимых значений.

Наряду с рассмотренными способами свертывания показателей могут применяться различные их модификации и комбинации. Для примера можно указать представление обобщенного показатели в виде дроби, в числителе которой размещается взвешенная сумма показателей, значения которых желательно увеличивать (скажем, потери войск противника), а в знаменателе - взвешенная сумма показателей, значения которых желательно уменьшать (потери своих войск).

При выборе того или иного способа свертки необходимо в первую очередь исходить из физической сущности рассматриваемой операции.

Заключение

Таким образом, в лекции рассмотрены вопросы: эффективности решения, функция полезности как основа количественной оценки эффективности решений, экспертные способы определения функции полезности, оценка эффективности решений на основе функции полезности, оценка эффективности решений по показателям исхода операции. Необходимо подготовиться к практическому занятию по данным вопросам.

Разработал:
доцент кафедры, доцент к.т.н. _________О. Пантюхин