

Практические занятия по дисциплине «Оптические измерительные системы»

Ход занятия.

В ходе проведения занятия необходимо рассмотреть ряд качественных задач и далее решить несколько расчетных задач по мере возрастания их сложности. Прежде чем приступить к решению задач, необходимо повторить основные понятия и определения.

Пример качественных задач:

1. Что такое когерентные и некогерентные электромагнитные волны?
2. Что представляют собой когерентные источники в опыте Юнга?
3. В максимумах интерференционной картины от двух когерентных источников освещенность в 4 раза превышает освещенность от одного. Нет ли здесь нарушения закона сохранения энергии?

Примеры решения расчетных задач:

Задача 1.

В опыте Юнга два когерентных источника S_1 и S_2 расположены на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга. На расстоянии $L = 1$ м от источника помещается экран. Найдите расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана (точка А), если источники посылают свет длины волны $\lambda = 600$ нм.

Решение:

Интерференционная картина на экране состоит из чередующихся темных и светлых полос, параллельных щелям S_1 и S_2 . Интерференционная картина симметрична относительно центральной полосы, проходящей через точку А (рис. 1). Центральная полоса светлая, она соответствует разности хода $\Delta = 0$.

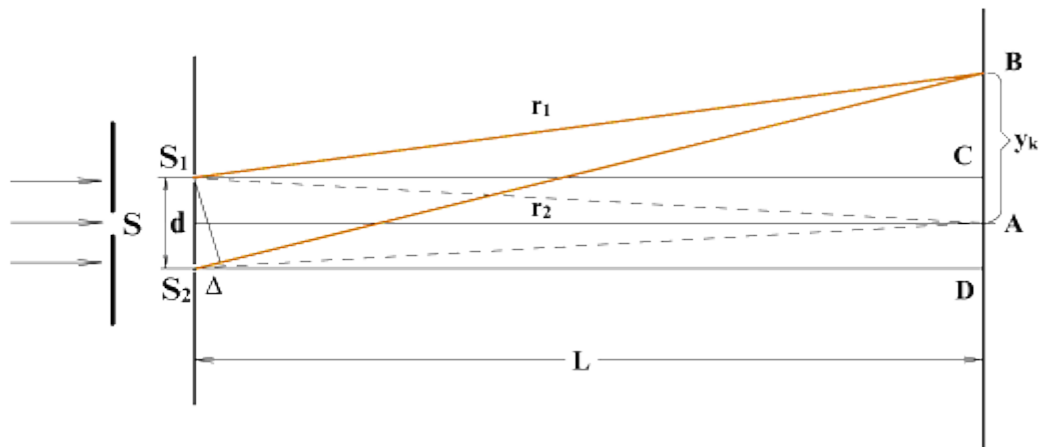


Рис. 1

В точках интерференционных максимумов оптическая разность хода

$$\Delta = k\lambda, \text{ где } k=0, 1, 2, \dots; (1)$$

Условие интерференционных минимумов имеет вид:

$$\Delta = k\lambda + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}; (2)$$

Предположим, что в точке В находится k-й максимум на расстоянии y_k от центральной полосы. Ему соответствует разность хода $\Delta = r_2 - r_1 = k\lambda$.

Из треугольника S_1BC видно, что $r_1^2 = L^2 + \left(y_k - \frac{d}{2}\right)^2$, а из треугольника S_2BD

видно, что $r_2^2 = L^2 + \left(y_k + \frac{d}{2}\right)^2$.

Из двух последних уравнений получим:

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = \left(y_k + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(y_k - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Учтём, что $r_2 \approx r_1 \approx L$; $r_2 - r_1 = \Delta$. Тогда $2L \cdot \Delta = 2y_k \cdot d$, откуда:

$$y_k = \frac{\Delta}{d} \cdot L; \quad (3)$$

Используя для максимумов условие (1), получим:

$$y_{k_{\max}} = \frac{k\lambda}{d} \cdot L;$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ соответствуют интерференционным максимумам, расположенным выше точки А, а максимумам, расположенным ниже точки А, соответствуют $k = -1, -2, -3, \dots$. Точке А соответствует центральный максимум ($k = 0$).

Используя условие интерференционных минимумов (2), можно найти их расстояния от центральной полосы по формуле (3):

$$y_{k_{\min}} = (2k+1) \frac{\lambda L}{2d};$$

Расстояние между соседними интерференционными максимумами (минимумами) называется шириной полосы и соответствует изменению k на единицу, то есть :

$$\Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{\lambda L}{d} = 0,6 \text{ мм};$$

Ширина темных и светлых полос одинакова.

Ответ:

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = 0,6 \text{ мм};$$

Задача 2.

В опыте Юнга интерференционная картина по мере удаления от середины размывается, и при $k = 4$ полосы исчезают. Почему?

Решение:

В опыте Юнга интерференционная картина представляет чередование интерференционных максимумов и минимумов в виде полос, параллельных щелям S_1 и S_2 . В центре интерференционной картины расположена светлая полоса ($k = 0$). По обе стороны от центральной полосы расположены максимумы $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ порядков интерференции. Разность хода между интерферирующими волнами по мере удаления от центральной полосы увеличивается. При этом по мере удаления от центра ухудшается видность и четкость интерференционной картины, полосы размываются и исчезают, по условию последний максимум наблюдается при $k = 4$. Исчезновение полос означает, что колебания, пришедшие от двух источников S_1 и S_2 , некогерентны. Пока их разность хода не превышала 4λ , они были когерентны. Следовательно, максимальная разность хода, при которой наблюдается интерференция, будет равна:

$$\ell_{\text{ког}} = m_{\text{max}} \lambda = 4 \lambda .$$

Величина $\ell_{\text{ког}}$ называется длиной когерентности. Если оптическая разность хода превышает длину когерентности, интерференционная картина не наблюдается.

Задача 3.

Покажите, что при преломлении в призме с малым преломляющим углом α и показателем преломления n луч отклоняется на угол $\delta \approx (n - 1)\alpha$ независимо от угла падения, если угол падения также мал. Призма находится в воздухе, $n_0 = 1$.

Решение:

По построению δ -внешний угол треугольника DCB (рис. 2), он равен сумме внутренних углов, не смежных с ним:

$$\delta = \varphi - \beta + \beta_1 - \varphi_1;$$

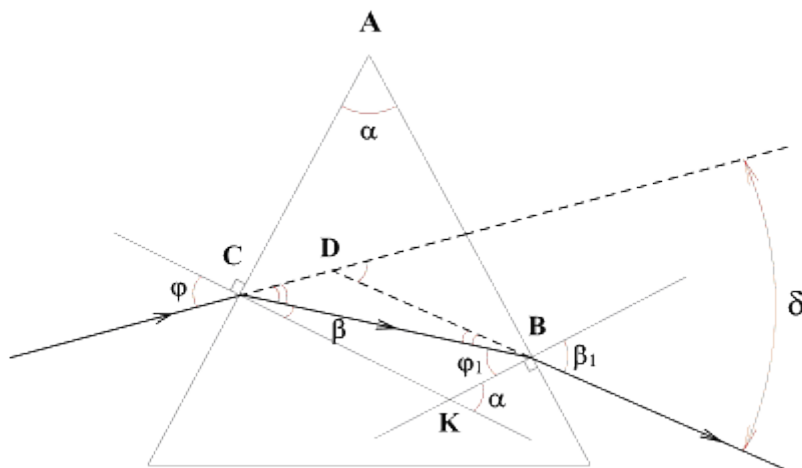


Рис. 2

Согласно закону преломления,

$$n = \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \varphi_1} .$$

По условию угол φ , а значит и β малы, то есть $\sin \varphi \approx \varphi$, $\sin \beta \approx \beta$, (выраженному в радианах), тогда $n\beta = \varphi$, $n\varphi_1 = \beta_1$. Подставив значения φ и β_1 в формулу для δ , получим :

$$\delta = \varphi - \beta + \beta_1 - \varphi_1 = n\beta - \beta + n\varphi_1 - \varphi_1 = (n - 1)(\beta + \varphi_1) .$$

Из треугольника СВК: $\beta + \varphi_1 = \alpha$ (α - внешний угол, равный преломляющему углу призмы по построению). Таким образом,

$$\delta \approx \alpha(n - 1).$$

Задача 4.

Найдите число полос интерференции N , получающихся с помощью бипризмы, если показатель преломления бипризмы $n = 1,5$, преломляющий угол $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ рад, длина волны источника $\lambda = 600$ нм. Расстояние от источника до бипризмы равно $a = 1$ м, расстояние от бипризмы до экрана равно $b = 4$ м.

Решение:

Лучи от источника S , падающие на бипризму, после преломления отклоняются от первоначального направления на угол $\delta \approx \alpha(n-1)$ (см. Задача 3). Продолжение этих лучей до точки пересечения дает изображение двух мнимых источников S_1 и S_2 (рис. 3). Они являются когерентными источниками, поэтому в области перекрытия AB когерентных волн, распространяющихся от этих источников, на экране наблюдается интерференционная картина в виде чередующихся темных и светлых полос, как и в опыте Юнга. Центральный максимум интерференционной картины ($k = 0$) проходит через точку O экрана. Максимумы более высоких порядков находятся на расстоянии y_k от центра (см. Задача 1).

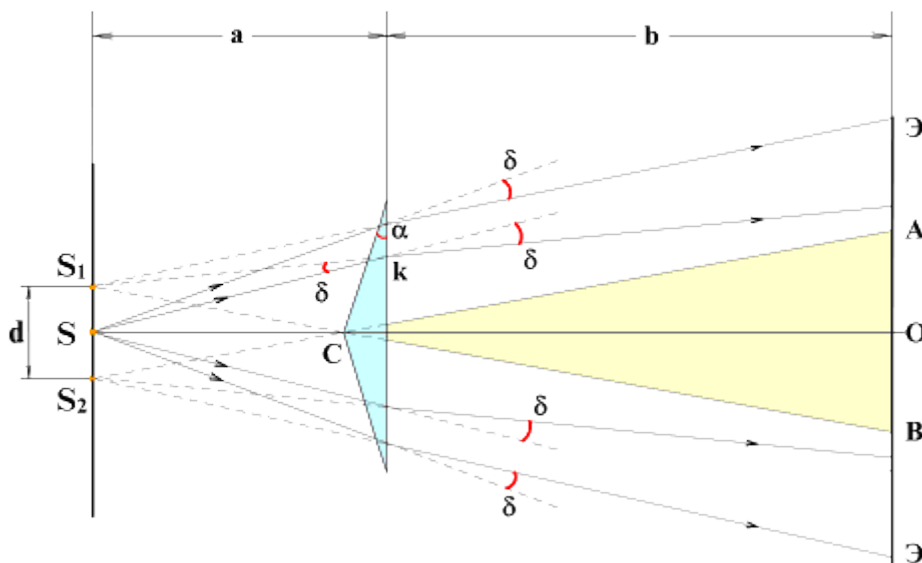


Рис. 3

Ширина полосы :

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d} .$$

Здесь $L = a + b$ расстояние от источников до экрана, d - расстояние между мнимыми источниками. Из треугольника SS_1K :

$$S_1S = d/2 \approx a \cdot \delta \approx a \cdot \alpha(n-1), \quad d \approx 2 \cdot a \cdot \alpha(n-1).$$

Тогда ширина интерференционной полосы:

$$\Delta y = \frac{\lambda \cdot (a+b)}{2a \cdot \alpha(n-1)}.$$

Число интерференционных полос в области интерференции AB равно:

$$N = \frac{AB}{\Delta y}.$$

Величину области перекрытия AB найдем из подобных треугольников CS_1S и COB :

$$AB = \frac{b \cdot d}{a} = 2b \cdot \alpha(n-1).$$

Число наблюдаемых полос интерференции будет равно:

$$N = \frac{4ab\alpha^2(n-1)^2}{\lambda(a+b)} \approx 5.$$

Ответ: $N = \frac{4ab\alpha^2(n-1)^2}{\lambda(a+b)} \approx 5.$

Задача 5.

В опыте Ллойда (рис. 4) световая волна, исходящая непосредственно из источника S (узкой щели), интерферирует с волной, отраженной от зеркала $З$. В результате на экране $Э$ образуется система интерференционных полос. Расстояние от источника до экрана $L = 100$ см. При некотором положении источника ширина интерференционной полосы на экране $\Delta y = 0,25$ мм, а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на $h = 0,6$ мм, ширина полос уменьшилась в $\eta = 1,5$ раза. Найдите длину λ световой волны.

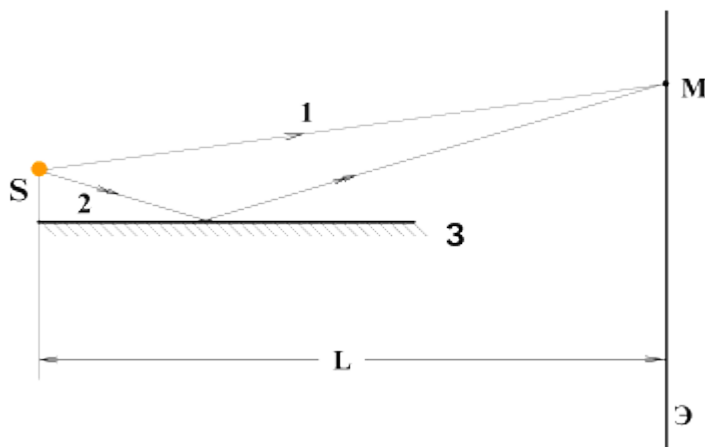


Рис. 4

Решение: В точке M интерферируют две когерентные волны 1 и 2, исходящие из источника S . По построению волну 2 можно считать исходящей из источника S' , являющегося мнимым изображением источника S в зеркале $З$. Они симметрично расположены относительно плоскости зеркала, обозначим расстояние между ними $SS' = d$. Если зеркало $З$ отодвинуть на h , то новое расстояние между $S_1S'_1$ равно $d_1 = d + 2h$ (рис. 5). Для определения длины волны λ используем выражение для ширины полосы из опыта Юнга, применив его для двух расстояний между источниками.

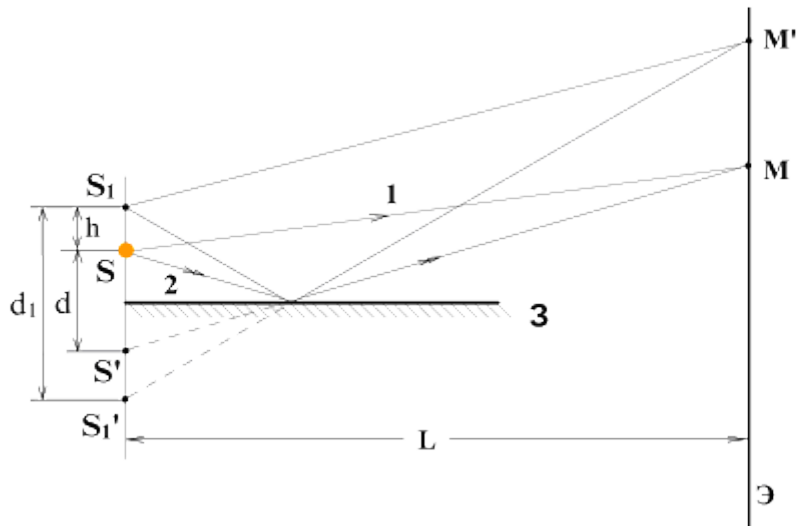


Рис.5

$$\Delta y = \lambda L / d; \quad (4).$$

$$\Delta y_1 = \frac{\lambda L}{d_1} = \frac{\lambda L}{d + 2h}; \quad (5).$$

По условию $\Delta y = \eta \Delta y_1$, тогда $\frac{\lambda L}{d} = \eta \frac{\lambda L}{d + 2h}$. Выразим отсюда

$$d = \frac{2h}{\eta - 1}; \quad (6)$$

Подстановка (6) в (4) дает:

$$\lambda = \frac{2h\Delta y}{L(\eta - 1)} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 600 \text{ нм};$$

Ответ: $\lambda = \frac{2h\Delta y}{L(\eta - 1)} = 600 \text{ нм}$.

Задача 6.

На рис. 6 показана схема интерферометра для измерения показателей преломления прозрачных веществ. Здесь S - узкая щель, освещаемая монохроматическим светом $\lambda = 589$ нм, K - коллиматор, дающий параллельный пучок лучей, 1 и 2 - две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых $\ell = 10,0$ см, D - диафрагма с двумя щелями S_1 и S_2 . Когда воздух в трубке 1 заменили аммиаком, то интерференционная картина на экране \mathcal{E} сместилась вверх на $N = 17$ полос. Показатель преломления воздуха $n = 1,000277$. Определите показатель преломления аммиака.

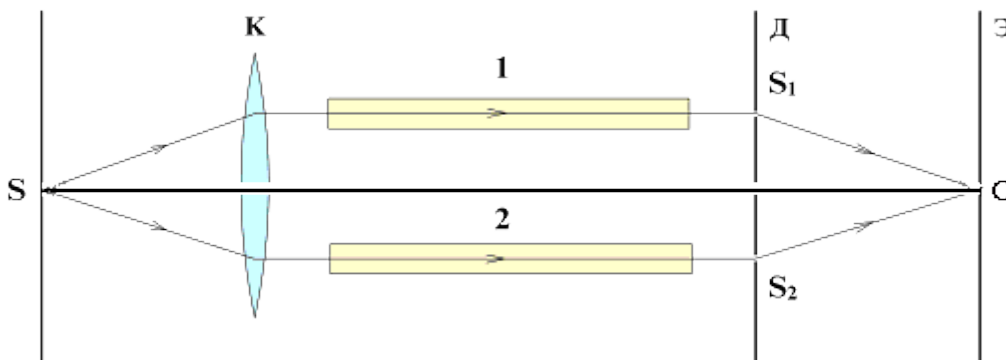


Рис. 6

Решение: Волны, распространяющиеся от щелей S_1 и S_2 , являются когерентными. На экране \mathcal{E} наблюдается интерференционная картина чередующихся темных и светлых полос. Центральная светлая полоса проходит через точку O и соответствует оптической разности хода $\Delta = 0$, если трубки 1 и 2 заполнены воздухом. Если в трубке 1 воздух заменить аммиаком, показатель преломления n_1 которого больше n , то центр интерференционной картины сместится вверх на N полос в точку, соответствующую разности хода, равной нулю, то есть

$$(n_1 - n)\ell = N\lambda.$$

Отсюда

$$n_1 = N \frac{\lambda}{\ell} + n = 1,000377.$$

Заметим, что интерференционный метод определения показателя преломления является высокоточным методом.

Ответ: $n_1 = N \frac{\lambda}{\ell} + n = 1,000377$.

Задача 7.

Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см разрезана пополам и половинки раздвинуты на расстояние $d = 0,5$ мм (билинза Бийе). Оцените число интерференционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии $D = 60$ см, если перед линзой имеется точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм, удаленный от нее на расстояние $a = 15$ см.

Решение:

Каждая из половинок билинзы Бийе дает изображение источника S . Верхняя половина дает изображение S_1 , нижняя дает изображение S_2 (рис. 7). Чтобы получить изображение S_1 , выберем два луча: первый луч SC после преломления в линзе пересечет фокальную плоскость PP в точке K , получившейся от пересечения с фокальной плоскостью побочной оптической оси O_1O_1 , параллельной лучу SC . Вторым луч SA проходит, не преломляясь, через точку A до пересечения с первым лучом в точке S_1 , являющейся изображением S в верхней половине билинзы Бийе. Аналогично построим изображение S_2 .

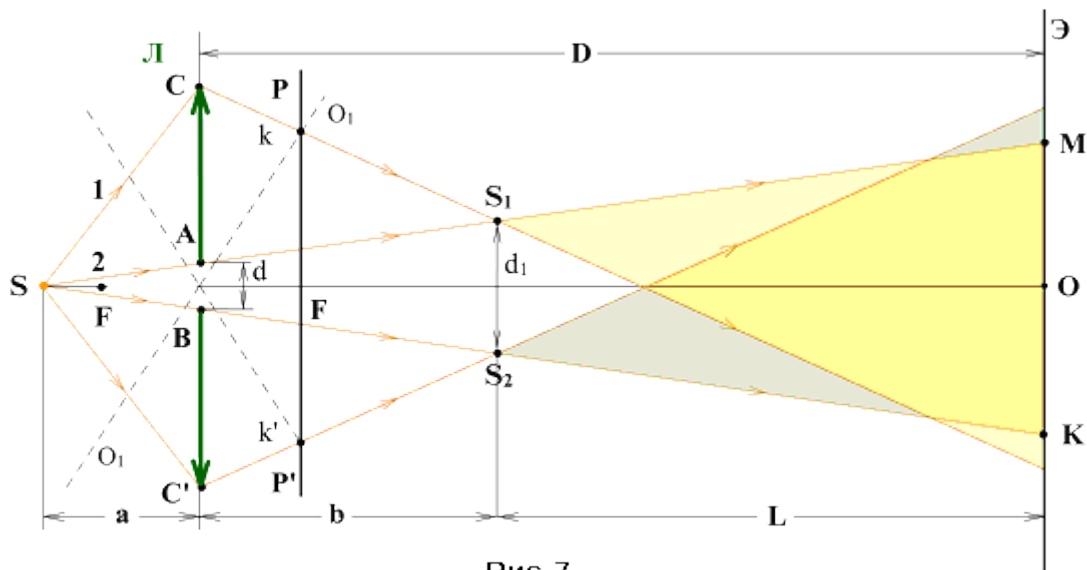


Рис. 7

Источники S_1 и S_2 когерентны, поэтому в области пересечения световых волн от этих источников на экране получим интерференционную картину как в опыте Юнга.

Число полос на экране будет равно :

$$N = \frac{MK}{\Delta y}$$

Ширина полосы $\Delta y = \frac{\lambda \cdot L}{d_1}$ (см. Задача 1)), где $L = D - b$. Величину b найдем из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, откуда $b = \frac{F \cdot a}{a - F}$, где a - расстояние от источника S до линзы, b - расстояние от линзы до изображения S_1 , F - фокусное расстояние линзы.

Из подобия треугольников SAB и SS_1S_2 получим:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{a+b}{a} = \frac{a + \frac{Fa}{a-F}}{a}$$

откуда $d_1 = \frac{d \cdot a}{a - F}$.

Подставляя d_1 и L в формулу для Δy , получим:

$$\Delta y = \frac{\lambda}{d \cdot a} (D \cdot a - D \cdot F - a \cdot F)$$

Треугольники SAB и SMK подобны, отсюда величина области перекрытия волн

$$MK = \frac{d}{a} \cdot (a + D)$$

Тогда число наблюдаемых полос

$$N = \frac{MK}{\Delta y} = \frac{d^2(a+D)}{\lambda(Da - DF - aF)} = 25$$

Ответ: $N = \frac{d^2(a+D)}{\lambda(Da - DF - aF)} = 25$.